

Analysis 3

Kapitel 6 Dynamische Systeme

Vorlesungsausarbeitung zum WS 2001/02

von Prof. Dr. Klaus Fritzsche

Inhaltsverzeichnis

§1	Lineare Systeme.....	142
§2	Autonome Vektorfelder und globaler Fluß.....	152
§3	Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten.....	158

§ 1 Lineare Systeme

Wir wollen Systeme von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung über einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ untersuchen:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A(t)^t + \mathbf{b}(t),$$

mit stetigen Abbildungen $A : I \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R})$ und $\mathbf{b} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Mit der Spaltenschreibweise $\vec{y} := \mathbf{y}^t$ erhalten wir:

$$\vec{y}' = A(t) \cdot \vec{y} + \vec{b}(t).$$

Wie üblich beginnt man mit dem **homogenen** Fall $\vec{b}(t) \equiv \vec{0}$. Die stetige Abbildung

$$F(t, \mathbf{y}) := \mathbf{y} \cdot A(t)^t$$

ist auf ganz $I \times \mathbb{R}^n$ definiert und genügt dort lokal einer Lipschitz-Bedingung, denn es ist

$$\|F(t, \mathbf{y}_1) - F(t, \mathbf{y}_2)\| = \|(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \cdot A(t)^t\| \leq \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \cdot \|A(t)\|.$$

1.1 Satz. *Ist die lineare DGL $\mathbf{y}' = F(t, \mathbf{y})$ über $I = (a, b)$ definiert, so ist auch jede maximale Lösung über I definiert, und die Menge aller maximalen Lösungen bildet einen reellen Vektorraum.*

BEWEIS: Sei $J = (t_-, t_+) \subset I$, $t_0 \in J$ und $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine maximal fortgesetzte Lösung mit $\varphi(t_0) = \mathbf{y}_0$. Wir nehmen an, es sei $t_+ < b$. Dann ist $\|A(t)\|$ auf $[t_0, t_+]$ beschränkt, etwa durch eine Zahl $k > 0$. Wir wenden die fundamentale Abschätzung aus dem vorigen Paragraphen auf die beiden (exakten) Lösungen φ und $\psi(x) \equiv 0$ an. Damit ist $\|\varphi(t)\| \leq \|\mathbf{y}_0\| \cdot e^{k(t_+ - t_0)}$, also beschränkt. Das bedeutet, daß die Integralkurve $t \mapsto (t, \varphi(t))$ im Innern von $I \times \mathbb{R}^n$ endet, und das kann nicht sein. Also muß $t_+ = b$ (und entsprechend dann auch $t_- = a$) sein.

Daß die Menge aller (maximalen) Lösungen dann einen Vektorraum bildet, ist trivial. ■

Sei \mathcal{L} der (reelle) Vektorraum aller Lösungen über I . Für ein festes $t_0 \in I$ sei $E : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch $E(\varphi) := \varphi(t_0)$.¹ Dann ist E offensichtlich linear, und aus dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz und dem obigen Resultat folgt, daß E bijektiv ist, also ein Isomorphismus von \mathcal{L} auf \mathbb{R}^n .

Der Lösungsraum \mathcal{L} eines homogenen linearen Systems $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A(t)^t$ in $I \times \mathbb{R}^n$ ist ein n -dimensionaler \mathbb{R} -Untervektorraum von $\mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$.

¹„E“ steht für *evaluate* (auswerten).

Eine Basis $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ von \mathcal{L} bezeichnet man auch als *Fundamentalsystem* (von Lösungen), die Matrix

$$X(t) := \left(\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t) \right)$$

nennt man *Fundamentalmatrix* oder *Fundamentallösung*. Sie erfüllt die Gleichung

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t).$$

Die Funktion $W(t) := \det X(t)$ heißt *Wronski-Determinante* des Fundamentalsystems.

Wir erinnern uns an einige Tatsachen aus der Determinantentheorie. Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ und $S_{ij}(A)$ die Streichungsmatrix, die durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte aus A entsteht. Dann wird die Zahl $A_{ij} := (-1)^{i+j} \det S_{ij}(A)$ als *Cofaktor*, *algebraisches Komplement* oder *Adjunkte* bezeichnet, und der Laplace'sche Entwicklungssatz besagt: Für beliebiges j und beliebiges i ist

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}.$$

Man beachte dabei, daß der Koeffizient a_{ij} in A_{ij} nicht vorkommt. Die Matrix $\text{ad}(A) := \left(A_{ij} \mid \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{array} \right)$ heißt *adjungierte Matrix* zu A .

1.2 Hilfssatz.

1. Ist $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, so ist $(\det A) \cdot E_n = A \cdot \text{ad}(A)^t$.
2. Ist $t \mapsto A(t) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ differenzierbar, so ist

$$(\det \circ A)'(t) = \sum_{i,j} a'_{ij}(t) \cdot A_{ij}(t).$$

BEWEIS: 1) wird (mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes) in der Linearen Algebra bewiesen.

2) Weil a_{kj} in A_{ij} nicht vorkommt, ist

$$\frac{\partial \det}{\partial a_{kj}}(A) = \frac{\partial}{\partial a_{kj}} \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n \delta_{ik} A_{ij} = A_{kj},$$

nach Kettenregel also

$$(\det \circ A)'(t) = \sum_{i,j} \frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A(t)) \cdot a'_{ij}(t) = \sum_{i,j} a'_{ij}(t) \cdot A_{ij}(t).$$

■

Man kann den Begriff der Wronski-Determinante noch etwas verallgemeinern:

Definition. Sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ irgendwelche Lösungen der DGL, so nennt man

$$W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) := \det(\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t))$$

die *Wronski-Determinante* von $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

1.3 Satz (Formel von Liouville). Die Wronski-Determinante $W(t)$ eines Systems von Lösungen der DGL $\vec{y}' = A(x) \cdot \vec{y}$ erfüllt die Differentialgleichung

$$y' = \text{Spur}(A(t)) \cdot y.$$

Ist $W(t)$ sogar die Wronski-Determinante einer Fundamentalmatrix, so ist $W(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, und für beliebiges (festes) $t_0 \in \mathbb{R}$ ist

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Spur}A(s) ds\right).$$

BEWEIS: Sei $X(t) = (x_{ij}(t)) = (\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t))$ und $W(t) = \det X(t)$. Dann ist

$$\begin{aligned} W'(t) &= (\det \circ X)'(t) \\ &= \sum_{i,j} x'_{ij}(t) \cdot (\text{ad}(X))_{ij}(t) \\ &= \sum_{i,j} (X'(t))_{ij} \cdot (\text{ad}(X)(t)^t)_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^n (X'(t) \cdot \text{ad}(X)(t)^t)_{ii} \\ &= \text{Spur}(X'(t) \cdot \text{ad}(X)(t)^t). \end{aligned}$$

Da die Spalten von $X(t)$ Lösungen der DGL sind, ist

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t),$$

also

$$\begin{aligned} W'(t) &= \text{Spur}(A(t) \cdot (X(t) \cdot \text{ad}(X)(t)^t)) \\ &= \text{Spur}(A(t) \cdot (\det X(t) \cdot E_n)) \\ &= W(t) \cdot \text{Spur}(A(t)). \end{aligned}$$

Ist $X(t)$ eine Fundamentalmatrix, so gibt es zumindest ein $t_0 \in I$ mit $W(t_0) \neq 0$. Weil $W(t)$ aber eine (skalare) lineare DGL erfüllt, ist dann $W(t) \neq 0$ und $X(t)$ invertierbar für alle $t \in I$. Außerdem ist dann

$$(\ln \circ W)'(t) = \frac{W'(t)}{W(t)} = \text{Spur}(A(t)),$$

also

$$\ln\left(\frac{W(t)}{W(t_0)}\right) = \ln(W(t)) - \ln(W(t_0)) = \int_{t_0}^t \text{Spur}(A(s)) ds.$$

Wendet man \exp an, so erhält man die Liouville-Formel. ■

1.4 Satz. Sei $A : I \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R})$ stetig.

1. Zu jedem $t_0 \in I$ gibt es genau eine Fundamentallösung X_0 der DGL $\vec{y}' = A(t) \cdot \vec{y}$ mit $X_0(t_0) = E_n$ (n -reihige Einheitsmatrix). Für $t \in I$ sei dann $C(t, t_0) := X_0(t) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$.
2. Ist $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, so ist $\varphi(t) := \mathbf{y}_0 \cdot C(t, t_0)^t$ die eindeutig bestimmte Lösung mit $\varphi(t_0) = \mathbf{y}_0$.
3. Die Matrix $C(t, t_0)$ ist stets invertierbar, und für $s, t, u \in I$ gilt:
 - (a) $C(s, t) \cdot C(t, u) = C(s, u)$.
 - (b) $C(t, t) = E_n$,
 - (c) $C(s, t)^{-1} = C(t, s)$.
4. Ist $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ eine Basis des \mathbb{R}^n , so wird durch $\varphi_\nu(t) := \mathbf{a}_\nu \cdot C(t, t_0)^t$ ein Fundamentalsystem von Lösungen mit $\varphi_\nu(t_0) = \mathbf{a}_\nu$ definiert.

