Bergische Universität – Gesamthochschule Wuppertal – Fachbereich Mathematik

# Analysis 3

## Kapitel 4 Der Satz von Stokes

Vorlesungsausarbeitung zum WS 2001/02

von Prof. Dr. Klaus Fritzsche

## Inhaltsverzeichnis

§1 Reguläre Gebiete .......... 81
§2 Das Lebesgue-Integral auf Mannigfaltigkeiten .......... 90
§3 Die Riemannsche Metrik .......... 98
§4 Klassische Integralsätze .......... 105

## § 1 Reguläre Gebiete

Sei $X$ eine $n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein *Gebiet* in $X$ ist eine zusammenhängende offene Teilmenge von $X$.

**Definition.** Sei $G \subset X$ ein Gebiet. Ein Punkt $p \in \partial G$ heißt *glatter* oder *regulärer Randpunkt* von $G$, falls es eine offene Umgebung $U = U(p) \subset X$ und eine (beliebig oft) differenzierbare Funktion $\varrho : U \to \mathbb{R}$ gibt, so daß gilt:

1. $U \cap G = \{x \in U \,:\, \varrho(x) < 0\}$.
2. $(d\varrho)_x \neq 0$ für $x \in U$.

Die Funktion $\varrho$ nennen wir dann eine *lokale Randfunktion* für $G$.

Die Menge aller glatten Randpunkte von $G$ sei mit $\partial_r G$ bezeichnet (*glatter* oder *regulärer Rand* von $G$). Offensichtlich ist $\partial_r G$ relativ offen in $\partial G$. Die Menge $\partial_s G := \partial G \setminus \partial_r G$ heißt *singulärer Rand* von $G$.

**1.1 Satz.** *Sei $G \subset X$ ein Gebiet und $p \in \partial G$ ein regulärer Randpunkt. Dann gibt es eine offene Umgebung $U = U(p) \subset X$ und eine lokale Randfunktion $\varrho$ für $G$ auf $U$, so daß gilt:*

1. *$U \cap \partial G = \{x \in U \,:\, \varrho(x) = 0\}$.*
2. *$U \cap \mathring{\overline{G}} = U \cap G$.*
3. *$\partial G \cap U$ ist eine 1-codimensionale Untermannigfaltigkeit von $U$.*
4. *Sind $\varrho_1$ und $\varrho_2$ zwei lokale Randfunktionen für $G$ auf $U$, so gibt es eine (beliebig oft) differenzierbare Funktion $h$ auf $U$ mit folgenden Eigenschaften:*
   (a) *$h > 0$ auf $U$.*
   (b) *$\varrho_1 = h \cdot \varrho_2$.*
   (c) *$(d\varrho_1)_{\mathbf{x}} = h(\mathbf{x}) \cdot (d\varrho_2)_{\mathbf{x}}$ auf $U \cap \partial G$.*

BEWEIS: Wir können $U$ als Koordinatenumgebung wählen. Deshalb sei o.B.d.A. $G \subset \mathbb{R}^n$ und $p = \mathbf{0}$.

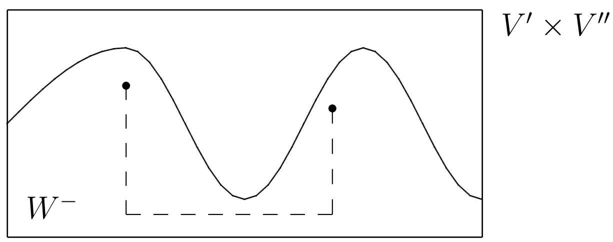
1) Ist $\mathbf{x} \in U \cap \partial G$, so gibt es eine Folge $(\mathbf{x}_\nu)$ von Punkten in $U \cap G$, die gegen $\mathbf{x}$ konvergiert. Weil $\varrho(\mathbf{x}_\nu) < 0$ für alle $\nu$ gilt, muß $\varrho(\mathbf{x}) \leq 0$ sein. Weil aber $\mathbf{x}$ nicht in $G$ liegt, muß dann $\varrho(\mathbf{x}) = 0$ sein.

Sei umgekehrt $\mathbf{x}_0 \in U$ und $\varrho(\mathbf{x}_0) = 0$. Es ist $(d\varrho)_{\mathbf{x}_0} \neq 0$, o.B.d.A. sei $\varrho_{x_n}(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es eine offene Umgebung $V = V' \times V'' \subset U$ von $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}'_0, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ und eine (beliebig oft) differenzierbare Funktion $g : V' \to V'' \subset \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\{(\mathbf{x}', x_n) \in V' \times V'' \,:\, \varrho(\mathbf{x}', x_n) = 0\} = \{(\mathbf{x}', x_n) \in V' \times V'' \,:\, x_n = g(\mathbf{x}')\}.$$

Wir können $V'$ konvex und $V''$ als Intervall wählen.

Nun sei $W^- := \{(\mathbf{x}', x_n) \in V' \times V'' \,:\, x_n < g(\mathbf{x}')\}$




Offensichtlich ist $W^-$ zusammenhängend. Weil $\varrho$ auf $W^-$ nirgends verschwindet, muß $\varrho$ dort entweder immer $< 0$ oder immer $> 0$ sein. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $\varrho|_{W^-} < 0$ ist (sonst würden wir $x_n$ durch $-x_n$ ersetzen, und $g$ durch $-g$). Also liegt $\mathbf{x}_0$ nicht in $G$, aber es gibt beliebig nahe bei $\mathbf{x}_0$ Punkte von $G$. Das bedeutet, daß $\mathbf{x}_0$ in $\partial G$ ist.

2) Wir behalten die obige Notation bei und behaupten, daß $\varrho(\mathbf{x}) > 0$ für $\mathbf{x} \in W^+ := \{(\mathbf{x}', x_n) \in V' \times V'' \,:\, x_n > g(\mathbf{x}')\}$ ist. Wie oben muß $\varrho$ nämlich auf ganz $W^+$ das gleiche Vorzeichen aufweisen. Wäre $\varrho|_{W^+} < 0$, so hätte die Funktion

$$\gamma(t) := \varrho(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_n)$$

bei $t = 0$ ein lokales Maximum. Dann müßte $\gamma'(0) = \nabla\varrho(\mathbf{x}_0) \bullet \mathbf{e}_n = \varrho_{x_n}(\mathbf{x}_0)$ verschwinden. Das wäre ein Widerspruch, also ist $\varrho|_{W^+} > 0$.

Es ist stets $G \subset \overset{\circ}{\overline{G}}$. Ist umgekehrt $\mathbf{x}_0$ ein Punkt von $U \cap \overset{\circ}{\overline{G}}$, so gibt es eine offene Umgebung $Q' \times Q'' \subset V' \times V''$, die ganz in $\overline{G}$ liegt. Dann ist $x_n \le g(\mathbf{x}')$ für alle $(\mathbf{x}', x_n) \in Q' \times Q''$. Wäre $x_n^{(0)} = g(\mathbf{x}_0')$, so gäbe es beliebig nahe bei $\mathbf{x}_0$ Punkte $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_n)$ mit $x_n > g(\mathbf{x}')$. Das kann aber nicht sein. Also muß $x_n^{(0)} < g(\mathbf{x}_0')$ sein. Das bedeutet, daß $\mathbf{x}_0$ in $G$ liegt.

3) folgt trivial, denn es ist $U \cap \partial G = \{\mathbf{x} \in U \,:\, \varrho(\mathbf{x}) = 0\}$ und $(d\varrho)_{\mathbf{x}} \neq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \partial G$.

4) Die Aussage ist invariant unter Diffeomorphismen. Wir nehmen an, daß $U = V' \times V''$ und $U \cap G = \{(\mathbf{x}', x_n) \in V' \times V'' \,:\, x_n < g(\mathbf{x}')\}$ ist, und definieren $\varphi : V' \times V'' \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\varphi(\mathbf{x}', x_n) := (x_n - g(\mathbf{x}'), \mathbf{x}').$$

Dann ist

$$J_\varphi(\mathbf{x}', x_n) = \begin{pmatrix} -\nabla g(\mathbf{x}') & 1 \\ E_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

also $\det J_\varphi(\mathbf{x}', x_n) \neq 0$. Damit ist $\varphi$ ein Diffeomorphismus und

$$\varphi(G \cap U) = \varphi(U) \cap \{(x_1, \mathbf{x}'') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \, : \, x_1 < 0\}.$$

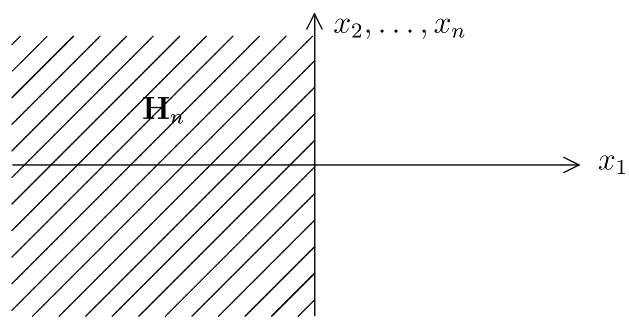
Deshalb können wir annehmen, daß $U \cap G = \{(x_1, \mathbf{x}'') \in U \, : \, x_1 < 0\}$ und $\varrho_2 = x_1$ ist. Ist $\mathbf{x} = (x_1, \mathbf{x}'') \in U$, so setzen wir $g(t) := \varrho_1(t, \mathbf{x}'')$. Dann ist $g(0) = 0$ und

$$\begin{aligned} \varrho_1(x_1, \mathbf{x}'') &= g(x_1) - g(0) = \int_0^{x_1} g'(s)\, ds \\ &= x_1 \cdot \int_0^1 g'(tx_1)\, dt \\ &= \varrho_2(x_1, \mathbf{x}'') \cdot h(x_1, \mathbf{x}''), \end{aligned}$$

wobei $h(x_1, \mathbf{x}'') := \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_1}(tx_1, \mathbf{x}'')\, dt$ eine (beliebig oft) differenzierbare Funktion ist. Außerhalb von $\partial G$ ist $h = \varrho_1 / \varrho_2 > 0$.

Für $\mathbf{x} \in \partial G$ ist $(d\varrho_1)_{\mathbf{x}} = d(h \cdot \varrho_2)_{\mathbf{x}} = h(\mathbf{x}) \cdot (d\varrho_2)_{\mathbf{x}}$. Weil die Differentiale von $\varrho_1$ und $\varrho_2$ jeweils $\neq 0$ sind, muß auch hier $h(\mathbf{x}) > 0$ sein. ∎

Es sei $\mathbf{H}_n := \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \, : \, x_1 \leq 0\}$ der „linke" *Halbraum*.




Ist $G \subset X$ ein Gebiet und $p \in \partial G$ ein regulärer Randpunkt, so ergibt sich aus dem obigen Beweis, daß es eine Karte $(U, \varphi)$ für $X$ mit $p \in U$ und $\varphi(p) = \mathbf{0}$ gibt, so daß gilt:

$$\varphi(U \cap \overline{G}) = \varphi(U) \cap \mathbf{H}_n.$$

Man nennt $\varphi$ dann eine *angepaßte Karte.*

In der Literatur findet sich der Begriff der *Mannigfaltigkeit mit Rand.* Das ist ein Hausdorffraum mit einem differenzierbaren Atlas, bei dem die Bilder der Karten offene Mengen in $\mathbf{H}_n$ sind. Ist $G$ ein Gebiet in $X$, das nur reguläre Randpunkte besitzt, so ist $\overline{G}$ eine spezielle Mannigfaltigkeit mit Rand.

**Definition.** Ein Gebiet $G \subset X$ heißt *regulär*, falls gilt:

1. $\overline{G}$ ist kompakt.

2. Alle Randpunkte von $G$ sind regulär.

**1.2 Satz.** *Sei $G \subset X$ ein reguläres Gebiet. Dann ist $\partial G$ eine kompakte 1-codimensionale Untermannigfaltigkeit von $X$, und es gibt eine offene Umgebung $U = U(\partial G) \subset X$ und globale Randfunktion $\varrho : U \to \mathbb{R}$, so daß gilt:*

1. $U \cap G = \{x \in U \,:\, \varrho(x) < 0\}$.
2. $(d\varrho)_x \neq 0$ *für* $x \in U$.

