2 Integration im Komplexen

2.1 Komplexe Kurvenintegrale

Wie kann man ein komplexes Integral $\int_p^q f(z)\,dz$ definieren?

Ist f auf einem Gebiet G definiert, so braucht die Verbindungsstrecke zwischen p und q nicht zu G zu gehören. Allerdings kann man die Punkte innerhalb von G durch einen stetigen Weg α (und sogar durch einen Streckenzug) verbinden. Ob man f entlang α integrieren kann und inwiefern das Ergebnis vom Weg abhängt, wird zu untersuchen sein.

Wir führen noch folgende Sprachregelung ein: Ein ***Integrationsweg*** in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist ein stückweise stetig differenzierbarer Weg $\alpha : [a, b] \to G$.

Definition (komplexes Kurvenintegral):
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und $\alpha : [a, b] \to G$ ein Integrationsweg. Dann wird das ***komplexe Kurvenintegral*** von f über α definiert durch

$$\boxed{\int_\alpha f(z)\,dz := \int_a^b f\big(\alpha(t)\big) \cdot \alpha'(t)\,dt.}$$

Man kann das Integral natürlich schon bilden, wenn f nur auf $|\alpha|$ definiert ist.

2.1.1. Satz (Eigenschaften komplexer Kurvenintegrale)

1. *Ist $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ eine stetig differenzierbare,* ***streng monoton wachsende Parametertransformation****, so ist*
$$\int_{\alpha\circ\varphi} f(z)\,dz = \int_\alpha f(z)\,dz.$$
2. *Für stetige Funktionen f_1, f_2 und Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ist*
$$\int_\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2)(z)\,dz = c_1 \cdot \int_\alpha f_1(z)\,dz + c_2 \cdot \int_\alpha f_2(z)\,dz.$$
3. *Es gilt die* ***Standardabschätzung***
$$\Big| \int_\alpha f(z)\,dz \Big| \le L(\alpha) \cdot \max_{z\in|\alpha|} |f(z)|,$$
wobei $L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\,dt$ die ***Länge*** *von α ist.*

4. *Sind f und f_ν stetige Funktionen auf $|\alpha|$und konvergiert (f_ν) auf $|\alpha|$ gleichmäßig gegen f, so ist*

$$\int_\alpha f(z)\,dz = \lim_{\nu\to\infty}\int_\alpha f_\nu(z)\,dz.$$

Beweis: 1) Ist φ eine stetig differenzierbare Parametertransformation und außerdem streng monoton wachsend, so ist $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$, und die Substitutionsregel ergibt:

$$\begin{aligned}\int_\alpha f(z)\,dz &= \int_a^b f\circ\alpha(t)\alpha'(t)\,dt = \int_c^d f\circ\alpha(\varphi(s))\alpha'(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds \\ &= \int_c^d f\circ(\alpha\circ\varphi)(s)(\alpha\circ\varphi)'(s)\,ds = \int_{\alpha\circ\varphi} f(z)\,dz.\end{aligned}$$

2) Die Linearität ist trivial.

3) Es ist $\left|\int_\alpha f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(\alpha(t))\alpha'(t)|\,dt.$

Setzt man $M := \max_{z\in|\alpha|}|f(z)|$, so ist

$$\int_a^b |f(\alpha(t))\alpha'(t)|\,dt \le M\cdot\int_a^b|\alpha'(t)|\,dt = M\cdot L(\alpha).$$

Zu (4): Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein n_0, so dass $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/L(\alpha)$ für $n \ge n_0$ und $z\in|\alpha|$ ist. Dann folgt für alle $n\ge n_0$ die Ungleichug

$$\begin{aligned}\left|\int_\alpha f_n(z)\,dz - \int_\alpha f(z)\,dz\right| &\le \left|\int_\alpha \big(f_n(z)-f(z)\big)\,dz\right| \\ &\le L(\alpha)\cdot\max_{|\alpha|}|f_n(z)-f(z)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Also konvergiert die Folge der Integrale $\int_\alpha f_n(z)\,dz$ gegen $\int_\alpha f(z)\,dz$. ∎

2.1.2. Satz (Integrationsregel)

Ist $f : G\to\mathbb{C}$ holomorph, f' stetig und $\alpha : [a,b]\to G$ ein stetig differenzierbarer Weg, so ist

$$\int_\alpha f'(z)\,dz = f\big(\alpha(b)\big) - f\big(\alpha(a)\big).$$

Beweis: Auch $f\circ\alpha : [a,b]\to\mathbb{C}$ ist stetig differenzierbar, mit $(f\circ\alpha)'(t) = f'(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)$ (weil f holomorph ist). Daher ist

$$\int_\alpha f'(z)\,dz = \int_a^b f'\big(\alpha(t)\big)\cdot\alpha'(t)\,dt = \int_a^b (f\circ\alpha)'(t)\,dt = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

Man beachte, dass der Strich hier einmal die komplexe und einmal die reelle Ableitung bezeichnet! ∎

Definition (Stammfunktion):
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Eine ***Stammfunktion*** von f ist eine holomorphe Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$.

Bemerkung: Je zwei Stammfunktionen unterscheiden sich höchstens um eine Konstante (denn auf einem Gebiet ist eine holomorphe Funktion mit verschwindender Ableitung konstant).

2.1.3. Beispiele

1. Sei $z_0 \neq 0$ und $\alpha(t) := t \cdot z_0$ (für $0 \leq t \leq 1$) die Verbindungsstrecke von 0 und z_0. Weiter sei $f(z) := z^n$. Dann ist

$$\int_\alpha f(z)\,dz = \int_0^1 f(t \cdot z_0) \cdot z_0\,dt = z_0^{n+1} \cdot \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1} z_0^{n+1}.$$

Dieses Ergebnis kann man auch auf anderem Wege erhalten. Setzt man $F(z) := z^{n+1}/(n+1)$, so ist $F'(z) = f(z)$ und daher

$$\int_\alpha f(z)\,dz = F(\alpha(1)) - F(\alpha(0)) = F(z_0) - F(0) = \frac{1}{n+1} z_0^{n+1}.$$

2. Die Kreislinie $\partial D_r(z_0)$ wird durch $\alpha(t) := z_0 + r \cdot e^{\mathrm{i}\,t}$ (mit $0 \leq t \leq 2\pi$) parametrisiert. Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, benutzen wir immer diese Parametrisierung.

Ein **fundamentaler Baustein der Funktionentheorie** ist die Formel

$$\boxed{\int_{\partial D_r(z_0)} (z - z_0)^n\,dz := \int_\alpha (z - z_0)^n\,dz = \begin{cases} 2\pi\,\mathrm{i} & \text{für } n = -1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}}$$

Beweis: Es ist

$$\int_\alpha \frac{1}{z - z_0}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} e^{-\mathrm{i}\,t} \cdot r\,\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\,t}\,dt = \mathrm{i} \cdot \int_0^{2\pi} dt \;=\; 2\pi\,\mathrm{i}\,,$$

und für $n \neq -1$ ist $F_n(z) := \frac{1}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$ Stammfunktion von $(z - z_0)^n$, also $\displaystyle\int_\alpha (z - z_0)^n\,dz = F_n(\alpha(2\pi)) - F_n(\alpha(0)) = 0$.

