§ 4 Komplexe Mannigfaltigkeiten

Sei X ein hausdorffscher topologischer Raum. Wir halten X für zu groß, wenn es in X eine diskrete Teilmenge mit der Kardinalität des Kontinuums gibt. Deshalb fordern wir, dass X eine abzählbare Basis für die Topologie besitzt. Man sagt dann auch, dass X das *zweite Abzählbarkeitsaxiom* erfüllt. Offensichtlich trifft das auf den $\mathbb{C}^n$ zu. Ein metrischer Raum besitzt genau dann eine abzählbare Basis, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.

Ein Hausdorff-Raum X heißt *lokal-kompakt*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt. Ist X kompakt, so ist X natürlich auch lokal-kompakt. Ist X umgekehrt lokal-kompakt, aber nicht kompakt, so kann X durch Hinzufügen eines einzigen Punktes kompakt gemacht werden (Alexandrovs „Ein-Punkt-Kompaktifizierung"). Jeder Hausdorff-Raum, der lokal homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ ist, ist lokal-kompakt.

Definition. Eine offene Überdeckung $\mathcal{V} = \{V_\nu \,:\, \nu \in N\}$ eines Hausdorff-Raumes X heißt eine *Verfeinerung* der Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_\iota \,:\, \iota \in I\}$ von X, falls es eine Abbildung $\tau : N \to I$ (die *Verfeinerungsabbildung* gibt, mit

$$V_\nu \subset U_{\tau(\nu)} \text{ für jedes } \nu \in N.$$

Die Verfeinerungsabbildung ist nicht eindeutig bestimmt, aber wir können eine ein für allemal festhalten.

Eine Überdeckung $\mathcal{V} = \{V_\nu \,:\, \nu \in N\}$ heißt *lokal-endlich*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U = U(x)$ besitzt, so dass U nur endlich viele V_ν trifft.

Definition. Ein Hausdorff-Raum X heißt *parakompakt*, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine lokal-endliche offene Verfeinerung $\mathcal{V}$ gibt.

Jeder kompakte Raum ist parakompakt. Und jeder lokal-kompakte Raum mit abzählbarer Basis ist ebenfalls parakompakt.

Für den Augenblick nehmen wir nur an, dass X ein Hausdorff-Raum ist.

Definition. Ein n-dimensionales *komplexes Koordinatensystem* (U, φ) für X besteht aus einer offenen Menge $U \subset X$ und einer topologischen Abbildung φ von U auf eine offene Menge $B \subset \mathbb{C}^n$.

Ist $p \in X$ ein Punkt, dann nennt man jedes Koordinatensystem (U, φ) für X mit $p \in U$ ein *Koordinatensystem in p*. Die Einträge z_i in $\mathbf{z} = \varphi(p)$ nennt man die *komplexen Koordinaten* von p (bezüglich (U, φ)).

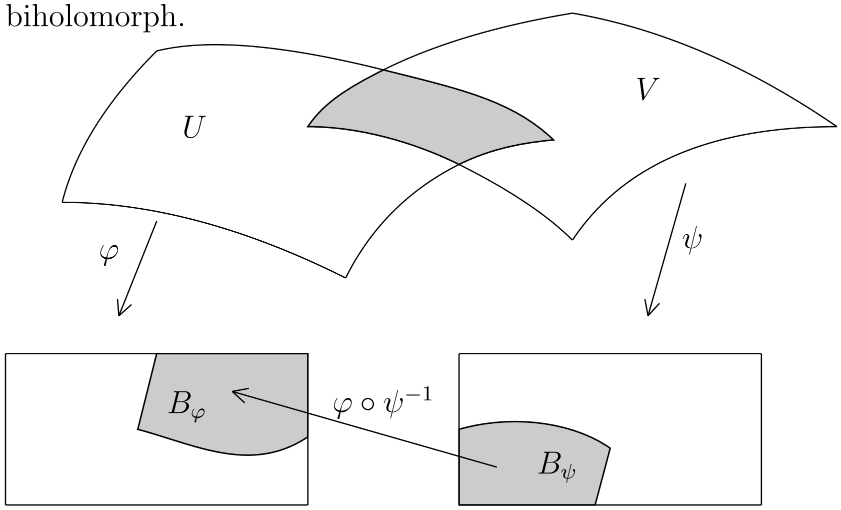
Ist f eine komplexe Funktion auf U, so können wir f als Funktion der komplexen Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ auffassen, durch

$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto f \circ \varphi^{-1}(z_1, \ldots, z_n).$$

Zwei (n-dimensionale) komplexe Koordinatensysteme (U,φ) und (V,ψ) für X nennt man *(holomorph) verträglich*, falls entweder $U \cap V = \varnothing$ ist, oder

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

biholomorph.



Die Mengen $B_\psi := \psi(U \cap V)$ und $B_\varphi := \varphi(U \cap V)$ sind offen im $\mathbb{C}^n$. Sind z_i (bzw. w_j) die komplexen Koordinaten bezüglich φ (bzw. ψ), dann bedeutet die holomorphe Verträglichkeit der Koordinatensysteme, dass die Funktionen $z_i = z_i(w_1, \ldots, w_n)$ und $w_j = w_j(z_1, \ldots, z_n)$ holomorph sind.