BEWEIS: Da $\overline{G}$ kompakt ist, ist auch $\partial G$ kompakt. Und daß $\partial G$ eine 1-codimensionale Untermannigfaltigkeit ist, haben wir oben schon gezeigt.

Da $\partial G$ kompakt ist, man kann eine endliche offene Überdeckung $\{U_1, \ldots, U_N\}$ von $\partial G$ in $X$ und lokale Randfunktionen $\varrho_i$ für $G$ auf $U_i$ finden. Ist $(f_i)$ eine dazu passende Teilung der Eins, so setzen wir

$$\varrho := \sum_{i=1}^{N} f_i \varrho_i \quad \text{auf } U := U_1 \cup \ldots \cup U_N.$$

Dann ist $\varrho$ eine globale definierende Funktion:

1. Ist $x \in G \cap U$, so ist $f_i(x) \cdot \varrho_i(x) \le 0$ für alle $i$ und $< 0$ in mindestens einem Fall, also $\varrho(x) < 0$. Genauso folgt, daß $\varrho(x) = 0$ auf $\partial G$ und $\varrho(x) > 0$ auf $X \setminus \overline{G}$ ist. Also ist $\{x \in U \,:\, \varrho(x) < 0\} = U \cap G$.

2. Sei $x \in \partial G$. Dann gibt es eine Teilmenge $I \subset \{1, \ldots, N\}$, ein $i_0 \in I$ und positive Funktionen $h_i$, $i \in I$, mit $x \in U_i$ und $\varrho_i(x) = h_i(x) \cdot \varrho_{i_0}(x)$ für $i \in I$, sowie $f_j(x) = 0$ für $j \notin I$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} (d\varrho)_x &= \sum_{i \in I} f_i(x) \cdot (d\varrho_i)_x \\ &= \sum_{i \in I} f_i(x) \cdot d(h_i \cdot \varrho_{i_0})_x \\ &= \Big(\sum_{i \in I} f_i(x) \cdot h_i(x)\Big) \cdot (d\varrho_{i_0})_x \;\neq\; 0\,, \end{aligned}$$

denn der Faktor in der großen Klammer ist auf jeden Fall positiv.

Aus Stetigkeitsgründen kann man die Umgebung $U$ des Randes von $G$ soweit schrumpfen, daß $(d\varrho)_x \neq 0$ auf ganz $U$ ist.

∎

**Definition.** Sei $G \subset X$ ein Gebiet, $a \in \partial G$ ein regulärer Randpunkt und $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ eine angepaßte Karte. Ein Tangentialvektor $v \in T_a(X)$ heißt (von $G$ aus gesehen) *nach außen gerichtet*, falls gilt:

$$v = v^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + v^n \frac{\partial}{\partial x_n}, \text{ mit } v^1 > 0.$$

Die Definition ist unabhängig von der gewählten (angepaßten) Karte. Dazu betrachten wir zwei angepaßte Karten $(U, \varphi)$ und $(V, \psi)$ in $a$ und setzen $\Phi := \varphi \circ \psi^{-1}$. Dann ist

$$\Phi(x_1, \mathbf{x}'') = (\Phi_1(x_1, \mathbf{x}''), \Phi_2(x_1, \mathbf{x}'')) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}, \quad \text{mit} \quad \Phi_1(0, \mathbf{x}'') \equiv 0.$$

Setzt man $\Psi(\mathbf{x}'') := \Phi_2(0, \mathbf{x}'')$, so ist

$$J_\Phi(0, \mathbf{x}'') = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(0, \mathbf{x}'') & \mathbf{0} \\ \sharp & J_\Psi(\mathbf{x}'') \end{pmatrix}.$$

Ist $x_1 < 0$, so ist auch $\Phi_1(x_1, \mathbf{x}'') < 0$; ist $x_1 > 0$, so ist $\Phi_1(x_1, \mathbf{x}'') > 0$. Daraus folgt:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(0, \mathbf{x}'') = \lim_{h \to 0} \frac{\Phi_1(h, \mathbf{x}'') - \Phi_1(0, \mathbf{x}'')}{h} > 0.$$

Ist $(U, \varphi)$ eine Karte in $a$, so ist der Isomorphismus $\theta_\varphi : \mathbb{R}^n \to T_a(X)$ gegeben durch

$$\theta_\varphi(v^1, \ldots, v^n) := \sum_{\nu=1}^{n} v^\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}.$$

Ein Tangentialvektor $v \in T_a(X)$ ist also genau dann nach außen gerichtet, wenn $\mathbf{v} = (v^1, \ldots, v^n) = \theta_\varphi^{-1}(v)$ in $\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{H}_n$ liegt, d.h., wenn $v^1 > 0$ ist. Ist $\mathbf{v} = \theta_\varphi^{-1}(v)$ und $\mathbf{w} = \theta_\psi^{-1}(v)$, so ist $J_\Phi(0, \mathbf{x}'') \cdot \mathbf{w}^{\,t} = \mathbf{v}^{\,t}$. Aber offensichtlich ist

$$J_\Phi(0, \mathbf{x}'') \cdot (w^1, \ldots, w^n)^{\,t} = (\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(0, \mathbf{x}'') \cdot w^1, \ldots)^{\,t}.$$

Ist also $w^1 > 0$, so ist auch $v^1 > 0$.

Wir bezeichnen die Menge der nach außen gerichteten Tangentialvektoren mit $T_a^+(G)$. Jetzt können wir – mit den obigen Notationen – zeigen:

**1.3 Satz.** *Ist $X$ orientierbar und $G \subset X$ ein reguläres Gebiet, so ist auch $\partial G$ orientierbar. Zu einer gegebenen Orientierung von $X$ gibt es genau eine Orientierung von $\partial G$, so daß gilt:*

*Ist $u \in T_a^+(G)$ und $\{v_2, \ldots, v_n\}$ eine positiv orientierte Basis von $T_a(\partial G)$, so ist $\{u, v_1, \ldots, v_n\}$ eine positiv orientierte Basis von $T_a(X)$.*

Beweis: 1) Sind $(U, \varphi)$ und $(V, \psi)$ zwei angepaßte **positiv orientierte** Karten und ist $\Phi = \varphi \circ \psi^{-1}$ (wie oben), so ist $\det J_\Phi(0, \mathbf{x}'') > 0$. Aus der speziellen Gestalt von $J_\Phi(0, \mathbf{x}'')$, die wir oben berechnet haben, und aus der Tatsache, daß $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(0, \mathbf{x}'') > 0$ ist, folgt, daß auch $\det J_\Psi(\mathbf{x}'') > 0$ ist. Damit ist $\Psi$ ein orientierungstreuer Kartenwechsel für $\partial G$.

2) Für die Existenz der induzierten Orientierung des Randes reicht es, folgendes zu zeigen:

Ist $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{H}_n$ und $\{\mathbf{v}_2'', \ldots, \mathbf{v}_n''\}$ eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^{n-1}$, so ist $\{\mathbf{u}, (0, \mathbf{v}_2''), \ldots, (0, \mathbf{v}_n'')\}$ eine positiv orientierte Basis des $\mathbb{R}^n$.

Setzt man $\mathbf{w}_i := (0, \mathbf{v}_i'')$ für $i = 2, \ldots, n$, so ist sicherlich $B_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ eine positiv orientierte Basis des $\mathbb{R}^n$. Da $\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{w}_n$ mit $u^1 > 0$ und $u^1$ die Determinante des Basiswechsels von $B_1$ zu $B_2 = \{\mathbf{u}, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ ist, ist auch $B_2$ positiv orientiert. ∎

**1.4 Satz.** *Sei $G$ ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$ und $\mathbf{a} \in \partial G$ ein regulärer Randpunkt. Außerdem sei $\varrho$ eine lokale Randfunktion für $G$ in $\mathbf{a}$. Dann ist*

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(\mathbf{a}) := \frac{\nabla\varrho(\mathbf{a})}{\|\nabla\varrho(\mathbf{a})\|}$$

*der eindeutig bestimmte Normaleneinheitsvektor in $\mathbf{a}$, der nach außen zeigt.*

*Es gibt außerdem ein $\varepsilon > 0$, so daß gilt:*

1. *Ist $-\varepsilon < t < 0$, so liegt $\mathbf{a} + t\boldsymbol{\nu}$ in $G$.*
2. *Ist $0 < t < \varepsilon$, so liegt $\mathbf{a} + t\boldsymbol{\nu}$ in $\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$.*

BEWEIS: Da der Gradient $\nabla\varrho(\mathbf{a})$ senkrecht auf der Niveaufläche $\{\mathbf{x} : \varrho(\mathbf{x}) = 0\}$ steht, ist $\boldsymbol{\nu}$ ein Normaleneinheitsvektor zu $\partial G$ in $\mathbf{a}$.

Wir definieren $h : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ durch $h(t) := \varrho(\mathbf{a} + t\boldsymbol{\nu})$. Dann ist

$$h(0) = \varrho(\mathbf{a}) = 0 \quad \text{und} \quad h'(0) = \nabla\varrho(\mathbf{a}) \bullet \boldsymbol{\nu} = \|\nabla\varrho(\mathbf{a})\| > 0.$$

Das bedeutet, daß $h$ in der Nähe von 0 streng monoton wächst. Wählt man $\varepsilon$ klein genug, so ist $\varrho(\mathbf{a} + t\boldsymbol{\nu}) > 0$ für $0 < t < \varepsilon$ und $< 0$ für $-\varepsilon < t < 0$.

Sei jetzt $\varphi$ eine angepaßte Karte in $\mathbf{a}$ (also ein Diffeomorphismus von einer Umgebung $U = U(\mathbf{a})$ auf eine Umgebung $V = V(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n$, mit $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, so daß $U \cap \overline{G}$ auf $V \cap \mathbf{H}_n$ abgebildet wird). Dann verläuft die Kurve $\gamma(t) := \varphi(\mathbf{a} + t\boldsymbol{\nu})$ für kleines $t > 0$ ganz in $\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{H}_n$, und es ist $\gamma'(0) = D\varphi(\mathbf{a})(\boldsymbol{\nu})$. Schreiben wir $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, so ist $\gamma_1(t) > 0$ für $t > 0$, also $\gamma_1'(0) \geq 0$. Es kommt nicht in Frage, daß $\gamma_1'(0) = 0$ ist, denn dann müßte $\boldsymbol{\nu}$ tangential zu $\partial G$ sein. Also ist $\gamma_1'(0) > 0$ und damit $\boldsymbol{\nu}$ nach außen gerichtet. ∎

**Bemerkung.** Der gerade bewiesene Satz kann nicht so ohne weiteres auf Mannigfaltigkeiten übertragen werden, da dort der Begriff des Normalenvektors keinen Sinn macht. Wir werden allerdings später sogenannte „Riemannsche Mannigfaltigkeiten" kennenlernen, bei denen jeder Tangentialraum mit einem Skalarprodukt ausgestattet ist, so daß Längen- und Winkelmessung für Tangentialvektoren möglich ist. Dann kann der obige Satz übertragen werden. Allerdings muß die Gerade $t \mapsto \mathbf{a} + t\boldsymbol{\nu}$ durch eine Kurve ersetzt werden, die $\partial G$ senkrecht trifft.

**1.5 Der Satz von Stokes.** *Sei $X$ eine $n$-dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit, $G \subset X$ ein reguläres Gebiet und $\omega$ eine $(n-1)$-Form auf einer Umgebung $U$ von $\overline{G}$, so daß $\mathrm{Tr}(\omega) \cap \overline{G}$ kompakt ist. Dann ist*

$$\int_{\partial G} \omega = \int_G d\omega\,.$$

*Ist $X$ kompakt, so ist*

$$\int_X d\omega = 0.$$

Beweis: Es seien Karten $\varphi_i : U_i \to B_i \subset \mathbb{R}^n$ gewählt, die $\overline{G}$ überdecken und Teil eines positiv orientierten Atlas von $X$ sind, so daß $\varphi_i(U_i \cap \overline{G}) = B_i \cap \mathbf{H}_n$ ist. Weiter sei $(f_i)$ eine dazu passende Teilung der Eins. Dann ist

$$\int_{\partial G} \omega = \sum_i \int_{\partial G} f_i \omega$$

und

$$\int_G d\omega = \sum_i \int_G d(f_i\omega),$$

weil $d\omega = d\big(\sum_i (f_i\omega)\big) = \sum_i d(f_i\omega)$ und $\mathrm{Tr}(d(f_i\omega)) \subset U_i$ ist. Es genügt also zu zeigen, daß gilt:

$$\int_{\partial G} f_i\omega = \int_G d(f_i\omega)\,, \text{ für alle } i.$$

**1. Fall:** $U_i \cap \partial G = \varnothing$, also $B_i \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $\displaystyle\int_{\partial G} f_i\omega = 0.$

In lokalen Koordinaten ist

$$f_i\omega = \sum_{j=1}^n g_j\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

wobei $\mathrm{Tr}(g_i)$ kompakt und in $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1 < 0\}$ enthalten ist. Dann ist

$$d(f_i\omega) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial g_j}{\partial x_j}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

also

$$\begin{aligned} \int_G d(f_i\omega) &= \sum_{j=1}^n \int_{B_i} (-1)^{j-1} \frac{\partial g_j}{\partial x_j}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial g_j}{\partial x_j}\, dx^1 \ldots dx^n \;=\; 0\,, \end{aligned}$$

wegen des kompakten Trägers von $g_j$.

