Übungen zur Funktionentheorie 1

SS 2017 **Blatt 9** **Prof. Fritzsche**

33) a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, f holomorph auf G, $r > 0$, $z_0 \in G$ und $D_r = D_r(z_0) \subset\subset G$. Zeigen Sie:

$$|f''(z_0)| \leq \frac{2}{r^2} \max_{\partial D_r} |f|.$$

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, $f(z) = f(z+1) = f(z + \mathsf{i})$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f konstant sein muss.

34) a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $D = D_1(0) \subset\subset G$. Die Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ sei holomorph und habe in D zwei Nullstellen z_1, z_2 mit Nullstellenordnung $k_1, k_2 > 0$. Für $z \neq z_1, z_2$ sei $f(z) \neq 0$. Beweisen Sie die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{\partial D} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = k_1 + k_2.$$

b) Sei $f(z) := 1 + z^2$. Bestimmen Sie explizit das Maximum von $|f(z)|$ auf $\overline{D_1(0)}$.

35) Gibt es holomorphe Funktionen $f_1, f_2, f_3 : D = D_1(0) \to \mathbb{C}$, die für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Eigenschaften erfüllen?

$$\begin{aligned} f_1(1/n) \;=\; f_1(-1/n) &= 1/n^3, \\ f_2(1/n) &= n/(n+1) \\ \text{und} \quad f_3(1/n) &= \big(1 + (-1)^n\big)/2. \end{aligned}$$

36) Sei f eine ganze Funktion. Zeigen Sie: Gibt es Konstanten a, b, so dass $|f(z)| \leq a + b|z|^k$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, so ist f ein Polynom vom Grad $\leq k$.

Hinweis: Man kann vielleicht Induktion nach k führen. Mit f ist auch der Differenzenquotient von f im Nullpunkt eine ganze Funktion.

Abgabetermin: **Donnerstag**, 06.07.2017, 12 Uhr.

Es gibt pro Aufgabe maximal 12 Punkte.