Bergische Universität – Gesamthochschule Wuppertal – Fachbereich Mathematik

Analysis 3

Kapitel 3 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Vorlesungsausarbeitung zum WS 2001/02

von Prof. Dr. Klaus Fritzsche

Inhaltsverzeichnis

§ 1 Differenzierbare Strukturen

Sei X ein Hausdorffscher topologischer Raum.

Definition. Eine *Karte* oder ein *Koordinatensystem* für X ist ein Paar (U, φ) mit folgenden Eigenschaften:

1. U ist eine offene Teilmenge von X.

2. φ ist ein Homöomorphismus von U auf eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Zwischen offenen Mengen $V \subset \mathbb{R}^n$ und $W \subset \mathbb{R}^m$ kann es nur dann einen Homöomorphismus geben, wenn $n = m$ ist. Deshalb ist das n in der Definition eindeutig bestimmt. Allerdings werden wir dieses Ergebnis aus der Topologie hier nicht verwenden.

Ein Hausdorffscher Raum X heißt *lokal-euklidisch* von der Dimension n, falls es zu jedem Punkt $x \in X$ ein n-dimensionales Koordinatensystem (U, φ) mit $x \in U$ gibt. Ein solcher Raum ist automatisch *lokal-kompakt*, d.h., jeder Punkt besitzt eine kompakte Umgebung.

Ist (U, φ) eine Karte für X, $\varphi(U)$ offen im $\mathbb{R}^n$ und $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die i-te Komponente, so nennt man die Funktionen

$$x^i := \pi_i \circ \varphi : U \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n,$$

die durch φ bestimmten *lokalen Koordinaten*.

Beispiel.

Sei $S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|\mathbf{x}\| = 1\}$ die Einheits-Sphäre im $\mathbb{R}^3$. Mit der vom $\mathbb{R}^3$ induzierten Relativtopologie ist S^2 ein Hausdorffscher topologischer Raum. Die Menge

$$U := S^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z < 1\}$$

ist offen in S^2. Tatsächlich umfaßt U die gesamte Sphäre mit Ausnahme des Nordpols.

Nun sei $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\varphi(x, y, z) := \Big(\frac{x}{1-z}, \frac{-y}{1-z}\Big).$$

Als Einschränkung einer stetigen Abbildung von $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, z < 1\}$ nach $\mathbb{R}^2$ ist φ ebenfalls stetig. Wir wollen zeigen, daß φ sogar ein Homöomorphismus von U auf $\mathbb{R}^2$ ist. Dazu definieren wir $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\psi(t_1, t_2) := (x, y, z) = \Big(\frac{2t_1}{\|\mathbf{t}\|^2+1}, \frac{-2t_2}{\|\mathbf{t}\|^2+1}, \frac{\|\mathbf{t}\|^2-1}{\|\mathbf{t}\|^2+1}\Big).$$

Offensichtlich ist $z < 1$, und mit $N := \|\mathbf{t}\|^2 + 1$ ist

$$\begin{aligned} N^2(x^2+y^2+z^2) &= 4t_1^2 + 4t_2^2 + (\|\mathbf{t}\|^2 - 1)^2 \\ &= 4\|\mathbf{t}\|^2 + \|\mathbf{t}\|^4 - 2\|\mathbf{t}\|^2 + 1 \\ &= \|\mathbf{t}\|^4 + 2\|\mathbf{t}\|^2 + 1 \\ &= N^2, \end{aligned}$$

also $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Das bedeutet, daß ψ eine stetige Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach U ist. Wir wollen zeigen, daß ψ die Umkehrabbildung zu φ ist.

a) Ist $(x, y, z) \in U$ und $\varphi(x, y, z) = \mathbf{t} = (t_1, t_2)$, so ist

$$\begin{aligned} \|\mathbf{t}\|^2 &= \Big(\frac{x}{1-z}\Big)^2 + \Big(\frac{-y}{1-z}\Big)^2 \\ &= \frac{x^2+y^2}{(1-z)^2} = \frac{1-z^2}{(1-z)^2} \\ &= \frac{1+z}{1-z}\,, \end{aligned}$$

also

$$\|\mathbf{t}\|^2 + 1 = \frac{2}{1-z} \quad \text{und} \quad \|\mathbf{t}\|^2 - 1 = \frac{2z}{1-z}\,.$$

Dann folgt:

$$\psi \circ \varphi(x, y, z) = \Big(\frac{2x/(1-z)}{2/(1-z)}, \frac{2y/(1-z)}{2/(1-z)}, \frac{2z/(1-z)}{2/(1-z)}\Big) = (x, y, z).$$

b) Nun sei $\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ und $\psi(\mathbf{t}) = (x, y, z)$. Dann ist

$$1 - z = 1 - \frac{\|\mathbf{t}\|^2 - 1}{\|\mathbf{t}\|^2 + 1} = \frac{2}{\|\mathbf{t}\|^2 + 1}\,,$$

also

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi(\mathbf{t}) &= \varphi\Big(\frac{2t_1}{\|\mathbf{t}\|^2+1}, \frac{-2t_2}{\|\mathbf{t}\|^2+1}, z\Big) \\ &= \Big(\frac{2t_1/(\|\mathbf{t}\|^2+1)}{2/(\|\mathbf{t}\|^2+1)}, \frac{2t_2/(\|\mathbf{t}\|^2+1)}{2/(\|\mathbf{t}\|^2+1)}\Big) \\ &= (t_1, t_2) \;=\; \mathbf{t}. \end{aligned}$$

Das zeigt, daß ψ die Umkehrabbildung von φ ist. Also ist φ ein Homöomorphismus und (U, φ) eine Karte für S^2.