**2. Fall:** $U_i \cap \partial G \neq \varnothing$, $\varphi_i(U_i \cap G) = B_i \cap \mathbf{H}_n$.

Für $j \neq 1$ ist $\displaystyle\int_{\mathbf{H}_n} \frac{\partial g_j}{\partial x_j}\, dx^1 \dots dx^n = 0$, mit der gleichen Begründung wie oben. Außerdem ist

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{H}_n \cap B_i} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}\, dx^1 \dots dx^n &= \int_{(-\infty,0]\times\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}\, dx^1 \dots dx^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_1(0, x_2, \dots, x_n)\, dx^2 \dots dx^n.\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\big(g_j\, dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n\big)|_{\partial\mathbf{H}_n} = 0 \text{ für } j \neq 1,$$

und

$$\int_{\partial\mathbf{H}_n \cap B_i} g_1\, dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_1(0, x_2, \dots, x_n)\, dx^2 \dots dx^n.$$

Damit ist alles gezeigt.

Ist $X$ kompakt und $G = X$, so tritt bei der Berechnung des Integrals nur der 1. Fall auf. ∎

**Beispiele.**

1. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Sind $f, g$ differenzierbare Funktionen auf einer Umgebung von $\overline{G}$, so gilt der **Greensche Satz**:

$$\int_{\partial G} f\, dx + g\, dy = \int_G \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

2. Sei jetzt $G \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $\mathbf{F} = (F^1, F^2, F^3)$ ein differenzierbares Vektorfeld auf einer Umgebung von $\overline{G}$ und $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ das äußere Normalenfeld auf $\partial G$.

   Führt man formal den „Vektor“ $d\mathbf{O} := (dx^2 \wedge dx^3, dx^3 \wedge dx^1, dx^1 \wedge dx^2)$ ein (das sogenannte „vektorielle Oberflächenelement“), so ergibt das formale Skalarprodukt $\mathbf{F} \bullet d\mathbf{O}$ die kanonische 2-Form

$$\Lambda_{\mathbf{F}} = F^1\, dx^2 \wedge dx^3 + F^2\, dx^3 \wedge dx^1 + F^3\, dx^1 \wedge dx^2$$

   zu dem Vektorfeld $\mathbf{F}$. Weil $d(\Lambda_{\mathbf{F}}) = \mathbf{div}\,\mathbf{F}\, dV$ ist, folgt der **Integralsatz von Gauß**:

$$\int_G \mathbf{div}\,\mathbf{F}\, dV = \int_{\partial G} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O}.$$

   Manchmal benutzt man auch das „skalare Oberflächenelement“

$$do := \Lambda_{\boldsymbol{\nu}} = \nu_1\, dx^2 \wedge dx^3 + \nu_2\, dx^3 \wedge dx^1 + \nu_3\, dx^1 \wedge dx^2.$$

Ist etwa lokal $\partial G = \{\mathbf{x} \,:\, x^1 = 0\}$, so ist $\nu = (1, 0, 0)$ und

$$(\mathbf{F} \bullet \boldsymbol{\nu}) \cdot i^*_{\partial G}(do) = (F^1\, dx^2 \wedge dx^3)|_{\partial G} = (\mathbf{F} \bullet d\mathbf{O})|_{\partial G}.$$

Man kann allgemein zeigen:

$$\int_{\partial G} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{O} = \int_{\partial G} (\mathbf{F} \bullet \boldsymbol{\nu}) do.$$

Man beachte aber, daß die Integranden nur nach Einschränkung auf $\partial G$ übereinstimmen. Wir werden darauf später noch einmal zurückkommen.

## § 2 Das Lebesgue-Integral auf Mannigfaltigkeiten

Es sei $X$ eine $n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

**Definition.** Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt *meßbar* (in $M$), falls für jede Karte $(U, \varphi)$ von $X$ die Menge $\varphi(M \cap U)$ im $\mathbb{R}^n$ meßbar ist.

Es ist klar, daß die Meßbarkeit in $M$ wohldefiniert ist, und dieser Begriff paßt auch zum Begriff der „Nullmenge" in $M$.

Eine höchstens abzählbare Zerlegung $M = \bigcup_j M_j$ soll eine *Standard-Zerlegung* der meßbaren Menge $M$ genannt werden, falls gilt:

1. Jedes $M_j$ ist meßbar und im Definitionsbereich einer Karte für $M$ enthalten.
2. $M_i \cap M_j = \varnothing$ für $i \neq j$.

Ist $X$ orientierbar, so gibt es eine nirgends verschwindende stetige $n$-Form $\omega$ auf $X$. Bezüglich der Karte $(U, \varphi)$ wird $\omega$ durch eine $n$-Form $\omega_\varphi = a_\varphi \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ auf $B = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ beschrieben. Legt man eine Orientierung von $X$ fest und wählt man dann nur positiv orientierte Karten, so kann man erreichen, daß stets $a_\varphi > 0$ ist. Die $n$-Form $\omega$ soll dann *positiv* genannt werden (in Zeichen: $\omega > 0$). Ist stets $a_\varphi \geq 0$, so nennen wir $\omega$ *semipositiv* ($\omega \geq 0$). Gilt $\omega > 0$ nur außerhalb einer Nullmenge, so nennen wir $\omega$ *fast positiv*.

**Definition.** Sei $X$ orientiert, $\omega_0$ eine semipositive oder fast positive $n$-Form auf $X$, $M \subset X$ eine meßbare Menge und $f$ eine reellwertige Funktion auf $M$.

1. $f$ heißt *meßbar*, wenn $f \circ \varphi^{-1}$ auf $\varphi(M \cap U)$ meßbar ist, für jede Karte $(U, \varphi)$.
2. Die Menge $M$ liege im Definitionsbereich $U$ einer Karte $\varphi$, und es sei $(\omega_0)_\varphi = a_\varphi \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Dann heißt $f$ *integrierbar* bezüglich $\omega_0$, falls gilt:
   (a) $f$ ist meßbar.
   (b) Es existiert das Integral $\displaystyle\int_M f\,\omega_0 := \int_{\varphi(M)} (f \circ \varphi^{-1})(\mathbf{x}) a_\varphi(\mathbf{x}) \, dx^1 \ldots dx^n$.
3. Ist $M$ beliebig, so heißt $f$ integrierbar bezüglich $\omega_0$, falls für jede Standardzerlegung $M = \bigcup_j M_j$ gilt:
   (a) Für alle $j$ ist $f$ über $M_j$ bezüglich $\omega_0$ integrierbar.
   (b) $\displaystyle\int_X f\,\omega_0 := \sum_{j=1}^{\infty} \int_{M_j} f\,\omega_0$ ist konvergent.

**Bemerkung.** Ist $(U_j)$ eine abzählbare Überdeckung von $X$ durch Kartenumgebungen, so erhält man eine Standardzerlegung von $M$ durch

$$M_1 := M \cap U_1, \; M_2 := (M \cap U_2) \setminus M_1 \quad \text{usw.}$$

Ist $\sum_{j=1}^{\infty} \int_{M_j} f\,\omega_0$ für jede Zerlegung konvergent, so kommt es offensichtlich nicht auf die Summationsreihenfolge an, und die Reihen sind sogar für jede Zerlegung absolut konvergent. Sind $(M_j)$ und $(N_i)$ zwei Zerlegungen, so bilden die Durchschnitte $M_j \cap N_i$ ebenfalls eine Zerlegung, und es ist

$$\sum_j \int_{M_j} f\,\omega_0 = \sum_j \sum_i \int_{M_j \cap M_i} f\,\omega_0 = \sum_i \sum_j \int_{M_j \cap M_i} f\,\omega_0 = \sum_j \int_{M_j} f\,\omega_0\,,$$

wegen der $\sigma$-Additivität des Lebesgue-Integrals. Damit hängt das Integral nicht von der Zerlegung ab.

**2.1 Satz.** *Folgende Aussagen über eine meßbare Funktion $f$ sind äquivalent:*

1. *$f$ ist integrierbar bezüglich $\omega_0$.*
2. *$|f|$ ist integrierbar bezüglich $\omega_0$.*
3. *Es gibt eine Standardzerlegung $(M_j)$ von $M$ mit $\displaystyle\sum_j \int_{M_j} |f|\,\omega_0 < \infty$.*

Beweis: (1) $\Longrightarrow$ (2): Ist $f$ integrierbar bezüglich $\omega_0$, so setzen wir

$$M^+ := \{x \in M \,:\, f(x) > 0\},$$

und für jedes $j$ sei

$$M_j^+ := M_j \cap M^+ \quad \text{und} \quad M_j^- := M_j \setminus M^+.$$

Dann bilden die Mengen $M_j^+$ und $M_j^-$ zusammen eine Standardzerlegung von $M$. Weil die Reihe $\displaystyle\sum_j \int_{M_j^+} f\,\omega_0 + \sum_j \int_{M_j^-} f\,\omega_0$ absolut konvergiert, ist

$$\sum_j \int_{M_j^+} |f|\,\omega_0 = \sum_j \int_{M_j^+} f\,\omega_0 < \infty \quad \text{und} \quad \sum_j \int_{M_j^-} |f|\,\omega_0 = -\sum_j \int_{M_j^-} f\,\omega_0 < \infty,$$

also

$$\sum_j \int_{M_j} |f|\,\omega_0 = \sum_j \left( \int_{M_j^+} |f|\,\omega_0 + \int_{M_j^-} |f|\,\omega_0 \right) = \sum_j \int_{M_j^+} |f|\,\omega_0 + \sum_j \int_{M_j^-} |f|\,\omega_0 < \infty\,.$$

(2) $\Longrightarrow$ (3): Trivial!

(3) $\Longrightarrow$ (1): Es sei $\displaystyle\sum_j \int_{M_j} |f|\,\omega_0 < \infty$. Weiter sei $(N_k)$ eine beliebige Standardzerlegung von $M$. Es ist

$$\int_{N_k} |f|\,\omega_0 = \sum_j \int_{N_k \cap M_j} |f|\,\omega_0 \le \sum_j \int_{M_j} |f|\,\omega_0 < \infty,$$

insbesondere ist $f$ über $N_k$ integrierbar.

