

# Übungen zur Funktionentheorie 1

SS 2017

Blatt 12

Prof. Fritzsche

45) Bestimmen Sie sämtliche Laurent-Entwicklungen von  $f(z) := \frac{1}{(z+1)(z+3)}$  um den Punkt  $z_0 = -1$ .

46) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen alle isolierten Singularitäten und deren Typ:

$$f(z) := \frac{z - \sin z}{z^3}, \quad g(z) := \frac{\sin z}{1 - \tan z} \quad \text{und} \quad h(z) := \frac{1}{\sin(1/z)}.$$

Dabei sei  $\tan z := \sin z / \cos z$ .

47) Berechnen Sie die folgenden Residuen:

$$\begin{aligned} & \operatorname{res}_0(e^{-1/z}), \quad \operatorname{res}_z\left(\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\right) \text{ für } z = \pm 1, \\ & \operatorname{res}_{-1}\left(\frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2 + 4)}\right) \quad \text{und} \quad \operatorname{res}_0\left(\frac{z^6 + 1}{z^3(2z-1)(z-2)}\right). \end{aligned}$$

48) Benutzen Sie den Residuensatz zur Berechnung des Integrals  $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - 2 \cos t + \sin t}$ .

49) Berechnen Sie  $I := \int_0^\infty \frac{dx}{x^6 + 1}$  mit Hilfe des Residuensatzes.

50) Berechnen Sie  $\int_0^\infty \frac{4 dx}{\sqrt{x}(4x^2 + 1)}$

**Hinweis:** Denken Sie an die Mellin-Transformation!

Abgabetermin: **Donnerstag**, 27.07.2017, 12 Uhr.

**Es gibt pro Aufgabe maximal 12 Punkte. Für die Bewertung reichen 4 Aufgaben, als Klausurvorbereitung sollte man aber möglichst viele Aufgaben bearbeiten.**