Definition. Sei X ein Hausdorffscher topologischer Raum. Ein n-dimensionaler $\mathcal{C}^k$-*Atlas* für X ist eine Familie $(U_\iota, \varphi_\iota)_{\iota \in I}$ von Karten (mit Bildern in $\mathbb{R}^n$), so daß folgendes gilt:

1. $(U_\iota)_{\iota \in I}$ ist eine (offene) Überdeckung von X.
2. Ist $U_\iota \cap U_\kappa \neq \varnothing$, so ist
$$\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1} : \varphi_\kappa(U_\iota \cap U_\kappa) \to \varphi_\iota(U_\iota \cap U_\kappa)$$
eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung.

Die *Koordinatentransformationen* $\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1}$ sind dann $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismen. Das wäre (im Falle $k \geq 1$) natürlich unmöglich, wenn das Bild von U_ι im $\mathbb{R}^n$ und das Bild von U_κ im $\mathbb{R}^m$ und $n \neq m$ wäre.

Beispiel.

Wir betrachten noch einmal $X = S^2$. Eine Karte $\varphi_1 = \varphi : U_1 \to \mathbb{R}^2$ mit $U_1 = \{(x,y,z) \in S^2 \,:\, z < 1\}$ kennen wir schon. Um ganz S^2 zu überdecken, brauchen wir noch eine zweite Karte.

Sei $U_2 := \{(x,y,z) \in S^2 \,:\, z > -1\}$ und $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch
$$\varphi_2(x,y,z) := \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right).$$
Dann ist
$$\varphi_2^{-1}(t_1,t_2) = \left(\frac{2t_1}{1+\|\mathbf{t}\|^2}, \frac{2t_2}{1+\|\mathbf{t}\|^2}, \frac{1-\|\mathbf{t}\|^2}{1+\|\mathbf{t}\|^2}\right)$$
und φ_2 ein Homöomorphismus.

Es ist $\varphi_1(0,0,-1) = (0,0)$ und $\varphi_2(0,0,1) = (0,0)$. Die Koordinatentransformation $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ hat die Form
$$\begin{aligned}
\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(t_1,t_2) &= \varphi_1\left(\frac{2t_1}{1+\|\mathbf{t}\|^2}, \frac{2t_2}{1+\|\mathbf{t}\|^2}, \frac{1-\|\mathbf{t}\|^2}{1+\|\mathbf{t}\|^2}\right) \\
&= \left(\frac{2t_1/(1+\|\mathbf{t}\|^2)}{2\|\mathbf{t}\|^2/(1+\|\mathbf{t}\|^2)}, \frac{-2t_2/(1+\|\mathbf{t}\|^2)}{2\|\mathbf{t}\|^2/(1+\|\mathbf{t}\|^2)}\right) \\
&= \left(\frac{t_1}{\|\mathbf{t}\|^2}, -\frac{t_2}{\|\mathbf{t}\|^2}\right).
\end{aligned}$$
Dies ist eine differenzierbare Abbildung, und als Funktionalmatrix erhält man
$$J_{\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}}(t_1,t_2) = \frac{1}{(t_1^2+t_2^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} t_2^2 - t_1^2 & -2t_1t_2 \\ 2t_1t_2 & t_2^2 - t_1^2 \end{pmatrix}.$$
Insbesondere ist dann
$$\det J_{\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}}(t_1,t_2) = \frac{1}{(t_1^2+t_2^2)^4} \cdot \left((t_2^2-t_1^2)^2 + 4t_1^2t_2^2\right) = \frac{1}{(t_1^2+t_2^2)^2} > 0\,.$$
Damit ist die Koordinatentransformation überall regulär, also ein Diffeomorphismus.

Das bedeutet, daß durch $(U_i, \varphi_i)_{i=1,2}$ ein (beliebig oft) differenzierbarer Atlas auf S^2 gegeben ist.

Es sei nun auf einem Hausdorffraum X ein $\mathcal{C}^k$-Atlas $(U_\iota, \varphi_\iota)_{\iota \in I}$ gegeben, und (V, ψ) sei eine weitere Karte für X. Wir sagen, daß diese Karte mit dem Atlas *verträglich* ist, falls $\psi \circ \varphi_\iota^{-1} : \varphi_\iota(U_\iota \cap V) \to \psi(U_\iota \cap V)$ für jedes $\iota \in I$ mit $U_\iota \cap V \neq \varnothing$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung ist.

Man kann einen differenzierbaren Atlas i.a. durch Hinzunahme von verträglichen Karten vergrößern. Ist das nicht mehr möglich, so spricht man von einem *maximalen* $\mathcal{C}^k$*-Atlas* oder einer $\mathcal{C}^k$*-Struktur*.

Wir werden im Folgenden nur $\mathcal{C}^\infty$-Strukturen betrachten und sprechen dann einfach von *differenzierbaren Strukturen*.

Es folgen jetzt einige Bemerkungen zur Topologie lokal-euklidischer Räume.

Definition. Sei X ein topologischer Raum. Ein System $\mathcal{B}$ von offenen Teilmengen von X heißt *Basis* (der Topologie von X), falls jede offene Menge in X Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ ist.

Ein topologischer Raum erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, falls er eine abzählbare Basis besitzt.