Eine Überdeckung von X durch paarweise verträgliche n-dimensionale komplexe Koordinatensysteme nennt man einen n-dimensionalen *komplexen Atlas* für X. Zwei solche Atlanten $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ heißen *äquivalent*, falls je zwei Koordinatensysteme $(U,\varphi) \in \mathcal{A}_1$ und $(V,\psi) \in \mathcal{A}_2$ verträglich sind. Eine Äquivalenzklasse von (n-dimensionalen) komplexen Atlanten für X nennt man eine n-dimensionale *komplexe Struktur* auf X. Sie enthält einen maximalen Atlas, der die Vereinigung aller Atlanten in der Äquivalenzklasse ist.

Definition. Eine n-dimensionale *komplexe Mannigfaltigkeit* ist ein Hausdorffraum X mit abzählbarer Basis, versehen mit einer n-dimensionalen komplexen Struktur.

Jede komplexe Mannigfaltigkeit ist lokal-kompakt und parakompakt.

Beispiele.

1. Der $\mathbb{C}^n$ ist eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Die komplexe Struktur ist gegeben durch das Koordinatensystem $(\mathbb{C}^n, \mathrm{id})$.

2. Ist X eine beliebige n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, dann ist jede nicht leere offene Teilmenge $B \subset X$ wieder eine n-dimensionale komplexe Mannigfdaltigkeit. Für $p \in B$ gibt es ein Koordinatensystem (U,φ) für X in p. Dann ist $(U \cap B, \varphi|_{U \cap B})$ ein Koordinatensystem für B in p. Alle diese Koordinatensysteme sind holomorph verträglich.

3. Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $X \subset G$ eine k-dimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit. Natürlich ist X ein Hausdorff-Raum (in der Relativtopologie) mit abzählbarer Basis. Zu jedem $\mathbf{z}_0 \in X$ gibt es offene Umgebungen $W = W(\mathbf{z}_0) \subset G$ und $B = B(\mathbf{0}) \subset \mathbb{C}^n$ und eine biholomorphe Abbildung $\mathbf{F} : W \to B$, so dass gilt:
$$\mathbf{F}(W \cap X) = \{(w_1, \dots, w_n) \in B \,:\, w_{k+1} = \cdots = w_n = 0\}.$$
Sei $\mathrm{pr}' : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ die Projektion $(w_1, \dots, w_n) \mapsto (w_1, \dots, w_k)$. Wir setzen $U := W \cap X$ und $\varphi := \mathrm{pr}' \circ \mathbf{F} : U \to \mathbb{C}^k$. Dann ist (U, φ) ein k-dimensionales komplexes Koordinatensystem für X in $\mathbf{z}_0$.

   Ist (V, ψ) ein anderes Koordinatensystem, mit $\psi = \mathrm{pr}' \circ \widetilde{\mathbf{F}}$, so ist
$$\varphi \circ \psi^{-1}(w_1, \dots, w_k) = \mathrm{pr}' \circ \mathbf{F} \circ \widetilde{\mathbf{F}}^{-1}(w_1, \dots, w_k, 0, \dots, 0)$$
holomorph. Auf diese Weise erhalten wir eine komplexe Struktur auf X.

4. Sei schließlich G ein zusammenhängender Hausdorffraum und $\pi : G \to \mathbb{C}^n$ eine lokal-topologische Abbildung. Dann gibt es zu jedem $p \in G$ eine offene Umgebung $U = U(p)$, so dass $B := \pi(U)$ offen und $\varphi := \pi|_U : U \to B$ topologisch ist. Dann ist (U, φ) ein komplexes Koordinatensystem. Ist $\psi = \pi|_V$ ein anderes Koordinatensystem, so gilt $\varphi(x) = \psi(x) = \pi(x) =: \mathbf{z}$ und
$$\varphi \circ \psi^{-1}(\mathbf{z}) = \varphi(x) = \mathbf{z}$$
für $x \in U \cap V$. Deshalb sind die Koordinatensysteme holomorph verträglich, und wir erhalten eine komplexe Struktur auf G. Man kann beweisen, dass G eine abzählbare Basis besitzt (Grauert, 1955). Also ist G eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Das Paar (G, π) nennt man ein *Riemannsches Gebiet* über $\mathbb{C}^n$.

Sei X eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit.

