3 Isolierte Singularitäten

3.1 Laurent-Reihen

Definition (isolierte Singularitäten):
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann nennt man z_0 eine ***isolierte Singularität*** von f.

Zunächst einmal ist z_0 nur eine Definitionslücke für f. Wie „singulär“ f tatsächlich in z_0 ist, das muss man erst von Fall zu Fall herausfinden. Entscheidend ist, dass z_0 eine **isolierte** Definitionslücke ist, dass es also keine Folge von singulären Punkten von f gibt, die sich gegen z_0 häuft. Der komplexe Logarithmus ist im Nullpunkt nicht definiert, aber er hat dort auch keine isolierte Singularität.

Wir wollen nun die isolierten Singularitäten klassifizieren.

Definition (Typen isolierter Singularitäten):
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und f holomorph auf U, bis auf eine isolierte Singularität in einem Punkt $z_0 \in U$.

1. z_0 heißt eine ***hebbare Singularität*** von f, wenn es eine holomorphe Funktion g auf U gibt, so dass $f(z) = g(z)$ für $z \in U \setminus \{z_0\}$ ist.

2. z_0 heißt eine ***Polstelle*** von f, wenn es ein $k \geq 1$, eine Umgebung $W = W(z_0) \subset U$ und eine auf W holomorphe Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$ gibt, so dass gilt:
$$f(z) \cdot (z - z_0)^k = g(z) \quad \text{für } z \in W \setminus \{z_0\}.$$
Die eindeutig bestimmte Zahl k mit dieser Eigenschaft heißt dann die Polstellenordnung von f in z_0.

3. z_0 heißt eine ***wesentliche Singularität*** von f, wenn z_0 weder hebbar noch eine Polstelle ist.

Offensichtlich schließen sich die Hebbarkeit und die Polstelle gegenseitig aus, so dass die isolierten Singularitäten durch die obige Definition tatsächlich klassifiziert werden. Die Polstellenordnung ist dadurch eindeutig bestimmt, dass k die kleinste natürliche Zahl ist, für die $f(z) \cdot (z - z_0)^k$ holomorph und $\neq 0$ in z_0 ist, während $f(z) \cdot (z - z_0)^{k+1}$ holomorph mit einer Nullstelle in z_0 ist.

Man kann die drei Typen isolierter Singularitäten auch aufgrund des Werteverhaltens von f in der Nähe von z_0 unterscheiden:

3.1.1. Werteverhalten bei nicht-wesentlichen Singularitäten

Sei z_0 eine isolierte Singularität von f.

1. *z_0 ist genau dann hebbar, wenn f in der Nähe von z_0 beschränkt bleibt.*
2. *Eine Polstelle liegt genau dann in z_0 vor, wenn $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$ ist.*

Beweis: 1) folgt sofort aus dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz.

2) Ist $f(z) \cdot (z - z_0)^k = g(z)$, mit einer holomorphen Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$, so gibt es eine Umgebung $V = V(z_0)$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $|g(z)| > \varepsilon$ für $z \in V$. Ist $z \in V$ und $z \neq z_0$, so gilt:

$$|f(z)| = \frac{1}{|z - z_0|^k} \cdot |g(z)| > \frac{\varepsilon}{|z - z_0|^k} \to +\infty \quad (\text{für } z \to z_0).$$

Setzen wir umgekehrt voraus, dass $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$ ist, so lässt sich $1/f$ zu einer holomorphen Funktion h mit $h(z_0) = 0$ fortsetzen. Das bedeutet, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion $\widetilde{h}$ in der Nähe von z_0 gibt, so dass gilt:

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^k \cdot \widetilde{h}(z) \text{ und } \widetilde{h}(z) \neq 0 \text{ nahe } z_0.$$

Also ist $f(z) = g(z)/(z - z_0)^k$, wobei $g(z) := 1/\widetilde{h}(z)$ holomorph und $g(z) \neq 0$ in der Nähe von z_0 ist. ∎

In der Nähe einer wesentlichen Singularität sieht es anders aus.

3.1.2. Satz von Casorati-Weierstraß

f hat in z_0 genau dann eine wesentliche (isolierte) Singularität, wenn $f(z)$ in jeder Umgebung von z_0 jedem beliebigen Wert beliebig nahe kommt, wenn es also zu jedem vorgegebenem $w_0 \in \mathbb{C}$ eine Folge von Punkten (z_n) mit $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$ und $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = w_0$ gibt.

Beweis: 1) Ist das Kriterium erfüllt, so ist $|f|$ nicht beschränkt und strebt auch nicht gegen $+\infty$. Also muss die Singularität wesentlich sein.

2) Hat f umgekehrt in z_0 eine wesentliche Singularität, so nehmen wir an, es gäbe eine offene Umgebung $V = V(z_0)$, ein $w_0 \in \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass gilt:

$$f(V \setminus \{z_0\}) \cap D_\varepsilon(w_0) = \varnothing.$$

Dann wäre $g(z) := 1/\big(f(z) - w_0\big)$ holomorph auf $V \setminus \{z_0\}$ und nahe z_0 beschränkt, und es gäbe eine holomorphe Funktion $\widehat{g}$ auf V mit $\widehat{g}|_{V \setminus \{z_0\}} = g$. Wäre dann $\widehat{g}(z_0) = 0$, so hätte $f(z) = w_0 + 1/g(z)$ in z_0 eine Polstelle. Wäre dagegen $\widehat{g}(z_0) \neq 0$, so wäre f nahe z_0 beschränkt, die Singularität also hebbar. Beides ist unmöglich! ∎

3.1.3. Beispiele

1. Sei $f(z) := z/\sin z$ für $|z| < \pi$ und $z \neq 0$. Es ist $\sin(0) = 0$ und $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, also $\sin(z) = z \cdot h(z)$, mit einer nahe $z_0 = 0$ holomorphen Funktion h mit $h(0) = 1$. Aus Stetigkeitsgründen gibt es dann ein kleines $\varepsilon > 0$, so dass $\big|\sin(z)/z\big| = |h(z)| > 1 - \varepsilon$ für z nahe bei 0 und $z \neq 0$ ist.

   Also ist $|f(z)| = \big|z/\sin(z)\big| < 1/(1-\varepsilon)$ in der Nähe von 0 beschränkt. (Die Abschätzung gilt natürlich nur für $z \neq 0$.) Damit liegt eine hebbare Singularität vor. Man kann den Wert $f(0) := 1/h(0) = 1$ ergänzen.

2. $f(z) := 1/z$ hat offensichtlich in $z = 0$ eine Polstelle.

3. Sei $f(z) := \exp(1/z)$. In $z_0 = 0$ liegt eine isolierte Singularität vor. Aber was für eine? Setzen wir $z_n := 1/n$ ein, dann strebt $f(z_n) = e^n$ gegen ∞. Also kann die Singularität nicht hebbar sein. Setzen wir dagegen $w_n := -\,\mathsf{i}\,/(2\pi n)$ ein, so erhalten wir
$$f(w_n) = e^{2\pi n \cdot \mathsf{i}} = 1.$$
   Also strebt $f(w_n)$ in diesem Fall nicht gegen ∞. Damit kann auch keine Polstelle vorliegen, die Singularität ist wesentlich!

Die Methode, den Typ einer Singularität über das Werteverhalten der Funktion herauszubekommen, ist nicht immer so einfach anwendbar. Wir werden deshalb nach einer besseren Methode suchen. Zur Motivation betrachten wir eine Funktion f, so dass
$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \cdot h(z)$$
ist, mit einer nahe z_0 holomorphen Funktion h. Wir können h in z_0 in eine Taylorreihe entwickeln,
$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \text{ für } |z-z_0| < r,$$
und dann gilt für $z \neq z_0$ und $|z - z_0| < r$:
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-k} = \frac{a_0}{(z-z_0)^k} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + a_k + a_{k+1}(z-z_0) + \cdots$$
Im Falle einer wesentlichen Singularität, etwa $f(z) := \exp(1/z)$, erhalten wir dagegen für $z \neq 0$:
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{6}z^{-3} + \cdots$$
Die Reihe erstreckt sich über unendlich viele negative Potenzen von z. Wir werden sehen, dass es immer möglich ist, eine holomorphe Funktion um eine isolierte Singularität z_0 herum in eine Reihe zu entwickeln, die sowohl positive als auch negative Potenzen von $z - z_0$ enthalten kann.

Definition (Laurent-Reihen):
Eine ***Laurent-Reihe*** ist eine Reihe der Form

$$L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Die Zahlen a_n heißen die *Koeffizienten* der Reihe, z_0 der *Entwicklungspunkt*.

$$\begin{aligned} H(z) \;&:=\; \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \\ &=\; \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots \end{aligned}$$

heißt ***Hauptteil der Reihe***,

$$N(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

heißt ***Nebenteil*** der Reihe.

Die Laurent-Reihe $L(z) = H(z) + N(z)$ heißt ***konvergent*** (***absolut konvergent***, ***lokal gleichmäßig konvergent*** usw.), wenn Hauptteil und Nebenteil es jeweils für sich sind.

Ist $0 \le r < R$, so nennt man $K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$ den ***Kreisring*** um z_0 mit innerem Radius r und äußerem Radius R. Dabei ist die Möglichkeit $R = +\infty$ zugelassen.

3.1.4. Das Konvergenzverhalten von Laurent-Reihen

Sei $L(z) = H(z) + N(z)$ eine Laurent-Reihe mit Entwicklungspunkt z_0, $R > 0$ der Konvergenzradius des Nebenteils $N(z)$ und $r^* > 0$ der „Konvergenzradius“ des Hauptteils, d.h. der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\widetilde{H}(w) := H\Big(\frac{1}{w} + z_0\Big) = a_{-1} w + a_{-2} w^2 + \cdots .$$

1. *Ist $r^* \cdot R \le 1$, so konvergiert $L(z)$ auf keiner offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$.*

2. *Ist $r^* \cdot R > 1$und $r := 1/r^*$, so konvergiert $L(z)$ in dem Kreisring $K_{r,R}(z_0)$ absolut und lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion.*

Beweis: Die Reihe $\widetilde{H}(w)$ konvergiert nach Voraussetzung für $|w| < r^*$. Dann konvergiert $H(z) = \widetilde{H}\Big(\dfrac{1}{z - z_0}\Big)$ für $|z - z_0| > \dfrac{1}{r^*} = r$.

