1.2 Abstände und Winkel

Im Folgenden werde zunächst der n-dimensionale affine Standardraum $\mathbb{A}^n = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \tau)$ zugrunde gelegt und in der Regel auch $\mathbb{A}^n = \mathbb{R}^n$ gesetzt.

Im Vektorraum $\mathbb{R}^n$ stehen das ***(euklidische) Skalarprodukt***

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu y_\nu$$

und die ***euklidische Norm*** $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \bullet \mathbf{x}} = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right)^{1/2}$ zur Verfügung.

Satz: *Das Skalarprodukt erfüllt die* ***Ungleichung von Cauchy-Schwarz:***

$$|\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \text{ für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$ *linear abhängig sind.*

Beweis: 1) Ist $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$, so ist $|\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|^2$ und auch $\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|^2$.

2) Sind $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ linear unabhängig, so gilt für beliebiges $t \in \mathbb{R}: \mathbf{x} + t\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, also

$$\begin{aligned} 0 < \|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x} + t\mathbf{y}) \bullet (\mathbf{x} + t\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + 2t \cdot (\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}) + t^2 \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= \left(\frac{\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} + t \cdot \|\mathbf{y}\|\right)^2 + \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{(\mathbf{x} \bullet \mathbf{y})^2}{\|\mathbf{y}\|^2}. \end{aligned}$$

Wählt man $t := -(\mathbf{x} \bullet \mathbf{y})/\|\mathbf{y}\|^2$, so erhält man die Ungleichung $(\mathbf{x} \bullet \mathbf{y})^2 < \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2$.

■

Definition

Sind $P, Q \in \mathbb{A}^n$ zwei Punkte und $\mathbf{v} := \overrightarrow{OP}$ und $\mathbf{w} := \overrightarrow{OQ}$ die zugehörigen „Ortsvektoren“, so heißt

$$d(P, Q) := \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|$$

der ***Abstand*** von P und Q. Die ***Länge*** einer Strecke $\overline{PQ}$ ist der Abstand der Endpunkte P und Q.

Satz: *Der Abstand von Punkten in* $\mathbb{A}^n$ *hat die Eigenschaften einer* ***Metrik:***

1. *Es ist stets* $d(P, Q) \ge 0$ *und* $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$.
2. *Für alle Punkte* P, Q *ist* $d(P, Q) = d(Q, P)$.
3. *Es gilt die Dreiecksungleichung: Bei drei Punkten* P, Q, R *ist*

$$d(P, Q) \le d(P, R) + d(R, Q).$$

Wenn R *auf der Strecke zwischen* P *und* Q *liegt, tritt Gleichheit auf.*

Beweis: 1) Es ist $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ für jeden Vektor $\mathbf{x}$, und es gilt $\|\mathbf{x}\| = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist. Also ist $\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{w} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \iff \mathbf{w} = \mathbf{v}$.

2) Es ist $\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$.

3) Unter Verwendung der Ungleichung von Cauchy-Schwarz folgt:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 &= \big|\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + 2\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}\big| \;\leq\; \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\| \\ &= \big(\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|\big)^2, \text{ also } \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|. \end{aligned}$$

Ist $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{w} = \overrightarrow{OQ}$ und $\mathbf{z} = \overrightarrow{OR}$, so ist

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| = \|(\mathbf{w} - \mathbf{z}) + (\mathbf{z} - \mathbf{v})\| \leq \|\mathbf{w} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{v}\|.$$

Liegt $\mathbf{z}$ zwischen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$, so gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t \leq 1$, so dass $\mathbf{z} = \mathbf{v} + t(\mathbf{w} - \mathbf{v})$ ist. Dann ist auch $0 \leq 1 - t \leq 1$, sowie

$$\mathbf{z} - \mathbf{v} = t(\mathbf{w} - \mathbf{v}) \quad \text{und} \quad \mathbf{w} - \mathbf{z} = (1-t)(\mathbf{w} - \mathbf{v}).$$

Daraus folgt: $\|\mathbf{w} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{v}\| = (1-t)\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| + t\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|$. ∎

Definition

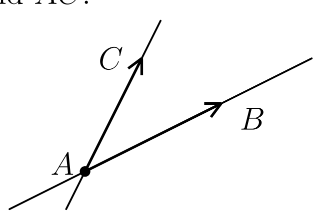
Sind $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ zwei linear unabhängige Vektoren, so ist $\Big|\dfrac{\mathbf{x}\bullet\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|}\Big| < 1$.

Es gibt also eine Zahl $\alpha \in (0, \pi)$ mit $\mathbf{x}\bullet\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|\cdot\cos\alpha$.