Definition. Eine komplexe Funktion f auf einer offenen Teilmenge $B \subset X$ heißt *holomorph*, falls es zu jedem $p \in B$ ein Koordinatensystem (U, φ) in p gibt, so dass $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap B) \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

Sind $z_1, \dots, z_n$ komplexe Koordinaten bezüglich (U, φ), so ist
$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto f \circ \varphi^{-1}(z_1, \dots, z_n)$$
eine holomorphe Funktion im herkömmlichen Sinne. Ist $z_\nu = z_\nu(w_1, \dots, w_n)$, wobei $w_1, \dots, w_n$ die komplexen Koordinaten bezüglich eines Koordinatensystems (V, ψ) sind, so ist auch
$$f \circ \psi^{-1}(w_1, \dots, w_n) = f \circ \varphi^{-1}(z_1(w_1, \dots, w_n), \dots, z_n(w_1, \dots, w_n))$$
holomorph. Also ist die Definition der Holomorphie unabhängig vom Koordinatensystem. Wir bezeichnen die Menge der holomorphen Funktionen auf B mit $\mathcal{O}(B)$. Sie ist eine $\mathbb{C}$-Algebra mit Eins-Element.

Beispiel.

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $X \subset G$ eine k-dimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit. Wir betrachten ein komplexes Koordinatensystem (U, φ) für X, wo U der Durchschnitt von X mit einer offenen Menge $W \subset G$ und $\varphi = \mathrm{pr}' \circ \mathbf{F}$ ist, mit einer biholomorphen Abbildung $\mathbf{F} : W \to B \subset \mathbb{C}^n$, so dass $\mathbf{F}(U) = \{\mathbf{w} \in B \,:\, w_{k+1} = \cdots = w_n = 0\}$ ist. Ist f eine holomorphe Funktion auf G, so ist

$$f|_X \circ \varphi^{-1}(w_1, \ldots, w_k) = f \circ \mathbf{F}^{-1}(w_1, \ldots, w_k, 0, \ldots, 0)$$

holomorph. Daher ist $f|_X$ eine holomorphe Funktion auf der komplexen Mannigfaltigkeit X.

4.1 Identitätssatz. *Sei X zusammenhängend. Sind f, g zwei holomorphe Funktionen auf X, die auf einer nicht leeren offenen Teilmenge $U \subset X$ übereinstimmen, so ist $f = g$.*

Beweis: Sei $W = \{x \in X \,:\, f(x) = g(x)\}$. Dann ist $U \subset W$, also $\mathring{W} \neq \varnothing$. Wir nehmen an, dass es einen Randpunkt x_0 von $\mathring{W}$ in X gibt. Sei (U, φ) ein Koordinatensystem in x_0 mit $\varphi(x_0) = \mathbf{0}$. Dann müssen alle Ableitungen von $f \circ \varphi^{-1}$ und $g \circ \varphi^{-1}$ in $\mathbf{0}$ übereinstimmen. Folglich sind die Potenzreihen dieser Funktionen im Nullpunkt gleich. Aber dann ist $f = g$ auf einer ganzen Umgebung von x_0, und das ist ein Widerspruch.

Wenn es einen Punkt $x \in M := X \setminus \mathring{W}$ gäbe, der kein innerer Punkt von M ist, dann wäre x ein Randpunkt von $\mathring{W}$. Das zeigt, dass M offen sein muss. Da X zusammenhängend ist, muss M leer sein. ∎

4.2 Maximumprinzip. *Sei X zusammenhängend, $f \in \mathcal{O}(X)$ und $x_0 \in X$ ein Punkt, in dem $|f|$ ein lokales Maximum annimmt. Dann ist f konstant.*

Beweis: Die Funktionen f und $g := f(x_0)$ sind beide auf X holomorph. Ist (U, φ) ein Koordinatensystem in x_0 und $B := \varphi(U)$, so ist $f_0 := f \circ \varphi^{-1}$ holomorph auf B, und $|f_0|$ hat ein lokales Maximum in $\mathbf{z}_0 := \varphi(x_0)$. Daher gibt es eine offene Umgebung $B' = B'(\mathbf{z}_0) \subset B$, so dass f_0 auf B' konstant und f auf $U' := \varphi^{-1}(B')$ konstant ist. Also ist $f|_U = g|_U$, und nach dem Identitätssatz ist $f = g$, also f konstant. ∎

4.3 Folgerung. *Ist X kompakt und zusammenhängend, so ist jede holomorphe Funktion auf X konstant.*

Beweis: Die stetige Funktion $|f|$ nimmt ihr Maximum in einem Punkt von X an. Dann folgt die Behauptung aus dem Maximumprinzip. ∎

4.4 Folgerung. *Es gibt keine kompakte komplexe Untermannigfaltigkeit positiver Dimension im $\mathbb{C}^n$.*

Beweis: Sei $X \subset \mathbb{C}^n$ eine kompakte zusammenhängende Untermannigfaltigkeit. Dann müssen die Koordinatenfunctionen $z_\nu|_X$ konstant sein, für $\nu = 1, \ldots, n$. Das bedeutet, dass X ein einzelner Punkt. Ist X nicht zusammenhängend, so ist X eine endliche Menge. ∎

Sei nun $F : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten.

Definition. Die Abbildung F heißt *holomorph*, falls es zu jedem $p \in X$ ein Koordinatensystem (U, φ) für X in p und ein Koordinatensystem (V, ψ) für Y in $F(p)$ mit $F(U) \subset V$ gibt, so dass

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

eine holomorphe Abbildung ist.