Ist $r^* \cdot R \leq 1$, so ist $R \leq r$, und die Reihe kann nirgends konvergieren. Ist $r^* \cdot R > 1$, so konvergieren Haupt- und Nebenteil beide für $r < |z - z_0| < R$. ∎

Laurent-Reihen konvergieren also auf Ringgebieten. Lässt man den inneren Radius gegen 0 und den äußeren gegen ∞ gehen, so erhält man $\mathbb{C}^*$ als Beispiel eines ausgearteten Ringgebietes. Umgekehrt lässt sich jede auf einem Ringgebiet definierte holomorphe Funktion dort in eine konvergente Laurent-Reihe entwickeln. Dafür wird der folgende Satz gebraucht:

3.1.5. Satz von der „Laurent-Trennung"

Sei f holomorph auf dem Ringgebiet $K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$. Dann gibt es eindeutig bestimmte holomorphe Funktionen

$$f^+ : D_R(z_0) \to \mathbb{C} \quad \textit{und} \quad f^- : \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)} \to \mathbb{C}$$

mit

$$f^+ + f^- = f \ \textit{auf}\ K_{r,R}(z_0) \quad \textit{und} \quad |f^-(z)| \to 0 \ \textit{für}\ |z| \to \infty.$$

Beweis: 1) Eindeutigkeit:

Es gebe zwei Darstellungen der gewünschten Art:

$$f = f_1^+ + f_1^- = f_2^+ + f_2^-.$$

Dann definieren wir eine neue Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$h(z) := \begin{cases} f_1^+(z) - f_2^+(z) & \text{für } z \in D_R(z_0), \\ f_2^-(z) - f_1^-(z) & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)}. \end{cases}$$

Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, und für $z \to \infty$ strebt sie gegen 0. Also handelt es sich um eine beschränkte ganze Funktion, die natürlich konstant sein muss (Liouville). Es ist nur $h(z) \equiv 0$ möglich.

2) Die Existenz von f^+ und f^-.

Für $\varrho \in \mathbb{R}$ mit $r < \varrho < R$ und $|z - z_0| \neq \varrho$ sei

$$F_\varrho(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Nach dem Entwicklungssatz ist F_ϱ in $\mathbb{C} \setminus \partial D_\varrho(z_0)$ holomorph.

Nun sei $r < \varrho_1 < \varrho_2 < R$ und $\Gamma := \partial D_{\varrho_2}(z_0) - \partial D_{\varrho_1}(z_0)$. Dann ist Γ nullhomolog im Kreisring $K_{r,R}(z_0)$, und für $z \in K_{r,R}(z_0) \setminus |\Gamma|$ ist

$$F_{\varrho_2}(z) - F_{\varrho_1}(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = n(\Gamma, z) \cdot f(z) = \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in K_{\varrho_1,\varrho_2}(z_0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Jetzt definiert man $f^+ : D_R(z_0) \to \mathbb{C}$ durch $f^+(z) := F_\varrho(z)$, für ein beliebiges ϱ mit $\max(r, |z - z_0|) < \varrho < R$. Nach der obigen Formel ist diese Definition unabhängig vom gewählten ϱ.

Analog definiert man $f^- : \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)} \to \mathbb{C}$ durch $f^-(z) := -F_\varrho(z)$, wobei ϱ die Bedingung $r < \varrho < \min(R, |z - z_0|)$ erfüllen muss. Die Holomorphie und die Unabhängigkeit von ϱ folgen wie bei f^+.

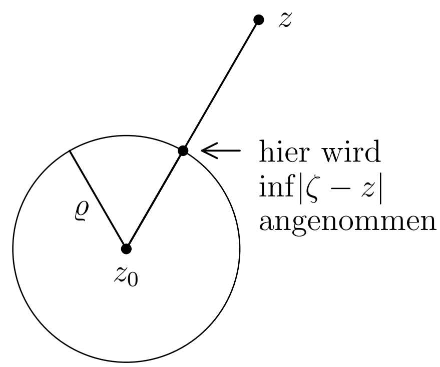
Ist nun $r < \varrho_1 < |z - z_0| < \varrho_2 < R$, so ist

$$f(z) = F_{\varrho_2}(z) - F_{\varrho_1}(z) = f^+(z) + f^-(z).$$

3) Die Abschätzung von $|f^-(z)|$ für $|z| \to \infty$:

Wir halten ein ϱ mit $r < \varrho < R$ fest und betrachten ein z mit $|z - z_0| > \varrho$. Dann ist

$$\begin{aligned}
|f^-(z)| &= |F_\varrho(z)| = \frac{1}{2\pi} \cdot \Big| \int_{\partial D_\varrho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \Big| \\
&\le \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\varrho \cdot \sup_{\partial D_\varrho} \Big| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \Big| \\
&\le \varrho \cdot \frac{1}{\inf_{\partial D_\varrho} |\zeta - z|} \cdot \sup_{\partial D_\varrho} |f(\zeta)| \\
&= \varrho \cdot \frac{1}{|z - z_0| - \varrho} \cdot \sup_{\partial D_\varrho} |f(\zeta)|,
\end{aligned}$$



und dieser Ausdruck strebt gegen Null, für $|z| \to \infty$. ∎

3.1.6. Folgerung (Existenz der Laurent-Entwicklung)

Sei f holomorph auf dem Ringgebiet $K = K_{r,R}(z_0)$. Dann lässt sich f auf K in eindeutiger Weise in eine Laurent-Reihe entwickeln:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,.$$

Die Reihe konvergiert im Innern von K absolut und gleichmäßig gegen f, und für jedes ϱ mit $r < \varrho < R$ und jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Beweis: Wir führen die Laurent-Trennung durch:

$$f(z) = f^+(z) + f^-(z),$$

wobei f^+ holomorph auf $D_R(z_0)$ ist, und f^- holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)}$. Dann kann man f^+ in eine Taylorreihe entwickeln:

$$f^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

mit

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta, \quad r < \varrho < R.$$

Der Hauptteil muss etwas anders behandelt werden: Die Abbildung $\varphi(w) := z_0 + 1/w$ bildet $D_{1/r}(0) \setminus \{0\}$ biholomorph auf $\mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)}$ ab. Also ist $g(w) := f^-\big(z_0 + 1/w\big)$ holomorph in $D_{1/r}(0) \setminus \{0\}$, und

$$\lim_{w \to 0} g(w) = \lim_{z \to \infty} f^-(z) = 0.$$

Deshalb können wir auf g den Riemann'schen Hebbarkeitssatz anwenden. Es gibt eine holomorphe Funktion $\widehat{g}$ auf $D_{1/r}(0)$, die außerhalb 0 mit g übereinstimmt. Nun entwickeln wir $\widehat{g}$ in eine Taylorreihe:

$$\widehat{g}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n, \qquad \text{für } |w| < \frac{1}{r}.$$

Da $\widehat{g}(0) = 0$ ist, ist $b_0 = 0$. Also gilt für $|z - z_0| > r$:

$$f^-(z) = g\Big(\frac{1}{z - z_0}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z - z_0}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n,$$

mit $a_{-n} := b_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$

Insgesamt ist

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{für } z \in K_{r,R}(z_0).$$

Die Reihe konvergiert im Innern des Ringgebietes absolut und lokal gleichmäßig. Sie kann also für $r < \varrho < R$ über $\partial D_\varrho(z_0)$ gliedweise integriert werden. Das gleiche gilt dann für

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{N+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-N-1}.$$

Benutzt man noch, dass

$$\int\limits_{\partial D_\varrho(z_0)} (z - z_0)^n\, dz = \begin{cases} 2\pi\,\mathrm{i} & \text{falls } n = -1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist, so erhält man:

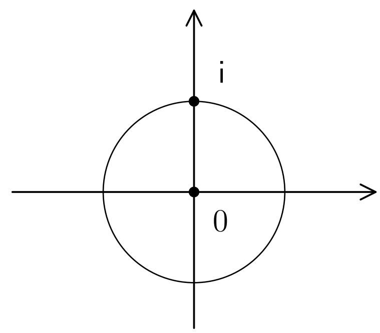
$$\frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int\limits_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{N+1}}\,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int\limits_{\partial D_\varrho(z_0)} (z-z_0)^{n-N-1}\,dz = a_N.$$

■

3.1.7. Beispiel

Sei $f(z) := \dfrac{1}{z(z-\mathsf{i})^2}$.

Diese Funktion ist holomorph für $z \notin \{0, \mathsf{i}\}$. Es gibt nun eine ganze Reihe verschiedener Gebiete, in denen f in eine Laurent-Reihe entwickelt werden kann.



Im Kreisring $K_{0,1}(0)$:

Wir wollen f nach Potenzen von $1/z$ entwickeln. Der erste Faktor hat schon die gewünschte Gestalt, und für den zweiten gibt es ein Kochrezept:

Will man eine Funktion der Gestalt $1/(z-z_0)$ in eine Laurent-Reihe um $a \neq z_0$ entwickeln, so benutzt man den Trick mit der geometrischen Reihe.

Für alle z mit $|z-a| < |z_0-a|$ ist $|(z-a)/(z_0-a)| < 1$, also

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-z_0} &= \frac{1}{z-a-(z_0-a)} = -\frac{1}{z_0-a} \cdot \frac{1}{1-(z-a)/(z_0-a)} \\ &= -\frac{1}{z_0-a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)^n.\end{aligned}$$

Ist $|z-a| > |z_0-a|$, so geht man analog vor:

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1-(z_0-a)/(z-a)} = \frac{1}{z-a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0-a}{z-a}\right)^n.$$

Ist $m \geq 2$, so ist $\dfrac{1}{(z-z_0)^m} = \dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \left(\dfrac{1}{z-z_0}\right)^{(m-1)}$.

Durch gliedweise Differentiation der Reihe für $1/(z-z_0)$ erhält man die Reihe für die m-ten Potenzen.

