Bergische Universität – Gesamthochschule Wuppertal – Fachbereich Mathematik

Analysis 3

Kapitel 5 Differentialgleichungen

Vorlesungsausarbeitung zum WS 2001/02

von Prof. Dr. Klaus Fritzsche

Inhaltsverzeichnis

§ 1 Der Existenzsatz

Definition. Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Unter einer *Lösung der Differentialgleichung*

$$\mathbf{y}' = F(t, \mathbf{y})$$

versteht man eine Abbildung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $I \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall, und der Graph $\{(t, \varphi(t)) \,:\, t \in I\}$ liegt in G.
2. φ ist stetig differenzierbar, und es ist $\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$ auf I.

Man nennt F auch ein *zeitabhängiges Vektorfeld*. Für $t \in \mathbb{R}$ sei

$$G_t := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \,:\, (t, \mathbf{y}) \in G\}.$$

Dann ist G_t offen, eventuell auch leer. Ist $G = J \times B$, mit einem Intervall J und einer offenen Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$, so ist $G_t = B$ für jedes $t \in J$. Ist außerdem F nicht von t abhängig, so spricht man von einem *autonomen* Vektorfeld auf B.

Eine *Integralkurve* eines autonomen Vektorfeldes F auf B ist ein stetig differenzierbarer Weg $\alpha : J \to B$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $J \subset I$.
2. $\alpha'(t) = F(\alpha(t))$ für alle $t \in J$.

Ist F ein zeitabhängiges Vektorfeld und φ eine Lösung der DGL $\mathbf{y}' = F(t, \mathbf{y})$, so nennen wir $\alpha(t) := (t, \varphi(t))$ eine Integralkurve.

Ist F zeitunabhängig, so möchte man folgendes wissen: Gibt es zu jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in B$ eine Integralkurve $\alpha : J \to B$ von F und einen Parameter $t_0 \in J$, so daß $\alpha(t_0) = \mathbf{x}_0$ ist? Ist diese Integralkurve eindeutig bestimmt, und wie groß kann man J wählen?

Übertragen auf den zeitabhängigen Fall, suchen wir zu jedem Punkt $(t_0, \mathbf{x}_0) \in G$ ein Intervall I und eine offene Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ mit $I \times B \subset G$, so daß eine Integralkurve α von F mit $\alpha(t_0) = (t_0, \mathbf{x}_0)$ existiert. Die Abbildung $\varphi(t) := \mathrm{pr}_2 \circ \alpha(t)$ ist dann eine Lösung der Differentialgleichung. Ist umgekehrt eine Lösung gegeben, so ist ihr Graph eine Integralkurve. Können wir also Differentialgeichungen lösen, so können wir auch Integralkurven von Vektorfeldern finden. Bei autonomen DGLn fällt beides zusammen.

Ist φ eine Lösung von $\mathbf{y}' = F(t, \mathbf{y})$ und $\varphi(t_0) = \mathbf{x}_0$, so sagt man, φ erfüllt die *Anfangsbedingung* $(t_0, \mathbf{x}_0)$. Die Lösung heißt *maximal*, wenn sie sich nicht zu einer Lösung mit größerem Definitionsbereich fortsetzen läßt.

1.1 Satz. *Ist φ Lösung der DGL $\mathbf{y}' = F(t, \mathbf{y})$ und F k-mal stetig differenzierbar, so ist φ $(k+1)$-mal stetig differenzierbar.*

Beweis: Definitionsgemäß ist φ einmal stetig differenzierbar, aber $\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$ ist auch wieder stetig differenzierbar. Also muß φ sogar zweimal stetig differenzierbar sein. Dieses Argument kann man so lange wiederholen, bis der Differenzierbarkeitsgrad von F erreicht ist. ∎

Beispiel.

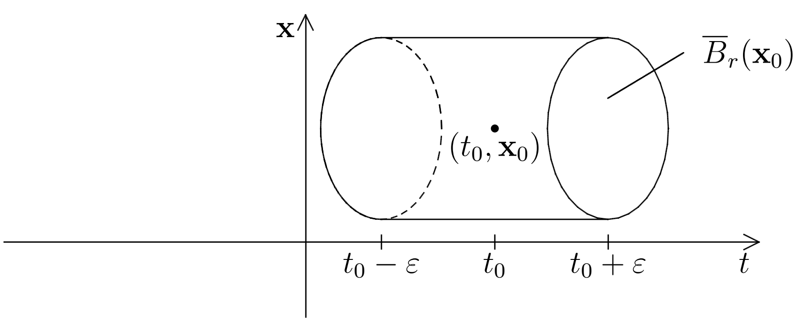
Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $F(x_1, x_2) := (-x_2, x_1)$. Die autonome DGL $(y_1', y_2') = F(y_1, y_2)$ hat die Lösungen $\varphi_r(t) := (r\cos t, r\sin t)$, $r > 0$, und die Lösung $\varphi_0(t) \equiv 0$. Für jeden Punkt $(r, 0)$, $r \geq 0$, gibt es genau eine Lösung φ_r mit $\varphi_r(0) = (r, 0)$. Jedes φ_r ist beliebig oft differenzierbar (was wir natürlich schon vorher wußten). Offen bleibt vorerst die Frage, ob es noch weitere Lösungen gibt.

Definition. Sei $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Die *Tonne* mit *Radius* r und *Länge* 2ε um $(t_0, \mathbf{x}_0)$ ist die Menge

$$T := [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}_r(\mathbf{x}_0).$$

Sei nun $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Eine Tonne $T \subset G$ mit Radius r und Länge 2ε heißt *Sicherheitstonne* für F, falls gilt:

$$\sup_T \|F(t, \mathbf{x})\| \leq \frac{r}{\varepsilon}.$$



1.2 Satz. *Ist T_0 eine beliebige Tonne um $(t_0, \mathbf{x}_0)$ mit Radius r und Länge 2ε, so gibt es ein δ mit $0 < \delta \leq \varepsilon$, so daß jede Tonne T mit Radius r und Länge $\leq 2\delta$ eine Sicherheitstonne um $(t_0, \mathbf{x}_0)$ ist.*

Beweis: Sei $M := \sup_{T_0} \|F\|$ und $\delta := \min(\varepsilon, \frac{r}{M})$. Dabei sei $r/M := +\infty$ gesetzt, falls $M = 0$ ist. Dann ist $r/\delta = \max(r/\varepsilon, M)$, und für die Tonne T gilt: $\sup_T \|F\| \leq \sup_{T_0} \|F\| = M \leq \frac{r}{\delta}$. ∎

Definition. Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine stetige Abbildung $F : G \to \mathbb{R}^n$ genügt auf G einer *Lipschitz-Bedingung* mit Lipschitz-Konstante k, falls gilt:

$$\|F(t, \mathbf{x}_1) - F(t, \mathbf{x}_2)\| \leq k \cdot \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \text{ für alle Punkte } (t, \mathbf{x}_1), (t, \mathbf{x}_2) \in G.$$

F genügt *lokal* der *Lipschitz-Bedingung*, falls es zu jedem $(t_0, \mathbf{x}_0) \in G$ eine Umgebung $U = U(t_0, \mathbf{x}_0) \subset G$ gibt, so daß F auf U einer Lipschitz-Bedingung genügt.

1.3 Satz. *Ist F stetig und nach den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ stetig partiell differenzierbar, so genügt F auf jeder Tonne $T \subset G$ einer Lipschitz-Bedingung.*

BEWEIS: Sei $T = I \times B \subset G$ eine beliebige Tonne. Die partiellen Ableitungen $F_{x_i}(t, \mathbf{x})$ sind auf T stetig und damit beschränkt, etwa durch $M > 0$. Für $t \in I$ ist $f_t(\mathbf{x}) := F(t, \mathbf{x})$ auf B (total) stetig differenzierbar, und es ist $\sup_B \|Df_t(\mathbf{x})\| \leq n \cdot M$. Aus dem Schrankensatz folgt dann:

$$\|f_t(\mathbf{x}_1) - f_t(\mathbf{x}_2)\| \leq n \cdot M \cdot \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \text{ für } \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B.$$

Da dies unabhängig von t gilt, haben wir unsere gesuchte Lipschitz-Bedingung. ∎

1.4 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F : G \to \mathbb{R}^n$ stetig. Genügt F auf G lokal der Lipschitz-Bedingung, so gibt es zu jedem $(t_0, \mathbf{x}_0) \in G$ ein $\varepsilon > 0$ und eine Sicherheitstonne $T \subset G$ mit Zentrum $(t_0, \mathbf{x}_0)$ und Länge 2ε, so daß F auf T einer Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstante $k < 1/(2\varepsilon)$ genügt.*

BEWEIS: Sei $U = U(t_0, \mathbf{x}_0)$ eine Umgebung, auf der F einer Lipschitz-Bedingung mit Konstante k genügt. Weiter sei $T_0 \subset U$ eine Tonne mit Zentrum $(t_0, \mathbf{x}_0)$, Radius $r < 1$ und Länge 2ε. Man kann ε so weit verkleinern, daß $\varepsilon < 1/(2k)$ und T eine Sicherheitstonne ist. ∎

1.5 Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz. *Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $F : G \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, \mathbf{y}_0) \in G$. Es sei $T = I \times B \subset G$ eine Sicherheitstonne der Länge 2ε mit Zentrum $(t_0, \mathbf{y}_0)$, auf der F einer Lipschitz-Bedingung mit einer Konstanten $k < 1/(2\varepsilon)$ genügt.*

Dann gibt es genau eine Lösung $\varphi : I \to B$ der DGL $\mathbf{y}' = F(t, \mathbf{y})$ mit $\varphi(t_0) = \mathbf{y}_0$.