BEWEIS: 1) Es gibt eindeutig bestimmte Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, so daß $\varphi_\nu(t_0) = \mathbf{e}_\nu$ der ν -te Einheitsvektor ist. Da die Einheitsvektoren eine Basis des \mathbb{R}^n bilden und die Evaluationsabbildung E ein Isomorphismus ist, bilden die φ_ν eine Basis des Lösungsraumes.

2) Da $C(t, t_0)$ eine Fundamentallösung ist, erfüllt $\varphi(t) := \mathbf{y}_0 \cdot C(t, t_0)^t$ die DGL. Nach Konstruktion ist $C(t_0, t_0) = E_n$, also $\varphi(t_0) = \mathbf{y}_0$.

3) Weil $W(t) = \det C(t, t_0)$ nirgends verschwindet, ist $C(t, t_0)$ immer invertierbar. Sei \mathbf{y} beliebig, $\varphi(s) := \mathbf{y} \cdot C(s, u)^t$ und $\psi(s) := \varphi(t) \cdot C(s, t)^t$. Dann ist $\psi(t) = \varphi(t)$, also auch $\psi(s) = \varphi(s)$ für alle $s \in I$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} \cdot C(s, u)^t &= \varphi(s) = \psi(s) \\ &= \varphi(t) \cdot C(s, t)^t \\ &= (\mathbf{y} \cdot C(t, u)^t) \cdot C(s, t)^t \\ &= \mathbf{y} \cdot (C(s, t) \cdot C(t, u))^t. \end{aligned}$$

Weil $C(s, u)$ invertierbar ist, folgt die Gleichung $C(s, u) = C(s, t) \cdot C(t, u)$.

4) ist trivial. ■

Leider ist es im allgemeinen nicht möglich, die Lösungen eines homogenen linearen Systems explizit anzugeben! Im Einzelfall gibt es natürlich Lösungsmethoden, z.B. den Potenzreihen-Ansatz.

Die allgemeine Lösung $\widehat{\varphi} : I \times I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\widehat{\varphi}(s; t, \mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot C(s, t)^t.$$

Der lokale Fluß in (t_0, \mathbf{y}_0) ist stets durch $\Phi(t, \mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot C(t, t_0)^t$ gegeben, also global definiert und unabhängig von \mathbf{y}_0 .

Wir betrachten nun den inhomogenen Fall $\vec{y}' = A(x) \circ \vec{y} + \vec{b}(x)$. Wie im homogenen Fall kann man zeigen, daß alle Lösungen über ganz I definiert sind. Da die Differenz zweier Lösungen der inhomogenen Gleichung eine Lösung der homogenen Gleichung ist, bilden die Lösungen der inhomogenen Gleichung einen affinen Raum, und es genügt, eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems zu finden. Wir benutzen hier wieder die Methode der *Variation der Konstanten*.

Ist $X(t) = (\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t))$ eine Fundamentalmatrix, so ist die Lösungsgesamtheit des homogenen Systems die Menge der Linearkombinationen

$$c_1 \cdot \vec{\varphi}_1(t) + \dots + c_n \cdot \vec{\varphi}_n(t).$$

Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz

$$\vec{\varphi}_p(t) := c_1(t) \cdot \vec{\varphi}_1(t) + \dots + c_n(t) \cdot \vec{\varphi}_n(t) = X(t) \cdot \vec{c}(t).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}_p'(t) &= X'(t) \cdot \vec{c}(t) + X(t) \cdot \vec{c}'(t) \\ &= A(t) \cdot X(t) \cdot \vec{c}(t) + X(t) \cdot \vec{c}'(t) \\ &= A(t) \cdot \vec{\varphi}_p(t) + X(t) \cdot \vec{c}'(t). \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}_p(t) \text{ ist Lösung} &\iff X(t) \cdot \vec{c}'(t) = \vec{b}(t) \\ &\iff \vec{c}'(t) = X(t)^{-1} \cdot \vec{b}(t) \\ &\iff \vec{c}(t) = \vec{c}(t_0) + \int_{t_0}^t X(s)^{-1} \cdot \vec{b}(s) ds. \end{aligned}$$

Wir wollen $X(t)$ so wählen, daß $X(t_0) = E_n$ ist, also $X(t) = C(t, t_0)$. Dann ergibt

$$\vec{\varphi}_p(t) = C(t, t_0) \cdot \left(\vec{y}_0 + \int_{t_0}^t C(t_0, s) \cdot \vec{b}(s) ds \right)$$

die partikuläre Lösung φ_p mit $\varphi_p(t_0) = \mathbf{y}_0$.

Eine *homogene lineare DGL n-ter Ordnung* hat die Gestalt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Das zugeordnete System ist dann

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Ist $\{f_1, \dots, f_n\}$ eine Basis des Lösungsraumes der DGL n -ten Grades, so erhalten wir für das System die Fundamentalmatrix

$$X(t) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Beispiel.

Wir betrachten eine (skalare) inhomogene lineare DGL 2. Grades,

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x).$$

Dem entspricht das lineare System $\vec{y}' = A(t) \cdot \vec{y} + \vec{b}(t)$ mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ r(t) \end{pmatrix}.$$

Eine Fundamentalmatrix hat die Gestalt

$$X(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $W(t) = \det X(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$ die Wronski-Determinante, und die Matrix $X(t)^{-1}$ kann durch die Formel

$$X(t)^{-1} = \frac{1}{W(t)} \cdot \begin{pmatrix} y_2'(t) & -y_2(t) \\ -y_1'(t) & y_1(t) \end{pmatrix}$$

berechnet werden. Also ist

$$X(s)^{-1} \cdot \vec{b}(s) = \frac{1}{W(s)} \cdot \begin{pmatrix} -y_2(s)r(s) \\ y_1(s)r(s) \end{pmatrix},$$

und $\vec{\varphi}_p(t) = X(t) \cdot \left(\int_{t_0}^t X(s)^{-1} \cdot \vec{b}(s) ds \right)$ ist eine partikuläre Lösung des (inhomogenen) Systems. Die 1. Komponente davon ist Lösung der skalaren Gleichung. Das ist

$$\varphi(t) = y_1(t) \cdot \int_{t_0}^t \frac{-y_2(s)r(s)}{W(s)} ds + y_2(t) \cdot \int_{t_0}^t \frac{y_1(s)r(s)}{W(s)} ds,$$

und $\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix}$ ist Lösung des Systems.

Eine Anwendung der linearen Systeme ist der Beweis der Abhängigkeit der Lösungen einer DGL von den Anfangsbedingungen. Dazu wollen wir den Begriff der linearen Differentialgleichung noch etwas weiter fassen.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, sowie $A : I \times U \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine stetige Abbildung. Unter einer Lösung der *parameterabhängigen linearen Differentialgleichung*

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z} \cdot A(t, \mathbf{y})^t \quad (\text{mit dem Parameter } \mathbf{y})$$

verstehen wir eine Funktion $\lambda : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\frac{\partial \lambda}{\partial t}(t, \mathbf{y}) = \lambda(t, \mathbf{y}) \cdot A(t, \mathbf{y})^t$.

