Übungen zur Funktionentheorie 1

SS 2017 **Blatt 3** **Prof. Fritzsche**

9) $A, B \subset \mathbb{C}$ seien zwei kompakte Mengen mit $A \cap B = \varnothing$. Zeigen Sie, dass es offene Mengen U und V in $\mathbb{C}$ gibt, so dass gilt:

$$A \subset U,\ B \subset V \text{ und } U \cap V = \varnothing.$$

Afg. 10 *: Finden Sie eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- K besitzt unendlich viele Zusammenhangskomponenten.
- K° besitzt unendlich viele Zusammenhangskomponenten.
- $G := \mathbb{C} \setminus K$ ist ein Gebiet.

11) a) Zeigen Sie für Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ mit $c_n \neq 0$ für fast alle n: Wenn die Folge $\left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ konvergiert, dann ist $R := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ der Konvergenzradius von $f(z)$.

b) Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der beiden folgenden Potenzreihen:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} z^n \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{\binom{k}{2}} z^{2k}.$$

12) Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

1. $f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$.
2. $f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 3^{n+1} n z^{2n+1}$.
3. $f_3(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$.

Abgabetermin: **Donnerstag**, 18.05.2017, 12 Uhr.

Es gibt pro Aufgabe maximal 12 Punkte.
Für eine richtige und vollständige Lösung der $*$-Aufgabe gibt es sogar 18 Punkte.