BEWEIS: Es ist $I = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ und $B = \overline{B}_r(\mathbf{y}_0)$, für ein gewisses $r > 0$. Wir betrachten den metrischen Raum

$$X := \{\varphi : I \to B \, : \, \varphi \text{ stetig, mit } \varphi(t_0) = \mathbf{y}_0\}.$$

Offensichtlich ist $X \neq \varnothing$, denn die Funktion $\varphi(t) \equiv \mathbf{y}_0$ gehört zu X. Durch $\operatorname{dist}(\varphi, \psi) := \sup_I \|\varphi(t) - \psi(t)\|$ wird eine Metrik auf X erklärt.

Sei nun (φ_ν) eine Cauchyfolge in X. Sie konvergiert im Raum **aller** stetigen Abbildungen von I nach $\mathbb{R}^n$ gegen eine stetige Grenzfunktion φ_0. Da B abgeschlossen und $\varphi_\nu(t)$ stets in B enthalten ist, muß auch der Grenzwert $\varphi_0(t)$ in B liegen. Und die Relation $\varphi_\nu(t_0) = \mathbf{y}_0$ bleibt ebenfalls beim Grenzübergang erhalten. Das bedeutet, daß φ_0 wieder in X liegt. Der Raum X ist vollständig.

Als nächstes definieren wir eine Abbildung $S : X \to \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ durch

$$(S\varphi)(t) := \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} F(u, \varphi(u))\, du\,.$$

Es ist klar, daß $S\varphi$ stetig ist und Werte in $\mathbb{R}^n$ hat. Außerdem ist $(S\varphi)(t_0) = \mathbf{y}_0$, und für $t \in I$ gilt:

$$\begin{aligned} \|(S\varphi)(t) - \mathbf{y}_0\| &= \|\int_{t_0}^{t} F(u, \varphi(u))\, du\| \\ &\le |t - t_0| \cdot \sup_T \|F(t, \mathbf{y})\| \\ &\le \varepsilon \cdot \frac{r}{\varepsilon} = r. \end{aligned}$$

Also liegt $S\varphi$ wieder in X. Das bedeutet, daß S den metrischen Raum X in sich abbildet.

Wir wollen nun zeigen, daß S kontrahierend ist. Für $\varphi, \psi \in X$ ist

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(S\varphi, S\psi) &= \sup_I \|S\varphi(t) - S\psi(t)\| \\ &= \sup_I \|\int_{t_0}^{t} [F(u, \varphi(u)) - F(u, \psi(u))]\, du\| \\ &\le \varepsilon \cdot k \cdot \sup_I \|\varphi(u) - \psi(u)\| \\ &< \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\varphi, \psi). \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß S genau einen Fixpunkt φ^* besitzt. Nun gilt:

$$\varphi^*(t) = (S\varphi^*)(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} F(u, \varphi^*(u))\, du.$$

Differenzieren auf beiden Seiten ergibt $(\varphi^*)'(t) = F(t, \varphi^*(t))$. Damit ist φ^* eine Lösung der DGL, mit $\varphi^*(t_0) = \mathbf{y}_0$.

Ist umgekehrt φ eine Lösung der DGL mit der gewünschten Anfangsbedingung, so ist

$$\int_{t_0}^{t} F(u, \varphi(u))\, du = \int_{t_0}^{t} \varphi'(u)\, du = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \varphi(t) - \mathbf{y}_0,$$

also $S\varphi = \varphi$. Damit ist Existenz und Eindeutigkeit der Lösung über I gezeigt. ∎

Bemerkung. Das oben vorgestellte Lösungsverfahren nennt man das *Verfahren von Picard-Lindelöf*. Es ist konstruktiv in dem Sinne, daß man mit einer beliebigen Funktion (z.B. $\varphi(t) \equiv \mathbf{y}_0$) starten kann und die gesuchte Lösung als Grenzwert der Folge $\varphi_k := S^k\varphi$ für $k \to \infty$ erhält.

Betrachten wir als Beispiel noch einmal die DGL $(y_1', y_2') = (-y_2, y_1)$. Sei $\varphi_0(t) := (1,0)$. Hier ist $F(u, \varphi_1(u), \varphi_2(u)) = (-\varphi_2(u), \varphi_1(u))$, also

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= (1,0) + \int_0^t (0,1)\,du \;=\; (1,t),\\
\varphi_2(t) &= (1,0) + \int_0^t (-u,1)\,du \;=\; (1-\frac{t^2}{2}, t),\\
\varphi_3(t) &= (1,0) + \int_0^t (-u, 1-\frac{u^2}{2})\,du \;=\; (1-\frac{t^2}{2}, t-\frac{t^3}{6})\,.
\end{aligned}$$

Per Induktion zeigt man schließlich:

$$\varphi_{2k}(t) = \Big(\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!}, \sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^\nu\frac{t^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\Big)$$

und

$$\varphi_{2k+1}(t) = \Big(\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!}, \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\frac{t^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\Big)\,.$$

Das bedeutet, daß $\varphi(t) := (\cos(t), \sin(t))$ die einzige Lösung mit $\varphi(0) = (1,0)$ ist.

Im folgenden betrachten wir eine DGL $\mathbf{y}' = F(t, \mathbf{y})$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Die Abbildung F genüge lokal der Lipschitz-Bedingung.

1.6 Satz. *Sei $\varphi : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung. Dann gibt es ein $t_2 > t_1$ und eine Lösung $\widehat{\varphi} : [t_0, t_2) \to \mathbb{R}^n$ mit $\widehat{\varphi}|_{[t_0,t_1]} = \varphi$.*

BEWEIS: Nach dem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutig bestimmte Lösung $\psi : (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$. Außerdem ist

$$\psi'(t_1) = F(t_1, \psi(t_1)) = F(t_1, \varphi(t_1)) = \varphi'(t_1).$$

Also ist $\widehat{\varphi} : [t_0, t_1 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\widehat{\varphi}(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{für } t_0 \le t \le t_1, \\ \psi(t) & \text{für } t_1 < t < t_1 + \varepsilon. \end{cases}$$

stetig differenzierbar und damit eine Lösung über $[t_0, t_1 + \varepsilon)$. ∎

1.7 Satz (von der globalen Eindeutigkeit). *Sind $\varphi, \psi : [t_0, t_1) \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen mit $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$, so ist $\varphi = \psi$.*

Beweis: Nach dem lokalen Eindeutigkeitssatz gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $\varphi(t) = \psi(t)$ für $t_0 \le t < t_0 + \varepsilon$ ist. Ist $\varphi = \psi$ auf ganz $[t_0, t_1)$, so ist nichts mehr zu zeigen. Andernfalls sei

$$t^* := \inf\{t \in [t_0, t_1) \,:\, \varphi(t) \neq \psi(t)\}.$$

Dann ist $t_0 < t^* < t_1$, und es muß $\varphi(t^*) = \psi(t^*)$ sein, denn die Menge aller t mit $\varphi(t) \neq \psi(t)$ ist offen. Wegen der lokalen Eindeutigkeit wäre dann aber auch noch in der Nähe von t^* die Gleichheit von $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ gegeben. Das ist ein Widerspruch zur Definition von t^*. ∎

1.8 Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz. *Zu vorgegebener Anfangsbedingung $(t_0, \mathbf{y}_0) \in G$ gibt es Zahlen $t_-, t_+ \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $t_- < t_0 < t_+$ und eine Lösung $\varphi : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *$\varphi(t_0) = \mathbf{y}_0$.*
2. *φ läßt sich auf kein größeres Intervall fortsetzen.*
3. *Ist $\psi : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ eine weitere Lösung mit $\psi(t_0) = \mathbf{y}_0$, so ist $\varphi = \psi$.*
4. *Die Integralkurve $\Phi(t) := (t, \varphi(t))$ läuft in G „von Rand zu Rand“: Zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset G$ mit $(t_0, \mathbf{y}_0) \in K$ gibt es Zahlen t_1, t_2 mit*

   $$t_- < t_1 < t_0 < t_2 < t_+,$$

   so daß $\Phi((t_-, t_1)) \subset G \setminus K$ und $\Phi((t_2, t_+)) \subset G \setminus K$ ist.