Weiter ist

$$\begin{aligned} \sum_k \Big| \int_{N_k} f\,\omega_0 \Big| &\le \sum_k \int_{N_k} |f|\,\omega_0 \\ &= \sum_k \sum_j \int_{M_j \cap N_k} |f|\,\omega_0 \\ &= \sum_j \sum_k \int_{M_j \cap N_k} |f|\,\omega_0 \\ &= \sum_j \int_{M_j} |f|\,\omega_0 < \infty. \end{aligned}$$

Damit ist $\displaystyle\sum_k \int_{N_k} f\,\omega_0$ sogar absolut konvergent und $f$ über $M$ integrierbar. ■

**Bemerkung.** Ist $f$ nicht integrierbar, so setzen wir $\displaystyle\int_M |f|\,\omega_0 := +\infty$.

**2.2 Satz von Beppo Levi.** *Sind die Funktionen $f_i$ meßbar und $\ge 0$ auf $M$, so gilt:*

$$\int_M \left( \sum_{i=1}^{\infty} f_i \right) \omega_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \int_M f_i\,\omega_0.$$

BEWEIS: Ist ein $f_i$ nicht integrierbar, so steht auf beiden Seiten $+\infty$. Deshalb können wir annehmen, daß alle $f_i$ integrierbar sind. Sei jetzt $(M_j)$ eine Standardzerlegung von $M$. Dann ist jedes $f_i$ über $M_j$ integrierbar, und die Reihe $\sum_j \int_{M_j} f_i\,\omega_0$ konvergiert. Nach dem Satz von Beppo Levi im $\mathbb{R}^n$ gilt:

$$\sum_i \int_{M_j} f_i\,\omega_0 = \int_{M_j} \left( \sum_i f_i \right) \omega_0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\int_M \left(\sum_i f_i\right)\omega_0 &= \sum_j \int_{M_j}\left(\sum_i f_i\right)\omega_0\\ &= \sum_j\sum_i \int_{M_j} f_i\,\omega_0\\ &= \sum_i\sum_j \int_{M_j} f_i\,\omega_0\\ &= \sum_i \int_M f_i\,\omega_0.\end{aligned}$$ ∎

**2.3 Konvergenzsatz von Lebesgue.** *Die Funktionen $f_i$ seien meßbar und die Funktion $F$ sei bezüglich $\omega_0$ integrierbar über $M$. Fast überall auf $M$ sei $f = \lim_{i\to\infty} f_i$ und $|f_i| \le F$. Dann sind auch $f$ und die $f_i$ bezüglich $\omega_0$ integrierbar, und es gilt:*

$$\int_M f\,\omega_0 = \lim_{i\to\infty}\int_M f_i\,\omega_0.$$

BEWEIS: Es sei $(M_j)$ eine Standardzerlegung von $M$. Nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue im $\mathbb{R}^n$ sind die Funktionen $f_i$ über jedem $M_j$ integrierbar, und es ist

$$\sum_j \int_{M_j} |f_i|\,\omega_0 \le \sum_j \int_{M_j} F\,\omega_0 < \infty.$$

Also ist jedes $f_i$ über $M$ integrierbar.

Sei jetzt $\varepsilon > 0$. Dann gibt es, weil $F$ integrierbar ist, ein $N_0$, so daß

$$\sum_{j\ge N_0}\int_{M_j} F\,\omega_0 < \frac{\varepsilon}{3}$$

ist. Und weil $|f_i| \le F$ ist, gilt für alle $N > N_0$ und alle $i$:

$$\Big|\sum_{j=N_0}^{N}\int_{M_j} f_i\,\omega_0\Big| \le \sum_{j=N_0}^{N}\Big|\int_{M_j} f_i\,\omega_0\Big| \le \sum_{j=N_0}^{N}\int_{M_j}|f_i|\omega_0 \le \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Läßt man $N$ gegen $\infty$ gehen, so erhält man:

$$\Big|\int_M f_i\,\omega_0 - \sum_{j<N_0}\int_{M_j} f_i\,\omega_0\Big| = \Big|\sum_{j\ge N_0}\int_{M_j} f_i\,\omega_0\Big| \le \frac{\varepsilon}{3}\,,\ \text{für jedes } i. \quad (*)$$

Da $(f_i)$ fast überall gegen $f$ konvergiert, folgt aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue im $\mathbb{R}^n$ die Beziehung

$$\lim_{i\to\infty}\int_{M_j} f_i\,\omega_0 = \int_{M_j} f\,\omega_0$$

für jedes feste $j$. Genau wie oben kann man dann schließen:

$$\Big|\int_M f\,\omega_0 - \sum_{j<N_0}\int_{M_j} f\,\omega_0\Big| \le \frac{\varepsilon}{3}\,. \quad (**)$$

Außerdem gibt es zu jedem $j$ ein $N(j)$, so daß für $i \ge N(j)$ gilt:

$$\Big|\int_{M_j} f_i\,\omega_0 - \int_{M_j} f\,\omega_0\Big| \le \frac{\varepsilon}{3N_0}\,. \quad (***)$$

Ist $N_1 := \max\{N(j) \,:\, j = 1, \ldots, N_0\}$, so gilt $(***)$ für alle $j \le N_0$ und $i \ge N_1$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\Big|\int_M f\,\omega_0 - \int_M f_i\,\omega_0\Big| &= \\
&= \Big|\Big(\int_M f\,\omega_0 - \sum_{j<N_0}\int_{M_j} f\,\omega_0\Big) + \Big(\sum_{j<N_0}\int_{M_j} f\,\omega_0 - \sum_{j<N_0}\int_{M_j} f_i\,\omega_0\Big) \\
&\quad + \Big(\sum_{j<N_0}\int_{M_j} f_i\,\omega_0 - \int_M f_i\,\omega_0\Big)\Big| \\
&= \Big|\int_M f\,\omega_0 - \sum_{j<N_0}\int_{M_j} f\,\omega_0\Big| + \sum_{j<N_0}\Big|\int_{M_j} f\,\omega_0 - \int_{M_j} f_i\,\omega_0\Big| \\
&\quad + \Big|\sum_{j<N_0}\int_{M_j} f_i\,\omega_0 - \int_M f_i\,\omega_0\Big| \\
&\le \frac{\varepsilon}{3} + N_0\cdot\frac{\varepsilon}{3N_0} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \text{(wegen } (**), (***) \text{ und } (*))
\end{aligned}$$

für $i \ge N_1$. ∎

Hier ist eine Anwendung:

Sei $(\varrho_\nu)$ eine *abzählbare* Teilung der Eins und $f$ eine integrierbare Funktion auf $X$. Dann setzen wir

$$f_i := \sum_{\nu=1}^{i} \varrho_\nu f\,.$$

Die $f_i$ konvergieren punktweise gegen $f$, und es gilt:

$$|f_i| \le \sum_{\nu=1}^{i} |\varrho_\nu f| = \Big(\sum_{\nu=1}^{i} \varrho_\nu\Big)\cdot|f| \le |f|,$$

wobei auch $|f|$ über $X$ integrierbar ist. Der Satz von Lebesgue liefert jetzt:

$$\begin{aligned}
\int_X f\,\omega_0 &= \lim_{i\to\infty}\int_X f_i\,\omega_0 \\
&= \lim_{i\to\infty}\sum_{\nu=1}^{i}\int_X \varrho_\nu f\,\omega_0 \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty}\int_X \varrho_\nu f\,\omega_0.
\end{aligned}$$

Wir kommen jetzt zu einer Verallgemeinerung des Satzes von Fubini. Dieses Resultat ist recht anspruchsvoll, denn im Beweis wird fast alles benutzt, was wir bisher behandelt haben.

Sei $\Phi : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung, $n = \dim(X) \geq m = \dim(Y)$ und $\Omega$ eine semipositive stetige $m$-Form auf $Y$. Weiter sei $K := \{x \in X \,:\, \Phi \text{ kritisch in } x\}$. Dann ist $\Phi(K)$ eine Nullmenge in $Y$. Für $x \in K$ ist

$$(\Phi^*\Omega)_x(v_1, \ldots, v_m) := \Omega_{\Phi(x)}(\Phi_{*,x}v_1, \ldots, \Phi_{*,x}v_m) = 0,$$

d.h., es ist $\Phi^*\Omega|_K = 0$.

Für $y \in Y$ sei $i_y : \Phi^{-1}(y) \hookrightarrow X$ die kanonische Inklusion. Ist $y$ ein regulärer Wert, also $y \in Y \setminus \Phi(K)$, so ist $\Phi^{-1}(y)$ eine $(n-m)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann ist es sinnvoll, für eine $(n-m)$-Form $\omega$ auf $X$ die Einschränkungen $i_y^*\omega$ zu betrachten. Sind diese immer positiv, so ist $\omega \wedge \Phi^*\Omega$ eine semipositive $n$-Form auf $X$.

**2.4 Satz von Fubini.** *$X$ und $Y$ seien orientierte Mannigfaltigkeiten und $\Phi : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung, und es sei $n = \dim(X) \geq m = \dim(Y)$. Weiter sei $\Omega$ eine semipositive $m$-Form auf $Y$ und $\omega$ eine $(n-m)$-Form auf $X$, so daß $i_y^*\omega$ für jeden regulären Wert $y$ positiv ist.*

*Ist $f$ eine meßbare Funktion auf $X$, die bezüglich $\omega \wedge \Phi^*\Omega$ integrierbar ist, so ist*

$$F(y) := \int_{\Phi^{-1}(y)} f\,\omega \qquad \textit{(bzw. } := 0, \textit{ falls } \Phi^{-1}(y) = \varnothing \textit{ ist)}$$

*für fast alle $y \in Y$ definiert, meßbar und bezüglich $\Omega$ integrierbar, und es gilt:*

$$\int_X f\,\omega \wedge \Phi^*\Omega = \int_Y F\,\Omega.$$

Beweis: Wir haben oben schon gesehen: Ist $K$ die kritische Menge von $\Phi$, so ist $\Phi^*\Omega|_K = 0$. Daraus folgt:

$$\int_X f\,\omega \wedge \Phi^*\Omega = \int_{X\setminus K} f\,\omega \wedge \Phi^*\Omega.$$

Sei nun $(M_j)$ eine Standardzerlegung von $X \setminus K$. Für jedes $j$ ist dann die charakteristische Funktion $\chi_j$ von $M_j$ meßbar, und es gilt:

$$\int_X f\,\omega \wedge \Phi^*\Omega = \sum_j \int_X \chi_j f\,\omega \wedge \Phi^*\Omega.$$

Die Abbildung $\Phi : X \setminus K \to Y \setminus \Phi(K)$ ist eine Submersion. Ist $n > m$, so können wir annehmen, daß wir Koordinaten $(U_j, \varphi_j)$ für $X$ (mit $M_j \subset U_j$) und $(V_j, \psi_j)$ für $Y$ haben, so daß $U_j = \mathbb{R}^n$, $V_j = \mathbb{R}^m$, $\Phi(x^1, \ldots, x^n) = (x^{n-m+1}, \ldots, x^n)$ und $\omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-m}$ auf $U_j$ und $\Omega = dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^m$ auf $V_j$ ist. Dann ist $\omega \wedge \Phi^*\Omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ auf $U_j$, $M_j$ eine meßbare Teilmenge von $U_j$, und $\chi_j f$ eine integrierbare Funktion auf $U_j$. Also existiert

$$F_j(y^1, \ldots, y^m) = \int_{\mathbb{R}^{n-m}} (\chi_j f)(x^1, \ldots, x^{n-m}, y^1, \ldots, y^m)\, dx^1 \ldots dx^{n-m}$$

fast überall auf $V_j$, und es ist

$$\int_Y F_j\,\Omega = \int_{V_j} F_j(y^1, \ldots, y^m)\, dy^1 \ldots dy^m = \int_{U_j} \chi_j f\,\omega \wedge \Phi^*\Omega = \int_X \chi_j f\,\omega \wedge \Phi^*\Omega,$$

nach dem Satz von Fubini im $\mathbb{R}^n$. Für $y \in Y \setminus \Phi(K)$ ist

$$F_j(y) = \int_{\Phi^{-1}(y)} \chi_j f\,\omega := \int_{\Phi^{-1}(y)} i_y^*(\chi_j f\,\omega).$$

Analog ist

$$\int_X \chi_j |f|\,\omega \wedge \Phi^*\Omega = \int_Y \widehat{F}_j\,\Omega, \quad \text{mit } \widehat{F}_j(y) := \int_{\Phi^{-1}(y)} \chi_j |f|\,\omega.$$

Nach dem Satz von Beppo Levi ist

$$\sum_j \int_Y \widehat{F}_j\,\Omega = \int_Y \Big(\sum_j \widehat{F}_j\Big)\,\Omega.$$

Für fast alle $y \in Y$ bilden die Mengen $N_j = M_j \cap \Phi^{-1}(y)$ eine Standardzerlegung der Faser $\Phi^{-1}(y)$ (Cavalieri). Deshalb ist fast überall

$$\widehat{F}(y) = \int_{\Phi^{-1}(y)} |f|\,\omega = \sum_j \int_{\Phi^{-1}(y)} \chi_j |f|\,\omega = \sum_j \widehat{F}_j(y)$$

(und analog $F = \sum_j F_j$). Daraus folgt:

$$\int_Y \widehat{F}\,\Omega = \sum_j \int_Y \widehat{F}_j\,\Omega = \sum_j \int_X \chi_j |f|\,\omega \wedge \Phi^*\Omega = \int_X |f|\,\omega \wedge \Phi^*\Omega.$$

Insbesondere ist $f$ genau dann bezüglich $\omega \wedge \Phi^*\Omega$ integrierbar, wenn $\widehat{F}$ bezüglich $\Omega$ integrierbar ist.