Unter einer ***Kette (von Wegen)*** in einem Gebiet G versteht man eine Abbildung Γ von der Menge aller (Äquivalenzklassen von) Integrationswege(n) in G nach $\mathbb{Z}$, die nur endlich oft einen Wert $\neq 0$ annimmt. Vereinfacht ausgedrückt sind Ketten formale ganzzahlige Linearkombinationen von Wegen:

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{N} n_j \alpha_j \ \ (\text{mit } n_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\ ).$$

Die Menge $|\Gamma| := |\alpha_1| \cup \ldots \cup |\alpha_N|$ heißt die ***Spur*** von Γ).

Ketten können komponentenweise addiert und mit ganzen Zahlen multipliziert werden:

$$\begin{aligned} (\Gamma + \Gamma')(\alpha) &:= \Gamma(\alpha) + \Gamma'(\alpha), \\ (n \cdot \Gamma)(\alpha) &:= n \cdot \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

Dadurch wird die Menge aller Ketten in G zu einer abelschen Gruppe (oder einem $\mathbb{Z}$-Modul).

Jeder einzelne Integrationsweg α kann vermöge

$$\alpha(\beta) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

als Kette aufgefaßt werden. Auch hier ist zu beachten, daß äquivalente Wege als gleich aufgefaßt werden.

Definition:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\Gamma = \sum_{i=1}^{N} n_i \alpha_i$ eine Kette in G und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Dann definiert man:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz := \sum_{i=1}^{N} n_i \int_{\alpha_i} f(z)\, dz.$$

Ist $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, so kann man den entgegengesetzt durchlaufenen Weg α_- mit der Kette $-\alpha = (-1) \cdot \alpha$ identifizieren: Da man α_- aus α durch die Parametertransformation ι mit $\iota(t) = a + b - t$ (also $\iota(b) = a$, $\iota(a) = b$ und $\iota'(t) = -1$) gewinnt, gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_-} f(z)\, dz &= \int_a^b f(\alpha \circ \iota(t))(\alpha \circ \iota)'(t)\, dt = \int_a^b f \circ \alpha(\iota(t))\alpha'(\iota(t))\iota'(t)\, dt \\ &= \int_b^a f \circ \alpha(s)\alpha'(s)\, ds = -\int_a^b f \circ \alpha(s)\alpha'(s)\, ds = -\int_\alpha f(z)\, dz. \end{aligned}$$

Sind $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ und $\beta : [c, d] \to \mathbb{C}$ zwei Integrationswege mit $\alpha(b) = \beta(c)$, so kann man den zusammengesetzten Weg $\alpha + \beta$ auf $[0, 1]$ definieren durch

$$(\alpha+\beta)(t) := \begin{cases} \alpha(\varphi(t)) & \text{für } 0 \le t \le 1/2, \\ \beta(\psi(t)) & \text{für } 1/2 \le t \le 1 \end{cases},$$

wobei $\varphi : [0, 1/2] \to [a, b]$ und $\psi : [1/2, 1] \to [c, d]$ durch $\varphi(t) := a + 2t(b-a)$ bzw. $\psi(t) := c + (2t-1)(d-c)$ definiert werden. Dann ist

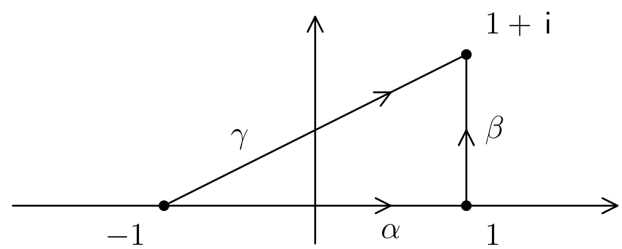
$$\begin{aligned} \int_{\alpha+\beta} f(z)\,dz &= \int_0^{1/2} f(\alpha\circ\varphi(t))(\alpha\circ\varphi)'(t)\,dt + \int_{1/2}^1 f(\beta\circ\psi(t))(\beta\circ\psi)'()\,dt \\ &= \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt + \int_c^d f(\beta(s))\beta'(s)\,ds \\ &= \int_\alpha f(z)\,dz + \int_\beta f(z)\,dz. \end{aligned}$$

Also entspricht der zusammengesetzte Weg $\alpha+\beta$ tatsächlich der **Kette** $\alpha+\beta$. Ist nicht $\alpha(b) = \beta(c)$, so ist zumindest die Kette $\alpha+\beta$ definiert.

2.1.4. Beispiel

Wir betrachten die Wege $\alpha, \beta, \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit

$$\alpha(t) := -1 + 2t, \quad \beta(t) := 1 + \mathrm{i}\,t \quad \text{und} \quad \gamma(t) := -1 + t(2 + \mathrm{i}\,).$$



Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\alpha+\beta} \overline{z}\,dz &= \int_0^1 (-1+2t)\cdot 2\,dt + \int_0^1 (1 - \mathrm{i}\,t)\cdot \mathrm{i}\,dt \\ &= 2\cdot(-t+t^2)\Big|_0^1 + \mathrm{i}\cdot(t - \frac{\mathrm{i}}{2}t^2)\Big|_0^1 \\ &= 2\cdot(-1+1) + \mathrm{i}\cdot(1-\frac{\mathrm{i}}{2}) \;=\; \mathrm{i} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und} \qquad \int_\gamma \overline{z}\,dz &= \int_0^1 (-1+2t-\mathrm{i}\,t)(2+\mathrm{i}\,)\,dt \\ &= (2+\mathrm{i}\,)\cdot(-t + \frac{2-\mathrm{i}}{2}t^2)\Big|_0^1 \\ &= (2+\mathrm{i}\,)\cdot(-1+1-\frac{\mathrm{i}}{2}) \;=\; -\mathrm{i} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Das komplexe Kurvenintegral über $f(z) := \overline{z}$ hängt vom Integrationsweg ab!

2.1.5. Hauptsatz über Kurvenintegrale

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *f besitzt auf G eine Stammfunktion.*

2. *Es ist $\displaystyle\int_\alpha f(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg α in G.*

Beweis:

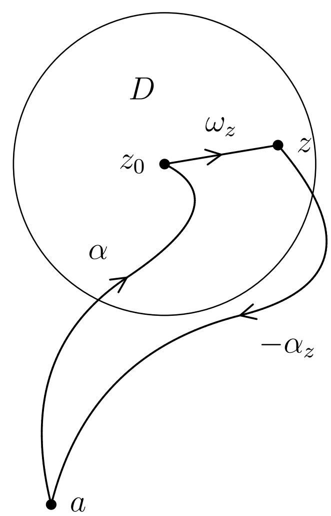
$(1) \implies (2)$: Ist F eine Stammfunktion von f und $\alpha : [a,b] \to G$ ein Integrationsweg, so ist

$$\int_\alpha f(z)\,dz = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a)).$$

Ist α geschlossen, so verschwindet die rechte Seite und damit das Integral.