Beweis: Wir beschränken uns auf die Konstruktion von t_+, die von t_- kann dann analog durchgeführt werden. Es sei

$$\varepsilon_+ := \sup\{\varepsilon > 0 \,:\, \exists \text{ Lösung } \varphi_\varepsilon : [t_0, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n \text{ mit } \varphi_\varepsilon(t_0) = \mathbf{y}_0\}$$

und

$$t_+ := t_0 + \varepsilon_+.$$

Ist nun $t \in [t_0, t_+)$, so gibt es ein ε mit $t - t_0 < \varepsilon < \varepsilon^+$, und wir setzen

$$\varphi(t) := \varphi_\varepsilon(t).$$

Diese Definition ist wegen der globalen Eindeutigkeit unabhängig vom gewählten ε, und φ ist deshalb auch eine Lösung der DGL. Nach Konstruktion von ε_+ läßt sich φ nicht über t_+ hinaus zu einer erweiterten Lösung fortsetzen. Offensichtlich ist φ eindeutig bestimmt.

Der Beweis der letzten Aussage ist etwas komplizierter.

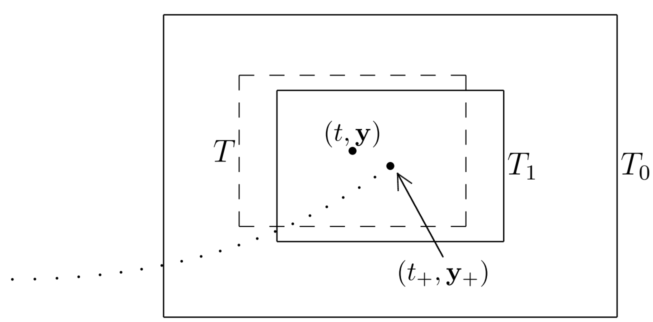
Sei $\Phi(t) := (t, \varphi(t))$ für $t_0 \le t < t_+$ die zugehörige Integralkurve. Wenn die Behauptung falsch wäre, gäbe es eine kompakte Menge $K \subset G$ und eine monoton wachsende und gegen t_+ konvergente Folge (t_ν), so daß $\Phi(t_\nu) \in K$ für $\nu \in \mathbb{N}$ gilt. Wir nehmen an, das sei der Fall. Da K kompakt ist, muß dann die Folge (t_ν) beschränkt sein, also t_+ endlich. Außerdem muß es eine Teilfolge (t_{ν_i}) geben, so daß $\Phi(t_{\nu_i})$ gegen ein Element $(t_+, \mathbf{y}_+) \in K$ (und damit in G) konvergiert. Zur Vereinfachung der Schreibweise nehmen wir an, daß schon die Folge $(\Phi(t_\nu))$ gegen $(t_+, \mathbf{y}_+)$ konvergiert.

Sei $T_0 = [t_+ - \varepsilon_0, t_+ + \varepsilon_0] \times \overline{B}_{r_0}(\mathbf{y}_+)$ eine Tonne, die noch ganz in G liegt. Dabei sei ε_0 so klein gewählt, daß F auf T_0 einer Lipschitzbedingung mit Konstante $k < 1/(2\varepsilon_0)$ genügt. Weiter sei

$$M := \sup_{T_0} \|F\|, \quad \varepsilon := \min\Big(\frac{\varepsilon_0}{2}, \frac{r_0}{2M}\Big) \quad \text{und} \quad r := \frac{r_0}{2},$$

sowie T_1 die Tonne mit Radius r und Länge 2ε um $(t_+, \mathbf{y}_+)$. Für einen beliebigen Punkt $(t, \mathbf{y}) \in T_1$ ist die Tonne $T = T(t, \mathbf{y})$ mit Radius r und Länge 2ε um $(t, \mathbf{y})$ eine in T_0 enthaltene Sicherheitstonne, denn es ist

$$\frac{r}{\varepsilon} = \max\Big(\frac{r_0}{\varepsilon_0}, M\Big), \text{ also } \sup_{T} \|F\| \le \sup_{T_0} \|F\| = M \le \frac{r}{\varepsilon}\,.$$



Außerdem erfüllt F auch auf T die Lipschitzbedingung mit der Konstanten k. Wir können das auf $T_\nu = T(t_\nu, \varphi(t_\nu))$ anwenden, denn für genügend großes ν liegt $(t_\nu, \varphi(t_\nu))$ in T_1. Dann ist $(t_+, \mathbf{y}_+)$ in T_ν enthalten. Nach dem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz gibt es genau eine Lösung $\psi : [t_\nu - \varepsilon, t_\nu + \varepsilon] \to \overline{B}_r(\varphi(t_\nu))$ mit $\psi(t_\nu) = \varphi(t_\nu)$.

Offensichtlich wird φ durch ψ fortgesetzt, und zwar über t_+ hinaus. Das ist ein Widerspruch! ∎

§ 2 Beispiele und Lösungsmethoden

2.1 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Unter einer *Differentialgleichung mit getrennten Variablen* versteht man eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f(x)g(y),$$

wobei $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf geeigneten Intervallen sind.

1. Fall: Ist $g(y_0) = 0$, so ist für jedes $x_0 \in I$ die konstante Funktion $\varphi(t) = y_0$ die einzige Lösung mit $\varphi(x_0) = y_0$.

2. Fall: Sei $J_0 \subset J$ ein offenes Intervall, auf dem g keine Nullstellen hat, und $y_0 \in J_0$. Ist φ eine Lösung auf I mit $\varphi(x_0) = y_0$, so muß für alle $t \in I$ gelten:

$$\frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))} = f(t).$$

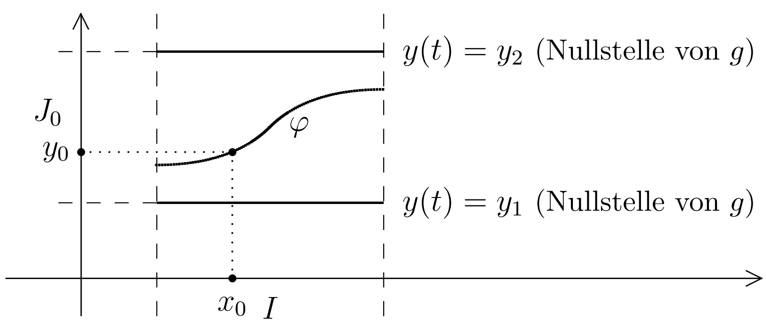
Also ist

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))}\,dt = \int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{1}{g(u)}\,du.$$

Sei nun F eine Stammfunktion von f auf I und G eine Stammfunktion von $1/g$ auf J_0. Dann ist $G'(x) = 1/g(x) \neq 0$ für $x \in J_0$, also G dort streng monoton. Damit ist G umkehrbar und

$$\varphi(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0)).$$

Die Probe zeigt sofort, daß $\varphi(t)$ tatsächlich die DGL löst.



Bemerkung. Die Physiker haben – wie immer – eine suggestive Schreibweise dafür:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad &\Longrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \\
&\Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx \\
&\Longrightarrow \quad G(y) = F(x) + c \\
&\Longrightarrow \quad y = G^{-1}(F(x) + c).
\end{aligned}$$

Damit $y(x_0) = y_0$ ist, muß man $c = G(y_0) - F(x_0)$ wählen.

Als konkretes **Beispiel** nehmen wir die DGL $\quad y' = xy.$

Hier sind $f(x) = x$ und $g(y) = y$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Als Stammfunktionen können wir

$$F(x) := \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{auf } \mathbb{R}$$

und

$$G(y) := \ln|y| \qquad \text{auf jedem Intervall } J\text{, das nicht die Null enthält,}$$

nehmen. Dann ist

$$G^{-1}(z) = \begin{cases} e^z & \text{falls } J \subset \mathbb{R}_+, \\ -e^z & \text{sonst,} \end{cases}$$

also

$$\begin{aligned} y(x) &= G^{-1}(F(x) + c) \\ &= \pm\exp(\frac{1}{2}x^2 + c) \\ &= C \cdot \exp(\frac{1}{2}x^2), \ \text{mit } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Das schließt insbesondere die Lösung $y(x) \equiv 0$ mit ein. Liegt J in $\mathbb{R}_+$, so muß $C > 0$ gewählt werden, sonst $C < 0$.

