# Übungen zur Funktionentheorie 1

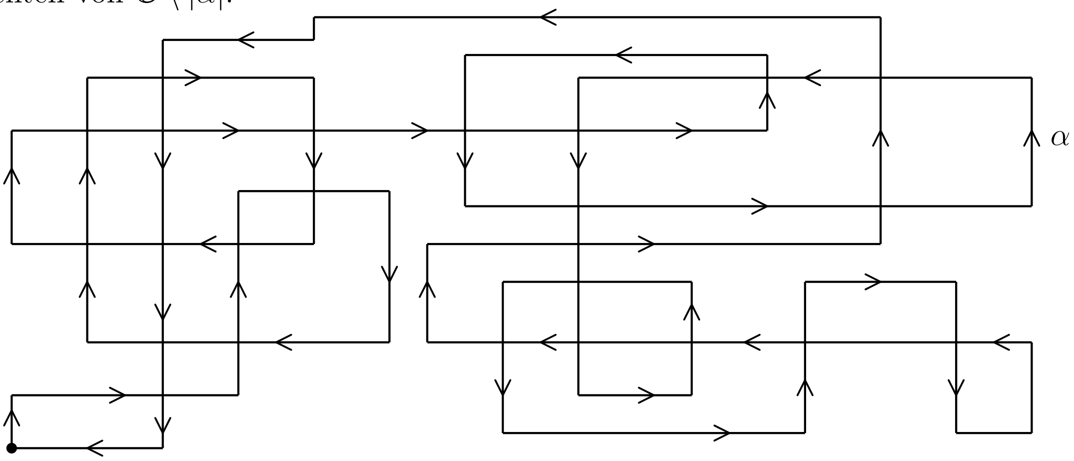
**SS 2017** **Blatt 10** **Prof. Fritzsche**

**37 )** $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ seien geschlossene Wege und $a \in \mathbb{C}$ ein Punkt, so dass $|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)| < |\gamma_1(t) - a|$ auf $[0,1]$ gilt. Zeigen Sie, dass $n(\gamma_1, a) = n(\gamma_2, a)$ ist

**Hinweis:** Man benutze den Hilfsweg $\gamma(t) := a + (\gamma_2(t) - a)/(\gamma_1(t) - a)$.

**38 )** a) Sei $0 < r < a$. Bestimmen Sie eine stetige Argumentfunktion längs des Weges $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*$ mit $\alpha(t) := a + re^{\mathrm{i}\,t}$.

b) Bestimmen Sie in der folgenden Skizze die Umlaufszahlen sämtlicher Komponenten von $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$.




**39 )** a) Sei $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, $\alpha(0) = 0$ und $\alpha'(0)$ reell und $> 0$. Zeigen Sie, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $r(t) := |\alpha(t)|$ stetig differenzierbar und $r'(t) > 0$ auf $[0, \varepsilon]$ ist. Zeigen Sie weiter, dass man $\varepsilon$ so klein wählen kann, dass man $|\alpha| \cap \overline{D_\varepsilon(0)}$ durch $\widetilde{\alpha} : [0, \varepsilon] \to \mathbb{C}$ mit $\widetilde{\alpha}(s) := s \cdot e^{\mathrm{i}\,\varphi(s)}$ parametrisieren kann, wobei $\varphi : [0, \varepsilon] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\varphi(0) = \arg \alpha'(0)$ ist.

b) Sei $\alpha(0) = z_0$ und $\alpha'(0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass man mit Hilfe einer biholomorphen Abbildung die Voraussetzungen von (a) herstellen kann.

**40 )** Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein stückweise glatter Integrationsweg, $t_0 \in (a,b)$ und $\alpha$ glatt in $z_0 := \alpha(t_0)$. Zeigen Sie mit Hilfe der Ergebnisse von Aufgabe 39, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle $\delta$ mit $0 < \delta \leq \varepsilon$ gilt: $D_\delta(z_0) \setminus |\alpha|$ besteht aus genau zwei Zusammenhangskomponenten, und jeder Punkt von $D_\delta(z_0) \cap |\alpha|$ ist Randpunkt beider Komponenten. Außerdem trifft die Gerade $L := z_0 + \mathbb{R}\,\mathrm{i}\,\alpha'(t_0)$ die Spur von $\alpha$ im Innern von $D_\delta(z_0)$ nur im Punkt $z_0$.

Abgabetermin: **Donnerstag**, 13.07.2017, 12 Uhr.

**Es gibt pro Aufgabe maximal 12 Punkte.**