4.5 Satz. *Die Abbildung $F : X \to Y$ ist genau dann holomorph, wenn für jede offene Teilmenge $V \subset Y$ und jedes $f \in \mathcal{O}(V)$ gilt: $f \circ F \in \mathcal{O}(F^{-1}(U))$.*

Der Beweis ist eine leichte Übung. Eine holomorphe Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ist offensichtlich eine holomorphe Abbildung.

Wenn wir in unseren Definitionen den Körper $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$ und das Wort "holomorph" durch "differenzierbar" ersetzen, so erhalten wir die Kategorie differenzierbarer Mannigfaltigkeiten und differenzierbarer Abbildungen. Aus jeder n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit wird eine $2n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, wenn man die komplexe Struktur „vergisst".

Definition. Eine *biholomorphe Abbildung* $F : X \to Y$ ist eine topologische Abbildung, so dass F und F^{-1} holomorph sind. Wenn es eine biholomorphe Abbildung zwischen X und Y gibt, dann nennt man die Mannigfaltigkeiten *isomorph* oder *biholomorph äquivalent*, und wir schreiben: $X \cong Y$.

Bemerkung. Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit und (U, φ) ein komplexes Koordinatensystem mit $\varphi(U) = B \subset \mathbb{C}^n$, dann ist $\varphi : U \to B$ eine biholomorphe Abbildung.

Sind $X_1, \ldots, X_m$ komplexe Mannigfaltigkeiten der Dimension $n_1, \ldots, n_m$, dann trägt $X = X_1 \times \cdots \times X_m$ die Produkttopologie. Offensichtlich ist X ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis.

Sind komplexe Koordinatensysteme (U_i, φ_i) für X_i gegeben, für $i = 1, \ldots, m$, so wird ein Koordinatensystem (U, φ) für X definiert, durch

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) := (\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_m(x_m)) \in \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n_1 + \cdots + n_m}.$$

Man rechnet leicht nach, dass man so einen n-dimensionalen komplexen Atlas und eine komplexe Struktur auf X erhält. Die Projektionen $p_i : X \to X_i$ sind holomorphe Abbildungen, für $i = 1, \ldots, m$.

Einfachstes Beispiel ist der $\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n \text{ times}}$.

Sei X eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit.

Definition. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *analytisch*, wenn es zu jedem Punkt $p \in X$ eine (zusammenhängende) offene Umgebung $U = U(p)$ und endlich viele holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ auf U gibt, so dass gilt:

$$U \cap A = \{q \in U \,:\, f_i(q) = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m\}.$$

Wir nennen A eine *analytische Hyperfläche*, wenn man immer mit einer einzigen Funktion auskommt.

Aus der Definition folgt, dass A eine abgeschlossene Teilmenge von X ist. Lokal ist eine analytische Menge in X das gleiche wie eine analytische Menge in einer offenen Menge $B \subset \mathbb{C}^n$. Daher können viele Eigenschaften analytischer Mengen im $\mathbb{C}^n$ auf solche in Mannigfaltigkeiten übertragen werden.

4.6 Satz. *Ist X zusammenhängend und $A \subset X$ analytisch, so ist entweder $A = X$ oder A nirgends dicht und $X \setminus A$ zusammenhängend.*

Beweis: Wir nehmen an, dass $A \neq X$ ist. Ist A irgendwo dicht in X, so enthält A innere Punkte (denn A ist in X abgeschlossen). Da X zusammenhängend ist, besitzt das Innere von A einen Randpunkt $p \in X \setminus A$ (das folgt wie im Beweis des Identitätssatzes). Wir betrachten eine zusammenhängende Umgebung $U = U(p)$, so dass $A \cap U = \{q \in U \,:\, f_1(q) = \cdots = f_m(q) = 0\}$ ist. Dann enthält U eine offene Teilmenge V (die aus inneren Punkten von A besteht), wo $f_1, \ldots, f_m$ identisch verschwinden. Nach dem Identitätssatz verschwinden sie auf ganz U, und p kann kein Randpunkt des Inneren von A sein. Das ist ein Widerspruch und A kann nirgends dicht sein.

Ist $X \setminus A$ nicht zusammenhängend, so kann man diese Menge in zwei nicht leere offene Teilmengen U_1, U_2 zerlegen. Die Funktion $f : X \setminus A \to \mathbb{C}$ mit $f(x) \equiv 0$ auf U_1 und $f(x) \equiv 1$ auf U_2 ist holomorph und beschränkt. Nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz (der lokal angewandt werden kann) gibt es eine holomorphe Funktion $\widehat{f}$ auf X, die außerhalb von A mit f übereinstimmt. Da $\widehat{f}$ nur die Werte 0 und 1 annimmt, ist f lokal konstant. Aber auf der zusammenhängenden Mannigfaltigkeit X ist jede lokal konstante Funktion konstant. Das ist ein Widerspruch. ∎