1.1 Satz. *Der topologische Raum X sei lokal-kompakt und erfülle das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Dann gilt:*

1. *X besitzt eine abzählbare Basis $\mathcal{B} = (B_j)_{j \in J}$, so daß alle Mengen $\overline{B}_j$ kompakt sind.*
2. *Es gibt eine Folge (A_k) von kompakten Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:*
   (a) $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.
   (b) $A_k \subset \mathring{A}_{k+1}$.

Beweis: 1) Sei $(B_i)_{i \in I}$ eine abzählbare Basis von X, und

$$J := \{ i \in I \, : \, \overline{B}_i \text{ kompakt } \}.$$

Wir müssen zeigen, daß $(B_j)_{j \in J}$ immer noch eine Basis von X ist.

Sei $S \subset X$ offen und $x \in S$. Dann gibt es eine offene Umgebung $W = W(x)$ und eine kompakte Menge K mit $W \subset K$. Also ist $\overline{W}$ kompakt. Weiter ist W Vereinigung von gewissen Basis-Elementen B_i, $i \in I_0$. Weil dann $\overline{B}_i \subset \overline{W}$ kompakt ist, gehören alle $i \in I_0$ zu J. Da S Vereinigung solcher W's ist, folgt die Behauptung.

2) Nach (1) gibt es eine abzählbare Basis $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von X, so daß $\overline{U}_n$ kompakt für jedes n ist. Wir setzen

$$A_1 := \overline{U}_1.$$

Ist A_k konstruiert und m_k die kleinste Zahl $\geq k+1$, so daß $A_k \subset \bigcup_{n=1}^{m_k} U_n$ ist, so setzen wir

$$A_{k+1} := \bigcup_{n=1}^{m_k} \overline{U}_n.$$

Die Mengen A_k sind dann kompakt und haben die gewünschten Eigenschaften. ■

Definition. Eine offene Menge V liegt *relativ-kompakt* in der offenen Menge U (in einem topologischen Raum X), falls $\overline{V}$ kompakt und in U enthalten ist. Man schreibt dann: $V \subset\subset U$.

1.2 Satz. *Sei X ein Hausdorffscher lokal-kompakter topologischer Raum, $x \in X$ und $U = U(x)$ eine offene Umgebung. Dann gibt es eine offene Umgebung V von x, die relativ-kompakt in U liegt.*

BEWEIS: Da X lokal-kompakt ist, gibt es eine offene Umgebung $W = W(x) \subset X$, so daß $\overline{W}$ kompakt ist. Dann ist auch $K := \overline{W} \setminus U$ kompakt, und weil X Hausdorffsch ist, gibt es offene Umgebungen $V_1 = V_1(x)$ und $V_2 = V_2(K)$, so daß $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ ist. Wir setzen $V := V_1 \cap W$. Dann ist auch V eine offene Umgebung von x, und $\overline{V}$ ist kompakt.

$\overline{V}$ liegt in $\overline{V}_1$ und kann deshalb V_2 nicht treffen. Also liegt $\overline{V}$ auch in $\overline{W} \setminus V_2$. Weil V_2 eine Umgebung von $K = \overline{W} \setminus U$ ist, ist $\overline{W} \setminus V_2 \subset U$. Daraus folgt, daß $\overline{V}$ in U enthalten ist. ■

Definition. Ein Hausdorffscher topologischer Raum X heißt *parakompakt*, falls jede offene Überdeckung von X eine lokal-endliche Verfeinerung besitzt.

Dazu noch ein paar Bemerkungen: Eine Überdeckung $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$ heißt eine *Verfeinerung* der Überdeckung $\mathcal{U} = (U_j)_{j \in J}$, falls es eine Abbildung $\tau : I \to J$ gibt, so daß stets $V_i \subset U_{\tau(i)}$ ist. Man nennt τ dann auch eine *Verfeinerungsabbildung*. Sie ist i.a. nicht eindeutig bestimmt.

Die Überdeckung $\mathcal{V}$ heißt *lokal-endlich*, falls jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung W besitzt, so daß $W \cap V_i \neq \varnothing$ für höchstens endlich viele $i \in I$ gilt.

Definition. Ein Hausdorffscher topologischer Raum X mit einem maximalen n-dimensionalen differenzierbaren Atlas heißt eine (n-dimensionale) *differenzierbare Mannigfaltigkeit*.

Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, dann setzen wir zusätzlich voraus, daß X das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Es ist nicht notwendig, einen maximalen Atlas zu konstruieren, da man jeden Atlas zu einem solchen erweitern kann.

1.3 Satz. *Sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Ist $0 < r < R$, so gibt es eine lokal-endliche Verfeinerung $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ von $\mathcal{U}$, so daß gilt:*

1. *Zu jedem $j \in J$ gibt es ein Koordinatensystem (W_j, φ_j) für X mit $V_j \subset W_j$ und $\varphi_j(V_j) = B_R(\mathbf{0})$.*
2. *Die Mengen $\varphi_j^{-1}(B_r(\mathbf{0}))$ überdecken X.*

Insbesondere ist X parakompakt.

Beweis: Als lokal-euklidischer Raum ist X lokal-kompakt. Außerdem setzen wir voraus, daß X das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Also gibt es eine Folge von kompakten Mengen K_ν, die X ausschöpft.

Wir setzen $M_1 := K_1$ und $M_\nu := K_\nu \setminus \mathring{K}_{\nu-1}$ für $\nu \geq 2$. Dann ist (M_ν) eine abzählbare Überdeckung von X durch kompakte Mengen.

