1 Grundlagen der Schulgeometrie

1.1 Der affine Raum

Ist V ein reeller Vektorraum und $\mathbf{v} \in V$ ein festes Element, so nennt man die Abbildung $T_{\mathbf{v}} : V \to V$ mit $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \mathbf{v}$ eine ***Translation***.

Ist M eine beliebige Menge, so bezeichnet man eine bijektive Abbildung $f : M \to M$ als ***Permutation*** von M. Die Menge $S(M)$ aller Permutationen von M bildet eine Gruppe. Man bezeichnet sie als ***symmetrische Gruppe*** von M.

Definition
Ein ***(reeller) affiner Raum*** ist ein Tripel $(\mathbb{A}, V, \tau)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\mathbb{A}$ ist eine nicht leere Menge. Die Elemente von $\mathbb{A}$ nennt man ***Punkte***, sie werden mit Großbuchstaben bezeichnet: A, B, C, D, ...

2. V ist ein reeller Vektorraum. Er wird als ***Vektorraum der Translationen*** von $\mathbb{A}$ bezeichnet.

3. $\tau : V \to S(\mathbb{A})$ (mit $\mathbf{v} \mapsto \tau_{\mathbf{v}}$) ist ein Gruppenhomomorphismus. Ist $\tau_{\mathbf{v}}(P) = Q$, so schreibt man $Q = P + \mathbf{v}$.

4. Zu zwei Punkten P und Q aus $\mathbb{A}$ gibt es genau ein $\mathbf{v} \in V$ mit $\tau_{\mathbf{v}}(P) = Q$. Man schreibt dann $\mathbf{v} = Q - P$ oder $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$.

Dass τ ein Homomorphismus ist, bedeutet:

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbf{0}} &= \mathrm{id}_{\mathbb{A}}, \text{ also } P + \mathbf{0} = P, \\ \text{sowie} \quad \tau_{\mathbf{w}} \circ \tau_{\mathbf{v}} &= \tau_{\mathbf{v}+\mathbf{w}}, \text{ also } (P + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = P + (\mathbf{v} + \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Ist $Q = P+\mathbf{v}$ und $R = Q+\mathbf{w}$, so ist $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ bzw. $(Q-P)+(R-Q) = R-P$.

Insbesondere ist $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$, also $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$.

Die Abbildung $\tau : V \to S(\mathbb{A})$ ist injektiv. Ist nämlich $\tau(\mathbf{v}) = \tau(\mathbf{w})$ und $P \in \mathbb{A}$, sowie $Q := \tau_{\mathbf{v}}(P) = \tau_{\mathbf{w}}(P)$, so muss $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ sein, nach Regel (4). Die Bild-Elemente $\tau_{\mathbf{v}} = \tau(\mathbf{v}) \in S(\mathbb{A})$ nennt man ***Translationen***.

Satz: *Wählt man in $\mathbb{A}$ einen festen Punkt O, so ist die Abbildung $j : V \to \mathbb{A}$ mit $j(\mathbf{v}) := \tau_{\mathbf{v}}(O) = O + \mathbf{v}$ bijektiv.*

Beweis: 1) Ist $P \in \mathbb{A}$, so gibt es nach Regel (4) genau ein $\mathbf{v}$ mit $\tau_{\mathbf{v}}(O) = P$, also $j(\mathbf{v}) = P$. Damit ist j surjektiv.

2) Nun seien $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ mit $j(\mathbf{v}) = j(\mathbf{w})$ gegeben. Dann ist $\tau_{\mathbf{v}}(O) = \tau_{\mathbf{w}}(O)$, und nach Regel (4) muss $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ sein. Also ist j auch injektiv. ∎

Natürlich hängt j vom gewählten Punkt O ab.

Unter einer ***(affinen) Geraden*** im Vektorraum V versteht man bekanntlich eine Menge der Gestalt

$$L = \{\mathbf{x} \in V \,:\, \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} \text{ für ein } t \in \mathbb{R}\} \text{ (mit einem festen Vektor } \mathbf{v} \neq \mathbf{0}).$$

Der „Aufpunkt“ $\mathbf{x}_0$ kann beliebig in L gewählt werden. Ist $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ oder ein Vielfaches von $\mathbf{v}$, so ist $L = \mathbb{R}\mathbf{v} = \{t\mathbf{v} \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ ein (1-dimensionaler) **Untervektorraum** von V.

