Übungen zur Funktionentheorie 1

SS 2017 **Blatt 5** **Prof. Fritzsche**

17) Berechnen Sie die folgenden komplexen „Zahlen":

$$(1+\mathsf{i})^{\mathsf{i}}, \quad (-\mathsf{i})^{\mathsf{i}} \quad \text{und} \quad \log(-2-2\mathsf{i}).$$

18) Wegen der Mehrdeutigkeit des komplexen Logarithmus muss man manche bekannten Formeln neu überdenken. Sind die folgenden Formeln korrekt?

a) $e^{\log z} = z$.

b) $\log(e^z) = z$.

c) $(e^z)^w = e^{z\cdot w}$.

Was ist von folgendem „Beweis", dass die Mathematik in sich widersprüchlich ist, zu halten? $-1 = \mathsf{i}^2 = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{1} = 1$.

19) a) $U, V \subset \mathbb{C}$ seien offene Mengen, $\varphi : U \to \mathbb{C}$ mit $\varphi(U) \subset V$ und $f : V \to \mathbb{C}$ reell differenzierbare Abbildungen. Beweisen Sie die Kettenregeln

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{w}}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial z} \\ \text{und} \quad \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f}{\partial \overline{w}}\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial \overline{z}}. \end{aligned}$$

Hinweis: Man sollte u.a. die Kettenregel für die (totale) reelle Ableitung $DF(z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ von differenzierbaren Abbildungen F benutzen.

b) Zeigen Sie: Die Funktion $f(z) := z\cdot\exp(\overline{z}^2)$ ist in $z_0 = 0$ komplex differenzierbar und nirgends sonst.

c) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Berechnen Sie

$$\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\overline{z}}\big[\log(1+f\cdot\overline{f})\big].$$

20) Zeigen Sie, dass durch $w = f(z) := \sqrt{z^2+1}$ eine biholomorphe Abbildung von dem Gebiet $G := \{z = x + \mathsf{i}y \in \mathbb{C} \,:\, y > 0\} \setminus \{\mathsf{i}y \,:\, y \le 1\}$ auf die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z = x + \mathsf{i}y \,:\, y > 0\}$ definiert werden kann.

Abgabetermin: **Donnerstag**, 01.06.2017, 12 Uhr.

Es gibt pro Aufgabe maximal 12 Punkte.