Diese Zahl α nennt man den ***Winkel*** zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$, und man bezeichnet diesen Winkel mit dem Symbol $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Winkel werden mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet: α, β, γ, ...

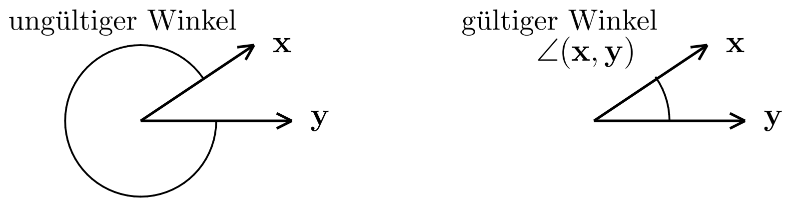
In der euklidischen Ebene $\mathbb{A}^2$ versteht man unter einem Winkel $\angle BAC$ die Vereinigung der Strahlen $\overset{\rightharpoonup}{AB}$ und $\overset{\rightharpoonup}{AC}$.



In Vektorschreibweise ist der Winkel die Vereinigung der Strahlen $\mathbb{R}_+\mathbf{x}$ und $\mathbb{R}_+\mathbf{y}$ (mit $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$, $\mathbf{x} = \overrightarrow{AB}$ und $\mathbf{y} = \overrightarrow{AC}$).

Die beiden Strahlen nennt man die ***Schenkel*** des Winkels, den Punkt A den ***Scheitelpunkt***.

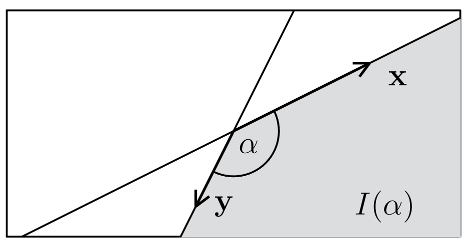
Es gibt nun eine kleine Diskrepanz zwischen den beiden Winkeldefinitionen. Die Zahl $\alpha = \arccos\Big(\mathbf{x}\bullet\mathbf{y}/\big(\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|\big)\Big)$ ist ein Maß für den Winkel, und sie nimmt nur Werte im offenen Intervall $(0, \pi)$ an (weil $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ linear unabhängig sind). Im Falle $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ kann man natürlich $\alpha := 0$ setzen, und im Falle $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$ dann $\alpha := \pi$. Doch wo bleiben die Winkel zwischen π und 2π ? Bei der arccos-Definition kommen sie nicht vor, bei der Vereinigung von zwei Strahlen kann man sie aber nicht von vornherein ausschließen. Wie findet man den richtigen Winkel?



Tatsächlich zerteilen die von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ aufgespannten Geraden die Ebene in vier Gebiete. Die Strahlen $\mathbb{R}_+\mathbf{x}$ und $\mathbb{R}_+\mathbf{y}$ begrenzen genau eines der Teilgebiete, nämlich

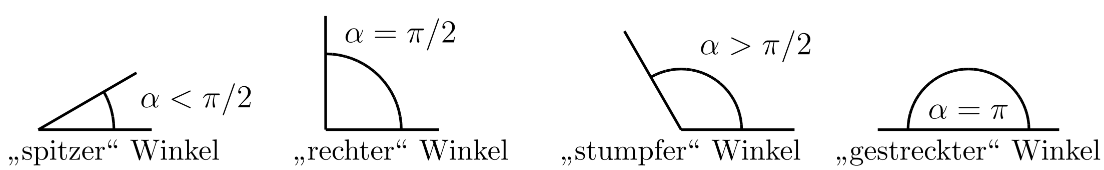
$$I(\alpha) := \{\mathbf{x} = s\mathbf{x} + t\mathbf{y} \,:\, s, t > 0\}.$$

Man nennt dieses Gebiet das ***Innere*** von α.



Zu dem von $\mathbb{R}_+\mathbf{x}$ und $\mathbb{R}_+\mathbf{y}$ begrenzten Gebiet $I(\alpha)$ gehört das Winkelmaß $\alpha = \arccos\big(\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} / (\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|)\big)$. Auf diesem Wege werden tatsächlich Winkel $> \pi$ ausgeschlossen.

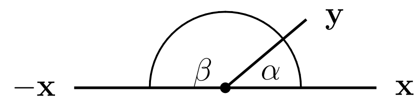
Man verwendet folgende Sprechweisen:



Es folgen nun ein paar bekannte Aussagen über Winkel.

