Übungen zur Funktionentheorie 1

SS 2017 **Blatt 11** **Prof. Fritzsche**

41) a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $g : \overline{G} \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Zeigen Sie, dass g sein (globales) Maximum und Minimum auf ∂G annimmt.

b) Sei $\mathbb{D} := D_1(0)$, $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{\mathbb{D}} \subset\subset G$ und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Zeigen Sie: Ist $f(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$, so besitzt f in $\mathbb{D}$ eine Nullstelle.

42) Zeigen Sie: Ist $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein einfach geschlossener, glatter Integrationsweg, so besteht $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$ aus genau zwei Zusammenhangskomponenten. Jeder Punkt von $|\alpha|$ ist Randpunkt beider Komponenten, und auf der beschränkten Komponente ist $|n(\alpha, z)| = 1$.

Hinweis: Das Komplement von $|\alpha|$ besteht aus abzählbar vielen Zusammenhangskomponenten, die man nummerieren kann. Dann ordne man jedem Parameterwert t die Menge $\{p(t), q(t)\}$ der beiden Nummern derjenigen Komponenten zu, die bei $\alpha(t)$ links und rechts von α liegen. Man verfolge, wie sich diese beiden Mengen längs $[a,b]$ verhalten. Dabei hilft Aufgabe 40.

43) Sei $\alpha(t) := 2e^{-\mathsf{i}\,t}$, $\beta_1(t) := \mathsf{i} + \frac{1}{2}e^{\mathsf{i}\,t}$ und $\beta_2(t) := -\mathsf{i} + \frac{1}{2}e^{\mathsf{i}\,t}$, sowie $G := \mathbb{C} \setminus \{\mathsf{i}, -\mathsf{i}\}$.

a) Für welche ganzen Zahlen k, l, m ist $\gamma := k\alpha + l\beta_1 + m\beta_2$ in G nullhomolog?

b) Für $\Gamma := \alpha + 2\beta_1 + 3\beta_2$ berechne man

$$\int_\Gamma \frac{1}{(z - 2\sqrt{2}\,\mathsf{i})(z - \sqrt{2}\,\mathsf{i})^3}\, dz.$$

44) Bestimmen Sie bei den folgenden Funktionen alle isolierten Singularitäten und deren Typ:

$$f(z) := \frac{z^2 + \mathsf{i}}{z^4 + 1}, \quad g(z) := \cos\Bigl(\frac{1}{z}\Bigr) \quad \text{und} \quad h(z) := \frac{1}{\sin^2 z}\,.$$

Abgabetermin: **Donnerstag**, 20.07.2017, 12 Uhr.

Es gibt pro Aufgabe maximal 12 Punkte.