Definition

Eine Teilmenge $g \subset \mathbb{A}$ heißt eine ***Gerade***, falls es einen 1-dimensionalen Untervektorraum $L_0 \subset V$ und einen Punkt $P_0 \in \mathbb{A}$ gibt, so dass gilt:

$$g = \{P = P_0 + \mathbf{v} \,:\, \mathbf{v} \in L_0\} = \{P \in \mathbb{A} \,:\, \overrightarrow{P_0P} \in L_0\}.$$

Geraden in $\mathbb{A}$ werden mit Kleinbuchstaben bezeichnet: g, h, l, m, n, ...

Satz: *Eine Teilmenge $g \subset \mathbb{A}$ ist genau dann eine* ***Gerade****, wenn es eine* ***affine*** *Gerade $L \subset V$ gibt, so dass $j(L) = g$ ist.*

Beweis: 1) Sei $g \subset \mathbb{A}$ eine Gerade. Dann gibt es einen Punkt $P_0 \in \mathbb{A}$ und einen 1-dimensionalen Untervektorraum $L_0 \subset V$, so dass $g = \{P \in \mathbb{A} \,:\, \overrightarrow{P_0P} \in L_0\}$ ist. Nun setze man $\mathbf{x}_0 := \overrightarrow{OP_0}$ und $L := \{\mathbf{x} \in V \,:\, \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v} \text{ mit } \mathbf{v} \in L_0\}$. Es soll gezeigt werden, dass $j(L) = g$ ist

Ist $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v} \in L$ (mit $\mathbf{v} \in L_0$), so liegt

$$j(\mathbf{x}) = O + (\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) = (O + \mathbf{x}_0) + \mathbf{v} = (O + \overrightarrow{OP_0}) + \mathbf{v} = P_0 + \mathbf{v}$$

in g. Umgekehrt kann jedes Element $P = P_0 + \mathbf{v} \in g$ in der Form $P = O + (\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) \in j(L)$ geschrieben werden.

2) Sei umgekehrt $g \subset \mathbb{A}$ eine Teilmenge und $L \subset V$ eine affine Gerade mit $j(L) = g$. Dann gibt es ein Element $\mathbf{x}_0 \in V$ und einen 1-dimensionalen Untervektorraum $L_0 \subset V$, so dass $L = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v} \,:\, \mathbf{v} \in L_0\}$ ist. Setzt man $P_0 := O + \mathbf{x}_0$, so folgt mit ähnlichen Zwischenschritten wie in (1), dass $g = \{P = P_0 + \mathbf{v} \,:\, \mathbf{v} \in L_0\}$ und damit eine Gerade in $\mathbb{A}$ ist. ∎

Unter dem ***affinen Standard-Raum*** versteht man den affinen Raum

$$\mathbb{A}^n = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \tau)$$

mit $\tau(\mathbf{v}) = T_{\mathbf{v}}$. Hier wird also der $\mathbb{R}^n$ als affiner Raum und zugleich als zugehöriger Vektorraum der Translationen aufgefasst. Man bezeichnet nicht nur das Tripel als affinen Raum $\mathbb{A}^n$, sondern der Einfachheit halber auch die **Menge** $\mathbb{R}^n$.

Im Falle $n = 2$ erhält man die affine Standard-Ebene, die man manchmal auch als ***euklidische Ebene*** bezeichnet. Zeichnet man im $\mathbb{R}^2$ den Ursprung $O = (0,0)$ als besonderen Punkt aus, so kann jeder Punkt $X = (x_1, x_2)$ auch als Vektor $\overrightarrow{OX}$ aufgefasst werden, und umgekehrt. Man braucht deshalb im $\mathbb{R}^2$ nicht zwischen Punkten und Vektoren zu unterscheiden.