Sei $M = M_\nu$ für ein festes ν. Zu jedem $x \in M$ gibt es einen Index $i = i(x) \in I$ und eine offene Umgebung $W = W(x) \subset U_i \cap (\mathring{K}_{\nu+1} \setminus K_{\nu-2})$. Dabei kann W so klein gewählt werden, daß es ein Koordinatensystem $\varphi : W \to B_R(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n$ gibt. Sei $V' := \varphi^{-1}(B_r(\mathbf{0}))$. Endlich viele solcher Umgebungen überdecken M. Führen wir das Verfahren für alle M_ν durch, so erhalten wir eine abzählbare Verfeinerung $\mathcal{V}$ von $\mathcal{U}$. Nach Konstruktion ist $\mathcal{V}$ lokal-endlich. ∎

Beispiele.

1. Jede offene Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ ist eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Das Paar (B, id_B) bildet schon einen Atlas.

2. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und $M \subset B$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wie wir sie im 2. Semester eingeführt haben. M soll also eine (relativ) abgeschlossene Teilmenge von B sein, so daß es zu jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in M$ eine offene Umgebung $U(\mathbf{x}_0) \subset B$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ gibt, so daß gilt:

   (a) $U \cap M = \{\mathbf{x} \in U \,:\, f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$.

   (b) $Df(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ ist surjektiv.

   Für $\mathbf{x} \in M$ ist dann $\mathrm{Ker}(Df(\mathbf{x}))$ der Tangentialraum von M in $\mathbf{x}$.

   Wir setzen jetzt voraus, daß f sogar stets eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung ist. Es gibt dann auch $\mathcal{C}^k$-Parametrisierungen für M, d.h. zu jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in M$ gibt es eine offene Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^k$ und eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung $\psi : T \to M$ (eben eine lokale Parametrisierung), so daß gilt:

   (a) Es gibt ein $\mathbf{u}_0 \in T$ mit $\psi(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$.

(b) Für alle $\mathbf{u} \in T$ ist $D\psi(\mathbf{u}) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ injektiv.

(c) Es gibt eine offene Umgebung $W(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$, so daß $\psi : T \to W \cap M$ ein Homöomorphismus ist.

Dann ist $(W \cap M, \psi^{-1})$ eine Karte für M, und je zwei solche Karten sind miteinander verträglich. Das ergibt einen $\mathcal{C}^k$-Atlas für M. Ist $k = \infty$, so wird M auf diese Weise zu einer k-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

Definition. Sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $M \subset X$ eine offene Teilmenge. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar*, falls $f \circ \varphi_\iota^{-1} : \varphi_\iota(M \cap U_\iota) \to \mathbb{R}$ für jede Karte (U_ι, φ_ι) eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion ist.

Die Menge aller differenzierbaren Funktionen auf M sei mit $\mathcal{C}^\infty(M)$ bezeichnet. Ist $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, so nennt man die Menge

$$\mathrm{Tr}(f) := \overline{\{x \in M \,:\, f(x) \neq 0\}}$$

den *Träger* von f. Mit $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit kompaktem Träger.

1.4 Satz vom Hut. *Sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $0 < r < R$. Dann gibt es eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so daß gilt:*

$$f(\mathbf{x}) \equiv 1 \text{ auf } B_r(\mathbf{a}) \quad \text{und} \quad f(\mathbf{x}) \equiv 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \setminus B_R(\mathbf{a}),$$

sowie $0 \leq f(\mathbf{x}) \leq 1$ überall sonst.

Beweis: Durch

$$g(t) := \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

wird eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion auf $\mathbb{R}$ definiert, die genau für $x > 0$ Werte > 0 annimmt. Dann ist $h(t) := g(1+t)g(1-t)$ genau auf dem Intervall $(-1, 1)$ positiv und überall sonst $= 0$.

Die Funktion

$$\varphi(t) := \Big(\int_{-1}^{t} h(\tau)\,d\tau\Big) \Big/ \Big(\int_{-1}^{1} h(\tau)\,d\tau\Big)$$

ist wieder eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion, die nur Werte zwischen 0 und 1 annimmt. Für $t \leq -1$ ist $\varphi(t) \equiv 0$ und für $t \geq 1$ ist $\varphi(t) \equiv 1$. Schließlich setzen wir

$$f(\mathbf{x}) := \varphi\Big(\frac{R + r - 2\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|}{R - r}\Big).$$

Diese Funktion nimmt auch nur Werte zwischen 0 und 1 an. Für $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \geq R$ ist $f(\mathbf{x}) \equiv 0$, und für $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r$ ist $f(\mathbf{x}) \equiv 1$. ∎

Definition. Eine *Teilung der Eins* auf X ist eine Familie $(f_\iota)_{\iota \in I}$ von differenzierbare Funktionen auf X, so daß gilt:

1. $f_\iota \geq 0$ überall.
2. Das System der Träger $\mathrm{Tr}(f_\iota)$ ist lokal-endlich.
3. $\sum_{\iota\in I} f_\iota = 1$.

1.5 Satz. *Zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U} = (U_\iota)_{\iota\in I}$ von X gibt es eine Teilung der Eins $(f_\iota)_{\iota\in I}$ mit $\mathrm{Tr}(f_\iota) \subset U_\iota$.*

Beweis: Sei $\mathcal{V} = (V_\lambda)_{\lambda\in L}$ eine lokal-endliche Verfeinerung von $\mathcal{U}$, so daß es lokale Koordinaten $\varphi_\lambda : V_\lambda \to B_R(\mathbf{0})$ gibt und für ein r mit $0 < r < R$ auch noch die Mengen $V'_\lambda := \varphi_\lambda^{-1}(B_r(\mathbf{0}))$ überdecken.