$(2) \implies (1)$: Sei $\int_\alpha f(\zeta)\,d\zeta = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg, und $a \in G$ ein einmalig fest gewählter Punkt. Zu $z \in G$ sei jeweils ein Integrationsweg $\alpha_z : [0,1] \to G$ gewählt, der a mit z verbindet. Dann setze man

$$F(z) := \int_{\alpha_z} f(\zeta)\,d\zeta.$$



Wegen der Voraussetzung ist die Definition von F unabhängig von der Wahl des Weges α_z. Zu zeigen bleibt: F ist auf G komplex differenzierbar, und es ist $F' = f$.

Dazu betrachten wir einen beliebigen Punkt $z_0 \in G$ und wählen eine offene Kreisscheibe D um z_0, die noch ganz in G enthalten ist. Für $z \in D$ sei $\omega_z(t) := z_0 + t \cdot (z - z_0)$ die (in D enthaltene) Verbindungsstrecke zwischen z_0 und z. Weiter sei $\alpha := \alpha_{z_0}$.

Dann ist $\gamma := \alpha + \omega_z - \alpha_z$ ein geschlossener Weg, und es gilt:

$$\begin{aligned} 0 = \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta &= \int_\alpha f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\omega_z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\alpha_z} f(\zeta)\,d\zeta \\ &= F(z_0) - F(z) + \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) \cdot (z - z_0)\,dt \\ &= F(z_0) - F(z) + \Delta(z) \cdot (z - z_0), \end{aligned}$$

mit $\displaystyle\Delta(z) := \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\,dt.$

Offensichtlich ist $\Delta(z_0) = f(z_0)$, und für $z \in D$ ist

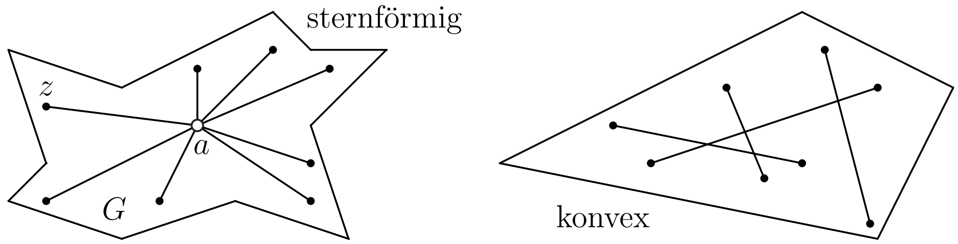
$$|\Delta(z) - \Delta(z_0)| = \Big| \int_0^1 [f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)]\, dt \Big| \le \max_{0 \le t \le 1} |f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)|.$$

Da f stetig ist, strebt die rechte Seite für $z \to z_0$ gegen 0. Hieraus folgt die Stetigkeit von Δ in z_0. Damit ist F in z_0 komplex differenzierbar und $F'(z_0) = f(z_0)$. ∎

Definition (sternförmige und konvexe Gebiete):

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt ***sternförmig bezüglich*** $a \in G$, falls mit jedem $z \in G$ auch die Verbindungsstrecke von a und z ganz in G liegt.

Das Gebiet heißt ***konvex***, falls mit zwei Punkten $z, w \in G$ stets auch deren Verbindungsstrecke ganz in G liegt.



Jedes konvexe Gebiet ist sternförmig, aber die Umkehrung ist i.A. falsch. Sind G_1 und G_2 konvex und ist $a \in G_1 \cap G_2$, so ist $G_1 \cup G_2$ bezüglich a sternförmig.

Das „Innere eines Dreiecks“ (die exakte Formulierung sei dem Leser überlassen) nennen wir ein ***Dreiecksgebiet***. Jedes Dreiecksgebiet ist konvex, Nimmt man den Rand hinzu, so spricht man von einem ***abgeschlossenen Dreieck***. Der Rand kann durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg parametrisiert werden.

2.1.6. Der Hauptsatz für Sterngebiete

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein bezüglich $a \in G$ sternförmiges Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *f besitzt auf G eine Stammfunktion.*
2. *Es ist $\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$, das a als Eckpunkt hat.*

Beweis:

(1) $\Longrightarrow$ (2) : Klar!

(2) $\Longrightarrow$ (1) : Das ist eine Verschärfung des Hauptsatzes über Kurvenintegrale im Falle von sternförmigen Gebieten. Der Beweis wird völlig analog geführt, allerdings definiert man diesmal $F(z)$ als Integral über die **Verbindungsstrecke** von a und z, was wegen der Sternförmigkeit möglich ist. ∎

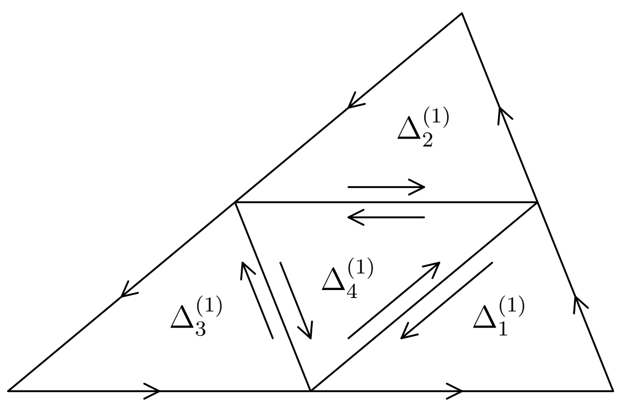
2.2 Der Cauchy'sche Integralsatz

2.2.1. Satz von Goursat

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine ***holomorphe*** *Funktion und $\triangle \subset G$ ein abgeschlossenes Dreiecksgebiet. Dann gilt:*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0.$$

Beweis: Wir schreiben $\Delta = \Delta^{(0)}$. Indem wir die Seiten von Δ halbieren, unterteilen wir Δ in 4 kongruente Teildreiecke $\Delta_1^{(1)}, \ldots, \Delta_4^{(1)}$.