Als zweites **Beispiel** betrachten wir die DGL

$$y' = xy^2.$$

Hier ist $f(x) = x$, also $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, wie oben, sowie $g(y) = y^2$, also $G(y) = -\frac{1}{y}$ (auf jedem Intervall J, das nicht die Null enthält). Nach dem obigen Verfahren erhalten wir die Lösungen

$$y_c(x) = G^{-1}(F(x) + c) = -\frac{1}{x^2/2 + c} = -\frac{2}{2c + x^2}.$$

Hinzu kommt die konstante Lösung $y(x) \equiv 0$, die sich aus der einzigen Nullstelle von $g(y)$ ergibt.

2.2 Lineare Differentialgleichungen

Eine allgemeine lineare DGL 1. Ordnung über einem Intervall I hat folgende Gestalt:

$$y' + a(x)y = r(x), \ \text{mit stetigen Funktionen } a, r : I \to \mathbb{R}.$$

Ist $r(x) \equiv 0$, so spricht man vom *homogenen* Fall. Dann ist auf jeden Fall die Funktion $y(x) \equiv 0$ eine Lösung. Suchen wir nach weiteren Lösungen, so können wir voraussetzen, daß $y(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ ist, und es gilt:

$$(\ln|y|)'(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x).$$

Ist $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$ über I, so ist

$$y(x) = c \cdot e^{-A(x)},$$

mit einer Integrationskonstanten c, die auch ≤ 0 sein darf.

Nun betrachten wir den *inhomogenen* Fall $(r(x) \not\equiv 0)$: Sind φ_1, φ_2 zwei Lösungen, so ist

$$(\varphi_1 - \varphi_2)'(t) + a(t)(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) = r(t) - r(t) = 0,$$

also unterscheiden sich je zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung um eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung hat demnach die Gestalt

$$\varphi(t) = \varphi_p(t) + c \cdot e^{-A(t)},$$

mit einer „partikulären Lösung" $\varphi_p(t)$ der inhomogenen Gleichung. Die müssen wir noch finden.

Meistens findet man spezielle Lösungen über einen geeigneten Ansatz. So geht man auch hier vor. Wir benutzen die Methode der *Variation der Konstanten*.

Ansatz: $\quad y_p(x) = c(x) \cdot e^{-A(x)}.$

Durch Differenzieren und Einsetzen in die DGL versucht man, Bedingungen für $c(x)$ zu erhalten:

$$y_p'(x) = (c'(x) - c(x) \cdot A'(x)) \cdot e^{-A(x)} = (c'(x) - c(x)a(x)) \cdot e^{-A(x)}.$$

Da $y_p'(x) + a(x)y_p(x) = r(x)$ sein soll, erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$c'(x) \cdot e^{-A(x)} = r(x),$$

und setzt daher

$$c(x) := \int_{x_0}^{x} r(t)e^{A(t)}\,dt.$$

Die Probe zeigt, daß y_p tatsächlich die inhomogene DGL löst.

Die allgemeine Lösung hat somit die Gestalt

$$y(x) = y_p(x) + c \cdot e^{-A(x)} = (\int_{x_0}^{x} r(t)e^{A(t)}\,dt + c) \cdot e^{-A(x)}.$$

2.3 Differentialgleichungen höherer Ordnung

Es besteht ein direkter Zusammenhang zwischen einfachen DGLn n–ter Ordnung und den Systemen von DGLn erster Ordnung:

Ist eine DGL

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (*)$$

gegeben, so ordnen wir ihr folgendes System zu:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

Ist φ eine Lösung der DGL $(*)$, so ist $\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t))$, und wir setzen

$$\varphi_1 := \varphi, \quad \varphi_2 := \varphi', \quad \ldots, \quad \varphi_n := \varphi^{(n-1)}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi_1'(t) &= \varphi_2(t), \\ &\vdots \\ \varphi_{n-1}'(t) &= \varphi_n(t) \\ \text{und} \qquad \varphi_n'(t) &= \varphi^{(n)}(t) \;=\; f(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)), \end{aligned}$$

d.h., $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ist eine Lösung des Systems.

Ist umgekehrt eine Lösung $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ des Systems gegeben, so setze man $\varphi := \varphi_1$. Dann ist

$$\varphi'(t) = \varphi_2(t), \quad \ldots, \varphi^{(n-1)}(t) = \varphi_n(t)$$

$$\text{und schließlich} \quad \varphi^{(n)}(t) = \varphi_n'(t) = f(t, \varphi(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)),$$

also φ Lösung von $(*)$.

Man kann also die Theorie der DGLn n–ter Ordnung auf die der Systeme 1. Ordnung zurückführen. Insbesondere gilt der Existenz- und Eindeutigkeitssatz sinngemäß. Eine Anfangsbedingung für die DGL n–ter Ordnung hat die Gestalt

$$\varphi^{(\nu)}(x_0) = y_\nu^{(0)}, \; \nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

2.4 Transformationen

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $F : G \to \mathbb{R}^n$ stetig. Die DGL $\mathbf{y}' = F(x, \mathbf{y})$ läßt sich manchmal besser lösen, wenn man sie transformiert.

Sei $T : G \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus auf ein Gebiet D, mit $T(t, \mathbf{y}) = (t, \widetilde{T}(t, \mathbf{y}))$.

Die Integralkurven $\alpha(t) = (t, \varphi(t))$ der ursprünglichen DGL werden auf Kurven

$$T \circ \alpha(t) = T(t, \varphi(t)) = (t, \widetilde{T}(t, \varphi(t))) =: (t, \psi(t))$$

abgebildet, und wir versuchen, diese Kurven als Integralkurven einer neuen DGL aufzufassen. Wie sieht diese DGL aus?

Hat die transformierte DGL die Gestalt $\mathbf{v}' = \widetilde{F}(t, \mathbf{v})$, so muß gelten:

$$\psi'(t) = \widetilde{F}(t, \psi(t)) \quad \text{und } \psi(t) = \widetilde{T}(t, \varphi(t)).$$

Wir beschränken uns hier auf skalare DGLn. Dann ist

$$\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t}(t, \varphi(t)) + \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial y}(t, \varphi(t))\varphi'(t) = \psi'(t) = \widetilde{F}(t, \psi(t))$$

und

$$(t, \varphi(t)) = T^{-1}(t, \psi(t)),$$

also

$$\widetilde{F}(t, v) = \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t}(T^{-1}(t, v)) + \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial y}(T^{-1}(t, v)) \cdot F(T^{-1}(t, v)).$$

Beispiel.

Die DGL $y' = F(t, y)$ wird *homogen* genannt, falls $F(rt, ry) = F(t, y)$ für $(t, y) \in G$ und $r \neq 0$ ist.[1] Der Definitionsbereich G von F muß dann folgende Eigenschaft besitzen: Mit (t, y) gehört für jedes $r \neq 0$ auch (rt, ry) zu G.

Enthält G keinen Punkt (t, y) mit $t = 0$, so ist folgende Transformation möglich:

$$T(t, y) := (t, \frac{y}{t}).$$

Ist $\varphi(t)$ Lösung der Ausgangsgleichung, so ist $\psi(t) := \varphi(t)/t$ Lösung der transformierten Gleichung, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= \frac{t\varphi'(t) - \varphi(t)}{t^2} \\
&= \frac{t \cdot F(t, \varphi(t)) - \varphi(t)}{t^2} \\
&= \frac{t \cdot F(t, t\psi(t)) - t\psi(t)}{t^2} \\
&= \frac{F(1, \psi(t)) - \psi(t)}{t},
\end{aligned}$$

[1] Dieser Begriff sollte nicht mit dem Begriff „homogen“ bei linearen DGLn verwechselt werden!

d.h., ψ ist Lösung der DGL $v' = \dfrac{F(1,v) - v}{t}$. Eventuell ist ψ einfacher zu finden.