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion, so daß überall $0 \leq f(\mathbf{x}) \leq 1$ ist, sowie $f(\mathbf{x}) \equiv 1$ auf $B_r(\mathbf{0})$ und $f(\mathbf{x}) \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_R(\mathbf{0})$. Dann setzen wir

$$g_\lambda(x) := \begin{cases} f \circ \varphi_\lambda(x) & \text{für } x \in V_\lambda, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $\tau : L \to I$ eine Verfeinerungsabbildung, also $V_\lambda \subset U_{\tau(\lambda)}$. Dann ist $\mathcal{W} = (W_\iota)_{\iota\in I}$ mit $W_\iota := \bigcup_{\lambda\in\tau^{-1}(\iota)} V_\lambda$ eine offene Verfeinerung von $\mathcal{U}$ mit $W_\iota \subset U_\iota$. Außerdem ist $\mathcal{W}$ lokal-endlich, denn zu jedem $x \in X$ gibt es eine Umgebung $P = P(x)$ und eine endliche Teilmenge $L_0 \subset L$, so daß $P \cap V_\lambda \neq \varnothing$ nur für $\lambda \in L_0$ gilt. Aber dann ist $P \cap W_\iota \neq \varnothing$ höchstens für $\iota = \tau(\lambda)$, $\lambda \in L_0$, und das sind auch nur endlich viele.

Sei $\widetilde{g}_\iota := \sum_{\lambda\in\tau^{-1}(\iota)} g_\lambda$. Diese Summe ist überall endlich. Deshalb ist $\widetilde{g}_\iota$ differenzierbar, und außerdem ist $\mathrm{Tr}(\widetilde{g}_\iota) \subset W_\iota$. Da jeder Punkt $x \in X$ in einer Menge V'_λ enthalten ist, gibt es zu x mindestens ein ι mit $\widetilde{g}_\iota(x) > 0$. Also ist $g := \sum_\iota \widetilde{g}_\iota$ eine überall positive differenzierbare Funktion. Schließlich setzen wir

$$f_\iota := \frac{\widetilde{g}_\iota}{g}\,.$$

Offensichtlich besitzen die f_ι alle gewünschten Eigenschaften. ∎

1.6 Folgerung. *Sei $U \subset X$ offen und $V \subset\subset U$ ebenfalls offen. Dann gibt es eine differenzierbare Funktion f auf X mit $f|_V = 0$ und $f|_{(X\setminus U)} = 1$.*

Beweis: Sei (f_1, f_2) eine Teilung der Eins zur Überdeckung $(U, X \setminus \overline{V})$. Dann ist $\mathrm{Tr}(f_1) \subset U$, $\mathrm{Tr}(f_2) \subset X \setminus \overline{V}$ und $f_1 + f_2 = 1$. Wir nehmen f_2 als Funktion f. ∎

Definition. Es seien X und Y zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine stetige Abbildung $\Phi : X \to Y$ heißt eine *differenzierbare Abbildung*, falls gilt: Für jede offene Menge $V \subset Y$ und jede differenzierbare Funktion $g : V \to \mathbb{R}$ ist auch $g \circ \Phi : \Phi^{-1}(V) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

1.7 Satz. *Eine stetige Abbildung $\Phi : X \to Y$ ist genau dann differenzierbar, wenn für jede Karte (U, φ) von X und jede Karte (V, ψ) von Y mit $\Phi(U) \cap V \neq \varnothing$ gilt:*

$$\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \Phi^{-1}(V)) \to \psi(V)$$

ist eine differenzierbare Abbildung.

BEWEIS: 1) Sei Φ eine differenzierbare Abbildung, $\psi = (y^1, \dots, y^m)$. Da die y^μ differenzierbare Funktionen auf V sind, ist $y^\mu \circ \Phi$ differenzierbar auf $\Phi^{-1}(V)$, also $y^\mu \circ \Phi \circ \varphi^{-1}$ differenzierbar auf $\varphi(U \cap \Phi^{-1}(V)$.

2) Nun sei das Kriterium erfüllt. Ist g eine differenzierbare Funktion auf Y, so ist $g \circ \psi^{-1}$ differenzierbar, also auch

$$(g \circ \Phi) \circ \varphi^{-1} = (g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}).$$

Das bedeutet, daß auch $g \circ \Phi$ eine differenzierbare Funktion ist. ∎

Ist $\Phi : X \to Y$ ein Homöomorphismus und sind Φ und Φ^{-1} differenzierbare Abbildungen, so nennt man Φ einen *Diffeomorphismus*.

Beispiele.

1. Sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\widetilde{X}$ ein Hausdorff-Raum und $\pi : \widetilde{X} \to X$ eine stetige Abbildung. Man nennt π *lokal-topologisch*, falls es zu jedem Punkt $p_0 \in \widetilde{X}$ eine offene Umgebung U von p_0 in $\widetilde{X}$ und eine offene Umgebung V von $x_0 = \pi(p_0)$ in X gibt, so daß $\pi|_U : U \to V$ ein Homöomorphismus (also eine „topologische" Abbildung) ist.