Sei $\gamma = \partial\Delta_1^{(1)} + \partial\Delta_2^{(1)} + \partial\Delta_3^{(1)} + \partial\Delta_4^{(1)}$. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial\Delta_k^{(1)}} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z)\,dz,$$

denn die Integrale über die Strecken im Innern des Dreiecks heben sich gegenseitig auf. Also ist

$$\Big| \int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z)\,dz \Big| \leq 4 \cdot \max_k \Big| \int_{\partial\Delta_k^{(1)}} f(z)\,dz \Big|.$$

Nun wählt man unter den Dreiecken $\Delta_1^{(1)}, \ldots, \Delta_4^{(1)}$ dasjenige aus, bei dem der Betrag des Integrals am größten ist, und nennt es $\Delta^{(1)}$. Dann ist

$$\Big| \int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z)\,dz \Big| \leq 4 \cdot \Big| \int_{\partial\Delta^{(1)}} f(z)\,dz \Big|.$$

Wiederholt man diese Prozedur, so erhält man eine Folge von Dreiecken

$$\Delta = \Delta^{(0)} \supset \Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \supset \ldots$$

mit $$\Big| \int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z)\,dz \Big| \leq 4^n \cdot \Big| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\,dz \Big| \text{ und } L(\partial\Delta^{(n)}) = 2^{-n} \cdot L(\partial\Delta^{(0)}).$$

Da alle $\Delta^{(i)}$ kompakt und $\neq \varnothing$ sind, enthält $\bigcap_{n\geq 0} \Delta^{(n)}$ einen Punkt z_0, und da der Durchmesser der Dreiecke beliebig klein wird, ist z_0 eindeutig bestimmt.

Jetzt kommt der entscheidende Trick! Wir nutzen die komplexe Differenzierbarkeit von f in z_0 aus. Es gibt eine in z_0 stetige Funktion A, so dass gilt:

1. $f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot (f'(z_0) + A(z))$.
2. $A(z_0) = 0$.

Die affin-lineare Funktion $\lambda(z) := f(z_0) + (z - z_0) \cdot f'(z_0)$ hat auf G eine Stammfunktion, nämlich

$$\Lambda(z) := (f(z_0) - z_0 \cdot f'(z_0)) \cdot z + \frac{f'(z_0)}{2} \cdot z^2.$$

Also ist $\displaystyle\int_{\partial\Delta^{(n)}} \lambda(z)\, dz = 0$ für alle n. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\, dz \Big| &= \Big| \int_{\partial\Delta^{(n)}} (z - z_0)A(z)\, dz \Big| \\ &\leq L(\partial\Delta^{(n)}) \cdot \max_{\partial\Delta^{(n)}}(|z - z_0| \cdot |A(z)|) \\ &\leq L(\partial\Delta^{(n)})^2 \cdot \max_{\partial\Delta^{(n)}}(|A(z)|. \end{aligned}$$

Setzt man alles zusammen, so erhält man:

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \Big| &\leq 4^n \cdot \Big| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\, dz \Big| \\ &\leq 4^n \cdot L(\partial\Delta^{(n)})^2 \cdot \max_{\partial\Delta^{(n)}}|A(z)| \\ &= L(\partial\Delta)^2 \cdot \max_{\partial\Delta^{(n)}}|A(z)|. \end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ strebt die rechte Seite gegen 0. ∎

Der Satz von Goursat lässt sich noch ein wenig verschärfen.

2.2.2. Satz von Goursat in verschärfter Form

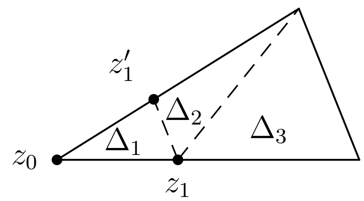
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann gilt für jedes abgeschlossene Dreiecksgebiet $\triangle \subset G$:

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\, dz = 0.$$

Beweis: Wir können annehmen, dass f überall bis auf einen einzigen Ausnahmepunkt z_0 holomorph ist. Nun unterscheiden wir mehrere Fälle:

1. Fall: z_0 ist Eckpunkt von $\triangle$.

Dann zerlegen wir $\triangle$ folgendermaßen in drei Teildreiecke:



Aus dem gewöhnlichen Satz von Goursat folgt:

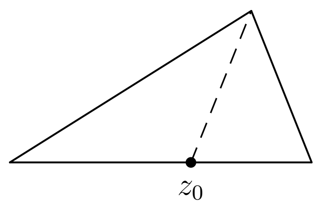
$$\int_{\partial\triangle_2} f(z)\,dz = \int_{\partial\triangle_3} f(z)\,dz = 0, \qquad \text{also} \qquad \int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = \int_{\partial\triangle_1} f(z)\,dz,$$

unabhängig davon, wie z_1 und z_1' gewählt werden. Dann ist

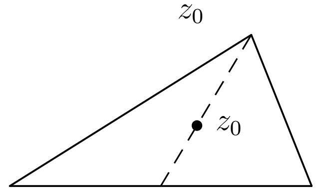
$$|\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz| \le L(\partial\triangle_1) \cdot \sup_{\triangle}|f(z)|,$$

und die rechte Seite strebt gegen Null, wenn z_1 und z_1' gegen z_0 wandern.

2. Fall: z_0 liegt auf einer Seite von $\triangle$, ist aber kein Eckpunkt. Dann zerlegt man $\triangle$ in zwei Teildreiecke, auf die beide jeweils der erste Fall anwendbar ist:



3. Fall: z_0 liegt im Innern von $\triangle$. Diesen Fall kann man auf den 2. Fall reduzieren:



Liegt z_0 außerhalb $\triangle$, so ist überhaupt nichts zu zeigen. ∎

2.2.3. Satz (über die Existenz von Stammfunktionen)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann besitzt f auf G eine Stammfunktion.

Beweis: Sei G sternförmig bezüglich $a \in G$. Nach dem verschärften Satz von Goursat ist $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$, insbesondere für jedes Dreieck, das a als Eckpunkt hat. Daher besitzt f eine Stammfunktion. ∎

2.2.4. Cauchy'scher Integralsatz (für Sterngebiete)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg α in G:

$$\int_{\alpha} f(z)\,dz = 0.$$

BEWEIS: f besitzt eine Stammfunktion, und daraus folgt die Behauptung. ■

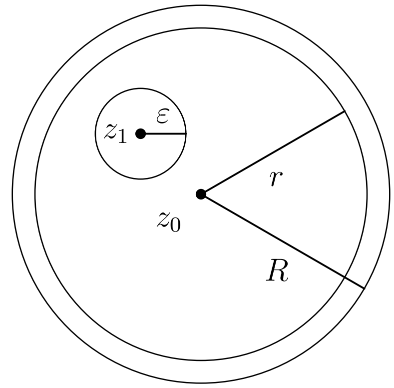
2.2.5. Lemma

Sei $R > 0$ und $f : D_R(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph außerhalb des Punktes $z_1 \in D_R(z_0)$, $z_1 \neq z_0$.

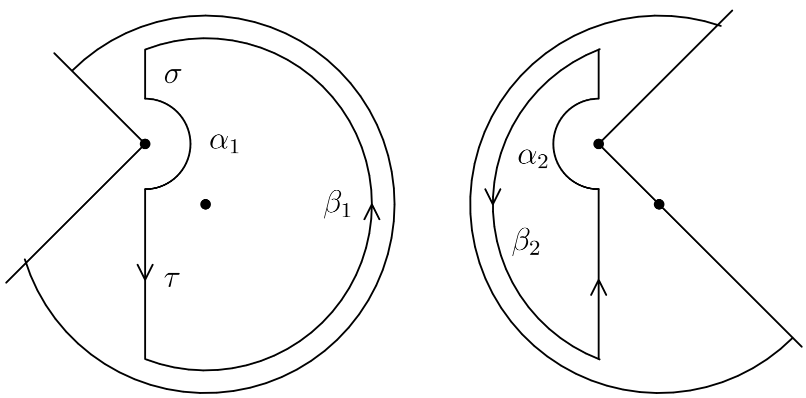
Wir wählen ein r mit $0 < r < R$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass noch $D_\varepsilon(z_1) \subset D_r(z_0)$ ist.

