Übungen zur Funktionentheorie 1

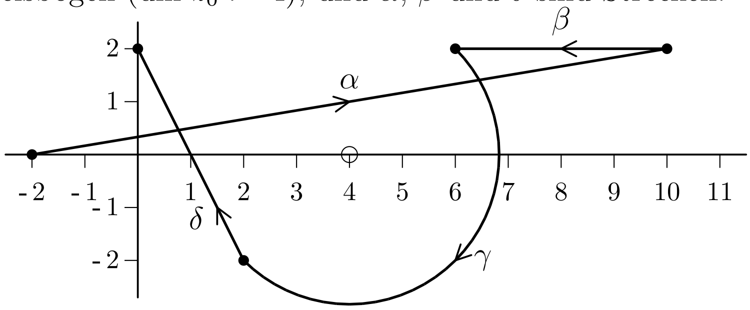
SS 2017 **Blatt 6** **Prof. Fritzsche**

21) Die Integrationswege $\alpha, \beta, \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ und $\delta : [0,3] \to \mathbb{C}$ seien definiert durch $\alpha(t) := 2.5e^{2\pi \mathrm{i}\, t}$, $\beta(t) := -1.5\,\mathrm{i} + 1.5\cos(\pi(t+1)) + 0.5\,\mathrm{i}\,\sin(\pi(t+1))$ und $\gamma(t) := -1.5\,\mathrm{i} + 2\,\mathrm{i}\,t$, sowie

$$\delta(t) := \begin{cases} -1 + 0.5e^{\mathrm{i}\,\pi(1/2-2t)} & \text{für } 0 \le t \le 1, \\ -1 + 0.5\,\mathrm{i} + 2(t-1) & \text{für } 1 \le t \le 2, \\ 1 + 0.5e^{\mathrm{i}\,\pi(9/2-2t)} & \text{für } 2 \le t \le 3 \end{cases} .$$

Skizzieren Sie die Spur der Kette $\Gamma := \alpha + \beta + \gamma + \delta$. und berechnen Sie $\int_\delta z\,dz$.

22) Die folgende Skizze zeigt die Spur der Kette $\Gamma = \alpha + \beta + \gamma + \delta$. Dabei ist γ ein Halbkreisbogen (um $z_0 := 4$), und α, β und δ sind Strecken.



a) Geben Sie Parametrisierungen der Wege $\alpha, \beta, \gamma, \delta : [0,1] \to \mathbb{C}$ an.

b) Berechnen Sie **auf möglichst einfache Weise** das Integral $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{z+1-\mathrm{i}}$.

23) a) Für $z = x + \mathrm{i}\,y \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$ sei $f_k(z) = x + \mathrm{i}\,ky$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\alpha_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ durch $\alpha_n(t) := t + \mathrm{i}\,t^n$ definiert. Zeigen Sie: $\int_{\alpha_n} f_k(z)\,dz$ ist genau dann unabhängig von n, wenn f_k holomorph ist.

b) Sei α die Parametrisierung des Viertelkreisbogens um 0, der die Zahlen 3 und $3\,\mathrm{i}$ miteinander verbindet. Beweisen Sie (ohne explizite Berechnung des Integrals) die Abschätzung $\displaystyle\Big| \int_\alpha \frac{dz}{1+z^2} \Big| \le \frac{3\pi}{16}$.

24) a) Berechnen Sie $\int_\alpha (1/z)\,dz$, wobei α den Streckenzug von $1 + \mathrm{i}$ über $-\mathrm{i}$ nach $1 - \mathrm{i}$ parametrisiert.

b) Sei $U = U(a) \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist $\displaystyle\lim_{r\to 0} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi\,\mathrm{i}\,f(a)$.

Abgabetermin: **Mittwoch**, 14.06.2017, 12 Uhr. **Es gibt pro Aufgabe maximal 12 Punkte.**