   Man kann nun $\widetilde{X}$ so mit einer differenzierbaren Struktur versehen, daß π zu einer differenzierbaren Abbildung wird. Ist nämlich $\pi : U \to V$ topologisch und $\varphi : V \to B \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte, so kann man $\psi := \varphi \circ \pi$ als Karte für $\widetilde{X}$ nehmen. Sind $\psi_1 = \varphi_1 \circ \pi : U_1 \to \mathbb{R}^n$ und $\psi_2 = \varphi_2 \circ \pi : U_2 \to \mathbb{R}^n$ zwei Karten mit $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, so gilt für $\mathbf{x} \in \varphi_2 \circ \pi(U_1 \cap U_2)$

   $$\psi_1 \circ \psi_2^{-1} = (\varphi_1 \circ \pi|_{U_1}) \circ (\varphi_2 \circ \pi|_{U_2})^{-1} = \varphi_1 \circ \pi|_{U_1} \circ (\pi|_{U_2})^{-1} \circ \varphi_2^{-1} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}.$$

   Das zeigt, daß die Karten differenzierbar miteinander verträglich sind. Man beachte allerdings, daß $\widetilde{X}$ nicht automatisch parakompakt ist.

   Ist f eine differenzierbare Funktion auf X und $\psi = \varphi \circ \pi$ eine Karte für $\widetilde{X}$, so ist auch $(f \circ \pi) \circ \psi^{-1} = f \circ \varphi^{-1}$ differenzierbar. Also ist π eine differenzierbare Abbildung.

2. Sind X und Y zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten (mit den Dimensionen n und m), so kann auch der Hausdorff-Raum $X \times Y$ leicht zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit gemacht werden. Ist (U, φ) eine Karte

für X und (V, ψ) eine Karte für Y, so ist $(U \times V, \varphi \times \psi)$ eine Karte für $X \times Y$ (mit $(\varphi \times \psi)(x, y) := (\varphi(x), \psi(y)) \in \mathbb{R}^{n+m}$). Die differenzierbare Verträglichkeit solcher Karten rechnet man leicht nach. Offensichtlich ist dann $\dim(X \times Y) = n + m$.

Die kanonischen Projektionen $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$ und $\mathrm{pr}_2 : X \times Y \to Y$ sind differenzierbare Abbildungen.

§ 2 Tangentialvektoren

Wir betrachten eine feste n-dimensionale Mannigfaltigkeit X und darin die Umgebung eines festen Punktes $a \in X$. Unter einer lokalen differenzierbaren Funktion in a verstehen wir ein Paar (f, U), wobei $U = U(a)$ eine offene Umgebung und $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion ist. Je zwei solche lokalen Funktionen (f, U) und (g, V) sollen *äquivalent* heißen, wenn es eine Umgebung $W = W(a) \subset U \cap V$ gibt, so daß $f|_U = g|_V$ ist. Daß es sich dabei tatsächlich um eine Äquivalenzrelation handelt, ist offensichtlich. Die Äquivalenzklasse einer lokalen Funktion f wird mit f_a bezeichnet. Wir nennen sie auch einen *Funktionskeim* in a.

Es sei nun (U, φ) eine Karte für X mit $\varphi(a) = \mathbf{0}$. Sind f_1, f_2 zwei Repräsentanten eines Funktionskeims in a, so stimmen die differenzierbaren Funktionen $f_1 \circ \varphi^{-1}$ und $f_2 \circ \varphi^{-1}$ in einer kleinen Umgebung des Nullpunktes im $\mathbb{R}^n$ überein. Das hat zur Folge daß sämtliche partiellen Ableitungen von $f_1 \circ \varphi^{-1}$ und $f_2 \circ \varphi^{-1}$ im Nullpunkt übereinstimmen. Deshalb ist folgende Definition sinnvoll:

Ein Funktionskeim f_a heißt *stationär*, falls $D_i(f \circ \varphi^{-1})(\mathbf{0}) = 0$ ist, für $i = 1, \ldots, n$.

Wir bezeichnen die Menge aller Funktionskeime in a mit $\mathcal{F}_a$, und die Teilmenge der stationären Keime mit $\mathcal{S}_a$. Addition und Multiplikation von Funktionen überträgt sich auf die Keime. Dabei kann man die Repräsentanten nur auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche addieren und multiplizieren. Die Menge der Keime aber wird so zu einer $\mathbb{R}$-Algebra.[1]

Die Menge der stationären Keime bildet einen $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathcal{F}_a$. Außerdem gilt:

1. *Ist f konstant, so liegt f_a in $\mathcal{S}_a$.*

2. *Ist $f(a) = g(a) = 0$, so ist $(f \cdot g)_a \in \mathcal{S}_a$.*

Beweis für (2): Sei $f^* := f \circ \varphi^{-1}$ und $g^* := g \circ \varphi^{-1}$. Dann ist $f^*(\mathbf{0}) = g^*(\mathbf{0}) = 0$ und

$$D_\nu(f^* \cdot g^*)(\mathbf{0}) = D_\nu f^*(\mathbf{0}) \cdot g^*(\mathbf{0}) + f^*(\mathbf{0}) \cdot D_\nu g^*(\mathbf{0}) = 0.$$

Definition. Ein *Tangentialvektor* in a ist eine lineare Abbildung $D : \mathcal{F}_a \to \mathbb{R}$ mit $D(f_a) = 0$ für $f_a \in \mathcal{S}_a$.