1.5 Satz. *Zu jedem $t_0 \in I$ gibt es eine eindeutig bestimmte „Fundamental-Lösung“ der DGL $\mathbf{z}' = \mathbf{z} \cdot A(t, \mathbf{y})^t$, also eine Abbildung $Z : I \times U \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R})$ mit*

$$\frac{\partial Z}{\partial t}(t, \mathbf{y}) = A(t, \mathbf{y}) \cdot Z(t, \mathbf{y}),$$

so daß $Z(t_0, \mathbf{y}) = E_n$ für alle $\mathbf{y} \in U$ gilt. Für jedes feste $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^n$ ist die Lösung $\lambda(t, \mathbf{y}) := \mathbf{z}_0 \cdot Z(t, \mathbf{y})^t$ auf $I \times U$ stetig.

BEWEIS: Sei $t_0 \in I$ festgehalten. Dann gibt es zu jedem Parameterwert \mathbf{y} eine eindeutig bestimmte Fundamental-Lösung $t \mapsto Z_{\mathbf{y}}(t)$ der linearen DGL $\mathbf{z}' = \mathbf{z} \cdot A(t, \mathbf{y})^t$ mit $Z_{\mathbf{y}}(t_0) = E_n$. Wir setzen $Z(t, \mathbf{y}) := Z_{\mathbf{y}}(t)$.

Sei nun auch noch $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^n$ festgehalten und $\lambda(t, \mathbf{y}) := \mathbf{z}_0 \cdot Z(t, \mathbf{y})^t$. Dann ist λ eine Lösung mit $\lambda(t_0, \mathbf{y}) = \mathbf{z}_0$, unabhängig von \mathbf{y} . Wir wollen zeigen, daß λ auf $I \times U$ stetig ist.

1. Schritt: Als Lösung der DGL hängt λ bei festem \mathbf{y} natürlich stetig von t ab.

2. Schritt: Wir zeigen, daß λ auch stetig von \mathbf{y} abhängt, und zwar gleichmäßig in t (also Lipschitz-stetig). Dazu sei $\mathbf{y}_0 \in U$ beliebig vorgegeben. Wir wählen ein abgeschlossenes Intervall $J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ und eine offene Umgebung $V = V(\mathbf{y}_0) \subset U$, so daß A auf $J \times V$ gleichmäßig stetig und beschränkt ist.

Sei $(t, \mathbf{y}) \in J \times V$. Zur Abschätzung von $\|\lambda(t, \mathbf{y}) - \lambda(t, \mathbf{y}_0)\|$ benutzen wir den Satz über Näherungslösungen. Die Abbildung $t \mapsto \lambda(t, \mathbf{y})$ ist sogar eine exakte Lösung

der DGL $\mathbf{z}' = \mathbf{z} \cdot A(t, \mathbf{y})^t$, und wir werden zeigen, daß man zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ die Umgebungen J und V so klein machen kann, daß $t \mapsto \lambda(t, \mathbf{y}_0)$ dort eine ε -Näherungslösung ist. Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \lambda}{\partial t}(t, \mathbf{y}_0) - \lambda(t, \mathbf{y}_0) \cdot A(t, \mathbf{y})^t \right\| &\leq \left\| \frac{\partial \lambda}{\partial t}(t, \mathbf{y}_0) - \lambda(t, \mathbf{y}_0) \cdot A(t, \mathbf{y}_0)^t \right\| \\ &\quad + \left\| \lambda(t, \mathbf{y}_0) \cdot A(t, \mathbf{y}_0)^t - \lambda(t, \mathbf{y}_0) \cdot A(t, \mathbf{y})^t \right\| \\ &\leq \|A(t, \mathbf{y}_0) - A(t, \mathbf{y})\| \cdot \|\lambda(t, \mathbf{y}_0)\|. \end{aligned}$$

Weil $\|\lambda(t, \mathbf{y}_0)\|$ auf J beschränkt bleibt und $A(t, \mathbf{y})$ auf $J \times V$ gleichmäßig stetig ist, kann man durch Verkleinern von J und V erreichen, daß $t \mapsto \lambda(t, \mathbf{y}_0)$ eine ε -Näherung ist, bei beliebig vorgegebenem ε . Weil außerdem $\lambda(t_0, \mathbf{y}) = \mathbf{z}_0$ ist, ergibt die Formel für Näherungslösungen:

$$\|\lambda(t, \mathbf{y}) - \lambda(t, \mathbf{y}_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{k}(e^{k|t-t_0|} - 1) \leq \varepsilon \cdot k_0,$$

wobei k eine geeignete Lipschitz-Konstante und dann $k_0 > 0$ ist. Daraus folgt die in t gleichmäßige Stetigkeit von λ in \mathbf{y}_0 .

3. Schritt: Sind jetzt $(t, \mathbf{y}), (t', \mathbf{y}_0) \in J \times V$, so ist

$$\|\lambda(t, \mathbf{y}) - \lambda(t', \mathbf{y}_0)\| \leq \|\lambda(t, \mathbf{y}) - \lambda(t, \mathbf{y}_0)\| + \|\lambda(t, \mathbf{y}_0) - \lambda(t', \mathbf{y}_0)\|.$$

Der zweite Summand auf der rechten Seite strebt für $(t, \mathbf{y}) \rightarrow (t', \mathbf{y}_0)$ gegen Null, nach Schritt 1. Der erste Summand strebt (gleichmäßig in t) ebenfalls gegen Null, wie wir oben gezeigt haben. Also ist λ stetig in (t', \mathbf{y}_0) , und dieser Punkt wurde beliebig ausgewählt. ■

1.6 Satz. Sei $\mathbf{y}' = F(t, \mathbf{y})$ eine (beliebige) Differentialgleichung über $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $(t_0, \mathbf{y}_0) \in G$.

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $r > 0$, so daß $J \times B$ mit $J := (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ und $B := B_r(\mathbf{y}_0)$ in G enthalten ist und der lokale Fluß $\Phi : J \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist.

BEWEIS: Weil F stetig differenzierbar ist, genügt F auch lokal einer Lipschitz-Bedingung. Der lokale Fluß ist definiert durch

$$\Phi(t, \mathbf{y}) = \varphi_{\mathbf{y}}(t),$$

wobei $\varphi_{\mathbf{y}}$ die eindeutig bestimmte Lösung über J mit $\varphi_{\mathbf{y}}(t_0) = \mathbf{y}$ ist. Wir haben die Existenz und die Stetigkeit des lokalen Flusses schon an früherer Stelle bewiesen.

Die Matrix $D_2 F(t, \mathbf{y}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ sei definiert durch

$$D_2 F(t, \mathbf{y}) := \left(\frac{\partial F_\nu}{\partial y_\mu}(t, \mathbf{y}) \mid \nu, \mu = 1, \dots, n \right).$$

Es seien $\mathbf{y}, \mathbf{y}_1 \in B$, $\mathbf{x} := \Phi(t, \mathbf{y})$ und $\mathbf{x}_1 := \Phi(t, \mathbf{y}_1)$, sowie

$$h(\tau) := F(t, \mathbf{x}_1 + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} F(t, \mathbf{x}) - F(t, \mathbf{x}_1) &= h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(\tau) d\tau \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \cdot \left(\int_0^1 D_2F(t, \mathbf{x}_1 + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)) d\tau \right)^t. \end{aligned}$$

Ist $A(t, \mathbf{y}) := \int_0^1 D_2F(t, \mathbf{x}_1 + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)) d\tau$ (Integration komponentenweise), und $\psi : J \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\psi(t, \mathbf{y}) := \varphi_{\mathbf{y}}(t) - \varphi_{\mathbf{y}_1}(t),$$

so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, \mathbf{y}) &= \varphi'_{\mathbf{y}}(t) - \varphi'_{\mathbf{y}_1}(t) \\ &= F(t, \varphi_{\mathbf{y}}(t)) - F(t, \varphi_{\mathbf{y}_1}(t)) \\ &= (\varphi_{\mathbf{y}}(t) - \varphi_{\mathbf{y}_1}(t)) \cdot A(t, \mathbf{y})^t \\ &= \psi(t, \mathbf{y}) \cdot A(t, \mathbf{y})^t. \end{aligned}$$