Die holomorphen Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ seien auf einer offenen Teilmenge $U \subset X$ definiert. Außerdem sei $p \in U$ ein Punkt und (V, ψ) ein komplexes Koordinatensystem für X in p. Die Abbildung $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{C}^m$ ist holomorph, und wir definieren

$$J_{\mathbf{f}}(p;\psi) := \left(\frac{\partial (f_i \circ \psi^{-1})}{\partial z_j}(\psi(p)) \;\middle|\; \begin{array}{l} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{array} \right).$$

Das ist so etwas wie die Jacobi-Matrix von $\mathbf{f}$ in p, aber diese Matrix hängt vom Koordinatensystem ψ ab. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial (f_i \circ \psi^{-1})}{\partial z_j}(\psi(p)) &= \frac{\partial ((f_i \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1}))}{\partial z_j}(\psi(p)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial (f_i \circ \varphi^{-1})}{\partial w_k}(\varphi(p)) \frac{\partial (w_k \circ \varphi \circ \psi^{-1})}{\partial z_j}(\psi(p)), \end{aligned}$$

gilt:

$$J_{\mathbf{f}}(p;\psi) = J_{\mathbf{f}}(p;\varphi) \cdot J_{\varphi \circ \psi^{-1}}(\psi(p)).$$

Das zeigt:

$$\mathrm{rg}_p(f_1, \ldots, f_m) := \mathrm{rg}\, J_{(f_1, \ldots, f_m)}(p;\psi)$$

ist von dem gewählten Koordinatensystem unabhängig.

Definition. Eine analytische Menge $A \subset X$ heißt *regulär (von Codimension d)* in einem Punkt $p \in A$, wenn es eine offene Umgebung $U = U(p) \subset X$ und holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_d$ auf U gibt, so dass gilt:

1. $A \cap U = \{q \in U \,:\, f_1(q) = \cdots = f_d(q) = 0\}$.
2. $\mathrm{rg}_p(f_1, \ldots, f_d) = d$.

Die Zahl $n - d$ nennt man die *Dimension* von A in p.

Ist A in jedem Punkt regulär, so ist A eine komplexe Untermannigfaltigkeit.

4.7 Satz. *Eine analytische Menge A ist genau dann regulär von der Codimension d in $p \in A$, wenn es ein komplexes Koordinatensystem (U, φ) für X in p gibt, so dass gilt: $\varphi(U) = B \subset \mathbb{C}^n$ und $\varphi(U \cap A) = \{\mathbf{w} \in B \,:\, w_{n-d+1} = \cdots = w_n = 0\}$.*

BEWEIS: Sei (U, ψ) ein beliebiges Koordinatensystem in p und $W := \psi(U)$, so ist $\widetilde{A} := \psi(A \cap U)$ eine analytische Teilmenge von W, die regulär von der Codimension d in $\mathbf{z}_0 := \psi(p)$ ist, und es gibt eine biholomorphe Abbildung $\mathbf{f}$ von W auf eine offene Umgebung $B = B(\mathbf{0}) \subset \mathbb{C}^n$ mit $\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{0}$ und $\mathbf{f}(\widetilde{A}) = \{\mathbf{w} \,:\, w_{n-d+1} = \cdots = w_n = 0\}$. Wir setzen $\varphi := \mathbf{f} \circ \psi$. ∎

Beispiel.

Sei $F : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung von einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit in eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann betrachten wir

$$G_F := \{(x, y) \in X \times Y \,:\, y = F(x)\},$$

den *Graphen* von F.

Sei $p_0 \in X$ ein Punkt und $q_0 := F(p_0) \in Y$. Wir wählen Koordinatensysteme (U, φ) für X in p_0 und (V, ψ) für Y in q_0, mit $F(U) \subset V$. Dann ist $(U \times V, \varphi \times \psi)$ ein Koordinatensystem für $X \times Y$ in $(p_0, q_0) \in G_F$. Schreiben wir $\psi \circ F = (f_1, \ldots, f_m)$, so erhalten wir

$$G_F \cap (U \times V) = \{(\varphi \times \psi)^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \,:\, f_i \circ \varphi^{-1}(\mathbf{z}) - w_i = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m\}.$$

Also wird G_F lokal durch die Funktionen $g_i(p, q) := f_i(p) - w_i \circ \psi(q)$ definiert, für $i = 1, \ldots, m$. Wegen $\mathrm{rg}_{(p_0,q_0)}(g_1, \ldots, g_m) = m$ ist G_F eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Die *Diagonale* $\Delta_X \subset X \times X$ ist ein Spezialfall, gegeben als Graph der Identität: $\Delta_X = \{(x, x') \in X \times X \,:\, x = x'\}$.

Beispiele:

A) Tori.

Sei $\{\omega_1, \ldots, \omega_{2n}\}$ eine reelle Basis des $\mathbb{C}^n$. Dann ist

$$\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \cdots + \mathbb{Z}\omega_{2n}$$

eine diskrete Untergruppe der additiven Gruppe $\mathbb{C}^n$. Man spricht auch von einem *Gitter*.