2.1 Satz. *Für $f, g \in \mathcal{F}_a$ ist $D(f \cdot g) = D(f) \cdot g(a) + f(a) \cdot D(g)$.*

Beweis: Sei $h := f \cdot g - f(a) \cdot g - f \cdot g(a) = (f - f(a)) \cdot (g - g(a)) - f(a) \cdot g(a)$. Dann liegt h in $\mathcal{S}_a$, und es ist $D(h) = 0$. ∎

[1] Eine $\mathbb{R}$-Algebra ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum A mit einer zusätzlichen assoziativen Multiplikation, so daß die Distributivgesetze gelten und $r(f \cdot g) = (rf) \cdot g = f \cdot (rg)$ für $r \in \mathbb{R}$ und $f, g \in A$ ist.

Beispiel.

Ist (U, φ) eine Karte für X und $a \in U$, so kann man die Tangentialvektoren D_ν in a definieren durch

$$D_\nu(f_a) := D_\nu(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(a)), \text{ für } \nu = 1, \ldots, n.$$

Diese partiellen Ableitungen hängen natürlich von der Karte φ ab. Für die lokalen Koordinaten $x^\mu = \pi_\mu \circ \varphi$ gilt dann:

$$D_\nu(x^\mu) = \delta_{\nu\mu}, \text{ für } \nu, \mu = 1, \ldots, n.$$

Es ist $f_a \in \mathcal{S}_a$ genau dann, wenn $D_\nu(f_a) = 0$ für $\nu = 1, \ldots, n$ gilt.

Die Tangentialvektoren in a bilden einen Untervektorraum von $L(\mathcal{F}_a, \mathbb{R})$. Wir bezeichnen diesen Vektorraum mit $T_a(X)$ und nennen ihn den *Tangentialraum* von X in a.

2.2 Satz. *Die partiellen Ableitungen $D_1, \ldots, D_n$ bilden eine Basis des Tangentialraumes $T_a(X)$. Insbesondere ist also $\dim(T_a(X)) = n$.*

Beweis: 1) Sei $D \in T_a(X)$ beliebig vorgegeben. Ist f eine in der Nähe von a definierte differenzierbare Funktion, so setzen wir

$$g(x) := f(x) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} x^j \cdot D_j(f_a)\,.$$

Dann ist

$$D_\nu(g_a) = D_\nu(f_a) - \sum_{j=1}^{n} \delta_{\nu j} \cdot D_j(f_a) = 0, \text{ für alle } \nu,$$

also $g \in \mathcal{S}_a$. Damit ist

$$0 = D(g_a) = D(f_a) - \sum_{j=1}^{n} D(x^j) \cdot D_j(f_a),$$

also

$$D = \sum_{j=1}^{n} D(x^j) \cdot D_j.$$

Das heißt, daß die partiellen Ableitungen D_j ein Erzeugendensystem von $T_a(X)$ bilden.

2) Sei $D = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot D_j$ eine Linearkombination der D_j. Ist $D = 0$, so ist $0 = D(x^\nu) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j D_j((x^\nu)_a) = \alpha_\nu$ für $\nu = 1, \ldots, n$. Also sind die D_j linear unabhängig. ∎

Beispiele.

1. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{a} \in B$. Dann sei $\theta_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \to T_{\mathbf{a}}(B)$ definiert durch

$$\theta_{\mathbf{a}}\mathbf{v}(f_{\mathbf{a}}) := D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a})(\mathbf{v}) = \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu D_\nu f(\mathbf{a}).$$

   Dies ist eine lineare Abbildung. Ist $\theta_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = 0$, so ist

$$0 = \theta_{\mathbf{a}}\mathbf{v}(x^\mu) = v_\mu \text{ für alle } \mu.$$

   Das bedeutet, daß $\theta_{\mathbf{a}}$ injektiv, aus Dimensionsgründen also sogar bijektiv ist. So kann man den Tangentialraum von B in $\mathbf{a}$ mit dem $\mathbb{R}^n$ identifizieren.

2. Sei nun $M \subset B \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Ist $\mathbf{a} \in M$, so gibt es eine lokale Parametrisierung $\psi : T \to M$, mit einer offenen Menge $T \subset \mathbb{R}^k$, $\mathbf{0} \in T$ und einer differenzierbaren Abbildung $\psi : T \to \mathbb{R}^n$ mit $\psi(\mathbf{0}) = \mathbf{a}$. Wir müssen natürlich voraussetzen, daß ψ eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung ist. Wir definieren eine Abbildung $\theta_{\mathbf{a}} : \operatorname{Im} D\psi(\mathbf{0}) \to T_{\mathbf{a}}(M)$ wie folgt:

   Eine in der Nähe von $\mathbf{a}$ definierte Funktion f auf M ist differenzierbar, falls $f \circ \psi$ nahe $\mathbf{0}$ differenzierbar ist. Ist $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} D\psi(\mathbf{0})$, so gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ mit $\mathbf{w} = D\psi(\mathbf{0})(\mathbf{v})$. Wir setzen dann

$$\theta_{\mathbf{a}}\mathbf{w}(f_{\mathbf{a}}) := D(f \circ \psi)(\mathbf{0})(\mathbf{v}).$$

   Auch hier ist die Abbildung $\theta_{\mathbf{a}}$ linear. Ist $\theta_{\mathbf{a}}\mathbf{w} = 0$ und $\mathbf{w} = D\psi(\mathbf{0})(\mathbf{v})$, so ist $D(f \circ \psi)(\mathbf{0})(\mathbf{v}) = 0$ für jede auf M differenzierbare Funktion f. Das gilt speziell für die Funktionen $u^\mu \circ \psi^{-1}$, $\mu = 1, \ldots, k$. Also ist $0 = D(u^\mu)(\mathbf{0})(\mathbf{v}) = v_\mu$ für $\mu = 1, \ldots, k$. Das zeigt, daß $\theta_{\mathbf{a}}$ injektiv ist, daß also $T_{\mathbf{a}}(M)$ mit $\operatorname{Im} D\psi(\mathbf{0})$ identifiziert werden kann.