Sei etwa $F(t,y) = \dfrac{y}{t} + \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{t^2}}$ auf

$$G = \{(t,y) \,:\, t^2 \geq y^2\} = \{(t,y) \,:\, (t-y)\cdot(t+y) \geq 0\}.$$

Man sieht sofort, daß das eine homogene DGL ergibt, und die obige Transformation macht daraus

$$v' = \frac{1}{t}\sqrt{1 - v^2}.$$

Das ist eine DGL mit getrennten Variablen, der Gestalt $v' = f(t)g(v)$, mit $f(t) = \dfrac{1}{t}$ und $g(v) = \sqrt{1-v^2}$. Offensichtlich ist die Lösung ψ mit $\psi(t_0) = v_0$ gegeben durch

$$\psi(t) = \sin\big(\ln(t/t_0) + \arcsin(v_0)\big).$$

Dabei sei $(t_0, v_0) = (t_0, y_0/t_0)$ eine (transformierte) Anfangsbedingung. Als Lösung der Ausgangsgleichung erhält man dann:

$$\varphi(t) = t \cdot \psi(t) = t \cdot \sin\big(\ln(t/t_0) + \arcsin(y_0/t_0)\big).$$

Ein anderes Anwendungsbeispiel ist die *Bernoullische DGL* :

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha,$$

wobei α reell, $\neq 0$ und $\neq 1$ sein soll.

Wir verwenden die Transformation $T(t,y) := (t, y^{1-\alpha})$. Dann ist

$$T^{-1}(t,v) = (t, v^{1/(1-\alpha)}), \quad \frac{\partial\widetilde{T}}{\partial t}(t,y) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial\widetilde{T}}{\partial y}(t,y) = (1-\alpha)y^{-\alpha}.$$

Weil $F(t,y) = a(t)y + b(t)y^\alpha$ ist, folgt: die transformierten Integralkurven genügen der DGL $v' = \widetilde{F}(t,v)$, mit

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}(t,v) &= \frac{\partial\widetilde{T}}{\partial t}(t, v^{1/(1-\alpha)}) + \frac{\partial\widetilde{T}}{\partial y}(t, v^{1/(1-\alpha)}) \cdot F(t, v^{1/(1-\alpha)}) \\
&= (1-\alpha)v^{-\alpha/(1-\alpha)} \cdot \big(a(t)v^{1/(1-\alpha)} + b(t)v^{\alpha/(1-\alpha)}\big) \\
&= (1-\alpha)\cdot(a(t)v + b(t)).
\end{aligned}$$

Die transformierte DGL ist linear und daher sicher einfacher zu behandeln als die Ausgangsgleichung.

Beispiel.

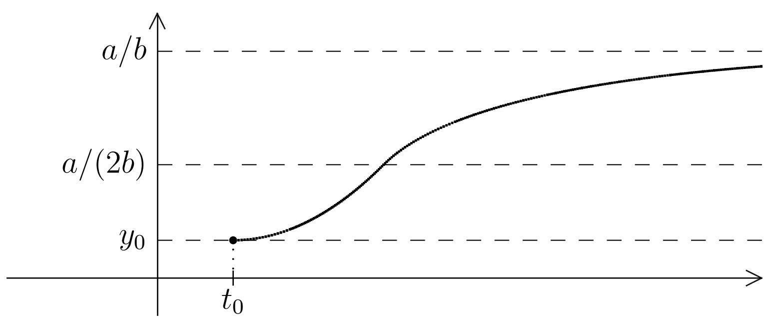
Die *logistische Gleichung* (oder *Gleichung des beschränkten Wachstums*)

$$y' = ay - by^2, \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}_+ \text{ und } y > 0$$

ist vom Bernoullischen Typ. Bevor wir sie transformieren, noch ein paar Anmerkungen:

Es ist $y' = y(a - by)$. Ist φ eine Lösung und $0 < \varphi(t) < a/b$, so ist $a - b \cdot \varphi(t) > 0$, also $\varphi'(t) > 0$. Der „Bestand“ wächst! Ist dagegen $\varphi(t) > a/b$, so ist $\varphi'(t) < 0$ und der Bestand nimmt ab.

Weiter ist $\varphi''(t) = a\varphi'(t) - 2b\varphi(t)\varphi'(t) = (a - 2b\varphi(t))\varphi'(t)$. Ist also $0 < \varphi(t) < a/(2b)$, so ist $\varphi'(t) > 0$ und $\varphi''(t) > 0$. Das ist der Bereich „beschleunigten Wachstums“, der Graph beschreibt eine Linkskurve. Ist dagegen $a/(2b) < \varphi(t) < a/b$, so ist $\varphi''(t) < 0$. Hier beschreibt der Graph eine Rechtskurve, das Wachstum wird gebremst.



Nun wenden wir unsere Transformation an. Suchen wir eine Lösung von $y' = ay - by^2$ zum Anfangswert (t_0, y_0), so können wir genauso gut eine Lösung von $v' = -av + b$ suchen, zum Anfangswert (t_0, y_0^{-1}). Das ist eine inhomogene DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Eine partikuläre Lösung ist die konstante Funktion $v_p(t) \equiv b/a$, und die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist gegeben durch $v_c(t) := c \cdot e^{-at}$, $c \in \mathbb{R}$.

Die allgemeine Lösung der Ausgangsgleichung ist dann gegeben durch

$$y_c(t) = (v_p(t) + v_c(t))^{-1} = \frac{a}{b + ac \cdot e^{-at}}.$$

Für alle diese Lösungen gilt:

$$y_c(t) \to \frac{a}{b} \qquad \text{für } t \to \infty.$$

2.5 Pfaffsche Formen und exakte Differentialgleichungen

Zur Erinnerung: Eine Pfaffsche Form ω auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung $\omega : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die linear im 2. Argument ist. Sie besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$\omega = \omega_1\, dx_1 + \cdots + \omega_n\, dx_n,$$

wobei die ω_ν stetige Funktionen auf G sind, die durch

$$\omega_\nu(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}, \mathbf{e}_\nu)$$

gegeben sind. Die dx_ν sind Pfaffsche Formen mit $dx_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{e}_\mu) = \delta_{\nu\mu}$.

Ein Spezialfall ist das totale Differential $df = f_{x_1}\, dx_1 + \cdots + f_{x_n}\, dx_n$, auch gegeben durch $(df)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = Df(\mathbf{x})(\mathbf{v})$.

Definition. Es seien $G_1 \subset \mathbb{R}^n$, $G_2 \subset \mathbb{R}^m$ zwei Gebiete, $F : G_1 \to G_2$ eine differenzierbare Abbildung. Ist ω eine Pfaffsche Form auf G_2, so wird die „zurückgeliftete" Pfaffsche Form $F^*\omega$ auf G_1 definiert durch

$$F^*\omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := \omega\big(F(\mathbf{x}), DF(\mathbf{x})(\mathbf{v})\big).$$

2.1 Satz.

1. *Ist g differenzierbar auf G, so ist $F^*(dg) = d(g \circ F)$.*
2. *Es ist $F^*(\omega_1 + \omega_2) = F^*\omega_1 + F^*\omega_2$ und $F^*(g \cdot \omega) = (g \circ F) \cdot F^*\omega$.*

BEWEIS: 1) Es ist

$$\begin{aligned} F^*(dg)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) &= dg\big(F(\mathbf{x}), DF(\mathbf{x})(\mathbf{v})\big) \\ &= Dg(F(\mathbf{x}))\big(DF(\mathbf{x})(\mathbf{v})\big) \\ &= D(g \circ F)(\mathbf{x})(\mathbf{v}) \\ &= d(g \circ F)(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

2) Die Linearität ist trivial. ■

2.2 Folgerung. *Ist $\omega = \sum_{\mu=1}^{m} \omega_\mu\, dy_\mu$ und $F = (F_1, \ldots, F_m)$, so ist*

$$F^*\omega = \sum_{\mu=1}^{m} (\omega_\mu \circ F)\, dF_\mu.$$

BEWEIS: Klar nach dem obigen Satz, denn es ist $F^*(dy_\mu) = d(y_\mu \circ F) = dF_\mu$. ■

Beispiel.

Ist $\omega = f\,dt$ eine Pfaffsche Form auf $\mathbb{R}$ und $I = [a, b]$, so setzen wir $\int_I \omega :=$ $\int_a^b \omega(t, 1)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$. Ist $J = [c, d]$ ein weiteres Intervall und $\varphi : J \to I$ eine orientierungstreue Parametertransformation, so ist $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$ und

$$\begin{aligned}\int_J \varphi^*\omega &= \int_c^d \varphi^*\omega(s, 1)\,ds \\ &= \int_c^d \omega(\varphi(s), \varphi'(s))\,ds \\ &= \int_c^d \omega(\varphi(s), 1) \cdot \varphi'(s)\,ds \\ &= \int_a^b \omega(t, 1)\,dt \;=\; \int_I \omega.\end{aligned}$$

Ist $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbarer Weg, so setzen wir

$$\int_\alpha \omega := \int_I \alpha^*\omega = \int_a^b \omega(\alpha(t), \alpha'(t))\,dt.$$

Das ist die bereits bekannte Definition des Kurvenintegrals.

Offensichtlich ist $\int_{\alpha\circ\varphi} \omega = \int_\alpha \omega$ für jede orientierungstreue Parametertransformation.