Dann ist

$$\int_{\partial D_r(z_0)} f(z)\,dz = \int_{\partial D_\varepsilon(z_1)} f(z)\,dz.$$



BEWEIS: Wir zeigen, dass die Differenz der Integrale verschwindet. Dazu fassen wir diese als Summe zweier Integrale über geschlossene Wege auf, auf die sich jeweils der Cauchy'sche Integralsatz anwenden lässt:



Bezeichnen wir die beiden Verbindungsstrecken vom kleinen inneren Kreis zum großen äußeren Kreis (von oben nach unten orientiert) mit σ und τ und die positiv orientierten Teil-Kreislinien mit α_1, α_2 und β_1, β_2, so gilt:

$$(\beta_1 + \sigma - \alpha_1 + \tau) + (\beta_2 - \tau - \alpha_2 - \sigma) = (\beta_1 + \beta_2) - (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Die beiden geschlossenen Wege auf der linken Seite der Gleichung verlaufen jeweils in einem sternförmigen Gebiet, in dem f holomorph ist. Nach Cauchy ist das Integral über diese Wege $= 0$, und daraus folgt auch schon die Behauptung. ■

Definition (relativ kompakte Teilmenge):

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $B \subset G$ eine offene Teilmenge. Wir sagen, B liegt ***relativ kompakt*** in G (in Zeichen: $B \subset\subset G$), wenn $\overline{B}$ kompakt und in G enthalten ist.

2.2.6. Folgerung

Ist $D \subset \mathbb{C}$ eine Kreisscheibe und $z \in \mathbb{C} \setminus \partial D$, so ist

$$\int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 2\pi\,\mathrm{i} & \text{falls } z \in D, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: 1) Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $D_\varepsilon(z) \subset\subset D$ ist. Für $\zeta \neq z$ ist $f(\zeta) := 1/(\zeta - z)$ holomorph. Also ist

$$\int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi\,\mathrm{i}\,.$$

2) Ist $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$, so gibt es eine Kreisscheibe D' mit $D \subset\subset D'$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D'}$. Dann ist $f(\zeta)$ auf D' holomorph, und das Integral verschwindet aufgrund des Cauchy'schen Integralsatzes für Sterngebiete. ∎

Definition (einfach zusammenhängendes Gebiet):

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt ***einfach zusammenhängend***, falls jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion besitzt.

Diese Definition ist nicht die Übliche. Man kann einfach zusammenhängende Gebiete auch rein topologisch charakterisieren. Das wird den brisanten Sätzen der folgenden Abschnitte erst ihren eigentlichen Sinn geben.

2.2.7. Satz (Hinreichende Bedingungen für einfach zusammenhängende Gebiete)

1. *Jedes sternförmige Gebiet ist einfach zusammenhängend.*
2. *Sind G_1 und G_2 einfach zusammenhängende Gebiete und ist $G_1 \cap G_2 \neq \varnothing$ und zusammenhängend, so ist auch $G_1 \cup G_2$ einfach zusammenhängend.*

Beweis: 1) ist klar, aufgrund des Cauchy'schen Integralsatzes für Sterngebiete.

2) $G := G_1 \cup G_2$ ist wieder ein Gebiet. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gibt es Stammfunktionen F_λ von $f|_{G_\lambda}$, für $\lambda = 1, 2$. Auf $G_1 \cap G_2$ ist dann $(F_1 - F_2)'(z) \equiv 0$, also $F_1(z) - F_2(z) \equiv c$ konstant. Sei

$$F(z) := \begin{cases} F_1(z) & \text{auf } G_1, \\ F_2(z) + c & \text{auf } G_2. \end{cases}$$

Offensichtlich ist F holomorph auf G und $F' = f$. ∎

2.2.8. Cauchy'scher Integralsatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg α in G :

$$\int_\alpha f(z)\,dz = 0.$$

Der Beweis ist trivial. Seine Bedeutung erhält der Satz erst dann, wenn man „einfach zusammenhängend“ mit topologischen Mitteln charakterisiert hat.

2.2.9. Beispiel

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ist ein Gebiet, aber nicht einfach zusammenhängend: Die Funktion $f(z) := 1/z$ kann auf $\mathbb{C}^*$ keine Stammfunktion besitzen, denn bekanntlich ist

$$\int_{\partial D_1(0)} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi\,\mathsf{i} \neq 0.$$

Die geschlitzte Ebene $\mathbb{C}' = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ ist dagegen sternförmig (etwa bzgl. $a = 1$) und deshalb einfach zusammenhängend. Also muss f auf $\mathbb{C}'$ eine Stammfunktion besitzen. Sei

$$F(z) := \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Das Integral kann dabei über jeden Weg zwischen 1 und z erstreckt werden, der ganz in $\mathbb{C}'$ verläuft, also z.B. über die Verbindungsstrecke. Der Cauchysche Integralsatz sagt, dass das Ergebnis nicht vom Weg abhängt. Wie im Beweis des Hauptsatzes folgt, dass F eine Stammfunktion von f ist. Außerdem ist $F(1) = 0$ ist.

Die gleichen Eigenschaften hat auch der Logarithmus. Weil nun $(F-\log)'(z) \equiv 0$ auf $\mathbb{C}'$ ist, gibt es eine Konstante c, so dass $F(z) \equiv \log(z) + c$ ist. Setzt man $z = 1$ ein, so erhält man $c = 0$.

Damit ist $\log(z) = \displaystyle\int_1^z \frac{1}{\zeta}\,d\zeta$.

Bemerkung: Es gibt eine Verallgemeinerung des vorangegangenen Beispiels:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $f(z) \neq 0$ auf G und f' holomorph. Dann gibt es eine holomorphe Funktion h auf G mit folgenden Eigenschaften:

1. $\exp(h(z)) = f(z)$ für alle $z \in G$.

2. $h'(z) = f'(z)/f(z)$.

Je zwei Funktionen h_1 und h_2 auf G mit den Eigenschaften (1) und (2) unterscheiden sich um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi\,\mathsf{i}$.

Der BEWEIS der Existenz der Funktion h wurde den Studierenden als Übungsaufgabe überlassen. Er findet sich (zusammen mit dem Beweis der Eindeutigkeit) im Anhang zu diesem Kapitel. Die Bedingung „f' holomorph" wird sich später als überflüssig erweisen.