Jetzt sei $H_N := \sum_{j=1}^{N} F_j$ und $F_y := \Phi^{-1}(y)$. Dann ist

$$\begin{aligned} |H_N(y)| &= \Big|\sum_{j=1}^{N} \int_{F_y} \chi_j f\,\omega\Big| \\ &\le \sum_{j=1}^{N} \int_{F_y} \chi_j |f|\,\omega \\ &= \sum_{j=1}^{N} \widehat{F}_j(y) \le \widehat{F}(y). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $f$ bezüglich $\omega \wedge \Phi^*\Omega$ und daher $\widehat{F}$ bezüglich $\Omega$ integrierbar. Also kann man den Konvergenzsatz von Lebesgue auf die Folge $(H_N)$ anwenden, die punktweise gegen $F = \sum_{j=1}^{\infty} F_j$ konvergiert:

$$\begin{aligned} \int_X f\,\omega \wedge \Phi^*\Omega &= \sum_j \int_X \chi_j f\,\omega \wedge \Phi^*\Omega \\ &= \sum_j \int_Y F_j\,\Omega = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \int_Y F_j\,\Omega \\ &= \lim_{N\to\infty} \int_Y H_N\,\Omega = \int_Y \Big(\sum_j F_j\Big)\,\Omega = \int_Y F\,\Omega. \end{aligned}$$

Im Falle $n = m$ geht alles genauso, nur etwas einfacher. Es ist dann $\Phi$ lokal diffeomorph, $\omega = 1$ und

$$F(y) = \sum_{x \in \Phi^{-1}(y)} \varepsilon(x) f(x), \quad \varepsilon(x) = \pm 1, \text{ je nach Orientierung von } \Phi \text{ in } x.$$

Die Summe ist höchstens abzählbar. ∎

## § 3 Die Riemannsche Metrik

Zunächst etwas Lineare Algebra:

Sind $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$ irgendwelche Vektoren, so setzen wir

$$A := (\mathbf{a}_1^t, \ldots, \mathbf{a}_r^t) \in M_{n,r}(\mathbb{R}).$$

Dann heißt

$$G(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r) := \det(A^t \cdot A) = \det\Big(\mathbf{a}_i \bullet \mathbf{a}_j \;\Big|\; i, j = 1, \ldots, r\Big)$$

die *Gramsche Determinante* von $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$.

Das Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ induziert ein Skalarprodukt auf dem Unterraum $V = \big\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r \big\rangle$. Ist $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ eine ON-Basis von $V$, so gibt es eine Darstellung

$$\mathbf{a}_i = \sum_{\nu=1}^{r} \alpha_{i\nu} \mathbf{u}_\nu, \; i = 1, \ldots, r.$$

Setzen wir $\boldsymbol{\alpha}_i := (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ir})$ und $\widetilde{A} := (\boldsymbol{\alpha}_1^t, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r^t)$, so ist

$$\mathbf{a}_i \bullet \mathbf{a}_j = \Big(\sum_{\nu=1}^{r} \alpha_{i\nu} \mathbf{u}_\nu\Big) \bullet \Big(\sum_{\mu=1}^{r} \alpha_{j\mu} \mathbf{u}_\mu\Big) = \sum_{\nu=1}^{r} \alpha_{i\nu} \alpha_{j\nu} = \boldsymbol{\alpha}_i \bullet \boldsymbol{\alpha}_j.$$

Dann ist $\widetilde{A}^t \cdot \widetilde{A} = A^t \cdot A$, also

$$G(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r) = \det(A^t \cdot A) = \det(\widetilde{A}^t \cdot \widetilde{A}) = \det(\widetilde{A})^2.$$

Ist $V$ orientiert, $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ orientiert und $\{\eta^1, \ldots, \eta^r\}$ die duale Basis von $V^*$, so nennt man

$$\omega_V := \eta^1 \wedge \ldots \wedge \eta^r \in A^r(V)$$

die zugehörige *Volumenform*. Sie ist durch das Skalarprodukt und die Orientierung von $V$ eindeutig bestimmt. Es gilt:

$$|\omega_V(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r)| = |\det(\widetilde{A})| = \sqrt{G(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r)}.$$

Ab jetzt beschränken wir uns auf den Fall $r = n - 1$.

Durch $\lambda(\mathbf{w}) := \det(\mathbf{w}^t, \mathbf{a}_1^t, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}^t)$ wird eine Linearform $\lambda$ auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert. Daher gibt es genau einen Vektor $\mathbf{z}$ (der mit $\mathbf{a}_1 \times \ldots \times \mathbf{a}_{n-1}$ bezeichnet wird), so daß $\lambda(\mathbf{w}) = \mathbf{z} \bullet \mathbf{w}$ ist, also

$$(\mathbf{a}_1 \times \ldots \times \mathbf{a}_{n-1}) \bullet \mathbf{w} = \det(\mathbf{w}^t, \mathbf{a}_1^t, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}^t).$$

Der Laplacesche Entwicklungssatz besagt:

$$\det(\mathbf{w}^t, \mathbf{a}_1^t, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}^t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} w_k \cdot \det(A_k),$$

wobei $A_k$ die quadratische Matrix ist, die aus $A = (\mathbf{a}_1^t, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}^t)$ entsteht, indem man die $k$-te Zeile streicht.

Die dem Vektor $\mathbf{w}$ kanonisch zugeordnete $(n-1)$-Form ist

$$\Lambda_{\mathbf{w}} = \sum_{k=1}^{n} w_k (-1)^{k+1} \varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\varepsilon^k} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n,$$

wobei $\{\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n\}$ wie üblich die duale Basis zur Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ bezeichnet. Allgemein ist

$$\begin{aligned} \lambda^1 \wedge \ldots \wedge \lambda^q(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q) &= \sum_{\sigma \in S_q} \operatorname{sign}(\sigma) \lambda^{\sigma(1)}(\mathbf{x}_1) \cdots \lambda^{\sigma(q)}(\mathbf{x}_q) \\ &= \det\Big(\lambda^i(\mathbf{x}_j) \;\Big|\; i, j = 1, \ldots, q\Big), \end{aligned}$$

also speziell

$$\Lambda_{\mathbf{w}}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} w_k \cdot \det(A_k).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathbf{w}}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} w_k \cdot \det(A_k) \\ &= \det(\mathbf{w}^t, \mathbf{a}_1^t, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}^t) \\ &= \mathbf{w} \bullet (\mathbf{a}_1 \times \ldots \times \mathbf{a}_{n-1}). \end{aligned}$$

Sei nun $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsnormalenvektor zu $V$ und $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}\}$ eine ON-Basis von $V$, so daß $\{\mathbf{N}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}\}$ eine positiv orientierte Basis des $\mathbb{R}^n$ ist. Die durch $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}\}$ gegebene innere Orientierung von $V$ und die durch $\mathbf{N}$ gegebene transversale Orientierung entsprechen sich auf diesem Wege. Sei $\{\psi, \varphi^1, \ldots, \varphi^{n-1}\}$ die duale Basis zu $\{\mathbf{N}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}\}$. Dann bilden die Linearformen $\eta^i := \varphi^i|_V \in V^*$ die duale Basis zu $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}\}$. Ist $i_V : V \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ die kanonische Inklusion, so ist

$$\omega_V = \eta^1 \wedge \ldots \wedge \eta^{n-1}$$

die Volumenform auf $V$, und

$$\psi \wedge \varphi^1 \wedge \ldots \wedge \varphi^{n-1} = \varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n = \Delta$$

die Determinantenform auf dem $\mathbb{R}^n$.

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
\omega_V(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{n-1}) &= \varphi^1\wedge\ldots\wedge\varphi^{n-1}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{n-1})\\
&= \psi\wedge\varphi^1\wedge\ldots\wedge\varphi^{n-1}(\mathbf{N},\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{n-1})\\
&= \det(\mathbf{N}^t,\mathbf{a}_1^t,\ldots,\mathbf{a}_{n-1}^t)\\
&= \sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}N_k\cdot\det(A_k)\\
&= \Lambda_{\mathbf{N}}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{n-1})\\
&= \mathbf{N}\bullet(\mathbf{a}_1\times\ldots\times\mathbf{a}_{n-1}),
\end{aligned}
$$

also

$$
\begin{aligned}
\sqrt{G(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{n-1})} &= |\omega_V(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{n-1})|\\
&= |\mathbf{N}\bullet(\mathbf{a}_1\times\ldots\times\mathbf{a}_{n-1})|\\
&= \|\mathbf{N}\|\cdot\|\mathbf{a}_1\times\ldots\times\mathbf{a}_{n-1}\|\\
&= \|\mathbf{a}_1\times\ldots\times\mathbf{a}_{n-1}\|\\
&= \sum_{k=1}^n(\det(A_k))^2,
\end{aligned}
$$

denn $\mathbf{N}$ und der Vektor $\mathbf{z}=\mathbf{a}_1\times\ldots\times\mathbf{a}_{n-1}$ mit den Komponenten

$$z_k=(-1)^{k+1}\cdot\det(A_k)$$

stehen beide auf $V$ senkrecht, sind also zueinander parallel. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung wird dann zu einer Gleichung. Außerdem ist $\|\mathbf{N}\|=1$.

**Definition.** Sei $X$ eine $n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine *Riemannsche Metrik* auf $X$ ordnet jedem Punkt $x\in X$ ein Skalarprodukt $\gamma_x$ auf dem Tangentialraum $T_x(X)$ zu, so daß gilt:

Sind $\xi,\eta$ differenzierbare Vektorfelder auf $X$, so ist

$$x\mapsto\gamma_x(\xi_x,\eta_x)$$

eine differenzierbare Funktion.

Zur Erinnerung: Daß $\gamma_x$ ein Skalarprodukt auf $T_x(X)$ ist, bedeutet:

1. $\gamma_x: T_x(X)\times T_x(X)\to\mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$-bilinear.
2. Es ist $\gamma_x(v,w)=\gamma_x(w,v)$ für alle $v,w\in T_x(X)$.
3. Ist $v\neq 0$, so ist $\gamma_x(v,v)>0$.

Ist $(U,\varphi)$ eine Karte für $X$, so gibt es lokale Darstellungen

$$\xi=\sum_{\nu=1}^n\xi^\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}\quad\text{und}\quad\eta=\sum_{\nu=1}^n\eta^\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}\,.$$

Setzen wir $g_{\nu\mu}(x) := \gamma_x\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_x, \left(\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}\right)_x\right)$, so ist

$$\gamma_x(\xi(x), \eta(x)) = \sum_{\nu,\mu} \xi^\nu(x) \cdot \eta^\mu(x) \cdot g_{\nu\mu}(x).$$

Fassen wir die $g_{\nu\mu}$ zu einer Matrix $G_\varphi$ und die $\xi^\nu$ (bzw. $\eta^\mu$) zu einem Vektor $\boldsymbol{\xi}_\varphi$ (bzw. $\boldsymbol{\eta}_\varphi$) zusammen, so erhalten wir die Gleichung

$$\gamma_x(\xi(x), \eta(x)) = \boldsymbol{\xi}_\varphi(x) \cdot G_\varphi(x) \cdot \boldsymbol{\eta}_\varphi(x)^t.$$

**Beispiel.**

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $X \subset G$ eine abgeschlossene $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann wird durch

$$\gamma_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$$

eine Riemannsche Metrik (die kanonische Riemannsche Metrik) definiert. Ist $\varphi : T \to U \subset X$ eine lokale Parametrisierung und $\psi = \varphi^{-1}$ die davon bestimmte Karte, so bilden die Vektorfelder

$$\mathbf{X}_i(\varphi(\mathbf{u})) := D\varphi(\mathbf{u})(\mathbf{e}_i) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(\mathbf{u})$$

die kanonischen Basisfelder auf $U$, und es ist

$$g_{ij} = \mathbf{X}_i \bullet \mathbf{X}_j, \text{ für } i, j = 1, \ldots, n.$$

Man kann aber auf jeder Mannigfaltigkeit $X$ eine Riemannsche Metrik konstruieren. Dazu sei $(U_\iota, \varphi_\iota)$ eine Überdeckung von $X$ durch lokale Karten und $(f_\iota)$ eine dazu passende Teilung der Eins. Dann setzt man

$$\gamma_x(v, w) := \sum_\iota f_\iota(\mathbf{x}) \cdot v_\varphi \bullet w_\varphi,$$

wobei $v_\varphi \in \mathbb{R}^n$ die Darstellung von $v$ bezüglich der Karte $\varphi$ ist. Man rechnet leicht nach, daß $\gamma$ alle Eigenschaften einer Riemannschen Metrik erfüllt.