ψ ist also Lösung der parameter-abhängigen linearen DGL

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z} \cdot A(t, \mathbf{y})^t$$

mit $\psi(t_0, \mathbf{y}) = \varphi_{\mathbf{y}}(t_0) - \varphi_{\mathbf{y}_1}(t_0) = \mathbf{y} - \mathbf{y}_1$. Nach dem vorigen Satz gibt es genau eine Fundamental-Lösung $Z(t, \mathbf{y})$ dieser DGL mit $Z(t_0, \mathbf{y}) = E_n$. Die Lösung $\varrho(t, \mathbf{y}) := (\mathbf{y} - \mathbf{y}_1) \cdot Z(t, \mathbf{y})^t$ hat den Anfangswert $\varrho(t_0, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{y}_1 = \psi(t_0, \mathbf{y})$. Dann muß sogar $\varrho(t, \mathbf{y}) = \psi(t, \mathbf{y})$ für alle \mathbf{y} gelten. Also ist $\Phi(t, \mathbf{y}) - \Phi(t, \mathbf{y}_1) = \psi(t, \mathbf{y}) = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_1) \cdot Z(t, \mathbf{y})^t$. Weil $Z : J \times B \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R})$ stetig ist, ist Φ in (t, \mathbf{y}_1) nach \mathbf{y} differenzierbar und $D_2\Phi(t, \mathbf{y}_1) = Z(t, \mathbf{y}_1)$. Es ist auch sofort klar, daß Φ stetig differenzierbar ist. ■

1.7 Folgerung. *Ist F k -mal stetig differenzierbar, so ist auch der lokale Fluß k -mal differenzierbar.*

BEWEIS: Induktion nach k . Der Anfang ist im obigen Satz geschehen, nun setzen wir voraus, daß $k \geq 2$ und die Behauptung für $(k - 1)$ schon bewiesen ist. Wir betrachten das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= F(t, \mathbf{y}) \\ \text{und } \mathbf{z}' &= \mathbf{z} \cdot D_2F(t, \mathbf{y})^t. \end{aligned}$$

Φ löst die erste Gleichung, und es ist

$$\frac{\partial}{\partial t}(D_2\Phi)(t, \mathbf{y}) = D_2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)(t, \mathbf{y}) = D_2F(t, \Phi(t, \mathbf{y})) \cdot D_2\Phi(t, \mathbf{y}),$$

denn es ist $\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t, \mathbf{y}) = F(t, \Phi(t, \mathbf{y}))$. Also löst $D_2\Phi$ die zweite Gleichung, und weil D_2F $(k-1)$ -mal stetig differenzierbar ist, gilt das auch für $D_2\Phi$. Aber dann ist Φ selbst k -mal stetig differenzierbar. ■

§ 2 Autonome Vektorfelder und globaler Fluß

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

Definition. Ein *autonomes Vektorfeld* auf G ist eine \mathcal{C}^k -Abbildung $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dabei soll $k \geq 0$ sein, und der Fall $k = \infty$ ist auch zugelassen. Eine *Integralkurve* von F ist eine \mathcal{C}^{k+1} -Abbildung $\varphi : I \rightarrow G$ mit $\varphi'(t) = F(\varphi(t))$, mit einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$.

Ein autonomes Vektorfeld $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ induziert also eine (zeitunabhängige) Differentialgleichung $\mathbf{y}' = F(\mathbf{y})$ auf $\mathbb{R} \times G$. Die Lösungen der DGL stimmen mit den Integralkurven von F überein.

Bemerkung. Ist $\widehat{G} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{y}' = F(t, \mathbf{y})$ eine zeitabhängige Differentialgleichung über \widehat{G} , so können wir $\widehat{\mathbf{y}} := (s, \mathbf{y})$ und $\widehat{F}(s, \mathbf{y}) := (1, F(s, \mathbf{y}))$ setzen. Ist dann φ eine Lösung der zeitabhängigen Gleichung, so ist $\widehat{\varphi}(t) := (t, \varphi(t))$ eine Lösung der autonomen Gleichung $\widehat{\mathbf{y}}' = \widehat{F}(\widehat{\mathbf{y}})$.

Ist umgekehrt $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ eine Lösung des autonomen Systems

$$s' = 1, \quad \mathbf{y}' = F(s, \mathbf{y}),$$

so ist $\psi_1'(t) \equiv 1$ und $\psi_2'(t) = F(\psi_1(t), \psi_2(t))$. Es gibt also eine Konstante c , so daß $\psi_1(t) = t + c$ ist. Wir setzen dann $\varphi(s) := \psi_2(s - c)$. Mit $t = s - c$ folgt:

$$\varphi'(s) = \psi_2'(t) = F(t + c, \psi_2(t)) = F(s, \varphi(s)).$$

Also ist φ eine Lösung des zeitabhängigen Systems.

Das zeigt, daß kein großer Unterschied zwischen autonomen und zeitabhängigen Systemen besteht.

2.1 Satz (Translationsinvarianz). Sei $\varphi : I \rightarrow G$ eine Integralkurve des (autonomen) Vektorfeldes F auf G . Dann ist für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ auch $\psi(t) := \varphi(t - t_0)$ eine Integralkurve.

BEWEIS: Wir setzen $s := t - t_0$. Dann ist $\psi'(t) = \varphi'(s) = F(\varphi(s)) = F(\psi(t))$. ■

Definition. Ein *dynamisches System* in G ist eine \mathcal{C}^∞ -Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \times G \rightarrow G$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\Phi(0, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$,
2. $\Phi(t, \Phi(s, \mathbf{y})) = \Phi(t + s, \mathbf{y})$.

Für $t \in \mathbb{R}$ sei $\Phi_t : G \rightarrow G$ definiert durch $\Phi_t(\mathbf{y}) := \Phi(t, \mathbf{y})$. Dann ist Φ_t (unendlich oft) differenzierbar, und es gilt:

1. $\Phi_0 = \text{id}_G$,
2. $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$.

Insbesondere ist jede Abbildung Φ_t ein Diffeomorphismus, mit $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$.

Man nennt das System $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine *1-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen* auf G .

Für $\mathbf{y} \in G$ sei $\alpha_{\mathbf{y}} : \mathbb{R} \rightarrow G$ definiert durch

$$\alpha_{\mathbf{y}}(t) := \Phi(t, \mathbf{y}) = \Phi_t(\mathbf{y}).$$

Man nennt $\alpha_{\mathbf{y}}$ eine *Integralkurve* oder *Flußlinie* von Φ . Die Bildmenge $\alpha_{\mathbf{y}}(\mathbb{R})$ heißt *Bahn* oder *Orbit* von \mathbf{y} .

Wir nennen zwei Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G$ *äquivalent*, wenn es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{x} = \Phi_t(\mathbf{y})$ gibt. Es ist leicht zu sehen, daß tatsächlich eine Äquivalenzrelation vorliegt. Das bedeutet, daß G disjunkte Vereinigung der Bahnen von Φ ist.

2.2 Satz. Sei $\alpha_{\mathbf{y}} : \mathbb{R} \rightarrow G$ Flußlinie eines dynamischen Systems Φ auf G . Entweder ist $\alpha_{\mathbf{y}}$ konstant, oder es ist $\alpha'_{\mathbf{y}}(t) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und dann ist genau eine der beiden folgenden Aussagen erfüllt:

1. $\alpha_{\mathbf{y}}$ ist injektiv,
2. $\alpha_{\mathbf{y}}$ ist periodisch.