Zwei Punkte $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ heißen *äquivalent* (bzgl. Γ), falls $\mathbf{z} - \mathbf{w} \in \Gamma$ ist. Die Menge $T^n := \mathbb{C}^n/\Gamma$ aller Äquivalenzklassen nennt man einen *n-dimensionalen komplexen Torus*. $\pi_T : \mathbb{C}^n \to T^n$ sei die kanonische Restklassen-Abbildung. Eine Menge $U \subset T^n$ heißt *offen*, falls $\pi_T^{-1}(U)$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ ist.

4.8 Satz. *Die so eingeführten „offenen Mengen“ in T^n bilden eine Hausdorff-Topologie. Es handelt sich um die „feinste“ Topologie, für die π_T stetig wird.*

Beweis: Die Eigenschaften einer Topologie sind leicht nachzurechnen. Damit π_T stetig wird, muss $\pi_T^{-1}(U)$ für jede offene Menge $U \subset T^n$ offen in $\mathbb{C}^n$ sein. Es bleibt die Hausdorff-Eigenschaft zu zeigen:

Zunächst stellen wir fest: Ist $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, so ist auch

$$\pi_T^{-1}\pi_T(U) = \{\mathbf{z} \,:\, \exists\, \mathbf{w} \in U \text{ mit } \mathbf{z} - \mathbf{w} \in \Gamma\} = \bigcup_{\omega \in \Gamma} (\omega + U)$$

offen. Also ist $\pi_T(U)$ offen in T^n.

Gegeben seien nun zwei Punkte $x_1 = \pi_T(\mathbf{z}_1) \neq \pi_T(\mathbf{z}_2) = x_2$. Dann gibt es ein $\mathbf{w} \in \Gamma$ und reelle Zahlen $0 \le t_\nu < 1$, die nicht alle verschwinden, so dass gilt:

$$\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 = \sum_{\nu=1}^{2n} t_\nu \omega_\nu + \mathbf{w}.$$

O.B.d.A. sei $t_1 \neq 0$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $2\varepsilon < t_1 < 1 - 2\varepsilon$ und

$$U := \{\mathbf{u} = \sum_{\nu=1}^{2n} u_\nu \omega_\nu \,:\, |u_\nu| < \varepsilon \text{ für alle } \nu\,\}$$

eine offene Umgebung des Nullpunktes im $\mathbb{C}^n$ ist. So erhält man Umgebungen $U_1 := \mathbf{z}_1 + U$ von $\mathbf{z}_1$ und $U_2 := \mathbf{z}_2 + U$ von $\mathbf{z}_2$ im $\mathbb{C}^n$. Wir nehmen an, es ist $\pi_T(U_1) \cap \pi_T(U_2) \neq \varnothing$. Dann gibt es Punkte $\mathbf{z}' = \mathbf{z}_1 + \mathbf{u}' \in U_1$ und $\mathbf{z}'' = \mathbf{z}_2 + \mathbf{u}'' \in U_2$ mit $\mathbf{z}' - \mathbf{z}'' \in \Gamma$ und $\mathbf{u}', \mathbf{u}'' \in U$, und es folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 &= (\mathbf{z}' - \mathbf{z}'') + (\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}') - (\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}'') \\ &= (\mathbf{z}' - \mathbf{z}'') + \mathbf{u}'' - \mathbf{u}', \end{aligned}$$

also

$$\sum_{\nu=1}^{2n} t_\nu \omega_\nu + (\mathbf{u}' - \mathbf{u}'') \in \Gamma.$$

Das ist aber unmöglich, denn der Koeffizient $t_1 + u_1' - u_1''$ bei ω_1 liegt in $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$, der auf der rechten Seite muss aber ganzzahlig sein.

Also ist $\pi_T(U_1) \cap \pi_T(U_2) = \varnothing$. ■

Wir haben auch gesehen, dass π_T eine offene Abbildung ist. Weil T^n das Bild der kompakten Menge

$$P := \{\mathbf{z} = \sum_{\nu=1}^{2n} t_\nu \omega_\nu \,:\, 0 \le t_\nu \le 1 \text{ für alle } \nu\}$$

ist, folgt, dass T^n kompakt ist.

Die Abbildung

$$t_1\omega_1 + \cdots + t_{2n}\omega_{2n} \mapsto (e^{2\pi \mathrm{i}\, t_1}, \ldots, e^{2\pi \mathrm{i}\, t_{2n}})$$

induziert einen Homöomorphismus $T^n \to \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{2n \text{ mal}}$.

Wir führen jetzt komplexe Koordinaten ein. Für $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{C}^n$ sei

$$P_{\mathbf{z}_0} := \{\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \sum_{\nu=1}^{2n} t_\nu \omega_\nu \,:\, |t_\nu| < \frac{1}{2} \text{ für alle } \nu\,\} \text{ und } U_{\mathbf{z}_0} := \pi_T(P_{\mathbf{z}_0}).$$

Dann ist $\pi_T|_{P_{\mathbf{z}_0}} : P_{\mathbf{z}_0} \to U_{\mathbf{z}_0}$ ein Homöomorphismus und damit $\varphi_{\mathbf{z}_0} := (\pi_T|_{P_{\mathbf{z}_0}})^{-1} : P_{\mathbf{z}_0} \to U_{\mathbf{z}_0}$ eine komplexe Karte.