Liegt das Gebiet G in $\mathbb{C}^*$, so nennt man jede stetige Funktion L auf G mit $\exp(L(z)) \equiv z$ eine ***Logarithmusfunktion*** auf G. Sie ist dann natürlich auch holomorph. Auf jedem einfach-zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C}^*$ existiert eine Logarithmusfunktion.

2.2.10. Beispiel

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $f(z) \neq 0$ auf G und f' holomorph. Dann existiert eine „Quadratwurzel" aus f, d.h. eine holomorphe Funktion g auf G, so dass $g^2 = f$ ist. Dafür braucht man nur eine holomorphe Funktion h mit $\exp \circ h(z) = f(z)$ zu wählen. Dann ist $g(z) := \exp(h(z)/2)$ die gesuchte Quadratwurzel von f.

2.3 Der Entwicklungssatz

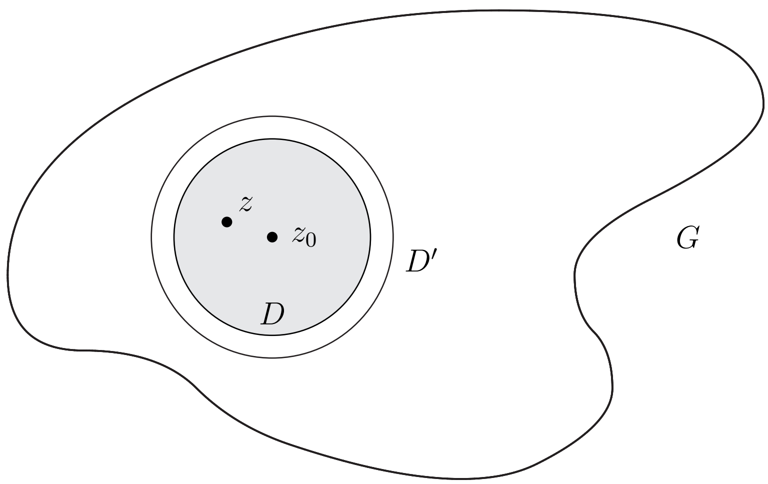
Der folgende Satz ist Schlüssel zu einer Reihe von ganz erstaunlichen Ergebnissen.

2.3.1. Die Cauchy'sche Integralformel

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $r > 0$, so dass $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ ist.

Dann gilt für alle $z \in D$: $\quad f(z) = \dfrac{1}{2\pi \mathsf{i}} \displaystyle\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$

Beweis: Wir können ein $\varepsilon > 0$ finden, so dass auch noch $D' := D_{r+\varepsilon}(z_0) \subset G$ ist.



Sei $z \in D$ beliebig vorgegeben. Da f in G holomorph ist, gibt es eine in z stetige Funktion Δ_z auf G, so dass für alle $\zeta \in G$ gilt:

$$f(\zeta) = f(z) + \Delta_z(\zeta) \cdot (\zeta - z).$$

Dann ist

$$\Delta_z(\zeta) = \begin{cases} \big(f(\zeta) - f(z)\big)/(\zeta - z) & \text{falls } \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{falls } \zeta = z. \end{cases}$$

Nachdem Δ_z überall stetig und außerhalb z sogar holomorph ist, können wir auf der sternförmigen Menge D' den Cauchy'schen Integralsatz auf Δ_z und den geschlossenen Weg $\partial D \subset D'$ anwenden:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial D} \Delta_z(\zeta)\, d\zeta = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \cdot \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \cdot 2\pi \mathsf{i}\,. \end{aligned}$$ ∎

Beim Beweis ist ganz deutlich die **komplexe** Differenzierbarkeit eingegangen. Deshalb hat der Satz Konsequenzen, die weit über das hinausgehen, was man von einer reell differenzierbaren Funktion erwarten würde. Man beachte auch noch:

$$\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0 \text{ für } z \in G \setminus \overline{D}.$$

2.3.2. Beispiele

1. Es soll das Integral $\displaystyle\int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z^2+2z}\, dz$ berechnet werden.

   Indem man den Nenner in Linearfaktoren zerlegt und eine Partialbruchzerlegung durchführt, bringt man das Integral in die Form, die auf der rechten Seite der Cauchy'schen Integralformel steht. Weil $\displaystyle\frac{1/2}{z} - \frac{1/2}{z+2} = \frac{1}{z(z+2)}$ ist und die Punkte 0 und -2 im Innern von $D_3(0)$ liegen, gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z^2+2z}\, dz &= \int_{\partial D_3(0)} \left[\frac{1/2}{z} - \frac{1/2}{z+2}\right] \cdot e^z\, dz \\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z}\, dz - \frac{1}{2}\int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z-(-2)}\, dz \\
&= 2\pi\,\mathrm{i} \cdot \frac{1}{2} \cdot [e^0 - e^{-2}] \;=\; \pi\,\mathrm{i}\,(1 - e^{-2}).
\end{aligned}$$

2. Sei $C = \partial D_1(\mathrm{i}/2)$. Dann liegt i im Innern von C, $-\mathrm{i}$ aber nicht. Daher gilt:

$$\int_C \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_C \frac{dz}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_C \frac{dz}{z+\mathrm{i}} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot [2\pi\,\mathrm{i} - 0] = \pi.$$

2.3.3. Entwicklungs-Lemma

Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus |\alpha|$ und $R := \operatorname{dist}(z_0, |\alpha|)$. Ist f eine stetige Funktion auf der Spur von α, so gibt es eine Potenzreihe

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

die im Innern von $D_R(z_0)$ absolut und gleichmäßig gegen die auf $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$ definierte Funktion

$$F(z) := \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

konvergiert. Die Koeffizienten der Potenzreihe genügen der Formel

$$a_n = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Insbesondere ist F holomorph auf $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$.

Beweis: Ist $\zeta \in |\alpha|$ und $z \in D_R(z_0)$, so ist $|z - z_0| < R \le |\zeta - z_0|$. Wir können den folgenden „Trick mit der geometrischen Reihe“ anwenden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - (z - z_0)/(\zeta - z_0)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n, \text{ weil } \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Da f auf der kompakten Menge $|\alpha|$ beschränkt ist, etwa durch eine Zahl $C > 0$, gilt für $\zeta \in |\alpha|$ und $z \in D_R(z_0)$:

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n \right| \le \frac{C}{R} \cdot \left(\frac{|z - z_0|}{R} \right)^n .$$

Die Zahlenreihe über die Terme auf der rechten Seite konvergiert für jedes **feste** $z \in D_R(z_0)$. Nach dem Weierstraß-Kriterium konvergiert dann die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$$

(für jedes feste z) absolut und gleichmäßig auf $|\alpha|$ gegen die Funktion

$$F_z(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} .$$

Die Partialsummen der obigen Funktionenreihe sind (als Funktionen von ζ) stetig auf $|\alpha|$. Deshalb kann man Grenzwertbildung und Integration vertauschen und erhält:

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\alpha F_z(\zeta)\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \right) \cdot (z - z_0)^n .$$

Da die Potenzreihe

$$p(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \left(\text{mit } a_n := \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \ \right)$$

für jedes $z \in D_R(z_0)$ konvergiert, muss ihr Konvergenzradius mindestens $= R$ sein, und sie konvergiert im Innern von $D_R(z_0)$ absolut und gleichmäßig gegen $F(z)$.