Zwei Geraden $g, g' \subset \mathbb{A}^2$ heißen ***parallel***, falls $g \cap g' = \varnothing$ ist. Die Parallelität der entsprechenden affinen Geraden

$$L = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{v} \,:\, t \in \mathbb{R}\} \quad \text{und} \quad L' = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 + s\mathbf{w} \,:\, s \in \mathbb{R}\}$$

im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ kann man auch zunächst dadurch charakterisieren, dass $L \cap L' = \varnothing$ ist. Im Vektorraum gibt es aber noch eine andere Charakterisierung:

L und L' sind genau dann parallel, wenn die Richtungsvektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ linear ahängig sind, denn andernfalls wäre $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$, und man könnte $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ als Linearkombination $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = s\mathbf{v} + t\mathbf{w}$ darstellen, und $\mathbf{x}_1 - s\mathbf{v} = \mathbf{x}_2 + t\mathbf{w}$ wäre ein Punkt in $L \cap L'$.

Satz: *Durch je zwei Punkte $P \neq Q$ in $\mathbb{A}^2$ geht genau eine Gerade.*

Beweis: 1) Wir rechnen im Vektorraum. Sind $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^2$ zwei verschiedene Vektoren, so ist

$$L := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \exists\, t \in \mathbb{R}, \text{ so dass } \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t \cdot \big(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\big)\}$$

eine Gerade. Mit $t = 0$ erhält man den Punkt $\mathbf{x}_1$, mit $t = 1$ den Punkt $\mathbf{x}_2$. Also geht L durch die beiden gegebenen Punkte.

2) Seien L_1 und L_2 zwei Geraden durch $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$. Dann gibt es Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \exists\, t \in \mathbb{R} \text{ mit } \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{v}\} \\ \text{und} \quad L_2 &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \exists\, s \in \mathbb{R} \text{ mit } \mathbf{y} = \mathbf{x}_1 + s\mathbf{w}\}. \end{aligned}$$

Weil $\mathbf{x}_2$ in $L_1 \cap L_2$ liegt, gibt es reelle Zahlen t_0, s_0 mit $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + t_0\mathbf{v}$ und $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + s_0\mathbf{w}$. Also ist $t_0\mathbf{v} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = s_0\mathbf{w}$. Weil $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ ist, ist $t_0 \neq 0$ und $s_0 \neq 0$. Daraus folgt, dass $\mathbf{w} = (t_0/s_0)\mathbf{v}$ ist, und das bedeutet, dass $L_1 = L_2$ ist. ∎

Die Gerade durch die Punkte P und Q in $\mathbb{A}^2$ wird mit PQ bezeichnet. Es ist

$$PQ = \{X = P + t(Q - P) \,:\, t \in \mathbb{R}\} = \{X = P + t \cdot \overrightarrow{PQ} \,:\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Definition

Die Menge

$$\overline{PQ} := \{X = P + t \cdot \overrightarrow{PQ} \,:\, 0 \leq t \leq 1\}$$

heißt die ***(Verbindungs-) Strecke*** zwischen P und Q.

Die Menge

$$\vec{PQ} := \{X = P + t \cdot \overrightarrow{PQ} \,:\, t \geq 0\}$$

heißt der ***Strahl*** von P in Richtung Q.

Offensichtlich sind die Strecke $\overline{PQ}$ und der Strahl $\vec{PQ}$ Teilmengen der Gerade PQ.

Satz: *Sei L eine Gerade und $\mathbf{x}_1 \notin L$. Dann gibt es genau eine Gerade L_1 durch $\mathbf{x}_1$, die parallel zu L ist.*

Beweis: Sei $L = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} \,:\, t \in \mathbb{R}\}$. Dann setze man

$$L_1 := \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{v} \,:\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Wäre $\mathbf{y}$ ein Punkt in $L \cap L_1$, so gäbe es reelle Zahlen t_0, t_1, so dass $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + t_0\mathbf{v} = \mathbf{x}_1 + t_1\mathbf{v}$ ist, also $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + (t_0 - t_1)\mathbf{v} \in L$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist L_1 parallel zu L (und enthält $\mathbf{x}_1$).

Nun sei $L_2 = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + s\mathbf{w} \,:\, s \in \mathbb{R}\}$ eine zweite Gerade durch $\mathbf{x}_1$. Sind $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ linear abängig, so ist $L_2 = L_1$. Sind sie dagegen linear unabhängig, so gibt es reelle Zahlen a und b, so dass $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$ ist, also $\mathbf{x}_1 + (-b)\mathbf{w} = \mathbf{x}_0 + a\mathbf{v}$. Das bedeutet, dass sich L und L_2 schneiden. Also ist die Parallele zu L durch $\mathbf{x}_1$ eindeutig bestimmt. ∎