Im vorliegenden Fall ist $z_0 = \mathsf{i}$, $a = 0$ und $|z-0| = |z| < 1 = |\mathsf{i}-0|$, also

$$\frac{1}{z-\mathrm{i}} = \mathrm{i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\mathrm{i}}\right)^n$$

und

$$\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} = -\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right)' = -\mathrm{i}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{z}{\mathrm{i}}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}} = -\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot\left(\frac{z}{\mathrm{i}}\right)^n.$$

Also ist

$$f(z) = -\frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{\mathrm{i}^n}z^{n-1} = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)}{\mathrm{i}^{n+1}}z^n.$$

Im Kreisring $K_{1,\infty}(0)$:

Hier ist wieder $z_0 = \mathrm{i}$ und $a = 0$, aber $|z-0| > |\mathrm{i}-0|$, also

$$\frac{1}{z-\mathrm{i}} = \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{i}}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^{n-1}\frac{1}{z^n}$$

und

$$\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} = -\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^{n-1}(-n)\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^{n-1}\cdot n\cdot\frac{1}{z^{n+1}}.$$

Also ist

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^{n-1}\cdot n\cdot\frac{1}{z^{n+2}} = \sum_{n=3}^{\infty}\mathrm{i}^{n-3}(n-2)\frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-3}\mathrm{i}^{-n-1}(n+2)z^n,$$

wegen $\mathrm{i}^{-n-3}(-n-2) = \mathrm{i}^{-n-1}(n+2)$.

Im Kreisring $K_{0,1}(\mathrm{i})$:

Hier soll $1/z$ nach Potenzen von $(z-\mathrm{i})$ entwickelt werden. Es ist $z_0 = 0$, $a = \mathrm{i}$ und $|z-\mathrm{i}| < 1 = |0-\mathrm{i}|$ im Kreisring, also

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{-\mathrm{i}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{1}{(-\mathrm{i})^{n+1}}\Big)(z-\mathrm{i})^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-\mathrm{i}^{n+1})(z-\mathrm{i})^n$$

und damit

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-\mathrm{i}^{n+1})(z-\mathrm{i})^{n-2} = \sum_{n=-2}^{\infty}(-\mathrm{i}^{n+3})(z-\mathrm{i})^n \\ &= \frac{-\mathrm{i}}{(z-\mathrm{i})^2} + \frac{1}{z-\mathrm{i}} + \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{i}^{n+1}(z-\mathrm{i})^n. \end{aligned}$$

Auf die Entwicklung von f im Kreisring $K_{1,\infty}(\mathrm{i})$ verzichten wir hier.

3.1.8. Charakterisierung von isolierten Singularitäten durch die Laurent-Reihe

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von z_0 und z_0 eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Auf einem Kreisring $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ besitze f die Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} z_0 \textit{ hebbar} \quad &\iff \quad a_n = 0 \textit{ für } \textbf{\textit{alle}} \; n < 0, \\ z_0 \textit{ Polstelle} \quad &\iff \quad \exists\, n < 0 \textit{ mit } a_n \neq 0 \textit{ und } a_k = 0 \textit{ für } k < n, \\ z_0 \textit{ wesentlich} \quad &\iff \quad a_n \neq 0 \textit{ für unendlich viele } n < 0. \end{aligned}$$

Beweis: 1) z_0 ist genau dann hebbar, wenn eine holomorphe Funktion $\widehat{f} : D_\varepsilon(z_0) \to \mathbb{C}$ existiert, mit $\widehat{f}\Big|_{K_{0,\varepsilon}(z_0)} = f$. Aber $\widehat{f}$ besitzt eine Taylorentwicklung:

$$\widehat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

2) z_0 ist genau dann eine Polstelle, wenn es in der Nähe von z_0 eine Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot h(z) \ \text{ gibt, mit } \ h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \ \text{ und } \ b_0 \neq 0.$$

Aber dann ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-k} = \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k} (z - z_0)^n.$$

3) z_0 ist wesentlich, wenn es weder hebbar noch Polstelle ist. Das lässt nur die Möglichkeit, dass $a_n \neq 0$ für unendlich viele n mit $n < 0$ ist. ∎

3.1.9. Beispiele

1. Die Funktion

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \cdot \left(z - \frac{z^3}{3!} \pm \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} \pm \dots$$

   besitzt keinen Hauptteil, hat also in $z = 0$ eine hebbare Singularität. Natürlich ist $\lim_{z \to 0} \big((\sin z)/z \big) = 1$.

2. Die Funktion
$$f(z) = \frac{1}{z(z-\mathrm{i})^2}$$
hat eine Polstelle 1. Ordnung in 0 und eine Polstelle 2. Ordnung in i. Die nötigen Laurent-Reihen haben wir schon ausgerechnet.

3. Die Funktion
$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \cdots$$
hat in $z = 0$ eine wesentliche Singularität.

4. Die Funktion
$$f(z) := \frac{1}{\sin z}$$
ist holomorph für $z \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

   Sei $g(z) := \sin z / z$. Dann ist g holomorph und $\neq 0$ auf $D_\pi(0)$, mit $g(0) = 1$. Aber dann ist auch $1/g$ holomorph auf $D_\pi(0)$, und man kann schreiben:
$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \text{mit } a_0 = 1.$$
   Also ist
$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n.$$
   Das bedeutet, dass f in $z = 0$ eine Polstelle 1. Ordnung besitzt.

3.2 Der Residuensatz

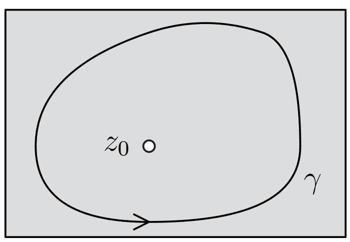
Definition (meromorphe Funktion):

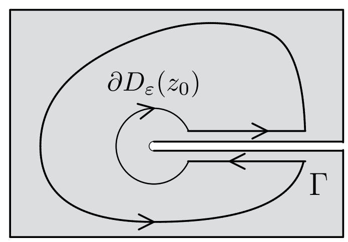
Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen und D in B diskret. Eine holomorphe Funktion $f : B \setminus D \to \mathbb{C}$ heißt eine ***meromorphe Funktion auf*** B, falls f in den Punkten von D höchstens Polstellen besitzt (also keine wesentlichen Singularitäten).

Die Menge $P(f) := \{z \in D : f \text{ hat in } z \text{ eine Polstelle der Ordnung} \geq 1\}$ heißt ***Polstellenmege von*** f.

Typische Beispiele meromorpher Funktionen sind rationale Funktionen, aber auch Funktionen der Gestalt $1/\sin(z)$.

Sei nun $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, γ ein einfach geschlossener Integrationsweg in G, der nullhomolog in G ist, und f eine meromorphe Funktion auf G mit einer einzigen Polstelle $z_0 \in \operatorname{Int}(\gamma)$. Es geht darum, $\int_\gamma f(z)\,dz$ zu berechnen. Dafür bietet sich folgende Idee an:





$\Gamma := \gamma - \partial D_\varepsilon(z_0)$ ist nullhomolog in $G \setminus \{z_0\}$, und deshalb ist $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ (nach dem allgemeinen Cauchy'schen Integralsatz). Man kann sich das so vorstellen, dass man z_0 mit Hilfe eines kleinen Abstechers und des in negativer Richtung durchlaufenen Kreises $\partial D_\varepsilon(z_0)$ umgeht (siehe rechte Skizze). Man braucht dann nur über γ und $-\partial D_\varepsilon(z_0)$ zu integrieren, denn die Integrale über die beiden in umgekehrter Richtung durchlaufenen Strecken heben sich gegenseitig auf. Also ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(z)\,dz.$$

Die Berechnung des (eventuell komplizierten) Ausgangsintegrals wird zurückgeführt auf die Berechnung eines „Restintegrals" über den Kreisrand $\partial D_\varepsilon(z_0)$. Dieses bezeichnet man (nach Division durch $2\pi\mathrm{i}$) als *Residuum*.

Definition (Residuum):

Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in B$, $f : B \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\varepsilon > 0$, so dass $D_\varepsilon(z_0) \subset\subset B$ ist. Dann heißt

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(\zeta)\,d\zeta$$

das ***Residuum*** von f in z_0.

Bemerkungen:

1. Das Residuum hängt nicht von der Wahl des Radius ε ab. Das zeigt man wie üblich mit Hilfe des Cauchy'schen Integralsatzes.

2. z_0 braucht keine Singularität zu sein! Ist f in z_0 holomorph, so ist $\mathrm{res}_{z_0}(f) = 0$. Auch das folgt aus dem Integralsatz.

3. In der Laurent-Entwicklung von f um z_0 ist

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(\zeta)\, d\zeta = \mathrm{res}_{z_0}(f),$$

für ein genügend kleines ε.

4. Es ist $\quad \mathrm{res}_{z_0}(a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot \mathrm{res}_{z_0}(f) + b \cdot \mathrm{res}_{z_0}(g)$.

5. Ist F holomorph auf $B \setminus \{z_0\}$ und $F' = f$, so ist $\mathrm{res}_{z_0}(f) = 0$. Das ist klar, denn in dieser Situation verschwindet das Integral über f und jeden geschlossenen Integrationsweg.

6. $\mathrm{res}_{z_0}\left(\dfrac{1}{z - z_0}\right) = 1$ und $\mathrm{res}_{z_0}\left(\dfrac{1}{(z - z_0)^k}\right) = 0$ für $k \geq 2$.

7. Allgemeiner gilt: Hat f in z_0 eine **einfache Polstelle**, so ist

$$\mathrm{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Beweis: Es ist $f(z) = a_{-1}/(z - z_0) + h(z)$, mit einer in z_0 holomorphen Funktion h, also $(z - z_0)f(z) = a_{-1} + (z - z_0)h(z) \to a_{-1}$ für $z \to z_0$. ∎

8. Und noch allgemeiner kann man zeigen: Hat f in z_0 eine **m-fache Polstelle**, so ist

$$\mathrm{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^m f(z)]^{(m-1)}.$$

Beweis: Es ist

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots ,$$

also $(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + \cdots$

Damit ist $[(z - z_0)^m f(z)]^{(m-1)} = (m-1)!\, a_{-1} + (z - z_0) \cdot (\ldots)$. ∎

9. Seien g und h holomorph nahe z_0, $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) \neq 0$. Dann ist $\mathrm{res}_{z_0}(g/h) = g(z_0)/h'(z_0)$.

