Übungen zur Funktionentheorie 1

SS 2017 **Blatt 8** **Prof. Fritzsche**

29) Bestimmen Sie – wenn möglich – holomorphe Funktionen $f(z)$ mit

$$\mathrm{Re}(f(x+\mathrm{i}\,y)) = x^2 - 3x - y^2 \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Re}(f(x+\mathrm{i}\,y)) = 5e^{3x}\cos(3y).$$

30) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{\partial D_4(0)} \frac{\sin^2 z\,dz}{(z-\pi/6)^2(z+\pi/6)}$.

31) a) Zeigen Sie: Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ungerade und periodisch mit Periode 2π, so ist $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$.

b) Berechnen Sie $I := \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}$, indem Sie das Integral $\int_\gamma dz/z$ für $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ mit $\gamma(t) := a\cos t + \mathrm{i}\,b\sin t$ berechnen.

32) a) Die Potenreihe $f(z) := \sum_{n=0}^\infty z^n$ konvergiert auf $D_1(0)$ gegen eine holomorphe Funktion. Entwickeln Sie $f(z)$ um $z_0 := \mathrm{i}/2$ in eine Potenzreihe $p(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$ und bestimmen Sie deren Konvergenzradius R.

Zeigen Sie, dass durch

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & \text{für } z\in D_1(0) \\ p(z) & \text{für } z \in D_R(z_0) \end{cases}$$

eine holomorphe Funktion auf $D_1(0)\cup D_R(z_0)$ definiert wird.

b) Bestimmen Sie den Wert der Potenzreihe $f(z) := \displaystyle\sum_{n=0}^\infty (-1)^n z^{2n}$ und ihren Konvergenzradius R.

Erklären Sie, warum R endlich ist, obwohl $f(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$ definiert ist.

Abgabe: **Donnerstag**, 29.06.2017, 12 Uhr. **Es gibt pro Aufgabe maximal 12 Punkte.**