Übungen zur Funktionentheorie 1

SS 2017 **Blatt 4** **Prof. Fritzsche**

13) Zeigen Sie, dass $f(z) := (z+1)/(z-1)$ die Menge $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ holomorph und bijektiv auf sich abbildet,
sowie die Einheitskreisscheibe $D_1(0)$ auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$.

14) Die komplexen hyperbolischen Funktionen werden definiert durch

$$\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \quad \text{und} \quad \cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}).$$

Zeigen Sie, dass $\sinh z = -\mathsf{i}\sin(\mathsf{i}\,z)$ und $\cosh z = \cos(\mathsf{i}\,z)$ ist.

15) Sind die folgenden Funktionen holomorph?

$$\begin{aligned} f_1(x + \mathsf{i}\,y) &:= (x^2 - y^2) - 2\,\mathsf{i}\,xy, \\ f_2(x + \mathsf{i}\,y) &:= (x^2 - y^2) + 2\,\mathsf{i}\,xy \\ \text{und} \quad f_3(x + \mathsf{i}\,y) &:= x^2 - \mathsf{i}\,(y^2 + x). \end{aligned}$$

16) Zeigen Sie, dass

$$f(z) := \begin{cases} z^5/|z|^4 & \text{für } z \neq 0, \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

im Nullpunkt **nicht** komplex differenzierbar ist, dass f dort aber partiell differenzierbar ist und die CR-DGLn erfüllt. Warum ist das kein Widerspruch?

Abgabetermin: **Mittwoch**, 24.05.2017, 12 Uhr.

Es gibt pro Aufgabe maximal 12 Punkte.