Ist $\mathbf{w} = \varphi_{\mathbf{z}_1} \circ \varphi_{\mathbf{z}_2}^{-1}(\mathbf{z})$, so ist $\pi_T(\mathbf{w}) = \pi_T(\mathbf{z})$, und es gibt ganze Zahlen $k_\nu(\mathbf{z})$, so dass für $\nu = 1, \ldots, 2n$ gilt:

$$\mathbf{w} = \mathbf{z} + \sum_{\nu=1}^{2n} k_\nu(\mathbf{z})\omega_\nu.$$

Da $\mathbf{w}$ stetig von $\mathbf{z}$ abhängt, sind die Funktionen k_ν lokal-konstant. Also ist $\varphi_{\mathbf{z}_1} \circ \varphi_{\mathbf{z}_2}^{-1}$ sogar holomorph, und wir erhalten auf diesem Wege eine komplexe Struktur auf T^n. Damit ist T^n eine n-dimensionale (kompakte) komplexe Mannigfaltigkeit, und aus der Definition der Karten folgt, dass π_T eine holomorphe Abbildung ist.

B) Projektive Räume.

In $X := \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ betrachten wir die Äquivalenzrelation

$$\mathbf{z} \sim \mathbf{w} \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ mit } \mathbf{w} = \lambda \mathbf{z}.$$

Die Äquivalenzklasse von $\mathbf{z}$ ist die Menge $L_\mathbf{z} = \mathbb{C}\mathbf{z} \setminus \{\mathbf{0}\}$, die komplexe Gerade durch $\mathbf{z}$ und $\mathbf{0}$ ohne Nullpunkt.

Definition. Die Menge $\mathbb{P}^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})/\sim$ der Äquivalenzklassen nennt man den n-dimensionalen *komplex-projektiven Raum*.

$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}^n$ sei die kanonische Projektion, mit $\pi(\mathbf{z}) := L_\mathbf{z}$.

Sind zwei Punkte $\mathbf{z} = (z_0, \ldots, z_n)$, $\mathbf{w} = (w_0, \ldots, w_n)$ gegeben, so gilt:

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{z}) = \pi(\mathbf{w}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ mit } w_i = \lambda z_i \text{ für } i = 0, \ldots, n \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{w_i}{w_j} = \frac{z_i}{z_j} \text{ für alle } i, j \text{ für die die Brüche definiert sind.} \end{aligned}$$

Also bestimmt $\pi(\mathbf{z})$ zwar nicht die Einträge z_j, wohl aber die Verhältnisse $z_i : z_j$. Deshalb bezeichnen wir den Punkt $x = \pi(z_0, \ldots, z_n)$ mit $(z_0 : \ldots : z_n)$ und nennen die Zahlen $z_0, \ldots, z_n$ die *homogenen Koordinaten* von x. Sind $z_0, \ldots, z_n$ homogene Koordinaten von x, so auch $\lambda z_0, \ldots, \lambda z_n$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Ist $W \subset X = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ offen, so ist $\pi^{-1}(\pi(W)) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}^*} \lambda \cdot W$ ebenfalls offen in X. Wir sagen, eine Menge $U \subset \mathbb{P}^n$ ist *offen*, falls $\pi^{-1}(U)$ offen in X ist.

Auf diese Weise versehen wir den $\mathbb{P}^n$ mit der feinsten Topologie, für die π stetig wird. Offensichtlich ist π auch offen. Wir zeigen, dass $\mathbb{P}^n$ ein Hausdorff-Raum ist. Dazu seien $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in X$ gegeben, mit $L_\mathbf{z} \neq L_\mathbf{w}$. Dann sind

$$\mathbf{z}^* := \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|} \quad \text{und} \quad \mathbf{w}^* := \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$$

verschiedene Punkte von $S^{2n+1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n+2} = \mathbb{C}^{n+1} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$. Also können wir ein $\varepsilon > 0$ finden, so dass $B_\varepsilon(\mathbf{z}^*) \cap B_\varepsilon(\mathbf{w}^*) = \varnothing$ ist. Aber dann sind $U :=$

$\pi(B_\varepsilon(\mathbf{z}^*))$ und $V := \pi(B_\varepsilon(\mathbf{w}^*))$ disjunkte offene Umgebungen von $\pi(\mathbf{z})$ bzw. $\pi(\mathbf{w})$. Da $\pi|_{S^{2n+1}} : S^{2n+1} \to \mathbb{P}^n$ surjektiv ist, folgt auch sogleich, dass der $\mathbb{P}^n$ kompakt ist.