Beweis: Wir können schreiben:

$$\begin{aligned} g(z) &= c_0 + (z - z_0) \cdot \widetilde{g}(z), \text{ mit } c_0 \neq 0 \\ \text{und} \quad h(z) &= (z - z_0) \cdot (b_1 + \widetilde{h}(z)), \text{ mit } b_1 \neq 0 \text{ und } \widetilde{h}(z_0) = 0. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{c_0 + (z - z_0) \cdot \widetilde{g}(z)}{(z - z_0) \cdot (b_1 + \widetilde{h}(z))} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{c_0}{b_1 + \widetilde{h}(z)} + \frac{\widetilde{g}(z)}{b_1 + \widetilde{h}(z)}.$$

Also hat $f := g/h$ in z_0 eine einfache Polstelle, und es ist

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{c_0}{b_1 + \widetilde{h}(z_0)} = \frac{c_0}{b_1} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

■

3.2.1. Beispiele

1. Die Funktion $f(z) := \dfrac{e^{\mathrm{i}\, z}}{z^2 + 1} = \dfrac{e^{\mathrm{i}\, z}}{(z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i})}$ hat einfache Polstellen bei i und $-\mathrm{i}$. Es ist

$$\operatorname{res}_{\mathrm{i}}(f) = \lim_{z \to \mathrm{i}} (z - \mathrm{i}) f(z) = \lim_{z \to \mathrm{i}} \frac{e^{\mathrm{i}\, z}}{z + \mathrm{i}} = \frac{e^{-1}}{2\mathrm{i}} - \frac{1}{2e}\mathrm{i},$$

und analog

$$\operatorname{res}_{-\mathrm{i}}(f) = \lim_{z \to -\mathrm{i}} (z + \mathrm{i}) f(z) = \lim_{z \to -\mathrm{i}} \frac{e^{\mathrm{i}\, z}}{z - \mathrm{i}} = \frac{e^1}{-2\mathrm{i}} = \frac{e}{2}\mathrm{i}.$$

2. $f(z) := \dfrac{z^2}{1 + z^4}$ hat 4 einfache Polstellen, insbesondere im Punkt

$$z_0 := e^{(\pi/4)\mathrm{i}} = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathrm{i}).$$

Mit $g(z) := z^2$ und $h(z) := 1 + z^4$ ist

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} = \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4z_0} = \frac{1}{4}e^{-(\pi/4)\mathrm{i}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1 - \mathrm{i}).$$

3.2.2. Der Residuensatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $D \subset G$ diskret, Γ ein nullhomologer Zyklus in G mit $|\Gamma| \cap D = \varnothing$ und $f : G \setminus D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{z \in G} n(\Gamma, z) \operatorname{res}_z(f).$$

Bemerkung: Ist C^* die Vereinigung aller Komponenten von $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$, auf denen $n(\Gamma, z) \neq 0$ ist, so ist $K := \overline{C^*} \cup |\Gamma|$ abgeschlossen und beschränkt, also eine kompakte Teilmenge von G, außerhalb der $n(\Gamma, z) = 0$ ist. Da $K \cap D$ endlich ist, gibt es höchstens endlich viele Punkte $z \in G$, in denen das Produkt $n(\Gamma, z) \cdot \mathrm{res}_z(f)$ nicht verschwindet. Also ist die Summe auf der rechten Seite der Gleichung sinnvoll.

BEWEIS: Sei $D' = \{z_1, \ldots, z_N\}$ die Menge derjenigen Punkte $z \in D$, in denen $n(\Gamma, z) \neq 0$ ist, sowie $D'' := D \setminus D'$. Dann ist Γ im Gebiet $B := G \setminus D''$ nullhomolog.

Für $\mu = 1, \ldots, N$ sei $h_\mu(z)$ der Hauptteil der Laurent-Entwicklung von f um z_μ. Aus dem Satz von der Laurent-Trennung folgt: h_μ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{z_\mu\}$,

$$f - \sum_{\mu=1}^{N} h_\mu \text{ ist holomorph auf } B \text{ und } \int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{\mu=1}^{N} \int_\Gamma h_\mu(z)\,dz.$$

Nun schreiben wir ausführlich: $h_\mu(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{\mu,n}(z - z_\mu)^n$. Diese Reihe konvergiert gleichmäßig auf $|\Gamma|$, kann dort also gliedweise integriert werden. Daher gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma h_\mu(z)\,dz &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{\mu,n} \int_\Gamma (z - z_\mu)^n\,dz \\
&= a_{\mu,-1} \int_\Gamma \frac{1}{z - z_\mu}\,dz + \sum_{n \geq 2} a_{\mu,-n} \int_\Gamma \frac{1}{(z - z_\mu)^n}\,dz \\
&= a_{\mu,-1} \cdot 2\pi\,\mathrm{i} \cdot n(\Gamma, z_\mu) \;=\; 2\pi\,\mathrm{i} \cdot \mathrm{res}_{z_\mu}(f) \cdot n(\Gamma, z_\mu),
\end{aligned}$$

denn für $n \geq 2$ besitzt $1/(z - z_\mu)^n$ in der Nähe von $|\Gamma|$ eine Stammfunktion. Daraus folgt die Behauptung. ∎

3.2.3. Folgerung (Residuenformel)

Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen und $G \subset\subset B$ ein positiv berandetes, einfach zusammenhängendes Gebiet mit glattem Rand. Außerdem seien $z_1, \ldots, z_N$ Punkte in G und $f : B \setminus \{z_1, \ldots, z_N\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\partial G} f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{res}_{z_k}(f).$$

BEWEIS: Man kann den Residuensatz auf f und $\Gamma := \partial G$ anwenden. Da $n(\partial G, z) = 1$ für jedes $z \in G$ ist, folgt die Behauptung. ∎

3.2.4. Beispiele

1. Es soll $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4}\,dz$ berechnet werden.

Das geht in diesem Falle auch sehr einfach mit einer der höheren Cauchy'schen Integralformeln:

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4}\,dz = \frac{2\pi\,\mathrm{i}}{3!}\frac{d^3}{dz^3}\Big|_0 (e^z) = \frac{\pi\,\mathrm{i}}{3}.$$

Mit dem Residuensatz macht man es so:

Die Laurent-Reihe des Integranden um $z = 0$ hat die Gestalt

$$\frac{e^z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z} + \frac{1}{24} + \cdots$$

Also ist

$$\operatorname{res}_0\left(\frac{e^z}{z^4}\right) = \text{ Koeffizient bei } z^{-1} = \frac{1}{6}.$$

Daraus folgt:

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4}\,dz = 2\pi\,\mathrm{i}\cdot\operatorname{res}_0\left(\frac{e^z}{z^4}\right) = \frac{\pi\,\mathrm{i}}{3}.$$

2. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, f holomorph auf G und Γ ein Zyklus in G, der dort nullhomolog ist, sowie $z_0 \in G \setminus |\Gamma|$. Dann kann man den Residuensatz auf $g(z) := f(z)/(z - z_0)^{k+1}$ anwenden. Es ist

$$g(z) = \frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}\cdot\left(f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \cdots + \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k + \cdots\right),$$

also $\operatorname{res}_{z_0}(g) = \dfrac{1}{k!}f^{(k)}(z_0)$ und $\displaystyle\frac{k!}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta = n(\Gamma, z_0)\cdot f^{(k)}(z_0).$

Das ist die verallgemeinerte höhere Cauchy'sche Integralformel.

Der allgemeine Cauchy'sche Integralsatz folgt auch aus dem Residuensatz, da unter den Voraussetzungen des Integralsatzes alle Residuen verschwinden.

Wir kommen nun zu weiteren Anwendungen des Residuensatzes:

3.2.5. Das Argument-Prinzip

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und Γ ein nullhomologer Zyklus in G. Weiter sei f auf G meromorph und nicht konstant, N die Menge der Nullstellen und P die Menge der Polstellen von f, sowie $|\Gamma| \cap (N \cup P) = \varnothing$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int\limits_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = \sum_{a\in N} n(\gamma, a)o(f, a) - \sum_{b\in P} n(\gamma, b)o(f, b),$$

wenn man mit $o(f, z)$ die Null- bzw. Polstellenordnung von f in z bezeichnet.

Beweis: $D := N \cup P$ ist eine diskrete Menge in B, und es ist $n(\gamma, z) \neq 0$ für höchstens endlich viele Elemente von D. Die Funktion f'/f ist holomorph auf $G \setminus D$.

Ist $a \in D$, so gilt in der Nähe von a: $f(z) = (z-a)^k \cdot g(z)$, mit einer in a holomorphen Funktion g ohne Nullstellen und $k = \pm o(f, a)$, je nachdem, ob eine Null- oder Polstelle vorliegt. Daraus folgt:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k \cdot (z-a)^{k-1} \cdot g(z) + (z-a)^k \cdot g'(z)}{(z-a)^k \cdot g(z)} = \frac{k}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Da g'/g nahe a holomorph ist, ist $\text{res}_a(f'/f) = k = \pm o(f, a)$. Mit dem Residuensatz ergibt sich die gewünschte Formel. ∎

Die Bezeichnung „Argument-Prinzip" rührt daher, dass Folgendes gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz &= \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))}\, dt = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_a^b \frac{(f \circ \gamma)'(t)}{f \circ \gamma(t)}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int\limits_{f \circ \gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = n(f \circ \gamma, 0).\end{aligned}$$

Das Integral misst die Änderung des Arguments beim Durchlaufen des Weges $f \circ \gamma$.