Weil man diese Konstruktion in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus |\alpha|$ mit einem geeigneten $R > 0$ durchführen kann, ist F auf ganz $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$ holomorph. ∎

Jetzt sind wir auf den folgenden Satz vorbereitet:

2.3.4. Entwicklungssatz von Cauchy

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$. Ist $R > 0$ der Radius der größten (offenen) Kreisscheibe um z_0, die noch in G hineinpasst, so gibt es eine Potenzreihe

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

die für jedes r mit $0 < r < R$ auf $D_r(z_0)$ absolut und gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert. Für jedes solche r ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int\limits_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Beweis: Sei $0 < r < R$ und $\alpha(t) := z_0 + re^{\mathsf{i}\,t}$, $0 \le t \le 2\pi$. Dann ist f auf $|\alpha|$ stetig und man kann das Entwicklungs-Lemma anwenden. Es gibt eine Potenzreihe $p(z)$, die im Innern von $D_r(z_0)$ absolut und gleichmäßig gegen

$$F(z) := \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

konvergiert. Die Koeffizienten der Reihe sind durch die Formel

$$a_n = \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int\limits_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$$

gegeben. Nach der Cauchy'schen Integralformel ist aber $F(z) = f(z)$, und es ist klar, dass die Koeffizienten a_n nicht von r abhängen. ∎

2.3.5. Folgerung (Höhere Cauchy'sche Integralformeln)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f auf G beliebig oft komplex differenzierbar, und für jede Kreisscheibe $D \subset\subset G$ und jedes $z \in D$ ist

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\,\mathsf{i}} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \textit{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis: Sei $z_0 \in G$ und $D := D_r(z_0) \subset\subset G$. Ist $z \in D$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $D' := D_\varepsilon(z) \subset\subset D$ ist. Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist die Funktion $g_{z,k}(\zeta) := f(\zeta)/(\zeta - z)^{k+1}$ auf $D \setminus \{z\}$ holomorph. Gemäß Lemma 2.2.5 ist dann

$$\int_{\partial D'} g_{z,k}(\zeta)\, d\zeta = \int_{\partial D} g_{z,k}(\zeta)\, d\zeta.$$

Nach dem Entwicklungslemma gibt es eine Potenzreihe $p(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(w-z)^k$, die auf D' gegen f konvergiert. Dabei ist

$$a_k = \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{\partial D'} g_{z,k}(\zeta)\,d\zeta \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Nun ist aber $f^{(n)}(z) = p^{(n)}(z) = a_n \cdot n!$ für alle n. Fasst man alles zusammen, so folgt die Aussage des Satzes. ∎

Definition (analytische Funktion):

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in G$ ***in eine Potenzreihe entwickelbar***, wenn es ein $r > 0$ gibt, so dass $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ ist und f auf D mit einer konvergenten Potenzreihe um z_0 übereinstimmt.

f heißt auf G ***analytisch***, wenn f in jedem Punkt von G in eine Potenzreihe entwickelbar ist.

Analytische Funktionen sind beliebig oft komplex differenzierbar! Man beachte aber, dass man i.A. nicht mit einer einzigen Potenzreihe auskommt.

2.3.6. Satz von Morera

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$. Dann ist f holomorph auf G.

BEWEIS: f besitzt zumindest lokal (auf sternförmigen Teilmengen) eine holomorphe Stammfunktion F. Aber F ist beliebig oft komplex differenzierbar, und dann ist auch $f = F'$ holomorph. ∎

Fassen wir nun zusammen:

2.3.7. Theorem

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Folgende Aussagen über eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:

1. *f ist reell differenzierbar und erfüllt die Cauchy-Riemann'schen DGLn.*
2. *f ist komplex differenzierbar.*
3. *f ist holomorph.*
4. *f ist beliebig oft komplex differenzierbar.*
5. *f ist analytisch.*
6. *f ist stetig und besitzt lokal immer eine Stammfunktion.*
7. *f ist stetig, und für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$ ist $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.*

Insbesondere kann man bei all den Sätzen, bei denen „f holomorph, f' stetig“ vorausgesetzt wurde, auf die Forderung nach einer stetigen Ableitung verzichten.

Aber wir sind noch lange nicht am Ende. Die holomorphen Funktionen weisen noch viele andere bemerkenswerte Eigenschaften auf.

2.3.8. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und außerhalb von $z_0 \in G$ sogar holomorph. Dann ist f auf ganz G holomorph.

Beweis: Nach Voraussetzung besitzt f lokal immer eine Stammfunktion. ∎

2.3.9. Riemann'scher Hebbarkeitssatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und f auf $G \setminus \{z_0\}$ holomorph. Bleibt f in der Nähe von z_0 beschränkt, so gibt es eine holomorphe Funktion $\widehat{f}$ auf G, die auf $G \setminus \{z_0\}$ mit f übereinstimmt.

Beweis: Wir benutzen einen netten, kleinen Trick:

$$\text{Sei} \quad F(z) := \begin{cases} f(z) \cdot (z - z_0) & \text{für } z \neq z_0, \\ 0 & \text{für } z = z_0. \end{cases}$$

Wegen der Beschränktheit von f ist F stetig in G. Außerdem ist F holomorph auf $G \setminus \{z_0\}$ und damit auf ganz G. Also gibt es eine Darstellung

$$F(z) = F(z_0) + \Delta(z) \cdot (z - z_0),$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion Δ. Da $\Delta(z) = f(z)$ außerhalb von z_0 holomorph ist, muss Δ sogar auf ganz G holomorph sein. Wir können $\widehat{f} := \Delta$ setzen. ∎

Jetzt untersuchen wir die Nullstellen einer holomorphen Funktion.

2.3.10. Lokaler Darstellungssatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $f(z_0) = 0$. Dann ist entweder $f^{(k)}(z_0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, oder es gibt ein $k > 0$, eine offene Umgebung $U = U(z_0) \subset G$ und eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$, so dass gilt:

1. $f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$ *für* $z \in U$.
2. $g(z_0) \neq 0$

Die Zahl k ist eindeutig bestimmt durch

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

BEWEIS: Wählt man für U eine kleine Kreisscheibe um z_0, so hat man auf U eine Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Da $f(z_0) = 0$ ist, muss $a_0 = 0$ sein. Ist nicht $a_k = 0$ für alle k, so gibt es ein kleinstes $k \geq 1$, so dass $a_k \neq 0$ ist. Dann ist

$$f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z), \quad \text{mit } g(z) := \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+k} (z - z_0)^m.$$

Das Lemma von Abel zeigt, dass die Reihe für $g(z)$ ebenfalls auf U konvergiert. Das ergibt die gewünschte Darstellung, und außerdem ist $g(z_0) = a_k \neq 0$. Weiter ist

$$f^{(n)}(z_0) = n! a_n \begin{cases} = 0 & \text{für } n = 0, \ldots, k-1 \\ \neq 0 & \text{für } n = k. \end{cases}$$

Dadurch ist k eindeutig festgelegt. ■

Die Zahl k nennt man die ***Ordnung der Nullstelle von f in*** z_0.