Als nächstes suchen wir nach komplexen Karten. Die Mengen

$$\widehat{U}_i := \{\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \,:\, z_i \neq 0\}, \quad i = 0, \dots, n,$$

sind offen, und die Mengen $U_i := \pi(\widehat{U}_i)$ bilden eine offene Überdeckung des $\mathbb{P}^n$. Außerdem ist jeweils

$$W_i := \{\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \,:\, z_i = 1\}$$

eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $\widehat{U}_i$. Offensichtlich ist $\pi(W_i) = U_i$, und $\pi|_{W_i} : W_i \to U_i$ ist sogar bijektiv, mit

$$(\pi|_{W_i})^{-1}(z_0 : \ldots : z_n) = \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, 1, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i}\right).$$

Definieren wir $\alpha_i : \widehat{U}_i \to \mathbb{C}^n$ durch

$$\alpha_i(z_0, \dots, z_n) := \frac{1}{z_i}(z_0, \dots, \widehat{z_i}, \dots, z_n),$$

so ist das eine holomorphe Abbildung, die W_i sogar biholomorph auf den $\mathbb{C}^n$ abbildet, mit

$$(\alpha_i|_{W_i})^{-1}(w_1, \dots, w_n) = (w_1, \dots, w_i, 1, w_{i+1}, \dots, w_n).$$

Lokale Koordinaten auf U_i erhalten wir nun durch die topologische Abbildung

$$\varphi_i := \alpha_i \circ (\pi|_{W_i})^{-1} : U_i \to \mathbb{C}^n$$

mit

$$\varphi_i(z_0 : \ldots : z_n) = \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \widehat{\frac{z_i}{z_i}}, \dots, \frac{z_n}{z_i}\right).$$

Ein Kartenwechsel ist (etwa für $i < j$) gegeben durch

$$\begin{aligned}
\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(w_1, \dots, w_n) &= \varphi_i \circ \pi \circ (\alpha_j|_{W_j})^{-1}(w_1, \dots, w_n) \\
&= \varphi_i(w_1, \dots, w_j, 1, w_{j+1}, \dots, w_n) \\
&= \left(\frac{w_1}{w_{i+1}}, \dots, \frac{\widehat{w_{i+1}}}{w_{i+1}}, \dots, \frac{w_j}{w_{i+1}}, \frac{1}{w_{i+1}}, \dots, \frac{w_n}{w_{i+1}}\right).
\end{aligned}$$

Das ist eine rationale (und damit holomorphe) Abbildung. Also sind die Karten holomorph verträglich.

Die Kartenumgebung

$$U_0 = \{(z_0 : \ldots : z_n) \in \mathbb{P}^n \,:\, z_0 \neq 0\} = \{(1 : t_1 : \ldots : t_n) \,:\, (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n\}$$

ist auf kanonische Weise biholomorph äquivalent zum $\mathbb{C}^n$. Wir nennen U_0 einen *affinen Teil* des $\mathbb{P}^n$. Wenn wir U_0 aus dem $\mathbb{P}^n$ entfernen, erhalten wir die sogenannte *(projektive) Hyperebene im Unendlichen*

$$\begin{aligned} H_0 &= \{(z_0 : \ldots : z_n) \in \mathbb{P}^n \, : \, z_0 = 0\} \\ &= \{(0 : t_1 : \ldots : t_n) \, : \, (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}\,\}. \end{aligned}$$

Sie hat die Struktur eines $(n-1)$-dimensionalen komplex-projektiven Raumes. Setzen wir diesen Prozess fort, so erhalten wir

$$\begin{array}{lcrcl} \mathbb{P}^n & = & \mathbb{C}^n & \cup & \mathbb{P}^{n-1}, \\ \mathbb{P}^{n-1} & = & \mathbb{C}^{n-1} & \cup & \mathbb{P}^{n-2}, \\ & \vdots & & & \\ \mathbb{P}^2 & = & \mathbb{C}^2 & \cup & \mathbb{P}^1. \end{array}$$

Wir müssen nur noch $\mathbb{P}^1 = \{(z_0 : z_1) \, : \, (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}\,\}$ studieren. Aber das ist die Vereinigung von $\mathbb{C} = \{(1 : t) \, : \, t \in \mathbb{C}\}$ mit $\infty := (0 : 1)$, wenn wir $t = z_1/z_0$ setzen. In einer Umgebung von ∞ haben wir die komplexen Koordinaten $z_0/z_1 = 1/t$. Also ist $\mathbb{P}^1 = \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die bereits bekannte Riemann'sche Zahlenkugel.

Die Hyperebene H_0 ist eine reguläre analytische analytische Menge der Codimension 1, gegeben durch

$$H_0 \cap U_i = \Big\{(z_0 : \ldots : z_n) \in U_i \, : \, \frac{z_0}{z_i} = 0\Big\}.$$

Daher ist U_0 dicht im $\mathbb{P}^n$.

Im Übrigen funktioniert alles genauso, wenn man den affinen Teil U_i und die Hyperebene $H_i := \{\pi(\mathbf{z}) \in \mathbb{P}^n \, : \, z_i = 0\}$ benutzt.