BEWEIS: Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ fest. Für jedes andere $t \in \mathbb{R}$ ist dann

$$\alpha_{\mathbf{y}}(t + t_0) = \Phi(t + t_0, \mathbf{y}) = \Phi(t_0, \Phi(t, \mathbf{y})) = \Phi_{t_0}(\alpha_{\mathbf{y}}(t)).$$

Definieren wir also $T_{t_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $T_{t_0}(t) = t + t_0$, so ist

$$\alpha_{\mathbf{y}} \circ T_{t_0} = \Phi_{t_0} \circ \alpha_{\mathbf{y}}.$$

Daraus folgt:

$$D\Phi_{t_0}(\alpha_{\mathbf{y}})(\alpha'_{\mathbf{y}}(t)) = \alpha'_{\mathbf{y}}(t + t_0).$$

Das bedeutet: Entweder ist $\alpha'_{\mathbf{y}}(t) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, oder es ist $\alpha'_{\mathbf{y}}(t) \equiv \mathbf{0}$ und damit $\alpha_{\mathbf{y}}$ konstant. Wir müssen nur noch den ersten Fall betrachten. Ist $\alpha_{\mathbf{y}}$ nicht injektiv, so gibt es Zahlen $t_1 < t_2$ mit $\alpha_{\mathbf{y}}(t_1) = \alpha_{\mathbf{y}}(t_2)$. Dann ist $\Phi_{t_1}(\mathbf{y}) = \Phi_{t_2}(\mathbf{y})$, also $\Phi_{t_1-t_2}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$. Es ergibt sich:

$$\alpha_{\mathbf{y}}(t) = \Phi_t(\mathbf{y}) = \Phi_{t+(t_1-t_2)}(\mathbf{y}) = \alpha_{\mathbf{y}}(t + (t_1 - t_2)),$$

d.h. $\alpha_{\mathbf{y}}$ ist periodisch. ■

Jedes dynamische System Φ auf G liefert ein autonomes Vektorfeld $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$F(\mathbf{y}) := \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, \mathbf{y}).$$

Dann ist $\alpha_{\mathbf{y}}(t) = \Phi(t, \mathbf{y})$ eine Integralkurve von F mit $\alpha_{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{y}$, denn es ist

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(s+t, \mathbf{y}) - \Phi(s, \mathbf{y})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t, \Phi(s, \mathbf{y})) - \Phi(0, \Phi(s, \mathbf{y}))}{t},$$

also

$$\begin{aligned} \alpha'_{\mathbf{y}}(s) &= \frac{\partial \Phi}{\partial t}(s, \mathbf{y}) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, \Phi(s, \mathbf{y})) \\ &= F(\Phi(s, \mathbf{y})) = F(\alpha_{\mathbf{y}}(s)). \end{aligned}$$

Sei jetzt umgekehrt ein autonomes C^∞ -Vektorfeld F gegeben und $\psi : I = (t_-, t_+) \rightarrow G$ eine maximale Integralkurve der DGL $\mathbf{y}' = F(\mathbf{y})$. Sei $t_0 \in I$ und $\psi(t_0) = \mathbf{y}_0$. Wir setzen dann $\varphi(t) := \psi(t + t_0)$ auf $J := (t_- - t_0, t_+ - t_0)$. Offensichtlich liegt 0 in J , es ist $\varphi(0) = \mathbf{y}_0$, und wegen der Translationsinvarianz ist auch φ eine Lösung der DGL. Das bedeutet, daß zu jedem $\mathbf{y}_0 \in G$ eine Integralkurve $\varphi : I \rightarrow G$ mit $0 \in I$ und $\varphi(0) = \mathbf{y}_0$ existiert.

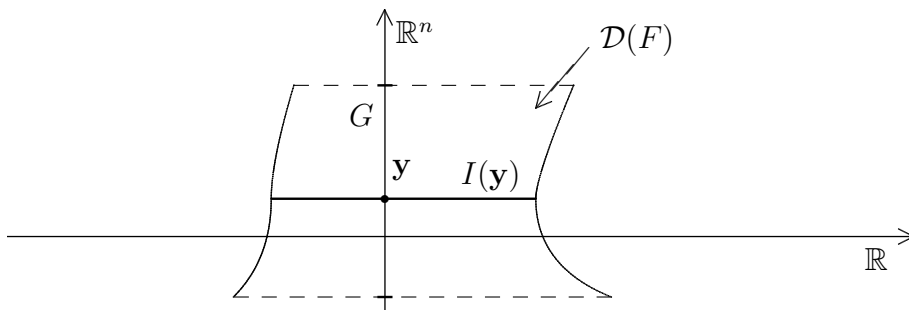
Für $\mathbf{y} \in G$ sei $I(\mathbf{y})$ das maximale Definitionsintervall der eindeutig bestimmten Lösung $\varphi_{\mathbf{y}}$ von $\mathbf{y}' = F(\mathbf{y})$ mit $\varphi_{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{y}$. Dann setzen wir

$$\mathcal{D}(F) := \{(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times G : t \in I(\mathbf{y})\}.$$

Weiter sei $\Phi : \mathcal{D}(F) \rightarrow G$ definiert durch

$$\Phi(t, \mathbf{y}) := \varphi_{\mathbf{y}}(t).$$

Man nennt Φ den *maximalen Fluß* von F .



2.3 Satz. $\mathcal{D}(F)$ ist eine offene Menge und Φ eine C^∞ -Abbildung.

BEWEIS: Sei $\mathbf{y}_0 \in G$ und $p \in \mathbb{N}$,

$$J = \{t \in I(\mathbf{y}_0), : \exists \text{ Umgebung } V = V(t, \mathbf{y}_0) \subset \mathcal{D}(F), \text{ s.d. } \Phi \in C^p(V, G)\}.$$

Wir wollen zeigen, daß $J = I(\mathbf{y}_0)$ ist. Daraus folgt die Aussage des Satzes.

1) Zunächst ist klar, daß $J \neq \emptyset$ ist, denn es gibt ein $\varepsilon > 0$, eine Kugel $B = B_r(\mathbf{y}_0)$ und einen (beliebig oft differenzierbaren) lokalen Fluß $\Phi_0 : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow G$. Also liegt 0 in J .

2) Nach Definition ist J offen.

3) Wenn wir zeigen, daß J in $I(\mathbf{y}_0)$ abgeschlossen ist, dann folgt, daß $J = I(\mathbf{y}_0)$ ist.

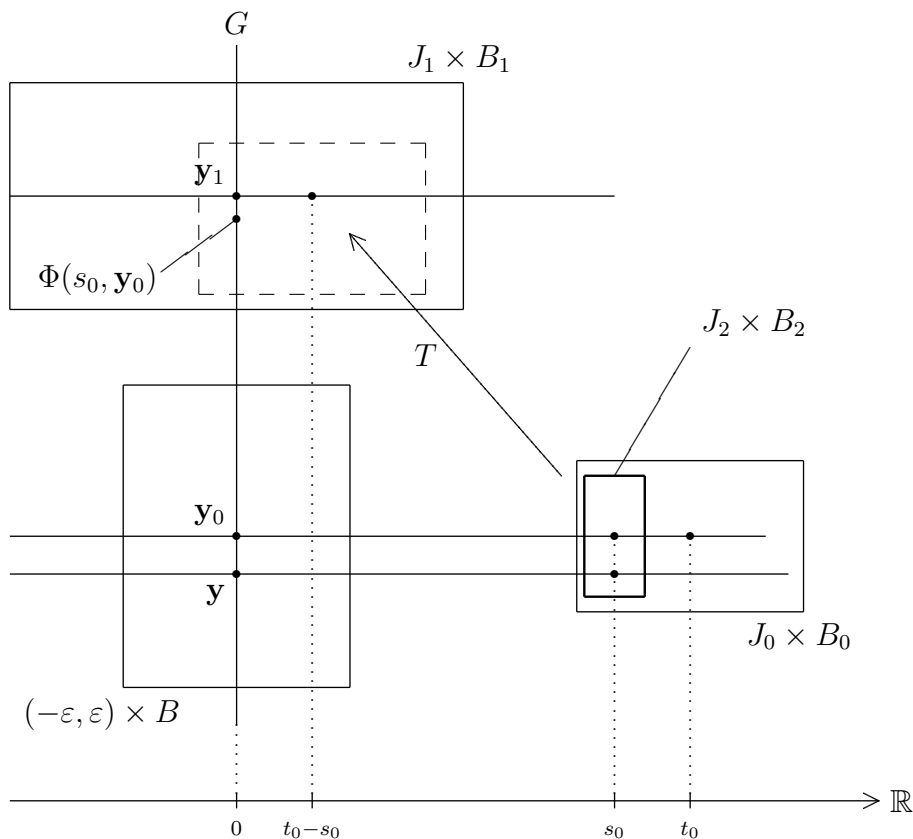
Sei also $t_0 \in I(\mathbf{y}_0)$ ein Häufungspunkt von J und $\mathbf{y}_1 := \Phi(t_0, \mathbf{y}_0)$. Es gibt ein Intervall $J_1 = (-\delta, \delta)$, eine Kugel B_1 um \mathbf{y}_1 und einen lokalen (beliebig oft differenzierbaren) Fluß $\Psi : J_1 \times B_1 \rightarrow G$. Dann sei $J_0 := (t_0 - \frac{\delta}{2}, t_0 + \frac{\delta}{2})$.