Bei der Darstellung $f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$ kann man annehmen, dass U sternförmig und $g(z) \neq 0$ auf U ist. Dann ist $\log \circ g$ und damit auch

$$\gamma(z) := \exp\left(\frac{1}{k} \log \circ g(z)\right)$$

holomorph auf U, sowie $\gamma(z)^k = g(z)$, also γ die k-te holomorphe Wurzel aus g.

Setzt man $q(z) := (z - z_0) \cdot \gamma(z)$, so ist $q^k = f$, also q die k-te holomorphe Wurzel aus f. Außerdem ist $q'(z_0) = \gamma(z_0) \neq 0$. Das bedeutet, dass q in z_0 biholomorph ist.

Sei q etwa auf $V = V(z_0) \subset U$ injektiv. Für jedes $c \in f(V) \setminus \{0\}$ gibt es genau k verschiedene k-te Wurzeln aus c, etwa $w_1, \ldots, w_k$. Dann hat die Gleichung $f(z) = q(z)^k = c$ genau k Lösungen, nämlich die k verschiedenen Zahlen $z_\nu = q^{-1}(w_\nu)$. Dann ist $f(z_1) = \ldots = f(z_k) = c$ und $f(z) \neq c$ für alle anderen $z \in V$.

In der Nähe einer Nullstelle der Ordnung k (aber außerhalb der Nullstelle selbst) nimmt eine holomorphe Funktion also jeden Wert genau k-mal an.

Nach der Cauchy'schen Integralformel ist der Wert einer holomorphen Funktion in einem Punkt durch die Werte auf einer Kreislinie um den Punkt herum festgelegt. Da es noch andere Funktionen mit dieser Eigenschaft gibt, formuliert man folgenden Begriff:

Definition (Mittelwerteigenschaft):
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine stetige Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ hat die ***Mittelwerteigenschaft*** (kurz MWE), falls gilt:

Zu jedem $z \in G$ gibt es ein $R > 0$ mit $D_R(z) \subset\subset G$, so dass für alle r mit $0 < r \le R$ gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{\mathsf{i}\,t})\,dt.$$

2.3.11. Satz (von der Mittelwerteigenschaft)

Ist f holomorph auf einem Gebiet G, so besitzt f dort die Mittelwerteigenschaft.

Zum Beweis braucht man nur die Parametrisierung der Kreislinie in die Cauchy'-sche Integralformel einzusetzen. Ist $D_r(z) \subset\subset G$, so ist

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}}\int_{\partial D_r(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}}\int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{\mathsf{i}\,t})}{re^{\mathsf{i}\,t}} \cdot r\,\mathsf{i}\,e^{\mathsf{i}\,t}\,dt \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{\mathsf{i}\,t})\,dt. \end{aligned}$$

2.3.12. Satz

1. *Mit f und g haben auch alle Linearkombinationen $c_1 f + c_2 g$ die MWE.*
2. *Mit f haben auch $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ und $\overline{f}$ die MWE.*

Beweis: 1) folgt trivial aus der $\mathbb{C}$-Linearität des Integrals.

2) Wegen $\int_a^b \overline{f(t)}\,dt = \overline{\int_a^b f(t)\,dt}$ erfüllt mit f auch $\overline{f}$ die MWE, und daher auch $\mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$ und $\mathrm{Im}(f) = \frac{1}{2\mathsf{i}}(f - \overline{f})$. ∎

Definition (harmonische Funktion):
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ heißt ***harmonisch***, wenn $f_{xx} + f_{yy} = 0$ ist.

Der Differentialoperator $\Delta : f \mapsto f_{xx} + f_{yy}$ heißt ***Laplace-Operator***.

Sei nun $f = g + \mathsf{i}\,h : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Es gelten die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen: $g_x = h_y$ und $g_y = -h_x$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} g_{xx} + g_{yy} &= h_{yx} - h_{xy} \;=\; 0 \\ \text{und}\quad h_{xx} + h_{yy} &= -g_{yx} + g_{xy} \;=\; 0. \end{aligned}$$

Realteil und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind jeweils harmonisch! Aber es kommt noch besser!

2.3.13. Lokale Charakterisierung harmonischer Funktionen

Sei $g : G \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Dann gibt es zu jedem Punkt $z_0 \in G$ eine offene Umgebung $U = U(z_0) \subset G$ und eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, so dass $g|_U = \mathrm{Re}(f)$ ist.

BEWEIS: Gesucht ist eine nahe z_0 definierte, zweimal stetig differenzierbare Funktion h mit $g_x = h_y$ und $g_y = -h_x$. Wegen der ersten Gleichung versuchen wir es mit einer Stammfunktion $h(x + \mathrm{i}\,y) = \int g_x(x + \mathrm{i}\,y)\,dy + C$, mit $C = C(x)$. Mit Hilfe der zweiten Gleichung bestimmen wir $C(x)$. Hier kommen die Details:

Sei $z_0 = x_0 + \mathrm{i}\,y_0 \in G$ fest gewählt, und U eine in G enthaltene rechteckige offene Umgebung von z_0. Für $z = x + \mathrm{i}\,y \in U$ setzen wir

$$h(x + \mathrm{i}\,y) := \int_{y_0}^{y} g_x(x + \mathrm{i}\,t)\,dt + \varphi(x),$$

mit einer noch näher zu bestimmenden (zweimal differenzierbaren) Funktion φ. Dann ist offensichtlich $h_y = g_x$ und

$$\begin{aligned} h_x(x + \mathrm{i}\,y) &= \int_{y_0}^{y} g_{xx}(x + \mathrm{i}\,t)\,dt + \varphi'(x) \;=\; -\int_{y_0}^{y} g_{yy}(x + \mathrm{i}\,t)\,dt + \varphi'(x) \\ &= -\big(g_y(x + \mathrm{i}\,y) - g_y(x + \mathrm{i}\,y_0)\big) + \varphi'(x). \end{aligned}$$

Damit $h_x = -g_y$ ist, sollte $\varphi'(x) = -g_y(x + \mathrm{i}\,y_0)$ sein. Also setzen wir

$$\varphi(x) := -\int_{x_0}^{x} g_y(s + \mathrm{i}\,y_0)\,ds.$$

Die so bestimmte Funktion h ist zweimal stetig differenzierbar und hat die gewünschten Eigenschaften. ∎

Bemerkung: Harmonische Funktionen, die Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion f sind, nennt man ***konjugierte harmonische Funktionen***.

2.3.14. Folgerung

Harmonische Funktionen haben die MWE.

BEWEIS: Trivial. ∎