Sind $F_0 : G_0 \to G_1$ und $F_1 : G_1 \to G_2$ differenzierbare Abbildungen, ω eine Pfaffsche Form auf G_2, so ist

$$(F_1 \circ F_0)^*\omega = F_0^*(F_1^*\omega).$$

Der Beweis ist eine einfache Rechnung.

Bekanntlich heißen zwei Wege äquivalent, wenn sie durch eine orientierungstreue Parametertransformation auseinander hervorgehen. Eine Äquivalenzklasse nennen wir eine (orientierte) Kurve. Sie wird repräsentiert durch das Bild $C = \alpha(I)$ unter einer der Parametrisierungen, versehen mit einem Durchlaufsinn. Die Kurve heißt regulär, wenn sie eine glatte Parametrisierung besitzt.

Definition. Sei ω eine Pfaffsche Form auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$. Eine reguläre Kurve $C \subset G$ heißt *Lösung* der Gleichung $\omega = 0$, falls es eine glatte Parametrisierung $\alpha : I \to G$ von C gibt, so daß $\alpha^*\omega \equiv 0$ ist. Die Orientierung spielt dabei zunächst keine Rolle.

2.3 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $F : G \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann stimmen die Integralkurven der DGL $y' = F(x, y)$ mit den Lösungen der Gleichung $dy - F(x, y)\,dx = 0$ überein.*

BEWEIS: 1) Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL und $\alpha(t) := (t, \varphi(t))$ die zugehörige Integralkurve. Dann ist α offensichtlich glatt und

$$\alpha^*(dy - F\,dx) = (\varphi' - F \circ \varphi)\,dt \equiv 0.$$

Also parametrisiert α eine Lösung der Gleichung $dy - F\,dx = 0$.

2) Sei umgekehrt $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : I \to \mathbb{R}^2$ eine glatte Parametrisierung einer Lösung der Gleichung $\omega = 0$ (mit $\omega := dy - F\,dx$). Dann ist

$$0 = \alpha^*\omega = (\alpha_2' - (F \circ \alpha)\alpha_1')\,dt.$$

Wäre $\alpha_1'(t_0) = 0$, so wäre auch $\alpha_2'(t_0) = 0$, und das kann bei einer glatten Parametrisierung nicht vorkommen. Also muß $\alpha_1'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gelten. Das bedeutet, daß α_1 eine (eventuell nicht orientierungstreue) Parametertransformation ist. Wir setzen

$$\beta(s) := \alpha(\alpha_1^{-1}(s)).$$

Dann parametrisiert auch β die betrachtete Lösungskurve, und es gilt:

$$\beta(s) = (s, \varphi(s)) \quad \text{mit} \quad \varphi(s) = \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}(s).$$

Weil $\beta^*\omega = (\alpha_1^{-1})^*(\alpha^*\omega) = 0$ ist, folgt, daß φ eine Lösung der DGL ist. ∎

2.4 Satz. *Sei ω eine Pfaffsche Form auf G. Ist $h : G \to \mathbb{R}$ eine nirgends verschwindende stetige Funktion, so haben die Gleichungen $\omega = 0$ und $h \cdot \omega = 0$ die gleichen Lösungen.*

BEWEIS: Ist α ein stetig differenzierbarer Weg, so ist

$$\alpha^*(h \cdot \omega) = (h \circ \alpha) \cdot \alpha^*\omega.$$

Daraus folgt die Behauptung. ∎

Definition. Sei $\omega = a\,dx + b\,dy$ eine Pfaffsche Form auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$. Dann heißt ω in einem Punkt $\mathbf{x}_0 \in G$ *regulär*, falls $(a(\mathbf{x}_0), b(\mathbf{x}_0)) \neq (0, 0)$ ist. Andernfalls heißt ω in dem Punkt $\mathbf{x}_0$ *singulär*.

Sei $\omega = a\,dx + b\,dy$ in $\mathbf{x}_0$ regulär. Ist $b(\mathbf{x}_0) \neq 0$, so gibt es eine Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0)$, so daß $b(\mathbf{x}) \neq 0$ für alle $\mathbf{x} \in U$ ist. Dann ist $\dfrac{1}{b} \cdot \omega = dy - (-\dfrac{a}{b})\,dx$ eine

Pfaffsche Form, die der DGL $y' = -\dfrac{a(x,y)}{b(x,y)}$ entspricht. Ist $b(\mathbf{x}_0) = 0$ und $a(\mathbf{x}_0) \neq 0$, so geht man analog vor. Einer beliebigen Pfaffschen Form auf einem Gebiet des $\mathbb{R}^2$ können wir i.a. nur lokal eine explizite DGL zuordnen. Allerdings entsprechen die Lösungen der Gleichung $\omega := a\,dx + b\,dy = 0$ „fast“ den Integralkurven der *impliziten Differentialgleichung* $by' + a = 0$. Daß die Integralkurven $t \mapsto (t, \varphi(t))$ der DGL auch Lösungen der Pfaffschen Form sind, ist offensichtlich. Ist umgekehrt α eine Lösung der Gleichung $\omega = 0$ und $\alpha_1'(t_0) \neq 0$ (keine senkrechte Tangente), so ist die Spur von α in der Nähe von t_0 Graph einer Funktion φ, und $\varphi(t)$ eine Lösung der DGL.

Beispiel.

Sei $\omega := x\,dx + y\,dy$. Dann sind alle durch $\alpha(t) := (r\cos t, r\sin t)$ parametrisierten Kreise Lösungskurven von $\omega = 0$. Diese Kreise können natürlich nicht Integralkurven einer DGL sein, denn dann müßten sie im Definitionsgebiet von Rand zu Rand laufen.

Tatsächlich ist $yy' + x = 0$ für $y \neq 0$ die DGL $y' = -x/y$ mit getrennten Variablen. Eine Lösung $y = y(x)$ erhält man aus der Gleichung $\int y\,dy = -\int x\,dx$, also $y^2 = -x^2 + c$. Mit $c = r^2$ ergibt das

$$y(x) = \pm r\sqrt{1 - (x/r)^2}\,.$$

Die Halbkreisbögen enden jeweils dort, wo die Tangente senkrecht wird.

Definition. Die Funktionen a, b auf dem Gebiet G seien stetig. Eine stetig differenzierbare Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* oder *erstes Integral* der DGL $b(x,y)\,y' + a(x,y) = 0$ (bzw. der Pfaffschen Form $\omega = a\,dx + b\,dy$), falls für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Niveaumenge $\{(x,y) : f(x,y) = c\}$ eine lokal-endliche Vereinigung von Integralkurven der DGL ist.[2]

Kann man die Gleichung $f(x,y) = c$ lokal nach y auflösen, so erhält man Lösungen der DGL. Das ist der Sinn der ersten Integrale.

Definition. Die DGL $b\,y' + a = 0$ (bzw. die Pfaffsche Form $\omega = a\,dx + b\,dy$) heißt *exakt*, falls es eine stetig differenzierbare Funktion g mit $g_x = a$ und $g_y = b$ (also $dg = \omega$) gibt.

[2] „lokal-endlich“ bedeutet: Jeder Punkt $\mathbf{x}_0$ besitzt eine Umgebung U, so daß $X \cap U$ Vereinigung von endlich vielen Integralkurven ist.

2.5 Satz.

1. *Ist f Stammfunktion von ω, so ist ∇f zu den Integralkurven von ω orthogonal.*
2. *Ist $\omega = a\,dx + b\,dy$ regulär und $df = \omega$, so ist f eine Stammfunktion von ω.*

Beweis: 1) Sei $\alpha : I \to G$ eine Integralkurve und $f(\alpha(t)) \equiv c$. Dann ist

$$0 = (f \circ \alpha)(t) = \nabla f(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t).$$

2) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $X := \{(x, y) \,:\, f(x, y) = c\}$. Weiter sei $df = \omega$. Ist $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in X$, so ist $(a(\mathbf{x}_0), b(\mathbf{x}_0)) \neq (0, 0)$, also z.B. $f_y(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es eine Umgebung $U = V \times W$ von $\mathbf{x}_0$, so daß gilt:

$$U \cap X = \{(x, y) \in V \times W \,:\, y = \varphi(x)\},$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion $\varphi : V \to W$. Setzen wir $\alpha(t) := (t, \varphi(t))$, so ist $f(\alpha(t)) \equiv c$ über V. Dann ist $\alpha^*\omega = d(f \circ \alpha) = 0$, also α Lösung der Gleichung $\omega = 0$. Umgekehrt muß f auf jeder Lösungskurve konstant sein, also liegt die Integralkurve α ganz in X. ∎

Definition. Sei ω eine Pfaffsche Form auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$. Eine stetige, nirgends verschwindende Funktion $h : G \to \mathbb{R}$ heißt *Eulerscher Multiplikator* oder *integrierender Faktor* für ω, falls $h \cdot \omega$ exakt ist.