Weil t_0 ein Häufungspunkt von J ist, gibt es eine Folge (t_ν) in J , die gegen t_0 konvergiert. Für ein geeignetes ν_0 und $\nu \geq \nu_0$ ist $t_\nu \in J_0 \cap J$. Und weil $\Phi(t_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_1$ ist, gibt es ein $\nu_1 \geq \nu_0$, so daß $\Phi(t_\nu, \mathbf{y}_0) = \varphi_{\mathbf{y}_0}(t_\nu) \in B_1$ für $\nu \geq \nu_1$ ist. Wir können also ein $s_0 \in J_0 \cap J$ mit $\Phi(s_0, \mathbf{y}_0) \in B_1$ finden.

Ist $t \in J_0$, so ist

$$|t - s_0| \leq |t - t_0| + |t_0 - s_0| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

also $t - s_0 \in J_1$. Außerdem ist Φ p -mal stetig differenzierbar in (s_0, \mathbf{y}_0) . Es existiert also eine Kugel B_0 um \mathbf{y}_0 , so daß $\Phi(s_0, \mathbf{y}) \in B_1$ für $\mathbf{y} \in B_0$ ist.



Jetzt definieren wir die p -mal stetig differenzierbare Abbildung $T : J_0 \times B_0 \rightarrow J_1 \times B_1$ durch

$$T(t, \mathbf{y}) := (t - s_0, \Phi(s_0, \mathbf{y})).$$

Für $\mathbf{y} \in B_0$ ist $\alpha_{\mathbf{y}}(t) := \Psi(T(t, \mathbf{y})) = \Psi(t - s_0, \Phi(s_0, \mathbf{y}))$ eine auf J_0 definierte Integralkurve mit $\alpha_{\mathbf{y}}(s_0) = \Psi(0, \Phi(s_0, \mathbf{y})) = \Phi(s_0, \mathbf{y})$.

Andererseits ist auch die Integralkurve $\varphi_{\mathbf{y}}$ in s_0 definiert, und es ist $\varphi_{\mathbf{y}}(s_0) = \Phi(s_0, \mathbf{y}) = \alpha_{\mathbf{y}}(s_0)$, also $\varphi_{\mathbf{y}} = \alpha_{\mathbf{y}}$ auf $J_0 \cap I(\mathbf{y})$.

Daß $s_0 \in J$ ist, bedeutet: Es gibt Umgebungen $J_2 = J_2(s_0) \subset J_0$ und $B_2 = B_2(\mathbf{y}_0) \subset B_0$, so daß $J_2 \times B_2$ in $\mathcal{D}(F)$ enthalten und $\Phi : J_2 \times B_2 \rightarrow G$ eine \mathcal{C}^p -Abbildung ist.

$W := J_0 \times B_2$ ist jetzt eine Umgebung von (t_0, \mathbf{y}_0) , und

$$\Phi(t, \mathbf{y}) = \varphi_{\mathbf{y}}(t) = \alpha_{\mathbf{y}}(t) = \Psi(t - s_0, \Phi(s_0, \mathbf{y}))$$

ist auf W definiert und von der Klasse \mathcal{C}^p . Also gehört t_0 zu J . ■

Bemerkung. Der Beweis kann nicht entscheidend vereinfacht werden:

Ist $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathcal{D}(F)$, so gibt es zwar einen lokalen Fluß $\tilde{\Phi}$ in der Nähe von (t_0, \mathbf{y}_0) , aber es ist nicht klar, ob die von $\tilde{\Phi}$ induzierten Integralkurven überhaupt in $t = 0$ definiert sind.

Definition. Die Abbildung $\Phi : \mathcal{D}(F) \rightarrow G$ nennt man den *globalen Fluß* von F . Ist $\mathcal{D}(F) = \mathbb{R} \times G$, so nennt man Φ *vollständig*.

2.4 Satz. Sei F ein \mathcal{C}^∞ -Vektorfeld auf G , Φ der globale Fluß und $\mathbf{y}_0 \in G$.

Ist $t \in I(\mathbf{y}_0)$ und $s \in I(\Phi(t, \mathbf{y}_0))$, so ist $s + t \in I(\mathbf{y}_0)$ und

$$\Phi(s + t, \mathbf{y}_0) = \Phi(s, \Phi(t, \mathbf{y}_0)).$$

BEWEIS: Der Fall $s = 0$ ist trivial. Ist $s > 0$ und $I(\mathbf{y}_0) = (\alpha, \beta)$, so definieren wir $\varphi : (\alpha, s + t] \rightarrow G$ durch

$$\varphi(u) := \begin{cases} \Phi(u, \mathbf{y}_0) & \text{für } \alpha < u \leq t, \\ \Phi(u - t, \Phi(t, \mathbf{y}_0)) & \text{für } t \leq u \leq s + t. \end{cases}$$

Offensichtlich ist φ eine Integralkurve von F mit $\varphi(0) = \mathbf{y}_0$. Also gehört $s + t$ zu $I(\mathbf{y}_0)$, und es ist

$$\Phi(s + t, \mathbf{y}_0) = \varphi(s + t) = \Phi(s, \Phi(t, \mathbf{y}_0)).$$

Ist $s < 0$, so definieren wir $\psi : [s + t, \beta) \rightarrow G$ durch

$$\psi(u) := \begin{cases} \Phi(u - t, \Phi(t, \mathbf{y}_0)) & \text{für } s + t \leq u \leq t, \\ \Phi(u, \mathbf{y}_0) & \text{für } t \leq u < \beta. \end{cases}$$

Dann argumentieren wir wie oben. ■

Ist der globale Fluß vollständig, so ist er ein dynamisches System. Im allgemeinen trifft das aber nicht zu, und für $t \neq 0$ braucht Φ_t nicht auf ganz G definiert zu sein.

Zwei autonome Systeme $\mathbf{y}' = F_1(\mathbf{y})$ und $\mathbf{y}' = F_2(\mathbf{y})$ auf Gebieten G_1, G_2 heißen *topologisch äquivalent*, falls es einen orientierungserhaltenden² Homöomorphismus $h : G_1 \rightarrow G_2$ gibt, der Integralkurven auf Integralkurven abbildet, also das sogenannte „Phasenportrait“ erhält. Man kann zeigen, daß jedes autonome System topologisch äquivalent zu einem dynamischen System ist. Deshalb gibt es eine ausgedehnte Theorie dynamischer Systeme, auf die wir hier aber nicht eingehen können.

²Was das heißt, können wir mit unseren augenblicklichen Mitteln nicht erklären

§ 3 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir erinnern an die Norm von linearen Abbildungen und Matrizen. Ist $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, so setzt man

$$\|f\| := \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \|f(\mathbf{x})\|.$$

Ist $A \in M_{k,n}(\mathbb{R})$ und $L_A(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \cdot A^t$, so setzt man $\|A\| := \|L_A\|$. Dann ist $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, wenn man die Matrizen miteinander multiplizieren kann. Im Falle eines Vektors ist die Matrix-Norm genau die euklidische Norm.