Satz

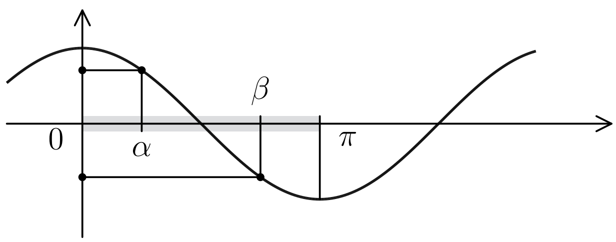
Nebenwinkel *ergänzen sich zu* $180°$ *:*



Beweis: Die Umrechnung zwischen Winkeln im Grad-Maß und im Bogenmaß darf als bekannt vorausgesetzt werden. $180°$ entspricht im Bogenmaß natürlich der Zahl π.

Ist $\alpha = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, so ist $\beta = \angle(\mathbf{y}, -\mathbf{x})$ der Nebenwinkel. Dazu müsste man natürlich erst mal definieren, was Nebenwinkel sind. Aus der Skizze ist das sicher jedem klar, aber man kann es auch ohne Skizze beschreiben: Wenn O zwischen den Punkten P und Q liegt, der Punkt R aber nicht auf der Geraden PQ, dann sind $\angle(POR)$ und $\angle(ROQ)$ Nebenwinkel. Die Vektoren $-\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PO}$ und $\overrightarrow{OQ}$ zeigen in diesem Fall in die gleiche Richtung.

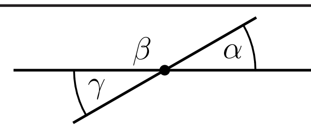
Offensichtlich ist $\cos\beta = (-\mathbf{x} \bullet \mathbf{y})/(\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|) = -\cos\alpha$. Es gibt dann ein $\delta > 0$, so dass $\alpha = \pi/2 - \delta$ und $\beta = \pi/2 + \delta$ ist (oder umgekehrt), wie man dem Verhalten der Cosinus-Funktion zwischen 0 und π entnimmt:



Daraus folgt: $\alpha + \beta = \pi$. ∎

Satz

Scheitelwinkel *sind gleich:*

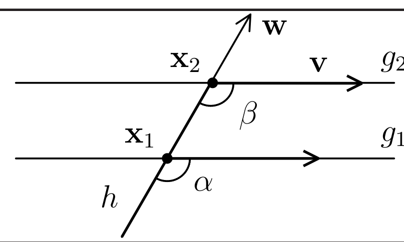


Beweis: Es ist $\alpha + \beta = \pi$ und $\beta + \gamma = \pi$, also $\gamma = \pi - \beta = \pi - (\pi - \alpha) = \alpha$. ∎

Von besonderer Bedeutung sind die Beziehungen zwischen Winkel an Parallelen.

Regel 1:

F- *oder* ***Stufenwinkel*** *sind gleich:*



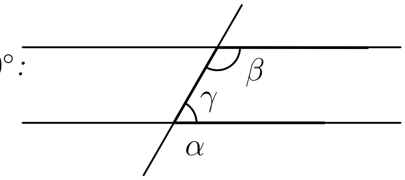
Beweis: Es gibt Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in h$ und Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w}$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} g_1 &= \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{v} \,:\, t \in \mathbb{R}\}, \\ g_2 &= \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 + t\mathbf{v} \,:\, t \in \mathbb{R}\} \\ \text{und} \quad h &= \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{w} \,:\, t \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 + t\mathbf{w} \,:\, t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Es ist $\cos\alpha = (-\mathbf{w} \bullet \mathbf{v})/(\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|) = \cos\beta$. Weil der Cosinus auf $[0, \pi]$ injektiv ist, ist $\alpha = \beta$. ∎

Regel 2

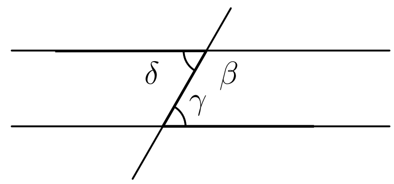
E- *oder* ***Ergänzungswinkel*** *ergänzen sich zu* $180°$*:*



Beweis: Die Winkel α und γ sind Nebenwinkel, und es ist $\alpha = \beta$ (Regel 1). Deshalb ist $\beta + \gamma = \beta + (\pi - \alpha) = \pi$. ∎

Regel 3

Z- *oder* ***Wechselwinkel*** *sind gleich:*



Beweis: Die Winkel β und δ sind Nebenwinkel, und es ist $\beta + \gamma = \pi$ (Regel 2). Deshalb ist $\delta = \pi - \beta = \pi - (\pi - \gamma) = \gamma$. ∎