Beispiel.

Die Pfaffsche Form $\omega = y\,dx + 2x\,dy$ ist nicht exakt (denn hier ist $a_y = 1$ und $b_x = 2$). Aber es ist

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \omega = \frac{y}{\sqrt{x}}\,dx + 2\sqrt{x}\,dy$$

exakt. Setzen wir nämlich $F(x, y) := 2y\sqrt{x}$, so ist $F_x(x, y) = y/\sqrt{x}$ und $F_y(x, y) = 2\sqrt{x}$.

Es ist i.a. sehr schwierig, einen Eulerschen Multiplikator zu finden. In manchen Fällen führt allerdings schon der Ansatz $h = h(x)$ zum Ziel.

Beispiel.

Ist $\omega = a\,dx + b\,dy$, $b \neq 0$ und $h = h(x)$ und $h \cdot \omega$ exakt, so muß $(h \cdot a)_y = (h \cdot b)_x$ sein, also $h \cdot (a_y - b_x) = h' \cdot b$. Daraus folgt:

$$\frac{a_y - b_x}{b} = \frac{h'}{h} = (\ln \circ h)',$$

also

$$h(x) = \exp\Big(\int \frac{a_y(x,y) - b_x(x,y)}{b(x,y)}\, dx \Big).$$

Sei etwa $\omega = (2x^2 + 2xy^2 + 1)y\, dx + (3y^2 + x)\, dy$. Dann ist $\dfrac{a_y - b_x}{b} = 2x$, und der obige Ansatz liefert $h(x) = e^{x^2}$. Nun suchen wir eine Funktion f mit

$$f_x = e^{x^2} y(2x^2 + 2xy^2 + 1) \quad \text{und} \quad f_y = e^{x^2}(3y^2 + x).$$

Integration nach y liefert

$$f(x,y) = \int f_y\, dy = e^{x^2}(y^3 + xy) + \varphi(x),$$

mit einer noch unbekannten Funktion φ. Differentiation nach x liefert nun

$$f_x(x,y) = e^{x^2} y + 2x \cdot e^{x^2}(y^3 + xy) + \varphi'(x) = e^{x^2} y(1 + 2xy^2 + 2x^2) + \varphi'(x).$$

Also können wir $\varphi' = 0$ wählen. Damit ist

$$f(x,y) = e^{x^2}(xy + y^3) + c.$$

Tatsächlich ist dann $df = \omega$. Die Gleichung $f(x,y) = c$ ist genau dann erfüllt, wenn $y(x + y^2) = 0$ ist. Sei $\alpha(t) := (t, 0)$ und $\beta(t) := (-t^2, t)$. Dann ist

$$\alpha^*\omega = 0 \text{ und } \beta^*\omega = \big((2t^4 - 2t^4 + 1)t(-2t) + (3t^2 - t^2)\big)\, dt = 0.$$

So haben wir zwei Lösungen der Gleichung $\omega = 0$ gefunden.

§ 3 Näherungslösungen und lokaler Fluß

Wir betrachten ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und eine DGL

$$\mathbf{y}' = F(t, \mathbf{y}),$$

wobei $F : G \to \mathbb{R}^n$ lokal der Lipschitz-Bedingung genügt.

Für $(t, \mathbf{y}) \in G$ sei $I(t, \mathbf{y})$ das maximale Definitionsintervall der Lösung $\varphi = \varphi_{(t,\mathbf{y})}$ mit $\varphi(t) = \mathbf{y}$. Dann setzen wir

$$\Omega := \{(s; t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times G \,:\, (t, \mathbf{y}) \in G \text{ und } s \in I(t, \mathbf{y})\}.$$

Die Abbildung $\widehat{\varphi} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\widehat{\varphi}(s; t, \mathbf{y}) := \varphi_{(t,\mathbf{y})}(s)$$

nennt man die *allgemeine Lösung* der DGL.

Dann ist $\widehat{\varphi}$ nach der ersten Variablen partiell differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial s}(s; t, \mathbf{y}) &= F(s, \widehat{\varphi}(s; t, \mathbf{y})) \\ \text{und} \qquad \widehat{\varphi}(t; t, \mathbf{y}) &= \mathbf{y}. \end{aligned}$$

3.1 Satz. *Sei $(t, \mathbf{y}) \in G$ und $s \in I(t, \mathbf{y})$. Dann ist $I(s, \widehat{\varphi}(s; t, \mathbf{y})) = I(t, \mathbf{y})$ und*

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(u; s, \widehat{\varphi}(s; t, \mathbf{y})) &= \widehat{\varphi}(u; t, \mathbf{y}), \\ \textit{also insbesondere} \qquad \widehat{\varphi}(t; s, \widehat{\varphi}(s; t, \mathbf{y})) &= \mathbf{y}. \end{aligned}$$

BEWEIS: Sei $\psi_1 := \varphi_{(t,\mathbf{y})}$ und $\psi_2 := \varphi_{(s,\psi_1(s))}$. Beides sind Lösungen, und es ist $\psi_2(s) = \psi_1(s)$. Also ist $\psi_1 = \psi_2$, und daher

$$\widehat{\varphi}(u; s, \widehat{\varphi}(s; t, \mathbf{y})) = \widehat{\varphi}(u; s, \psi_1(s)) = \psi_2(u) = \psi_1(u) = \widehat{\varphi}(u; t, \mathbf{y}).$$

∎

3.2 Lemma von Gronwall. *Sei $t_0 < t_1 \le \infty$ und $g : [t_0, t_1) \to \mathbb{R}$ stetig. Weiter sei $\alpha \ge 0$ und $\beta > 0$. Ist nun*

$$0 \le g(t) \le \alpha + \beta \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau \qquad \textit{für } t \in [t_0, t_1),$$

so ist auch

$$g(t) \le \alpha \cdot e^{\beta(t - t_0)} \qquad \textit{für } t \in [t_0, t_1).$$

Beweis: Sei $u(t) := e^{-\beta t} \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau$. Dann ist $u(t_0) = 0$ und

$$\begin{aligned} u'(t) &= -\beta u(t) + e^{-\beta t} g(t) \\ &\le -\beta u(t) + e^{-\beta t}(\alpha + \beta \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau) \\ &= \alpha \cdot e^{-\beta t}, \end{aligned}$$

also $\alpha \cdot e^{-\beta t} - u'(t) \ge 0$. Integration über $[t_0, t]$ ergibt:

$$-\frac{\alpha}{\beta}(e^{-\beta t} - e^{-\beta t_0}) - u(t) \ge 0,$$

also

$$\begin{aligned} g(t) &\le \alpha + \beta \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau \\ &= \alpha + \beta \cdot e^{\beta t} u(t) \\ &\le \alpha + \beta \cdot e^{\beta t} \cdot \frac{\alpha}{\beta}(e^{-\beta t_0} - e^{-\beta t}) \\ &= \alpha \cdot e^{\beta(t-t_0)}. \end{aligned}$$

■

Definition. Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ heißt eine ε-*Näherungslösung*, falls gilt:

1. $(t, \varphi(t)) \in G$ für $t \in J$.
2. $\|\varphi'(t) - F(t, \varphi(t))\| \le \varepsilon$ für $t \in J$.

Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Kugel, so daß $J \times B$ in G enthalten ist und F auf $J \times B$ einer Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstante k genügt.

3.3 Satz. *Über dem Intervall J sei φ_1 eine ε_1-Näherung und φ_2 eine ε_2-Näherung. Außerdem sei $t_0 \in J$ und $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Dann ist*

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \le \|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)\| \cdot e^{k|t-t_0|} + \frac{\varepsilon}{k} \cdot (e^{k|t-t_0|} - 1)$$

für alle $t \in J$.