Im folgenden sei $M := M_{n,n}(\mathbb{R})$. Mit der Matrix-Norm ist M ein vollständiger metrischer Raum, und die Konvergenz von Folgen ist wie üblich definiert. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ von Elementen von M heißt konvergent gegen ein $X \in M$, wenn

die Folge der Partialsummen $S_N := \sum_{n=0}^N X_n$ gegen X konvergiert. Mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums zeigt man:

$$\text{Ist } \sum_{n=0}^{\infty} \|X_n\| < \infty, \text{ so konvergiert auch } \sum_{n=0}^{\infty} X_n.$$

Beispiel.

Ist $A \in M$, so ist $A^0 := E$ (= Einheitsmatrix) und $A^n := \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{n\text{-mal}}$. Dann

konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A\|^n$ in \mathbb{R} , und daher konvergiert auch die Reihe

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ in M . Den Grenzwert bezeichnen wir mit e^A .

Sei nun $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $F_n : I \rightarrow M$ eine stetige Funktion, für $n \in \mathbb{N}$. Gibt es eine Folge positiver reeller Zahlen (a_n) , so daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ und

$\|F_n(t)\| \leq a_n$ für alle n und alle $t \in I$ ist, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$ auf

I gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $F(t)$. Das beweist man genauso wie im skalaren Fall.

3.1 Satz. Ist $A \in M$, so ist $f : \mathbb{R} \rightarrow M$ mit $f(t) := e^{At}$ eine differenzierbare Funktion und $f'(t) = A \cdot e^{At}$.

BEWEIS: Es sei $S_N(t) := \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} (At)^n$. Dann konvergiert die Folge der S_N auf jedem abgeschlossenen Intervall gleichmäßig gegen die Funktion $f(t)$. Weiter ist S_N differenzierbar und

$$S'_N(t) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n-1)!} A^n t^{n-1} = A \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} A^n t^n.$$

Offensichtlich konvergiert die Folge der Funktionen $S'_N(t)$ (gleichmäßig auf I) gegen $A \cdot e^{At}$. Aber dann ist f differenzierbar und $f'(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} S'_N(t) = A \cdot e^{At}$. ■

3.2 Satz. Sei $A \in M_{n,n}(K)$. Die eindeutig bestimmte Fundamentalmatrix $X(t)$ des linearen Systems

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A^t \quad \text{mit } X(0) = E$$

ist gegeben durch $X(t) := e^{tA}$.

BEWEIS: Es ist $X'(t) = A \cdot X(t)$ und $X(0) = E$. Nach dem globalen Existenz- und Eindeigkeitssatz ist damit schon alles bewiesen. ■

3.3 Satz.

1. Für $s, t \in \mathbb{R}$ ist $e^{sA} \cdot e^{tA} = e^{(s+t)A}$.
2. Ist $A \cdot B = B \cdot A$, so ist $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.
3. Die Matrix e^A ist stets invertierbar. Insbesondere gilt:

$$\det(e^A) = e^{\text{Spur}(A)}.$$

BEWEIS: Ist $A \cdot B = B \cdot A$, so ist

$$B \cdot \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} (tA)^k = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} B \cdot (tA)^k = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} (tA)^k \cdot B,$$

also (nach Übergang zum Limes) $B \cdot e^{tA} = e^{tA} \cdot B$.

Wir setzen $F(t) := e^{t(A+B)} - e^{tA} \cdot e^{tB}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F'(t) &= (A+B) \cdot e^{t(A+B)} - A \cdot e^{tA} \cdot e^{tB} - e^{tA} \cdot B \cdot e^{tB} \\ &= (A+B) \cdot (e^{t(A+B)} - e^{tA} \cdot e^{tB}) \\ &= (A+B) \cdot F(t). \end{aligned}$$

$F(t)$ ist also die eindeutig bestimmte Fundamental-Lösung der DGL

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot (A + B)^t \quad \text{mit } F(0) = 0.$$

Daher muß $F(t) \equiv 0$ sein, d.h.

$$e^{t(A+B)} = e^{tA} \cdot e^{tB}.$$

2) Für $t = 1$ erhält man: $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

1) Die Matrizen sA und tA sind natürlich vertauschbar. Also ist

$$e^{(s+t)A} = e^{sA+tA} = e^{sA} \cdot e^{tA}.$$

3) Es ist $e^A \cdot e^{-A} = e^0 = E$, also e^A invertierbar, mit $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Aus der Liouville-Formel ergibt sich:

$$\det(e^{tA}) = \exp\left(\int_0^t \text{Spur}(A) ds\right) = e^{t \cdot \text{Spur}(A)}.$$

Mit $t = 1$ erhält man die gewünschte Formel. ■

3.4 Folgerung.

1. Die Fundamentallösung $C(t, t_0)$ des Systems $\vec{y}' = A \cdot \vec{y}$ ist gegeben durch $C(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$, die allgemeine Lösung durch $\widehat{\varphi}(s; t, \vec{y}) = e^{A(s-t)} \cdot \vec{y}$.
2. Ist $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$ eine Basis des \mathbb{R}^n , so bilden die Funktionen $\vec{\varphi}_\nu(t) := e^{At} \cdot \vec{y}_\nu$ ein Fundamentalsystem von Lösungen.
3. Ist B invertierbar, so ist $B^{-1} \cdot e^A \cdot B = e^{B^{-1} \cdot A \cdot B}$.

BEWEIS: Wir zeigen nur noch die letzte Behauptung.

$X(t) := B^{-1} \cdot e^{At} \cdot B$ und $Y(t) := e^{(B^{-1} \cdot A \cdot B)t}$ sind beides Fundamental-Lösungen von $\vec{y}' = (B^{-1} \cdot A \cdot B) \cdot \vec{y}$ mit $X(0) = Y(0) = E$, denn es ist

$$X'(t) = B^{-1} \cdot A \cdot e^{At} \cdot B = (B^{-1} \cdot A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot e^{At} \cdot B) = (B^{-1} \cdot A \cdot B) \cdot X(t)$$

und

$$Y'(t) = (B^{-1} \cdot A \cdot B) \cdot e^{(B^{-1} \cdot A \cdot B)t} = (B^{-1} \cdot A \cdot B) \cdot Y(t).$$

Aber dann muß $X(t) = Y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ sein, insbesondere $X(1) = Y(1)$. ■

Wir versuchen nun, die Exponentialfunktion von Matrizen zu berechnen. Für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ bezeichne $D = \Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ die aus den λ_i gebildete Diagonalmatrix. Dann ist $D^k = \Delta(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ und

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} D^k = \Delta\left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \lambda_1^k, \dots, \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \lambda_n^k\right).$$

Läßt man nun N gegen Unendlich gehen, so erhält man

$$e^D = \Delta(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}).$$

Ist A diagonalisierbar, so gibt es eine invertierbare Matrix P , so daß $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$ eine Diagonalmatrix ist. Dann ist $e^A = e^{P \cdot D \cdot P^{-1}} = P \cdot e^D \cdot P^{-1}$.

3.5 Satz.

1. A besitze n verschiedene (reelle) Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (jeweils mit Vielfachheit 1), und $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$ sei eine dazu passende Basis von Eigenvektoren von A . Dann bilden die n Funktionen $\varphi_\nu(t) := e^{\lambda_\nu t} \cdot \mathbf{y}_\nu$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A^t$.
2. Hat A nur k verschiedene (reelle) Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ mit Vielfachheiten n_1, \dots, n_k , so gibt es ein Fundamentalsystem von Lösungen, welches für $\nu = 1, \dots, k$ aus jeweils n_ν Funktionen der Gestalt $\mathbf{q}_{\nu\mu}(t) \cdot e^{\lambda_\nu t}$ besteht, $\mu = 1, \dots, n_\nu$. Dabei ist $\mathbf{q}_{\nu\mu}(t)$ jeweils ein Vektor von Polynomen vom Grad $\leq n_\nu - 1$.