**Definition.** Sei $X$ eine $n$-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit mit einer Riemannschen Metrik $\gamma$. Unter der *Volumenform* von $X$ versteht man die eindeutig bestimmte $n$-Form $\Omega_X$, für die

$$(\Omega_X)_x(u_1, \ldots, u_n) = 1$$

für jedes $x \in X$ und jede positiv orientierte ON-Basis $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ist.

**3.1 Satz.** *Ist $(U, \varphi)$ eine Karte für $X$ und $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$, so ist*

$$(\Omega_X)_\varphi = \sqrt{\det(G_\varphi)}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n\,.$$

BEWEIS: Es gibt eine positive Funktion $h$ auf $U$, so daß gilt:

$$\Omega_X|_U = h \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n\,.$$

Setzen wir $e_\nu := \dfrac{\partial}{\partial x_\nu}$ für $\nu = 1, \ldots, n$, so ist $h(x) = (\Omega_X)_x(e_1, \ldots, e_n)$. Sei nun $\{u_1, \ldots, u_n\}$ eine positiv orientierte ON-Basis von $T_x(X)$ und

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, u_j, \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Fassen wir die $\alpha_{ij}$ zu einer Matrix $A$ zusammen, so ist

$$\det(A)^2 = \det(A^t \cdot A) = G(e_1, \ldots, e_n)$$

die Gramsche Determinante von $\{e_1, \ldots, e_n)$, also

$$h(x) = \det(A) = \sqrt{G(e_1, \ldots, e_n)} = \sqrt{\det(\gamma_x(e_i, e_j))} = \sqrt{G_\varphi(x)}.$$

Man beachte dabei, daß $\det(A) > 0$ ist, weil $\{u_1, \ldots, u_n\}$ positiv orientiert ist. ∎

**Beispiele.**

1. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so ist $U$ eine orientierte Mannigfaltigkeit mit dem euklidischen Skalarprodukt als Riemannsche Metrik, also

$$\Omega_U = dV = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

2. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Hyperfläche, transversal orientiert durch ein Einheitsnormalenfeld $N$. Dann ist

$$\Omega_M = do_M = \Lambda_N|_M = \Big(\sum_{k=1}^{n} N_k(-1)^{k+1}\, dx^1 \wedge \ldots \widehat{dx^k} \wedge \ldots dx^n\Big)|_M\,.$$

Man spricht auch vom *Oberflächenelement.*

3. Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve, parametrisiert durch $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$. Sei $\mathbf{x}_0 = \alpha(t_0)$. Dann ist

$$\alpha_{*,t_0}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) = \alpha'(t_0).$$

Ist $\varphi$ die durch $\alpha$ bestimmte Koordinate, so ist $\sqrt{G_\varphi(\mathbf{x}_0)} = \|\alpha'(t_0)\|$, also

$$(\Omega_C)_\varphi = ds := \|\alpha'(t_0)\|\, dt.$$

Man spricht auch vom *Linienelement.*

Es ist $\int_C ds = \int_I \|\alpha'(t)\|\, dt = L(C)$.

Das letzte Beispiel legt die folgende Definition nahe:

**Definition.** Ist $X$ eine orientierte $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik, so nennt man

$$v(X) := \int_X \Omega_X$$

den *Inhalt* (das *Volumen*) von $X$.

Im Falle von 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten (also Kurven) kommt die bekannte Weglänge heraus.

**Beispiele.**

1. Sei $M = S^{n-1}(r) = \partial B_r(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n$. Ist $\mathbf{x} \in M$, so ist $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \frac{1}{r} \cdot \mathbf{x}$ der äußere Normaleneinheitsvektor. Daher ist

$$\begin{aligned} v_{n-1}(M) &= \int_M do \\ &= \int_{\partial B_r} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r} x^k (-1)^{k+1}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \ldots \wedge dx^n \\ &= \frac{n}{r} \int_B dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \text{ (Stokes!)} \\ &= \frac{n}{r} \cdot v_n(B_r(\mathbf{0})). \end{aligned}$$

   Im Falle $n = 2$ ist $M$ eine Kreislinie vom Radius $r$ und $\mu_2(B_r) = r^2\pi$, also $v_1(M) = 2r\pi$.

   Im Falle $n = 3$ ist $M$ eine Sphäre vom Radius $r$ und $v_3(B_r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, also $v_2(M) = \frac{3}{r} v_3(B_r) = 4\pi r^2$.

2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist $M = G_f = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte Hyperfläche, die durch $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\varphi(\mathbf{x}) := (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ parametrisiert wird. Dann ist $\psi = \varphi^{-1}$ eine Karte und die Vektoren

$$\mathbf{X}_i(\mathbf{x}) := D\varphi(\mathbf{x})\mathbf{e}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = (\mathbf{e}_i, f_{x_i}(\mathbf{x}))$$

   bilden eine Basis des Tangentialraumes $T_{\varphi(\mathbf{x})}(M)$. Es ist

$$\mathbf{X}_i(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{X}_j(\mathbf{x}) = \delta_{ij} + f_{x_i}(\mathbf{x}) \cdot f_{x_j}(\mathbf{x})$$

   und daher $G_\psi(\mathbf{x}) = E_n + \nabla f(\mathbf{x})^t \cdot \nabla f(\mathbf{x})$. Wir müssen $\det G_\psi(\mathbf{x})$ berechnen.

   Ist $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $A := \mathbf{a}^t \cdot \mathbf{a}$, so ist $\operatorname{rg}(A) = 1$, denn jeder Vektor, der auf $\mathbf{a}$ senkrecht steht, wird durch $\mathbf{x} \mapsto L_A(\mathbf{x})$ auf Null abgebildet, während $L_A(\mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|^2 \cdot \mathbf{a}$ ist. Insbesondere ist $\|\mathbf{a}\|^2$ der einzige Eigenwert $\neq 0$ von $A$.

Zur Berechnung der Determinante von $E_n + A$ kann man die Diagonalisierung benutzen, d.h. es ist

$$\det(E_n + A) = \det \begin{pmatrix} \|\mathbf{a}\|^2 + 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} = \|\mathbf{a}\|^2 + 1.$$

Damit ist $\det G_\psi = \|\nabla f(\mathbf{x})\|^2 + 1$, also

$$(do_M)_\psi = \sqrt{1 + \|\nabla f(\mathbf{x})\|^2}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

# § 4 Klassische Integralsätze

Ab jetzt verstehen wir unter einer *Riemannschen Mannigfaltigkeit* eine orientierte Mannigfaltigkeit $X$ mit einer fest gewählten Riemannschen Metrik $\gamma$. Jede transversal orientierte Hyperfläche $Y \subset X$ ist dann wieder eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

**Definition.** Sei $X$ eine $n$-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein Gebiet $G \subset X$ heißt *semiregulär* oder ein *Gebiet mit stückweise glattem Rand*, falls gilt:

1. Jede Zusammenhangskomponente des regulären Randes $\partial_r G$ hat endlichen Inhalt.
2. Der singuläre Rand $\partial_s G$ ist Vereinigung von höchstens endlich vielen Untermannigfaltigkeiten der Dimension $\leq n-2$.
3. $\overline{G}$ ist kompakt, und jeder Punkt von $\partial_s G$ ist Häufungspunkt von $\partial_r G$.

**Bemerkungen.**

1. Ein semireguläres Gebiet in $\mathbb{R}$ ist ein beschränktes offenes Intervall. In diesem Fall besteht der reguläre Rand aus den beiden Endpunkten des Intervalls, und es ist $\partial_s G = \varnothing$.
2. Ein semireguläres Gebiet im $\mathbb{R}^2$ ist ein ebenes Gebiet, das von endlich vielen stückweise glatten Wegen berandet wird.
3. Bei einem semiregulären Gebiet ist der singuläre Rand kompakt, und $\partial_r G$ ist dicht in $\partial G$.
4. Jedes Gebiet mit glattem Rand in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist semiregulär. Der singuläre Rand ist dann leer, und $\partial_r G = \partial G$ ist kompakt.
5. Sei $G \subset X$ semiregulär. Ist $p \in \partial_r G$, so gibt es lokale Koordinaten $x^1, \ldots, x^n$ auf einer offenen Umgebung $U(p) \subset X$, so daß gilt:

   $$U \cap G = \{(x^1, \ldots, x^n) \in U \,:\, x_n < 0\}\,.$$

   Man kann jetzt zeigen, daß $G = \mathring{\overline{G}}$ ist. Ist nämlich $p$ ein Element von $\mathring{\overline{G}}$ und $p \notin G$, so muß $p$ in $\partial G$ liegen. Liegt $p$ sogar in $\partial_r G$, so ergibt sich aus der obigen Darstellung sofort ein Widerspruch. Liegt $p$ dagegen in $\partial_s G$, so gibt es beliebig nahe bei $p$ Punkte $q \in \partial_r G$, die auch in $\mathring{\overline{G}}$ liegen, und man erhält auch dann einen Widerspruch.

   Also liegt ein semireguläres Gebiet immer auf einer Seite seines Randes. In den Punkten des regulären Randes kann man ein stetiges Einheitsnormalenfeld konstruieren, das nach außen gerichtet (und mit diesen Eigenschaften dann eindeutig bestimmt) ist.

Beispiele sind alle Quader und diffeomorphe Bilder solcher Quader, aber auch andere Polyeder oder Kegelmengen.

Sei $G \subset X$ ein semireguläres Gebiet und $\omega$ eine stetige $(n-1)$-Form auf einer offenen Umgebung von $\overline{G}$. Ist $Y$ eine Zusammenhangskomponente von $\partial_r G$, so trägt $Y$ auf natürliche Weise die Struktur einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Man kann deshalb eine stetige Funktion $f$ auf $Y$ finden, so daß gilt:

$$\omega = f \cdot do_Y\,.$$

Wir nennen $\omega$ über $Y$ integrierbar, falls $f$ bezüglich $do_Y$ integrierbar ist. Mit Hilfe einer (abzählbaren) Teilung der Eins kann man nun $\omega$ als Summe von Formen $\omega_\nu$ schreiben, die jeweils kompakten Träger in einer Kartenumgebung haben. Für jedes $\nu$ ist $\omega_\nu$ im alten Summe integrierbar, und die Reihe $\sum_\nu \int \omega_\nu$ konvergiert. Daraus folgt: Ist $\omega = g \cdot \omega_0$, mit einer positiven Form $\omega_0$, so ist auch $g$ bezüglich $\omega_0$ integrierbar.

**4.1 Der Satz von Stokes für Gebiete mit stückweise glattem Rand.** *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein semireguläres Gebiet und $\omega$ eine stetig differenzierbare $(n-1)$-Form auf einer offenen Umgebung von $\overline{G}$, die über jeder Zusammenhangskomponente von $\partial_r G$ integrierbar ist. Dann gilt:*

$$\int_G d\omega = \int_{\partial_r G} \omega.$$

Beweis: Sei $X := \partial_r G$. Die $(n-1)$-Form $\omega$ hat die Gestalt

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Es genügt, den Satz für jeden Summanden von $\omega$ zu zeigen. Deshalb können wir o.B.d.A. annehmen, daß $\omega = f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n$ ist, mit einer bezüglich $dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n$ über $X$ integrierbaren Funktion $f$. Nun sei

$$p : \mathbb{R}^n \to H := \{\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n) \,:\, x^1 = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$$

die kanonische Projektion mit

$$p(x^1, \ldots, x^n) := (0, x^2, \ldots, x^n)\,.$$

Auf $\Omega := dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n$ und $\Phi := p|_X$ wenden wir den Satz von Fubini an:

$$\int_X \omega = \int_X f \cdot \Phi^*\Omega = \int_{\Phi(X)} \Big( \sum_{\mathbf{x} \in \Phi^{-1}(\mathbf{y})} \varepsilon(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \Big)\, \Omega.$$

Dabei ist $\varepsilon(\mathbf{x}) = -1$, wenn die Gerade $p^{-1}(\mathbf{y})$ bei $\mathbf{x}$ in $G$ eintritt, und $\varepsilon(\mathbf{x}) = +1$, wenn sie aus $G$ austritt.