Beweis: Weil $\|\varphi'_\lambda(t) - F(t, \varphi_\lambda(t))\| \le \varepsilon_\lambda$ ist, folgt:

$$\begin{aligned} &\|\varphi_\lambda(t) - \varphi_\lambda(t_0) - \int_{t_0}^{t} F(u, \varphi_\lambda(u))\, du\| \\ &= \|\int_{t_0}^{t} \Big(\varphi'_\lambda(u) - F(u, \varphi_\lambda(u))\Big)\, du\| \\ &\le \varepsilon_\lambda |t - t_0|. \end{aligned}$$

Setzen wir $A_\lambda(t,t_0) := \varphi_\lambda(t) - \varphi_\lambda(t_0) - \int_{t_0}^t F(u,\varphi_\lambda(u))\,du$, so ist

$$\|A_1(t,t_0) - A_2(t,t_0)\| \le \varepsilon_1|t-t_0| + \varepsilon_2|t-t_0| = \varepsilon|t-t_0|.$$

Da aus $|a-b-c| \le d$ die Ungleichung $|a| \le |b| + |c| + d$ folgt, ist

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \le \|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)\| + \|\int_{t_0}^t (F(u,\varphi_1(u)) - F(u,\varphi_2(u)))\,du\| + \varepsilon|t-t_0|.$$

Nun setzen wir

$$\omega(t) := \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|.$$

Wir haben gezeigt: Für $t \ge t_0$ ist

$$\begin{aligned} \omega(t) &\le \omega(t_0) + \varepsilon(t-t_0) + k \cdot \int_{t_0}^t \omega(u)\,du \\ &= \omega(t_0) + k \cdot \int_{t_0}^t \left[\omega(u) + \frac{\varepsilon}{k}\right] du. \end{aligned}$$

Wenden wir das Lemma von Gronwall auf $g(t) := \omega(t) + \varepsilon/k$ an (nach Addition von ε/k auf beiden Seiten der obigen Ungleichung), so ergibt sich:

$$\omega(t) + \frac{\varepsilon}{k} \le \big(\omega(t_0) + \frac{\varepsilon}{k}\big) \cdot e^{k(t-t_0)},$$

also

$$\omega(t) \le \omega(t_0) \cdot e^{k(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{k}\big(e^{k(t-t_0)} - 1\big).$$

Damit ist der Satz für $t \ge t_0$ bewiesen. Wendet man ihn auf die DGL $\mathbf{y}' = -F(-t,\mathbf{y})$ an, so erhält man ihn auch für $t \le t_0$. ∎

3.4 Folgerung. *Sind $\varphi_1, \varphi_2 : J \to B$ zwei (exakte) Lösungen der DGL $\mathbf{y}' = F(t,\mathbf{y})$ mit Anfangsbedingungen $\varphi_1(t_0) = \mathbf{y}_1$ und $\varphi_2(t_0) = \mathbf{y}_2$, so ist*

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \le \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \cdot e^{k\cdot|t-t_0|} \text{ für } t \in J.$$

Dabei ist k die Lipschitz-Konstante.

BEWEIS: Setze $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. ∎

3.5 Satz. *Sei $\mathbf{y}' = F(t,\mathbf{y})$ eine DGL über $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, F genüge lokal einer Lipschitz-Bedingung. Weiter sei $(t_0,\mathbf{y}_0) \in G$.*

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $r > 0$, so daß $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \times B_r(\mathbf{y}_0)$ in G enthalten ist und zu jedem $\mathbf{y} \in B = B_r(\mathbf{y}_0)$ eine Lösung $\varphi_{\mathbf{y}} : J = (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ der

DGL mit $\varphi_{\mathbf{y}}(t_0) = \mathbf{y}$ existiert. Die Abbildung $\Phi : J \times B \to \mathbb{R}^n$ mit $\Phi(t, \mathbf{y}) = \varphi_{\mathbf{y}}(t)$ ist stetig.

Bemerkung. Man nennt Φ einen *lokalen Fluß* für F in $(t_0, \mathbf{y}_0)$. Es ist

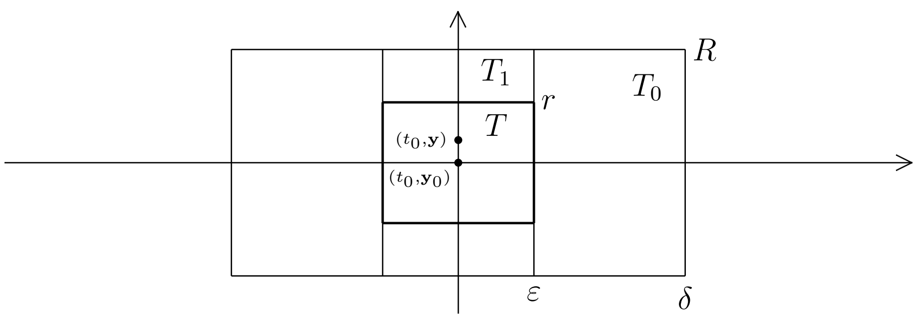
$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \mathbf{y}) &= F(t, \Phi(t, \mathbf{y})) \\ \text{und} \quad \Phi(t_0, \mathbf{y}) &= \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Ist $\widehat{\varphi}$ die allgemeine Lösung der DGL, so ist

$$\widehat{\varphi}(t; t_0, \mathbf{y}) = \Phi(t, \mathbf{y}).$$

Beweis: Sei $T_0 := [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}_R(\mathbf{y}_0)$ eine Sicherheitstonne um $(t_0, \mathbf{y}_0)$, die noch ganz in G liegt. Dann ist $M_0 := \sup_{T_0} \|F(t, \mathbf{y})\| \le \dfrac{R}{\delta}$. Wir können T_0 so klein wählen, daß F auf T_0 einer Lipschitz-Bedingung mit Konstante $k < 1/(2\delta)$ genügt.

Nun sei $\varepsilon := \delta/4$, $M := R/(4\varepsilon) = R/\delta$, $J_0 := [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ und $T_1 := J_0 \times \overline{B}_R(\mathbf{y}_0)$. Dann ist $\|F\| \le M < R/\varepsilon$ auf T_1, also auch T_1 eine Sicherheitstonne. Außerdem ist $2k\varepsilon < \varepsilon/\delta = 1/4$.



Sei $r := R/2$ und $T := J_0 \times \overline{B}_r(\mathbf{y}_0)$. Wir wollen jetzt das Verfahren von Picard-Lindelöf in T durchführen, wobei wir den Anfangswert $\mathbf{y} \in B := \overline{B}_r(\mathbf{y}_0)$ (für $t = t_0$) als Parameter mitführen.

Für $\mathbf{y} \in B$ sei $S_{\mathbf{y}} : \mathcal{C}^0(J_0, \overline{B}_R(\mathbf{y}_0)) \to \mathcal{C}^0(J_0, \overline{B}_R(\mathbf{y}_0))$ definiert durch

$$\big(S_{\mathbf{y}}\varphi\big)(s) := \mathbf{y} + \int_{t_0}^{s} F(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau \text{ für } s \in J_0.$$

Tatsächlich ist

$$\|\big(S_{\mathbf{y}}\varphi\big)(s) - \mathbf{y}_0\| \le \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| + M \cdot |s - t_0| \le \frac{R}{2} + M \cdot 2\varepsilon < R,$$

so daß $X := \mathcal{C}^0(J_0, \overline{B}_R(\mathbf{y}_0))$ von $S_{\mathbf{y}}$ auf sich abgebildet wird. Außerdem ist

$$\|S_{\mathbf{y}}\varphi(s) - S_{\mathbf{y}}\psi(s)\| = \sup_J \Big|\int_{t_0}^{s} \big[F(\tau, \varphi(\tau)) - F(\tau, \psi(\tau))\big]\, d\tau\Big| \le k \cdot 2\varepsilon \cdot \|\varphi - \psi\|.$$

Da $k \cdot 2\varepsilon < 1$ ist, ist $S_{\mathbf{y}}$ kontrahierend. Es gibt einen Fixpunkt $\varphi_{\mathbf{y}}$, der zugleich Lösung der DGL ist, mit $\varphi_{\mathbf{y}}(t_0) = \mathbf{y}$.

Es sei $\Phi(t, \mathbf{y}) := \varphi_{\mathbf{y}}(t)$ auf $J \times B$. Dann ist

$$\Phi(t, \mathbf{y}) = \mathbf{y} + \int_{t_0}^{t} F(\tau, \Phi(\tau, \mathbf{y}))\, d\tau.$$

Sind $(t_1, \mathbf{y}_1), (t_2, \mathbf{y}_2) \in J \times B$ gegeben, so ist

$$\begin{aligned}
\|\Phi(t_1, \mathbf{y}_1) - \Phi(t_2, \mathbf{y}_2)\| &\leq \|\Phi(t_1, \mathbf{y}_1) - \Phi(t_1, \mathbf{y}_2)\| + \|\Phi(t_1, \mathbf{y}_2) - \Phi(t_2, \mathbf{y}_2)\| \\
&\leq \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \cdot e^{k|t_1 - t_0|} + \|\int_{t_1}^{t_2} F(\tau, \Phi(\tau, \mathbf{y}_2))\, d\tau\| \\
&\leq \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \cdot e^{k\varepsilon} + |t_1 - t_2| \cdot M.
\end{aligned}$$

Das zeigt, daß Φ stetig ist. ∎