3.2.6. Folgerung

Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $G \subset\subset B$ ein positiv berandetes, einfach zusammenhängendes Gebiet, f meromorph auf B und ohne Null- und Polstellen auf ∂G. Besitzt f in G jeweils n Nullstellen und p Polstellen (mit Vielfachheit gezählt), so gilt:

$$\frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int\limits_{\partial G} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = n - p.$$

Der Beweis ist trivial, die Umlaufszahlen sind alle $= 1$.

3.2.7. Satz von Rouché

Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $f : B \to \mathbb{C}$ holomorph und $G \subset\subset B$ ein positiv berandetes, einfach zusammenhängendes Gebiet.

Ist h eine weitere holomorphe Funktion auf B und $|h(z)| < |f(z)|$ auf ∂G, so haben f und $f + h$ gleich viele Nullstellen (mit Vielfachheit) in G.

Beweis: Für $0 \le \lambda \le 1$ sei $f_\lambda(z) := f(z) + \lambda \cdot h(z)$. Dann ist f_λ auf B holomorph, und für $z \in \partial G$ gilt:

$$|f_\lambda(z)| \ge |f(z)| - \lambda \cdot |h(z)| > (1-\lambda) \cdot |h(z)| \ge 0.$$

Also hat f_λ auf ∂G keine Nullstellen. Nun sei N_λ die Anzahl der Nullstellen von f_λ in G. Der Wert des Integrals

$$N_\lambda = \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{\partial G} \frac{f_\lambda'(z)}{f_\lambda(z)}\,dz$$

hängt stetig von λ ab, liegt aber in $\mathbb{Z}$. Also ist $N_0 = N_1$. ∎

3.2.8. Beispiel

Wieviele Nullstellen hat $p(z) := z^4 - 4z + 2$ im Innern von $D_1(0)$?

Setzen wir $f(z) := -4z + 2$ und $h(z) := z^4$, so ist

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |4z - 2| \ge 4|z| - 2 \;=\; 2 \text{ auf } \partial D_1(0) \\ \text{und } |h(z)| &= |z|^4 \;=\; 1 \;<\; |f(z)| \text{ auf } \partial D_1(0). \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rouché müssen nun f und $p = f + h$ in $D_1(0)$ gleich viele Nullstellen besitzen. Aber f hat dort genau eine Nullstelle (nämlich $z = 1/2$). Also kann auch p nur eine Nullstelle in $D_1(0)$ besitzen.

3.2.9. Satz von Hurwitz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und (f_n) eine Folge von holomorphen Funktionen auf G, die lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Grenzfunktion f auf G konvergiert.

Haben die Funktionen f_n alle in G keine Nullstellen, so ist entweder $f(z) \equiv 0$, oder auch f hat in G keine Nullstellen.

Beweis: Es sei $f(z) \not\equiv 0$. Dann ist $N := \{z \in G \mid f(z) = 0\}$ leer oder diskret in G. Ist $z_0 \in G$ ein beliebiger Punkt, so gibt es auf jeden Fall ein $r > 0$, so dass $D = D_r(z_0)$ relativ kompakt in G liegt und f auf $\overline{D} \setminus \{z_0\}$ keine Nullstelle besitzt.

Dann sind die Funktionen $1/f$ und $1/f_n$ auf ∂D definiert und stetig, und $(1/f_n)$ konvergiert dort gleichmäßig gegen $1/f$. Wegen des Satzes von Weierstraß konvergiert auch (f_n') auf ∂D gleichmäßig gegen f'. Also ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int\limits_{\partial D} \frac{f_n'(\zeta)}{f_n(\zeta)}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int\limits_{\partial D} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta.$$

Die Folgerung aus dem Argumentprinzip besagte, dass die Integrale auf der linken Seite die Nullstellen der Funktionen f_n in D zählen und das Integral auf der rechten Seite die Nullstellen von f in D. Da die linke Seite verschwindet, kann f in z_0 keine Nullstelle haben. ∎

3.2.10. Folgerung

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und (f_n) eine Folge von holomorphen Funktionen auf G, die lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Grenzfunktion f auf G konvergiert.

Sind alle Funktionen f_n injektiv, so ist f konstant oder auch injektiv.

BEWEIS: f sei nicht konstant. Für jedes $z_0 \in G$ ist $f_n - f_n(z_0)$ ohne Nullstellen auf dem Gebiet $G' := G \setminus \{z_0\}$. Nach Hurwitz hat dann auch $f - f(z_0)$ keine Nullstellen auf G'.

Also ist $f(z_0) \neq f(w_0)$ für $z_0 \neq w_0$. Da z_0 beliebig gewählt werden kann, folgt die Behauptung. ■

3.3 Anwendungen

Der Residuensatz erlaubt es, gewisse reelle Integrale algebraisch zu berechnen.

Typ 1: Trigonometrische Integrale

Ist $R(x, y)$ eine komplexwertige rationale Funktion, so kann man das Integral

$$I := \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt$$

berechnen. Der Trick besteht darin, eine holomorphe oder meromorphe Funktion f zu finden, so dass man I als komplexes Kurvenintegral auffassen kann:

$$I = \int_\gamma f(z)\, dz, \qquad \text{mit } \gamma(t) := e^{\mathsf{i}\, t}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Ist $z = \gamma(t)$, so ist $z = \cos t + \mathsf{i} \sin t$ und $1/z = \overline{z} = \cos t - \mathsf{i} \sin t$. Damit ergibt sich:

$$\cos t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \text{ und } \sin t = \frac{1}{2\,\mathsf{i}}(z - \frac{1}{z}).$$

Da $\gamma'(t) = \mathsf{i}\, \gamma(t)$ ist, folgt:

$$R(\cos t, \sin t) = \frac{1}{\mathsf{i}\, \gamma(t)} \cdot R\left(\frac{1}{2}\Big(\gamma(t) + \frac{1}{\gamma(t)}\Big), \frac{1}{2\,\mathsf{i}}\Big(\gamma(t) - \frac{1}{\gamma(t)}\Big)\right) \cdot \gamma'(t).$$

Setzen wir also $f(z) := \dfrac{1}{z} \cdot R\left(\dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big), \dfrac{1}{2\,\mathsf{i}}\Big(z - \dfrac{1}{z}\Big)\right)$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt &= \frac{1}{\mathsf{i}} \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \frac{1}{\mathsf{i}} \int_\gamma f(z)\, dz \\ &= 2\pi \cdot \sum_{z \in D_1(0)} \operatorname{res}_z(f). \end{aligned}$$

3.3.1. Beispiel

Sei $I := \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}$, $a > 1$ reell. Hier ist $R(x, y) = \dfrac{1}{a + y}$, also

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{a + (z - 1/z)/(2\,\mathsf{i})} = \frac{2\,\mathsf{i}}{2a\,\mathsf{i}\, z + z^2 - 1} = \frac{2\,\mathsf{i}}{(z - z_1)(z - z_2)},$$

mit $z_{1,2} = \mathsf{i}\,(-a \pm \sqrt{a^2 - 1})$.

f hat zwei einfache Polstellen auf der imaginären Achse. Da $a > 1$ ist, ist

$$(a - 1)^2 = a^2 - 2a + 1 < a^2 - 1 < a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2,$$

also $a-1<\sqrt{a^2-1}<a+1$ und daher

$$-1 < -a+\sqrt{a^2-1} < 1, \quad \text{d.h. } z_1 = \mathsf{i}\,(-a+\sqrt{a^2-1}) \in D_1(0).$$

Andererseits ist $\left|-a-\sqrt{a^2-1}\right| = \left|a+\sqrt{a^2-1}\right| \ge |a| > 1$, also $z_2 \notin D_1(0)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t} &= 2\pi \cdot \mathrm{res}_{z_1}(f) = 2\pi \cdot \lim_{z\to z_1} \frac{2\,\mathsf{i}}{z-z_2} \\ &= \frac{4\pi\,\mathsf{i}}{z_1-z_2} = \frac{4\pi\,\mathsf{i}}{2\,\mathsf{i}\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.\end{aligned}$$

Typ 2: Uneigentliche rationale Integrale

Nun sollen Integrale der Form $I := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ betrachtet werden, mit einer rationalen Funktion $f(x) = p(x)/q(x)$, wobei $q(x)$ keine reelle Nullstelle besitzt. Natürlich muss erst einmal die Existenz des Integrals geklärt werden.

3.3.2. Satz

Sei $p(z)$ ein komplexes Polynom n-ten Grades. Dann gibt es Konstanten c, $C>0$ und ein $R>0$, so dass gilt:

$$c|z|^n \le |p(z)| \le C|z|^n \quad \textit{für } |z| \ge R.$$

Beweis: Es reicht, ein normiertes Polynom $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ zu betrachten. Man schreibe dann $p(z) = z^n(1+g(z))$ mit $g(z) := a_{n-1}/z + \cdots + a_0/z^n$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, $R>0$ hinreichend groß und $|z| \ge R$, so ist

$$|g(z)| \le \frac{|a_{n-1}|}{R} + \cdots + \frac{|a_0|}{R^n} < \varepsilon,$$

also $|p(z)| = |z|^n \cdot |1+g(z)| \le C \cdot |z|^n$, für $C := 1+\varepsilon$. Außerdem gilt: Wählt man $\varepsilon < 1$, so ist $c := 1-\varepsilon > 0$ und $|p(z)| \ge |z|^n \cdot (1-|g(z)|) \ge c \cdot |z|^n$. ∎

3.3.3. Folgerung

Sind $p(z)$ und $q(z)$ Polynome[1] mit $\deg(q) = \deg(p) + k$, $k \ge 0$, so gibt es eine Konstante $C>0$ und ein $R>0$, so dass für $|z| \ge R$ gilt:

$$\left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| \le C \cdot \frac{1}{|z|^k}.$$

[1] Mit $\deg(p)$ wird der Grad des Polynoms p bezeichnet.