BEWEIS: 1) Sei $P = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$. Dann ist P invertierbar und

$$\begin{aligned} A \cdot P &= (A \cdot \vec{y}_1, \dots, A \cdot \vec{y}_n) \\ &= (\lambda_1 \vec{y}_1, \dots, \lambda_n \vec{y}_n) \\ &= (\lambda_1 P \cdot \vec{e}_1, \dots, \lambda_n P \cdot \vec{e}_n) \\ &= (P \cdot (\lambda_1 \vec{e}_1), \dots, P \cdot (\lambda_n \vec{e}_n)) \\ &= P \cdot \Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \end{aligned}$$

also

$$e^{At} \cdot P = P \cdot \Delta(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) = (\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)).$$

2) Wir können annehmen, daß $k = 1$ ist, daß es also nur einen einzigen Eigenwert λ mit Vielfachheit n gibt. Dann ist $(A - \lambda \cdot E)^n = 0$, oder $A = \lambda \cdot E + N$, mit einer nilpotenten Matrix N (Beweis: Lineare Algebra, Herleitung der Jordanschen Normalform).

Weil die Diagonalmatrix $(\lambda t)E$ mit jeder Matrix vertauscht werden kann, ist

$$e^{At} = e^{(\lambda t)E + Nt} = e^{(\lambda t)E} \cdot e^{Nt} = e^{\lambda t} \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\nu!} N^\nu t^\nu.$$

Nun sei $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n\}$ eine Basis des \mathbb{R}^n und $\vec{a}_{\nu\mu} := N^\nu \cdot \vec{y}_\mu$ für $\nu = 0, \dots, n-1$ und $\mu = 1, \dots, n$. Dann ist

$$\vec{\varphi}_\mu(t) := e^{At} \cdot \vec{y}_\mu = e^{\lambda t} \cdot \vec{q}_\mu(t),$$

wobei $\vec{q}_\mu(t) := \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{t^\nu}{\nu!} \cdot \vec{a}_{\nu\mu}$ ein Vektor von Polynomen vom Grad $\leq n-1$ ist. ■

Eine Lösungsmethode besteht nun darin, die Polynome mit unbestimmten Koeffizienten anzusetzen, das Ergebnis in die DGL einzusetzen und auf den Koeffizientenvergleich zu hoffen.

Beispiel.

Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Wir wollen die DGL $\vec{y}' = A \circ \vec{y}$ lösen.

Zunächst bestimmen wir die Eigenwerte von A . Nach Laplace ergibt die Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} p_A(t) = \det(A - tE) &= (-t)[(3-t)(1-t) + 1] - [(-2)(1-t) - 1] \\ &\quad - [-2 + (3-t)] \\ &= (-t)(t^2 - 4t + 4) - (2t - 3) - (1-t) \\ &= -t^3 + 4t^2 - 5t + 2 \\ &= -(t-1)^2(t-2). \end{aligned}$$

Der Eigenwert $\lambda = 2$ hat die Vielfachheit 1. Man findet sofort einen Eigenvektor dazu, nämlich $\mathbf{y}_1 := (0, 1, 1)$. Das ergibt die erste Lösung

$$\vec{\varphi}_1(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}.$$

Der Eigenwert $\lambda = 1$ hat die (algebraische) Vielfachheit 2 und man findet dazu nur den Eigenvektor $\mathbf{y}_2 := (1, 1, 0)$. Also ist A nicht diagonalisierbar und wir machen den Ansatz

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} q_1 + p_1 t \\ q_2 + p_2 t \\ q_3 + p_3 t \end{pmatrix} e^t.$$

Setzt man $\vec{y}(t)$ in die DGL ein, so erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (q_1 + p_1) + p_1 t &= (q_2 - q_3) + (p_2 - p_3)t, \\ (q_2 + p_2) + p_2 t &= (-2q_1 + 3q_2 - q_3) + (-2p_1 + 3p_2 - p_3)t, \\ (q_3 + p_3) + p_3 t &= (-q_1 + q_2 + q_3) + (-p_1 + p_2 + p_3)t. \end{aligned}$$

Der Vergleich der Koeffizienten bei t liefert z.B.

$$p_1 = p_2 - p_3 \quad \text{und} \quad p_3 = -p_1 + p_2 + p_3,$$

also

$$p_1 = p_2 \quad \text{und daher} \quad p_3 = 0.$$

Setzen wir $\alpha := p_1 = p_2$, so ergibt sich ferner:

$$q_1 - q_2 + q_3 = -\alpha, \quad 2(q_1 - q_2) + q_3 = -\alpha \quad \text{und} \quad q_1 = q_2,$$

also $q_3 = -\alpha$. Setzen wir noch $\beta := q_1 = q_2$, so erhalten wir:

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \beta + \alpha t \\ \beta + \alpha t \\ -\alpha \end{pmatrix} e^t.$$

Das setzt sich linear zusammen aus den Lösungen

$$\vec{\varphi}_2(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \quad \text{und} \quad \vec{\varphi}_3(t) := \begin{pmatrix} t \\ t \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

Wir betrachten noch eine andere Differentialgleichung:

$\tilde{F} : M \times M \rightarrow M \times M$ (mit $M := M_{n,n}(\mathbb{R})$) sei definiert durch $\tilde{F}(A, B) := (B \cdot A, 0)$.

Dann ist $\varphi(t) := (e^{At}, A)$ eine Lösung der DGL $Y' = \tilde{F}(Y)$ mit $\varphi(0) = (E, A)$.

Ist $\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \times (M \times M) \rightarrow M \times M$ der globale Fluß, so ist $\tilde{\Phi}(t, (E, A)) = \varphi(t)$. Daraus folgt: Die Abbildung $A \mapsto \tilde{\Phi}(1, (E, A)) = \varphi(1) = (e^A, A)$ ist beliebig oft differenzierbar, also auch die Abbildung $A \mapsto e^A$. Das ist ein typisches Beispiel dafür, wie DGLn nutzbringend in der Reinen Mathematik angewandt werden können.

In günstigen Fällen ist ein dynamisches System lokal topologisch äquivalent zu einem linearen System mit konstanten Koeffizienten. Das macht die Bedeutung solcher Systeme aus. Wir wollen im folgenden noch den Fall $n = 2$ ansehen.

Sei $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$. Wie bisher nehmen wir an, daß die Eigenwerte λ_1, λ_2 von A reell sind. Wir betrachten dann jeweils die (Jordansche) Normalform von A .

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Ist $A = 0$, so ist jede Lösung konstant, also jede Integralkurve ein Punkt.

Ist $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, so haben die Lösungen die Gestalt $\varphi(t) = (at + b, a)$, mit Konstanten a und b . Die Integralkurven sind Geraden, parallel zur x -Achse.

2. $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = \lambda \neq 0$.

Ist $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, so ist $\varphi(t) = (a, b \cdot e^{\lambda t})$. Das sind Halbgeraden parallel zur y -Achse, die nicht die x -Achse erreichen.

3. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, beide $\neq 0$.

Dann haben die Integralkurven die Gestalt $\varphi(t) = (a \cdot e^{\lambda_1 t}, b \cdot e^{\lambda_2 t})$. Sind beide λ_i positiv oder beide negativ, so erhält man einen sogenannten *Knoten*, andernfalls einen *Sattelpunkt*.

4. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Ist $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, so ist $\varphi(t) = e^{\lambda t} \cdot (a, b)$. Das ergibt Halbgeraden, die auf den Nullpunkt zulaufen (oder von ihm weglaufen).

Ist $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, so ist $\varphi(t) = e^{\lambda t} \cdot (a + tb, b)$. Man spricht von einem *singulären Knoten*.

Wir haben bisher überhaupt noch nicht den Fall untersucht, daß A komplexe Eigenwerte besitzt. Im Falle $n = 2$ gäbe es dann zwei Eigenwerte $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ und $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, mit $\beta \neq 0$. Dann erhält man Integralkurven

$$\varphi(t) = e^{\alpha t} \cdot (a \cos(\beta t) + b \sin(\beta t), b \cos(\beta t) - a \sin(\beta t)).$$

Ist $\alpha \neq 0$, so erhält man einen *Strudel*. Ist $\alpha = 0$, so ist φ ein *Wirbel* (eine Schar konzentrischer Kreise).