Es ist $d\omega = D_1 f \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Der Satz von Fubini im $\mathbb{R}^n$ liefert:

$$\int_G d\omega = \int_{p(G)} \Big( \int_{p^{-1}(\mathbf{y}) \cap G} D_1 f \cdot dx^1 \Big)\, \Omega.$$

**Behauptung:** $p(G)$ und $\Phi(X)$ unterscheiden sich nur um eine Nullmenge.

Beweis dafür: 1) Liegt $\mathbf{y}$ in $p(G)$, aber nicht in $\Phi(X)$, so muß die Gerade $p^{-1}(\mathbf{y})$ den singulären Rand $\partial_s G$ treffen. Aber $\partial_s G$ besteht aus endlich vielen Mannigfaltigkeiten der Dimension $\le n-2$, so daß $p(\partial_s G)$ eine Nullmenge ist.

2) Liegt $\mathbf{y}$ in $\Phi(X)$, aber nicht in $p(G)$, so berührt die Gerade $p^{-1}(\mathbf{y})$ in jedem Punkt $\mathbf{x} \in p^{-1}(\mathbf{y}) \cap X$ das Gebiet $G$ von außen. Ist nämlich $U$ eine Umgebung von $\mathbf{x}$, $U \cap G = \{\varrho < 0\}$ und $\gamma(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{e}_1$ eine Parametrisierung der Faser $p^{-1}(\mathbf{y})$, so hat $h := \varrho \circ \gamma$ in $t = 0$ ein Minimum. Also ist $0 = h'(0) = \nabla\varrho(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{e}_1$. Das bedeutet, daß $\mathbf{e}_1$ Tangentialvektor an $X = \partial_r G$ in $\mathbf{x}$ ist.

Wäre $\Phi$ in $\mathbf{x}$ nicht singulär, so wäre $\Phi$ dort ein lokaler Diffeomorphismus. Das ist aber nicht der Fall, weil der Tangentialvektor $\mathbf{e}_1$ auf Null abgebildet wird. Also ist $\Phi$ in $\mathbf{x}$ singulär, und das Bild solcher Punkte ist nach dem Satz von Sard eine Nullmenge. Die Behauptung ist bewiesen.

Es folgt:

$$\int_G d\omega = \int_{\Phi(X)} \Big( \int_{p^{-1}(\mathbf{y}) \cap G} D_1 f \cdot dx^1 \Big)\, \Omega.$$

$p^{-1}(\mathbf{y}) \cap G$ besteht aus endlich oder abzählbar vielen offenen Intervallen $I_j = (a_j, b_j)$. Daraus folgt:

$$\int_{p^{-1}(\mathbf{y}) \cap G} D_1 f \, dx^1 = \sum_j \big( f(b_j) - f(a_j) \big) = \sum_{\mathbf{x} \in p^{-1}(\mathbf{y}) \cap X} \varepsilon(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}).$$

∎

Der Satz läßt sich auf semireguläre Gebiete in Riemannschen Mannigfaltigkeiten übertragen, etwa mit Hilfe einer Teilung der Eins. Dabei ist zu beachten, daß $\partial_s G$ auch kompliziertere Teile enthalten kann, wenn $\omega$ dort verschwindet.

Wir wollen nun die Integralsätze der klassischen Vektoranalysis beweisen.

**4.2 Satz.** *Zu jedem Vektorfeld $\xi$ auf $X$ gibt es eine eindeutig bestimmte 1-Form $\xi^\flat$ auf $X$, so daß*

$$\xi^\flat(\eta) = \gamma(\xi, \eta)$$

*für jedes andere Vektorfeld $\eta$ gilt.*

Beweis: Für jedes $x \in X$ wird durch $v \mapsto \lambda_v$ mit $\lambda_v(w) = \gamma_x(v, w)$ ein Isomorphismus von $T_x(X)$ auf den Dualraum $T_x^*(X)$ definiert. Ist nämlich $\lambda_v = 0$, so ist $\gamma_x(v, w) = 0$ für jeden Tangentialvektor $w$, also insbesondere $\gamma_x(v, v) = 0$. Da $\gamma_x$ ein Skalarprodukt ist, muß dann $v = 0$ sein.

Da $\xi^\flat(\eta) = \gamma(\xi, \eta)$ für jedes differenzierbare Vektorfeld $\eta$ eine differenzierbare Funktion ist, ist $\xi^\flat$ tatsächlich eine (differenzierbare) 1-Form. ∎

**Bemerkung.** In der allgemeinen Relativitätstheorie wird eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit $X$ als Modell für Raum und Zeit zugrunde gelegt. Dabei wird $X$ nicht mit einer Riemannschen Metrik versehen, sondern mit einer „pseudoriemannschen Metrik“ $\gamma$. Das bedeutet, daß für jedes $x \in X$ eine symmetrische Bilinearform $\gamma_x$ auf $T_x(X)$ gegeben ist, die nicht positiv definit ist, sondern die Signatur $(+++-)$ hat. Ein Beispiel ist der $\mathbb{R}^4$ mit der *Minkowski-Metrik*

$$m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4,$$

wobei $x_1, x_2, x_3$ die räumlichen Koordinaten sind und $x_4 = ct$ ist ($t$ = Zeit, $c$ = Lichtgeschwindigkeit). Ist $m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ für alle $\mathbf{y}$, so ist insbesondere $x_i = m(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = 0$ für $i = 1, 2, 3$, aber auch $x_4 = m(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_4) = 0$, also $\mathbf{x} = 0$. Auch eine pseudoriemannsche Metrik ist „nicht ausgeartet“, und erlaubt einen Isomorphismus zwischen Vektorfeldern und 1-Formen.

Ist $\xi$ ein differenzierbares Vektorfeld auf $X$, $(U, \varphi)$ eine Karte und $\xi_\varphi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ so schreibt man

$$(\xi^\flat)_\varphi = \xi_1\, dx^1 + \cdots \xi_n\, dx^n.$$

Setzen wir $e_k^{(\varphi)} := \dfrac{\partial}{\partial x_k}$, so ist

$$\xi_k = (\xi^\flat)(e_k^{(\varphi)}) = \gamma(\xi, e_k^{(\varphi)}) = \sum_{i=1}^{n} g_{ik}\xi^i.$$

Bei Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention ist also $\xi_k = g_{ik}\xi^i$. Man spricht auch vom „Herunterziehen der Indizes“, so wie in der Musik das Zeichen $\flat$ dafür sorgt, daß ein Ton um einen Halbton heruntergezogen wird. Hier, auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, besteht nun auch tatsächlich ein Unterschied zwischen den kovarianten Komponenten $\xi_i$ und den kontravarianten Komponenten $\xi^i$ eines Feldes.

Der umgekehrte Vorgang ist das „Heraufziehen der Indizes“. Mit $g^{ij}$ bezeichnet man die Komponenten der inversen Matrix $G_\varphi^{-1}$. Ist $\omega = a_1\, dx^1 + \cdots + a_n\, dx^n$ eine 1-Form, so ergeben sich die Komponenten $a^i$ des zugehörigen Vektorfeldes $\omega^\sharp$ aus der Gleichung

$$a^k = \sum_{i=1}^{n} a_i g^{ik}.$$

**Definition.** Ist $f$ eine differenzierbare Funktion auf $X$, so heißt das Vektorfeld

$$\nabla f := (df)^\sharp$$

der *Gradient* von $f$.

Es ist $\gamma(\nabla f, \eta) = \eta[f]$, und in lokalen Koordinaten ist

$$\nabla f = \Big(\sum_{i=1}^{n} g^{i\,1}\frac{\partial f}{\partial x_i}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} g^{i\,n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big).$$

Im $\mathbb{R}^n$ haben wir nicht nur jedem Vektor $\mathbf{v}$ eine Linearform $\lambda_{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^\flat$ sondern auch eine alternierende $(n-1)$-Form $\Lambda_{\mathbf{v}}$ zugeordnet. Auch das läßt sich auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten verallgemeinern.

**4.3 Satz.** *Zu jedem Vektorfeld $\xi$ auf $X$ gibt es eine eindeutig bestimmte $(n-1)$-Form $\Lambda_\xi$ auf $X$ mit*

$$\eta^\flat \wedge \Lambda_\xi = \gamma(\eta, \xi) \cdot \Omega_X.$$

*Ist $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ ein lokales Koordinatensystem, so ist*

$$(\Lambda_\xi)_\varphi = \sqrt{\det G_\varphi} \cdot \sum_{k=1}^{n} \xi^k (-1)^{k+1}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Beweis: Die Eindeutigkeit ergibt sich wie folgt. Ist $\Lambda_\xi$ mit der gewünschten Eigenschaft gegeben und

$$\Lambda_\xi = \sum_{k=1}^{n} a_k\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

so ist einerseits

$$dx^i \wedge \Lambda_\xi = (-1)^{i+1} a_i\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

und andererseits $(dx^i)^\sharp = (g^{i1}, \ldots, g^{in})$, also

$$\gamma((dx^i)^\sharp, \xi)\, \Omega_X = \Big(\sum_{kl} g^{ik} g_{kl} \xi^l\Big) \cdot \Omega_X = \xi^i \cdot \sqrt{\det G_\varphi}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Daraus folgt: $a_k = \sqrt{\det G_\varphi}(-1)^{k+1}\xi^k$.

Ist umgekehrt $\Lambda_\xi$ so gegeben und $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^n)$, so ist

$$\eta^\flat = \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} g_{ik}\eta^i\Big)\, dx^k,$$

also

$$\begin{aligned} \eta^\flat \wedge \Lambda_\xi &= \sum_{i,k} g_{ik}\eta^i \xi^k \cdot \sqrt{\det G_\varphi}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \\ &= \gamma(\eta, \xi)\, \Omega_X \end{aligned}$$

Das zeigt die Existenz. ∎

**Definition.** Ist $\xi$ ein Vektorfeld auf $X$, so nennt man die eindeutig bestimmte Funktion $\mathbf{div}\,\xi$ mit

$$d(\Lambda_\xi) = (\mathbf{div}\,\xi)\,\Omega_X$$

die *Divergenz* von $\xi$.

**4.4 Satz.** *Ist $g := \det G_\varphi$, so hat die Divergenz in lokalen Koordinaten die Gestalt*

$$\mathbf{div}\,\xi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(\sqrt{g}\,\xi^k)}{\partial x^k}\,.$$

BEWEIS: Es ist

$$d(\Lambda_\xi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(\sqrt{g}\,\xi^k)}{\partial x^k}\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

∎

**Bemerkung.** Im $\mathbb{R}^n$ ist $g = 1$ und es kommen die bekannten Formeln heraus.

Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\varphi : G \to \widetilde{G} \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus, so kann man $\widetilde{G}$ als parametrisierte Mannigfaltigkeit auffassen. Als Beispiel seien die ebenen Polarkoordinaten genannt:

$$\varphi(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta)) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Dann erzeugen die Vektoren

$$\mathbf{X}_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta) \quad \text{und} \quad \mathbf{X}_\theta = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta)$$

den Tangentialraum von $\widetilde{G}$, und die Vektoren $\mathbf{E}_r = \mathbf{X}_r$ und $\mathbf{E}_\theta = \frac{1}{r}\mathbf{X}_\theta$ bilden ein ON-System. Es ist

$$G_{\varphi^{-1}}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_r \bullet \mathbf{X}_r & \mathbf{X}_r \bullet \mathbf{X}_\theta \\ \mathbf{X}_\theta \bullet \mathbf{X}_r & \mathbf{X}_\theta \bullet \mathbf{X}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix},$$

also $\sqrt{g} = \sqrt{\det G_{\varphi^{-1}}} = r$. In ebenen Polarkoordinaten ist daher

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{X}_r + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}\mathbf{X}_\theta = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{E}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\mathbf{E}_\theta.$$

Ist $\xi = \xi^r\mathbf{E}_r + \xi^\theta\mathbf{E}_\theta = \xi^r\mathbf{X}_r + \frac{1}{r}\xi^\theta\mathbf{X}_\theta$, so ist

$$\mathbf{div}\,\xi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot\xi^r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\xi^\theta)\right]$$

Ingenieure nennen das „Rechnen in krummlinigen Koordinaten“.