Beweis: Ist $\deg(p) = m$ und $\deg(q) = n$, so gibt es positive Konstanten c_1, c_2, C_1, C_2 und R mit

$$c_1|z|^m \leq |p(z)| \leq C_1|z|^m \quad \text{und} \quad c_2|z|^n \leq |q(z)| \leq C_2|z|^n \;\text{ für } |z| \geq R.$$

Dann ist $\left|\dfrac{p(z)}{q(z)}\right| \leq C \cdot |z|^{-k}$, für $|z| \geq R$ und $C := \dfrac{C_1}{c_2}$. ∎

Bemerkung: Ist $k = 1$, so ist $\left|z \cdot \dfrac{p(z)}{q(z)}\right| \leq C$. Das bedeutet, dass $\left|z \cdot \dfrac{p(z)}{q(z)}\right|$ auch im Unendlichen beschränkt ist.

3.3.4. Satz

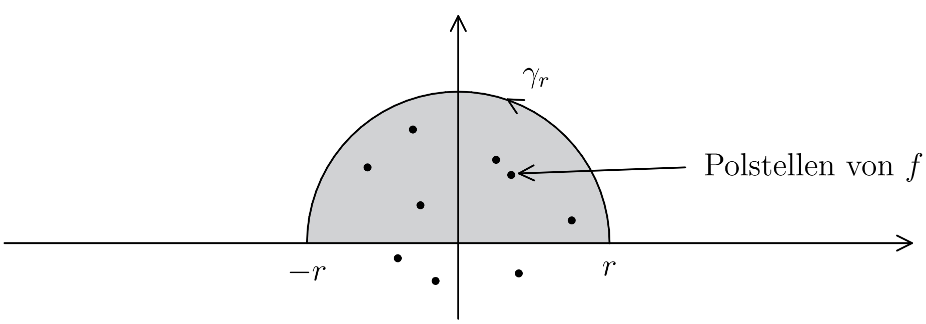
Sei $f(z) = p(z)/q(z)$ rational und ohne reelle Polstellen, $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$. *Dann existiert das uneigentliche Integral*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi\,\mathsf{i} \cdot \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{res}_z(f).$$

Beweis: Weil $k := \deg(q) - \deg(p) \geq 2$ ist, folgt die Existenz des uneigentlichen Integrals aus der Konvergenz des Integrals $\int_a^\infty (1/|x|^k)\,dx$ und dem Majoranten-Kriterium für uneigentliche Integrale.

Außerdem zeigen die vorangegangenen Abschätzungen, dass $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ ist. Weil f nur endlich viele Polstellen besitzt, gibt es ein $r > 0$, so dass alle Polstellen von f in $D_r(0)$ liegen.

Wir betrachten den Weg γ, der sich aus der Strecke zwischen $-r$ und r auf der reellen Achse und dem Halbkreis $\gamma_r(t) := re^{\mathsf{i}\,t}$ für $0 \leq t \leq \pi$ zusammensetzt.



Dann ist

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz + \int_{-r}^{r} f(x)\,dx = \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi\,\mathsf{i} \cdot \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{res}_z(f).$$

Man beachte, dass das Residuum höchstens in den Singularitäten $\neq 0$ ist, die Summe auf der rechten Seite ist also immer eine **endliche** Summe!

Da $|f(z)| \le C/|z|^2$ für große z ist, folgt:

$$\Big| \int_{\gamma_r} f(z)\,dz \Big| \le \pi r \frac{C}{r^2} = \frac{\pi C}{r} \to 0 \ \text{ für } \ r \to \infty.$$

Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\,\mathsf{i} \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(f), \qquad \text{bzw.} \quad = -2\pi\,\mathsf{i} \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z)<0} \mathrm{res}_z(f).$$

■

Man wird sich hier fragen, ob die Existenz des Integrals nicht bei dem durchgeführten Grenzübergang automatisch mitbewiesen wurde. Leider ist das nicht der Fall. Der Grenzwert

$$\text{C.H.} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt := \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} g(t)\,dt$$

heißt ***Cauchy'scher Hauptwert*** des uneigentlichen Integrals.[2] Er kann existieren, auch wenn das uneigentliche Integral divergiert. Wenn letzteres allerdings konvergiert, dann stimmt es mit dem Cauchy'schen Hauptwert überein. Die Abschätzungen im Beweis zeigten nur, dass der Cauchy'sche Hauptwert existiert. Deshalb waren die vorangegangenen Grad-Betrachtungen nötig, um vorweg die Existenz des uneigentlichen Integrals zu sichern.

3.3.5. Beispiel

Es soll das Integral $I := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$ berechnet werden.

Die Funktion $f(z) := \dfrac{z^2}{1+z^4}$ hat Polstellen in den Punkten

$$z_k = \zeta_{4,k} e^{\mathsf{i}\,\pi/4} = e^{\mathsf{i}\,(\pi+2\pi k)/4} = \cos(\frac{\pi+2\pi k}{4}) + \mathsf{i}\,\sin(\frac{\pi+2\pi k}{4}),$$

für $k = 0,1,2,3$. Dabei ist $\mathrm{Im}(z_k) > 0$ für $k = 0$ und $k = 1$.

Da die 4 Polstellen paarweise verschieden sind, liegen in

$$z_0 = e^{\mathsf{i}\,\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathsf{i}\,) \quad \text{und} \quad z_1 = \mathsf{i}\,e^{\mathsf{i}\,\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathsf{i}\,-1)$$

jeweils einfache Polstellen vor. Wie früher schon gezeigt wurde, ist

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{z_0}(f) &= \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4}\bar{z}_0 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-\mathsf{i}\,) \\ \text{und analog} \quad \mathrm{res}_{z_1}(f) &= \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4}\bar{z}_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1-\mathsf{i}\,), \end{aligned}$$

[2]In der Literatur wird häufig auch die Bezeichnung PV (für „principal value") benutzt.

und demnach

$$I = 2\pi \mathrm{i} \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}(1 - \mathrm{i}) + \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1 - \mathrm{i}) \right) = \frac{\pi \mathrm{i}}{2\sqrt{2}}(-2\mathrm{i}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Der Satz über uneigentliche rationale Integrale lässt sich folgendermaßen verallgemeinern:

3.3.6. Satz

Sei f meromorph auf einer offenen Umgebung der abgeschlossenen oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, mit endlich vielen Polstellen, von denen keine auf der reellen Achse liegt. Wenn $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ existiert und $\lim_{|z|\to\infty} z \cdot f(z) = 0$ ist, dann ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi \mathrm{i} \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(f).$$

Der Beweis funktioniert wie oben, benutzt aber folgende Abschätzung:

$$\Big| \int_{\gamma_r} f(z)\, dz \Big| \leq \pi r \cdot \sup_{|\gamma_r|} |f| = \pi \cdot \cdot \sup_{|\gamma_r|} |z \cdot f(z)| \;\to\; 0 \text{ für } r \to \infty.$$

3.3.7. Beispiel

Die uneigentlichen Integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 2x + 4}\, dx$ und $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 2x + 4}\, dx$ konvergieren, wie man leicht mit dem Majorantenkriterium zeigt. Also existiert auch

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\mathrm{i} x}}{x^2 + 2x + 4}\, dx.$$

Der Integrand ist die Einschränkung der Funktion $f(z) := e^{\mathrm{i} z}/(z^2 + 2z + 4)$, die offensichtlich meromorph mit den Polstellen $z_1 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ und $z_2 := -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ ist. In einer Umgebung der oberen Halbebene liegt nur z_1.

Für $z = x + \mathrm{i} y$ ist

$$|zf(z)| = \frac{|z| \cdot |e^{\mathrm{i} x} e^{-y}|}{|z^2 + 2z + 4|} \leq \frac{|z|}{|z|^2 - 2|z| - 4} = \frac{1}{|z| - 2 - 4/|z|},$$

und das strebt für $|z| \to \infty$ gegen null. Damit sind die Voraussetzungen des obigen Satzes erfüllt.

Weiter ist

$$\mathrm{res}_{z_1}(f) = \lim_{z\to z_1} \frac{e^{\mathrm{i} z}}{z - z_2} = \frac{e^{\mathrm{i}(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})}}{2\mathrm{i}\sqrt{3}} = \frac{e^{-\mathrm{i}} e^{-\sqrt{3}}}{2\mathrm{i}\sqrt{3}}.$$

Damit folgt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\mathrm{i}\,x}}{x^2+2x+4}\,dx = 2\pi\,\mathrm{i}\;\mathrm{res}_{z_1}(f) = \pi\cdot\frac{e^{-\mathrm{i}}\,e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}},$$

also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+2x+4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\cdot e^{-\sqrt{3}}\cos(1).$$

Typ 3: Fourier-Rücktransformation

Ist f integrierbar, so heißt

$$\widehat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}\,\omega t}\,dt$$

die ***Fourier-Transformierte*** von f.

Ist die Fourier-Transformierte $\widehat{f}$ gegeben, so kann man unter gewissen Umständen daraus wieder die Originalfunktion f gewinnen. Ist f stückweise stetig differenzierbar, so gilt die Formel

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{C.H.}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{\mathrm{i}\,\omega x}\,d\omega\,.$$

Deshalb ist der folgende Satz interessant:

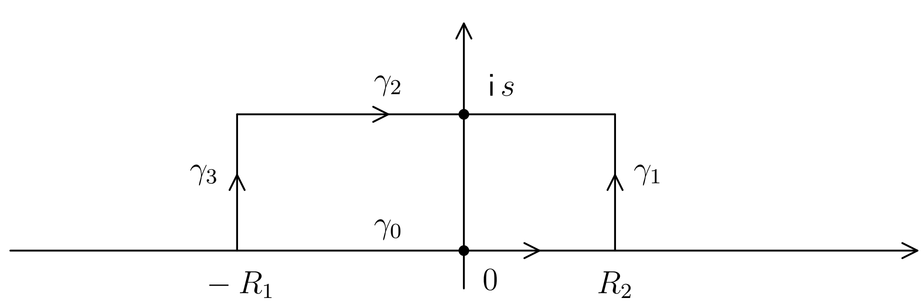
3.3.8. Satz

Sei F eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ mit endlich vielen Polstellen, von denen keine auf der reellen Achse liegt. Außerdem sei $|z\cdot F(z)|\le C$ für $|z|\to\infty$. Dann existiert für $t>0$ das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{\mathrm{i}\,xt}\,dx = \mathrm{i}\cdot\sum_{\mathrm{Im}(z)>0}\mathrm{res}_z\big(F(z)e^{\mathrm{i}\,zt}\big)\,.$$

Ist $t<0$, so muss man die Residuen in der unteren Halbebene heranziehen.

BEWEIS: Man benutzt die folgenden Integrationswege:



$$\begin{array}{rrcll} \text{Dabei sei} & \gamma_0(\tau) & := & \tau & \text{für } -R_1 \le \tau \le R_2, \\ & \gamma_1(\tau) & := & R_2 + \mathrm{i}\,\tau, & \text{für } 0 \le \tau \le s, \\ & \gamma_2(\tau) & := & \tau + \mathrm{i}\,s, & \text{für } -R_1 \le \tau \le R_2, \\ \text{und} & \gamma_3(\tau) & := & -R_1 + \mathrm{i}\,\tau, & \text{für } 0 \le \tau \le s. \end{array}$$

Man kann R_1, R_2 und s so groß wählen, dass die Polstellen alle im Innern des Zyklus $\Gamma := \gamma_0 + \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$ liegen. Für $\nu = 1, 2, 3$ sei

$$I_\nu(t) := \int_{\gamma_\nu} F(z)e^{\mathrm{i}\,zt}\,dz.$$

Dann folgt aus dem Residuensatz:

$$\int_{-R_1}^{R_2} F(x)e^{\mathrm{i}\,xt}\,dx + I_1(t) - I_2(t) - I_3(t) = 2\pi\,\mathrm{i} \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(F(z)e^{\mathrm{i}\,zt}).$$

Man schätzt nun die Integrale einzeln ab. Dabei kann man Folgendes verwenden:

a) Ist $z = x + \mathrm{i}\,y$, so ist $|e^{\mathrm{i}\,zt}| = e^{-yt}$.

b) Man kann $s := R_1 + R_2$ setzen.

c) Für großes R und $|z| \ge R$ ist $|F(z)| \le \dfrac{C}{|z|}$.

Für festes $t > 0$ und genügend großes R_1 und R_2 ergibt die Standardabschätzung:

$$\begin{aligned} |I_2(t)| &\le (R_1 + R_2) \cdot e^{-st} \cdot \sup_{|\gamma_2|}|F(z)| \le (R_1 + R_2) \cdot e^{-st} \cdot \frac{C}{\inf_{|\gamma_2|}|z|} \\ &= (R_1 + R_2) \cdot e^{-st} \cdot \frac{C}{R_1 + R_2} = C \cdot e^{-st} \longrightarrow 0 \text{ für } s \to \infty. \end{aligned}$$

Auf $|\gamma_1|$ ist $|z| = |R_2 + \mathrm{i}\,\tau| \ge R_2$, und daher gilt:

$$\begin{aligned} |I_1(t)| &\le \int_0^s |F(R_2 + \mathrm{i}\,\tau)| \cdot e^{-\tau t}\,d\tau \\ &\le \frac{C}{R_2} \int_0^s e^{-\tau t}\,d\tau \\ &= \frac{C}{R_2 t}(1 - e^{-st}) \longrightarrow 0 \text{ für } s, R_2 \to \infty. \end{aligned}$$

$I_3(t)$ wird analog abgeschätzt.

Also ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{\mathrm{i}\,xt}\,dx = 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(F(z)e^{\mathrm{i}\,zt}).$$

Die Existenz des Integrals wurde gleich mitbewiesen. ∎

3.3.9. Beispiel

Die Funktion $F(x) := \dfrac{2a}{x^2+a^2}$ (mit $a > 0$) ist Einschränkung der meromorphen Funktion

$$F(z) := \frac{2a}{(z - \mathrm{i}\,a)(z + \mathrm{i}\,a)},$$

die zwei einfache Polstellen aufweist. Sie erfüllt alle Bedingungen des Satzes, und es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{\mathrm{i}\,a}(F(z)e^{\mathrm{i}\,zt}) &= \frac{2a}{2\,\mathrm{i}\,a}\,e^{-at} = -\,\mathrm{i}\;e^{-at} \\ \text{und} \qquad \operatorname{res}_{-\mathrm{i}\,a}(F(z)e^{\mathrm{i}\,zt}) &= \frac{2a}{-2\,\mathrm{i}\,a}\,e^{at} = \mathrm{i}\;e^{at}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \text{Für } t > 0 \text{ ist} \quad f(t) &= \mathrm{i}\cdot\operatorname{res}_{\mathrm{i}\,a}(F(z)e^{\mathrm{i}\,zt}) = e^{-at}, \\ \text{und für } t < 0 \text{ ist} \quad f(t) &= -\,\mathrm{i}\cdot\operatorname{res}_{-\mathrm{i}\,a}(F(z)e^{\mathrm{i}\,zt}) = e^{at}. \end{aligned}$$

Zusammen ergibt das: $f(t) = e^{-a|t|}$.

Typ 4: Integranden mit Verzweigungssingularität

Ist $f(z)$ eine meromorphe Funktion mit endlich vielen Polstellen, von denen keine auf der **positiven** reellen Achse liegt, so kann man unter bestimmten Voraussetzungen folgendes Integral berechnen:

$$\int_0^\infty f(x)x^a\,\frac{dx}{x} = \int_0^\infty f(x)x^{a-1}\,dx \text{ (Mellin-Transformation).}$$

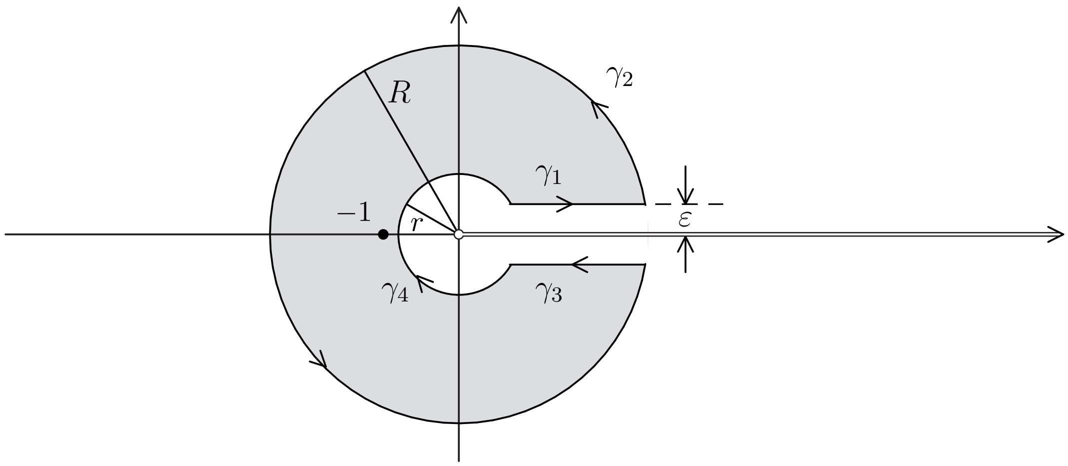
Um den Integranden als Einschränkung oder Grenzwert einer holomorphen Funktion $f(z)\cdot z^{a-1}$ auffassen zu können, muss man einen geeigneten Logarithmus-Zweig wählen. Überraschenderweise nimmt man nicht den Hauptzweig, sondern den Zweig $\log_{(0)}$, der auf der längs der positiven reellen Achse aufgeschlitzten Ebene $\widetilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+$ definiert ist. Setzt man $\lambda(z) := \log_{(0)}(z)$, so ist $z^a = e^{a\lambda(z)}$ ein dazu passender Zweig der Potenzfunktion.

3.3.10. Satz

Ist $\operatorname{Re}(a) > 0$, $\lim\limits_{z\to 0} f(z)z^a = 0$ *und* $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z)z^a = 0$, *so existiert das Integral*

$$\int_0^\infty f(x)x^{a-1}\,dx = \frac{2\pi\,\mathrm{i}}{1 - e^{2\pi\,\mathrm{i}\,a}} \cdot \sum_{w\in\widetilde{\mathbb{C}}} \operatorname{res}_w(f(z)z^{a-1}).$$

Beweis: Man benutzt den folgenden Integrationsweg:



Für reelles $x > 0$ gilt:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \lambda(x + \mathrm{i}\,\varepsilon) = \ln(x) \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon<0}} \lambda(x + \mathrm{i}\,\varepsilon) = \ln(x) + 2\pi\,\mathrm{i}\,,$$

und daher

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (x + \mathrm{i}\,\varepsilon)^{a-1} = x^{a-1} \;\text{ und }\; \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon<0}} (x + \mathrm{i}\,\varepsilon)^{a-1} = x^{a-1}\cdot e^{2\pi\,\mathrm{i}\,(a-1)} \;=\; x^{a-1}\cdot e^{2\pi\,\mathrm{i}\,a}.$$

Sind r und ε sehr klein,sowie R sehr groß, so liegen alle etwaigen Polstellen von f in dem von $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ berandeten Gebiet G.

Für $\nu = 1, \ldots, 4$ sei nun $I_\nu := \displaystyle\int_{\gamma_\nu} f(z)z^{a-1}\,dz$. Dann gilt:

$$|I_2| \le 2\pi R \cdot \sup_{|\gamma_2|} |f(z)z^{a-1}| = 2\pi \cdot \sup_{|\gamma_2|} |f(z)z^a| \;\longrightarrow 0 \quad (\text{für } R \to \infty)$$

und

$$|I_4| \le 2\pi r \cdot \sup_{|\gamma_4|} |f(z)z^{a-1}| = 2\pi \cdot \sup_{|\gamma_4|} |f(z)z^a| \;\longrightarrow 0 \quad (\text{für } r \to 0).$$

Schließlich gilt:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_1} f(z)z^{a-1}\,dz = \int_r^R f(x)x^{a-1}\,dx$$

und

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_3} f(z)z^{a-1}\,dz = -\int_r^R f(x)x^{a-1}e^{2\pi\,\mathrm{i}\,a}\,dx.$$

Also strebt $I_1 + I_3$ bei festem r und R für $\varepsilon \to 0$ gegen

$$(1 - e^{2\pi\,\mathrm{i}\,a}) \cdot \int_r^R f(x)x^{a-1}\,dx.$$

Ist dabei r genügend klein und R genügend groß, so nimmt $I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ den festen Wert $2\pi\,\mathsf{i} \cdot \sum_{w\in\widetilde{\mathbb{C}}} \operatorname{res}_w(f(z)z^{a-1})$ an. Lässt man $r \to 0$ und $R \to \infty$ streben, so erhält man die Existenz des Integrals $\int_0^\infty f(x)x^{a-1}\,dx$ und die Gültigkeit der gewünschten Gleichung. ∎

3.3.11. Zusatz

Seien p und q Polynome mit $\deg(q) > \deg(p)$ und (im Falle q) ohne Nullstellen auf der positiven reellen Achse. Ist $0 < \operatorname{Re}(a) < 1$, so erfüllen a und $f(z) = p(z)/q(z)$ die Voraussetzungen des obigen Satzes.