Wir können jetzt auch die klassischen Sätze von Gauß und Stokes formulieren.

**4.5 Der Integralsatz von Gauß-Ostrogradski.** *Es sei $X$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $G \subset X$ ein semireguläres Gebiet, $\xi$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer Umgebung von $\overline{G}$ und $N$ das äußere Einheitsnormalenfeld auf $\partial_r G$. Dann ist*

$$\int_G (\mathbf{div}\, \xi)\, dV = \int_{\partial_r G} <\xi\, ,\, N>\, do.$$

*Dabei ist $dV = \Omega_X$ das Volumenelement von $X$ und $do$ das Volumenelement auf $\partial_r G$. Das Skalarprodukt $<\xi\, ,\, N>$ ist das Riemannsche Skalarprodukt $\gamma(\xi, N)$.*

BEWEIS:
Es ist $\displaystyle\int_G (\mathbf{div}\, \xi)\Omega_X = \int_G d(\Lambda_\xi) = \int_{\partial_r G} \Lambda_\xi$.
Ist $x \in \partial_r G$ und $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ eine positiv or. ON-Basis von $T_x(\partial_r G)$, so ist

$$\xi_x = <\xi_x\, ,\, N_x>\, N_x + \sum_{i=1}^{n-1} <\xi_x\, ,\, u_i>\, u_i\, . \qquad (*)$$

Also ist

$$\begin{aligned}
(\Lambda_\xi)_x(u_1, \ldots, u_{n-1}) \;&=\\
&= \sqrt{g} \sum_{k=1}^{n} \xi^k (-1)^{k+1}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \ldots \wedge dx^n(u_1, \ldots, u_{n-1})\\
&= \sqrt{g}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n(\xi, u_1, \ldots, u_{n-1}) \text{ (Laplace)}\\
&= \Omega_X(\xi, u_1, \ldots, u_{n-1}) \;=\; <\xi_x\, ,\, N_x>
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus $(*)$ und der Tatsache, daß $\Omega_X(N_x, u_1, \ldots, u_{n-1}) = 1$ ist. Andererseits ist auch $<\xi_x\, ,\, N_x> \cdot\, do(u_1, \ldots, u_{n-1}) = <\xi_x\, ,\, N_x>$. Daraus folgt:

$$\Lambda_\xi|_{\partial_r G} = <\xi\, ,\, N> \cdot\, do\, .$$

■

**Definition.** Sei $X$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $G \subset \mathbb{R}^2$ ein (beschränktes) Gebiet mit stückweise glattem Rand und $\varphi : \overline{G} \to X$ eine stetig differenzierbare injektive Abbildung. Außerdem sei $\operatorname{rg} D\varphi(\mathbf{u}) = 2$ für alle $\mathbf{u} \in \overline{G}$. Dann heißt $S := \varphi(\overline{G})$ ein *(abgeschlossenes) Flächenstück* in $X$ und $bS := \varphi(\partial G)$ der Rand von $S$.

**Bemerkungen.**

1. $S$ ist kompakt, und $\dot{S} := \varphi(G)$ ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $X$. Der Rand $bS$ ist nicht der topologische Rand von $S$.

2. Es gibt endlich viele glatte Wege $\beta_\varrho : I_\varrho \to \mathbb{R}^2$, $\varrho = 1, \dots, r$, so daß $\partial G$ Vereinigung der Spuren dieser Wege ist und sich je zwei solche Wege höchstens an den Endpunkten treffen. Daher ist $bS$ Vereinigung der Spuren $C_\varrho$ der Wege $\alpha_\varrho := \varphi \circ \beta_\varrho : I_\varrho \to X$. Man kann jede Kurve $C_\varrho$ als 1-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit auffassen, wenn man die Endpunkte wegläßt. Durch $\psi_\varrho := \alpha_\varrho^{-1}$ wird eine globale Karte für $C_\varrho$ gegeben.

Sei $\gamma$ die Riemannsche Metrik auf $X$. Für $x \in X$ und $v \in T_x(X)$ sei

$$\|v\|_\gamma := \sqrt{\gamma(v,v)}\,.$$

Ist $\alpha : I \to X$ ein glatter und injektiver differenzierbarer Weg, $t_0 \in I$, $x_0 = \alpha(t_0)$ und $(x^1, \dots, x^n)$ ein lokales Koordinatensystem für $X$ in $x_0$, so setzen wir $\alpha_i := x^i \circ \alpha$. Dann ist der Tangentialvektor an den Weg $\alpha$ gegeben durch

$$\dot{\alpha}(t_0) := \alpha_{*,t}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t_0}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'(t_0) \frac{\partial}{\partial x_i}\,.$$

Der Vektor

$$T_\alpha(t) := \frac{\dot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|}$$

heißt *Tangenteneinheitsvektor* an $C := \alpha(I)$ in $\alpha(t)$. Er hängt nicht von der Parametrisierung $\alpha$ ab, nur von der Orientierung der Kurve $C$.

Die Riemannsche Metrik von $X$ induziert eine Metrik auf der Kurve $C$. Zusammen mit der natürlichen Orientierung von $C$ wird so ein Volumenelement auf $C$ bestimmt, das *Linienelement* $ds$. Bezüglich der Karte $\psi = \alpha^{-1}$ ist $ds$ gegeben als $ds = \sqrt{G_\psi}\,dt$. Der Tangentialraum an $C$ in $\alpha(t)$ wird (in diesem Koordinatensystem) von $\dot{\alpha}(t)$ erzeugt, daher ist $G_\psi(t) = \gamma(\dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t)) = \|\dot{\alpha}(t)\|_\gamma^2$. Es folgt:

$$ds = \|\dot{\alpha}\|_\gamma\,dt.$$

Sei nun $\xi$ ein Vektorfeld auf $X$. In lokalen Koordinaten ist

$$\xi^\flat = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_i g_{ik}\xi^i\Big)\,dx^k,$$

also

$$\begin{aligned} \alpha^*(\xi^\flat) &= \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_i (g_{ik} \circ \alpha) \cdot (\xi^i \circ \alpha)\Big)\,\alpha_k'\,dt \\ &= <\xi \circ \alpha\,,\,\dot{\alpha}>dt \\ &= <\xi \circ \alpha\,,\,T_\alpha>ds. \end{aligned}$$

**Bemerkung.** Eine 1-Form kann mühelos auf eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit eingeschränkt werden. Bei einem Vektorfeld ist das zunächst nicht möglich, da es i.a. ja nicht tangential zu der Untermannigfaltigkeit verläuft. Das Skalarprodukt $<\xi \circ \alpha\,,\, T_\alpha>$ liefert den *tangentialen Anteil* von $\xi$.

**4.6 Satz.** *Sei $X$ eine 3-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es zu jedem Vektorfeld $\xi$ auf $X$ genau ein Vektorfeld $\mathbf{rot}\,\xi$ auf $X$ mit*

$$\Lambda_{\mathbf{rot}\,\xi} = d(\xi^\flat).$$

BEWEIS: Die *Rotation* eines Vektorfeldes ($\mathbf{rot}\,\xi$) kann nur im Falle $n = 3$ definiert werden, denn nur dann ist die 2-Form $d(\xi^\flat)$ zugleich eine $(n-1)$-Form. Außerdem hängt die Zuordnung zwischen $\xi$ und $\mathbf{rot}\,\xi$ von der Metrik und der Orientierung ab, ist also nicht invariant unter orientierungsumkehrenden Transformationen (wie z.B. Spiegelungen).

Ansonsten ist nichts weiter zu zeigen, wir wissen ja schon: Die Zuordnung $\eta \mapsto \Lambda_\eta$ ist bijektiv (zwischen Vektorfeldern und $(n-1)$-Formen). ■

**4.7 Stokesscher Integralsatz.** *Es sei $S$ ein abgeschlossenes Flächenstück mit stückweise glattem Rand in einer 3-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit, $\xi$ ein differenzierbares Vektorfeld in einer Umgebung von $S$. Dann ist*

$$\int_S <\mathbf{rot}\,\xi\,,\, N>do = \int_{bS} <\xi\,,\, T>ds.$$

*Dabei ist $N$ ein Einheitsnormalenfeld auf $S$, das die transversale Orientierung von $S$ festlegt, und $T$ das Tangenteneinheitsvektorfeld auf $bS$, das den Rand in der richtigen Weise orientiert.*

BEWEIS: Wie oben beschrieben sei $S$ durch $\varphi : G \to X$ und $bS$ durch die Wege $\alpha_\varrho = \varphi \circ \beta_\varrho$ parametrisiert. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_S <\mathbf{rot}\,\xi\,,\, N>do &= \int_S \Lambda_{\mathbf{rot}\,\xi} \;=\; \int_G \varphi^*(\Lambda_{\mathbf{rot}\,\xi}) \\
&= \int_G \varphi^*(d\xi^\flat) \;=\; \int_G d(\varphi^*\xi^\flat) \\
&= \int_{\partial G} \varphi^*\xi^\flat \;=\; \int_{bS} \xi^\flat \\
&= \sum_\varrho \int_{I_\varrho} \alpha_\varrho^*(\xi^\flat) \;=\; \sum_\varrho \int_{I_\varrho} <\xi \circ \alpha_\varrho\,,\, \dot{\alpha}_\varrho> dt \\
&= \int_{bS} <\xi\,,\, T>ds.
\end{aligned}$$

■

Wie in der 1-dimensionalen Theorie gilt auch im $\mathbb{R}^n$ der *Mittelwertsatz der Integralrechnung*, etwa in folgender Form: Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : M \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es ein $\boldsymbol{\xi} \in M$ mit

$$\int_M f(\mathbf{x})\, dx^1 \dots dx^n = v_n(M) \cdot f(\boldsymbol{\xi}).$$

Wir verwenden diese Tatsache, um eine Interpretation von Divergenz und Rotation zu liefern.

Ist $Q_\varepsilon = Q_\varepsilon(\mathbf{x})$ ein kleiner Quader um $\mathbf{x}$, so stellt $\int_{\partial Q_\varepsilon} <\xi\,,\,N>do$ den *Fluß* des Vektorfeldes $\xi$ durch die Oberfläche von $Q_\varepsilon$ dar. Ist die Gesamtbilanz positiv, so enthält $Q_\varepsilon$ eine *Quelle*, ist die Bilanz negativ, so enthält $Q_\varepsilon$ eine *Senke*. Nun gilt:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{v_n(Q_\varepsilon(\mathbf{x}_0))} \int_{\partial Q_\varepsilon} <\xi\,,\,N>do = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{v_n(Q_\varepsilon)} \int_{Q_\varepsilon} (\mathbf{div}\,\xi)\, dV \;=\; \mathbf{div}\,\xi(\mathbf{x}_0).$$

Deshalb nennt man $\mathbf{div}\,\xi$ auch die *Quelldichte* von $\xi$.

Jetzt sei $N \in \mathbb{R}^3$ ein fester Vektor der Länge 1 in $\mathbf{x}_0$. Mit $S_\varepsilon$ bezeichnen wir kleine Kreisscheiben durch $\mathbf{x}_0$ senkrecht zu $N$ (mit $N$ als „Achse“). Dann gilt:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{v_2(S_\varepsilon)} \int_{bS_\varepsilon} <\xi\,,\,T>ds = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{v_2(S_\varepsilon)} \int_{S_\varepsilon} <\mathbf{rot}\,\xi\,,\,N>do = <\mathbf{rot}\,\xi(\mathbf{x}_0)\,,\,N>.$$

Man nennt $<\mathbf{rot}\,\xi(\mathbf{x}_0)\,,\,N>$ die *Wirbeldichte* von $\xi$ um die durch $N$ bestimmte Achse. Das Integral $\int_{bS} <\xi\,,\,T>ds$ nennt man die *Zirkulation* von $\xi$ entlang $bS$.