Beweis: Ist $z = re^{\mathsf{i}\,t} \in \widetilde{\mathbb{C}}$, $0 < t < 2\pi$, sowie $a = \alpha + \mathsf{i}\,\beta$ (mit $0 < \alpha < 1$), so ist

$$\begin{aligned} z^a &= \exp\bigl(a \cdot \log_{(0)} z\bigr) = \exp\bigl((\alpha + \mathsf{i}\,\beta)\cdot(\ln r + \mathsf{i}\,t)\bigr) \\ &= \exp\bigl((\alpha \ln r - \beta t + \mathsf{i}\,(\beta \ln r + \alpha t)\bigr) = r^\alpha \cdot e^{-\beta t} \cdot e^{\mathsf{i}\,\varphi(z)}, \end{aligned}$$

mit $\varphi(z) := \beta \ln r + \alpha t \in \mathbb{R}$. Also ist $|z^a| = |z|^\alpha \cdot e^{-\beta t}$. Weil β eine Konstante ist und t in $(0, 2\pi)$ liegt, bleibt $e^{-\beta t}$ beschränkt, die (positiven) Werte liegen zwischen $e^{-|\beta|2\pi}$ und $e^{+|\beta|2\pi}$.

a) Weil f im Nullpunkt keine Polstelle besitzt, strebt $|f(z)z^a| = |f(z)| \cdot r^\alpha \cdot e^{-\beta t}$ für $z \to 0$ gegen 0.

b) Nach Voraussetzung ist $|f(z)| \le C/|z|$ und $\alpha - 1 < 0$, und deshalb strebt $|f(z)z^a| \le C|z|^{a-1} = \dfrac{C}{r^{1-\alpha}}e^{-\beta t}$ für $|z| \to \infty$ gegen 0. ∎

3.3.12. Folgerung

Sei $f(z) = p(z)/q(z)$ eine rationale Funktion ohne Polstellen in $\mathbb{R}_+$, $\operatorname{grad}(q) > \operatorname{grad}(p)$ und $a \in \mathbb{C}$ mit $0 < \operatorname{Re}(a) < 1$. Dann ist

$$\int_0^\infty f(x)x^{a-1}\,dx = -\frac{\pi e^{-\pi\,\mathsf{i}\,a}}{\sin(\pi a)} \cdot \sum_{w\in\widetilde{\mathbb{C}}} \operatorname{res}_w(f(z)z^{a-1}).$$

Beweis: Wegen $e^{-\pi\,\mathsf{i}\,a} - e^{\pi\,\mathsf{i}\,a} = -2\,\mathsf{i}\,\sin(\pi a)$ ist

$$\frac{2\pi\,\mathsf{i}}{1 - e^{2\pi\,\mathsf{i}\,a}} = \frac{2\pi\,\mathsf{i}\,e^{-\pi\,\mathsf{i}\,a}}{e^{-\pi\,\mathsf{i}\,a} - e^{\pi\,\mathsf{i}\,a}} = -\frac{\pi e^{-\pi\,\mathsf{i}\,a}}{\sin(\pi a)}.$$ ∎

3.3.13. Beispiel

Berechnet werden soll das Integral $I := \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx$, mit $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$.

Hier ist $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$, mit $z = -1$ als einziger Polstelle. Es ist

$$\operatorname{res}_{-1}(f(z)z^{a-1}) = \lim_{z\to -1} z^{a-1} = (-1)^{a-1} = (e^{\pi\,\mathrm{i}})^{a-1} = -e^{\pi\,\mathrm{i}\,a},$$

also

$$I = -\frac{\pi e^{-\pi\,\mathrm{i}\,a}}{\sin(\pi a)} \cdot (-e^{\pi\,\mathrm{i}\,a}) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

Typ 4: Pole auf dem Integrationsweg

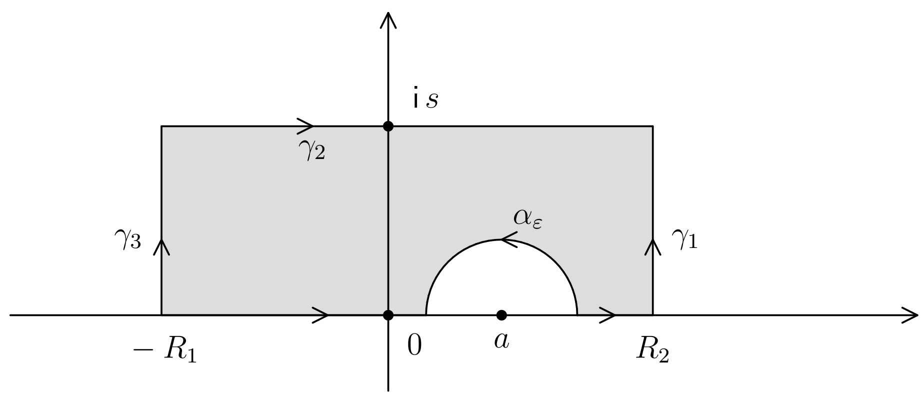
Bisher haben wir immer vermieden, dass Pole auf dem Integrationsweg liegen. Manchmal lohnt es sich aber, auch diesen Fall einzubeziehen.

3.3.14. Satz

Sei f meromorph mit endlich vielen Polstellen und genau einem einfachen Pol $a \in \mathbb{R}$. Außerdem sei $|z \cdot f(z)|$ für $|z| \to \infty$ beschränkt. Dann existiert der Cauchy'sche Hauptwert

$$\begin{aligned}\text{C.H.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{\mathrm{i}\,x}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\int_{-\infty}^{a-\varepsilon} f(x)e^{\mathrm{i}\,x}\,dx + \int_{a+\varepsilon}^{+\infty} f(x)e^{ix}\,dx\Big] \\ &= 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{res}_z(f(z)e^{\mathrm{i}\,z}) + \pi\,\mathrm{i}\,\operatorname{res}_a(f(z)e^{\mathrm{i}\,z}).\end{aligned}$$

Beweis: Wir benutzen die folgenden Integrationswege:



Dabei sei $\alpha_\varepsilon : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\alpha_\varepsilon(t) := a + \varepsilon e^{\mathrm{i}\,t}$. Ist F meromorph mit endlich vielen Polstellen und genau einem einfachen Pol $a \in \mathbb{R}$, so kann man F in der Nähe von a folgendermaßen darstellen:

$$F(z) = \frac{c}{z-a} + g(z), \text{ mit einer holomorphen Funktion } g \text{ und } c = \operatorname{res}_a(F).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_\varepsilon} F(z)\,dz &= c\int_{\alpha_\varepsilon} \frac{dz}{z-a} + \int_{\alpha_\varepsilon} g(z)\,dz \\ &= c\int_0^\pi \frac{\mathrm{i}\,\varepsilon e^{\mathrm{i}\,t}}{\varepsilon e^{\mathrm{i}\,t}}\,dt + \int_{\alpha_\varepsilon} g(z)\,dz \;=\; \operatorname{res}_a(F)\cdot\pi\,\mathrm{i} + \int_{\alpha_\varepsilon} g(z)\,dz.\end{aligned}$$

Weil $\left|\int_{\alpha_\varepsilon} g(z)\right| \leq \pi\varepsilon \cdot \sup_{|\alpha_\varepsilon|}|g|$ für $\varepsilon \to 0$ gegen null konvergiert, ist

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\alpha_\varepsilon} F(z)\,dz = \operatorname{res}_a(F)\cdot\pi\,\mathsf{i}\,.$$

Das bleibt richtig, wenn man $F(z)$ durch $f(z)e^{\mathsf{i}\,z}$ ersetzt. Der Rest folgt mit den schon bekannten Abschätzungen (aus dem Beweis für die Fourier-Rücktransformation). ∎

3.3.15. Beispiel

Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty}\big((\sin x)/x\big)\,dx$ existiert, wie man schon in Analysis 1 zeigt. Um es mit Hilfe des Residuenkalküls zu berechnen, muss man allerdings die Funktion $f(z) := e^{\mathsf{i}\,z}/z$ betrachten, und die hat einen Pol im Nullpunkt. Die Funktion $\sin z$ nimmt für wachsenden Imaginärteil von z immer größere Werte an, so dass man nicht mit $(\sin z)/z$ arbeiten kann. Nun ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\sin x}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx\Big)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Im}\Big(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{e^{\mathsf{i}\,x}}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{e^{\mathsf{i}\,x}}{x}\,dx\Big)\\
&= \operatorname{Im}\Big[2\pi\,\mathsf{i}\sum_{\operatorname{Im}(z)>0}\operatorname{res}_z\Big(\frac{e^{\mathsf{i}\,z}}{z}\Big) + \pi\,\mathsf{i}\,\operatorname{res}_0\Big(\frac{e^{\mathsf{i}\,z}}{z}\Big)\Big]\\
&= \operatorname{Im}\Big(\pi\,\mathsf{i}\,\operatorname{res}_0\big(\frac{e^{\mathsf{i}\,z}}{z}\big)\Big) \;=\; \pi,
\end{aligned}$$

denn es ist

$$\operatorname{res}_0\Big(\frac{e^{\mathsf{i}\,z}}{z}\Big) = \operatorname{res}_0\Big(\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathsf{i}\,z)^n}{n!}\Big) = 1.$$