Definition. Ist $\Phi : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten und $a \in X$, so wird die *Tangentialabbildung* $\Phi_{*,a} : T_a(X) \to T_{\Phi(a)}(Y)$ definiert durch

$$\Phi_{*,a}D(g) := D(g \circ \Phi).$$

Ist $(g)_{\Phi(a)} \in \mathcal{S}_{\Phi(a)}$, so liegt $(g \circ \Phi)_a$ in $\mathcal{S}_a$. Also ist $\Phi_{*,a}$ wohldefiniert. Offensichtlich ist $\Phi_{*,a}$ linear, und es gilt:

1. $(\mathrm{id}_X)_{*,a} = \mathrm{id}_{T_a(X)}$.

2. Ist $\Psi : Y \to Z$ differenzierbar, so ist $(\Psi \circ \Phi)_{*,a} = \Psi_{*,\Phi(a)} \circ \Phi_{*,a}$.

2.3 Satz. *Ist (U, φ) eine Karte für X und (V, ψ) eine Karte für Y, so wird $\Phi_{*,a}$ bezüglich der von den Karten induzierten Basen durch die Matrix $J_{\psi\circ\Phi\circ\varphi^{-1}}(\varphi(a))$ beschrieben.*

Beweis: Sei $D_\nu(f) = D_\nu(f \circ \varphi^{-1})(\mathbf{0})$ und $\widetilde{D}_\mu(g) = D_\mu(g \circ \psi^{-1})(\mathbf{0})$. Dann ist $\Phi_{*,a} D_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} a_{\nu\mu} \widetilde{D}_\mu$, mit

$$\begin{aligned} a_{\nu\mu} &= (\Phi_{*,a} D_\nu)(y^\mu) \\ &= D_\nu(y^\mu \circ \Phi) \\ &= D_\nu(y^\mu \circ \psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1})(\mathbf{0}). \end{aligned}$$

■

Man kann nun viele Sätze aus der Analysis im $\mathbb{R}^n$ auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Dazu definieren wir noch:

$$\mathrm{rg}_a(\Phi) := \mathrm{rg}(\Phi_{*,a}).$$

2.4 Satz (über inverse Abbildungen). *Ist $\Phi : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension und $\det(\Phi_{*,a}) \neq 0$, also $\Phi_{*,a} : T_a(X) \to T_{\Phi(a)}(Y)$ ein Isomorphismus, so gibt es offene Umgebungen $U = U(a) \subset X$ und $V = V(\Phi(a)) \subset Y$, so daß $\Phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.*

2.5 Satz (vom Rang). *Sei $\dim(X) = n$, $\dim(Y) = m$ und $\Phi : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung. Ist $r = \mathrm{rg}_x(\Phi)$ unabhängig von $x \in X$, so gibt es zu jedem $a \in X$ Koordinatensysteme (U, φ) um a und (V, ψ) um $\Phi(a)$, so daß gilt:*

$$\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^r, 0, \ldots, 0).$$

Definition. Eine Teilmenge N einer n-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit X heißt eine (n-dimensionale) *Nullmenge*, falls für jede Karte (U, φ) von X gilt: $\varphi(U \cap N)$ ist eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$.

Sei $\dim(X) = n$, $\dim(Y) = m$ und $\Phi : X \to Y$ differenzierbar. Ein Punkt $x \in X$ heißt *kritischer Punkt* von Φ, falls $\mathrm{rg}_x(\Phi) < m$ ist. Der Punkt $y = \Phi(x)$ ist dann ein *kritischer Wert*.

2.6 Satz (von Sard). *Die Menge der kritischen Werte einer differenzierbaren Abbildung $\Phi : X \to Y$ ist eine Nullmenge in Y.*

Die Beweise dieser Sätze ergeben sich aus den Beweisen der Original-Sätze.

§ 3 Felder, Formen, Orientierungen

Definition. Sei X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $M \subset X$ offen. Ein differenzierbares *Vektorfeld* auf M ist eine Famile $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Für jedes $x \in M$ ist $\xi_x \in T_x(X)$.
2. Ist f eine differenzierbare Funktion auf M, so ist $\xi[f]$ mit
$$\xi[f](x) := \xi_x(f_x)$$
wieder eine differenzierbare Funktion.

Beispiel.

Sei (U, φ) eine Karte für X, $x^\nu = \pi_\nu \circ \varphi$. Dann definieren wir die (von φ abhängigen) Vektorfelder $\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}$ auf U durch
$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_x (f_x) := D_\nu(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)), \text{ für } \nu = 1, \ldots, n.$$
Ist f eine auf ganz U differenzierbare Funktion, so ist
$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}[f] = (D_\nu(f \circ \varphi^{-1})) \circ \varphi.$$
Ist ξ ein beliebiges differenzierbares Vektorfeld auf U, so gibt es eine eindeutige Darstellung
$$\xi = \sum_{\nu=1}^n \xi^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}.$$
Die Koeffizienten $\xi^\nu = \xi[x^\nu]$ sind differenzierbare Funktionen.

Sei nun (V, ψ) eine weitere Karte, $U \cap V \neq \varnothing$ und $y^\mu = \pi_\mu \circ \psi$. Dann gibt es auch eine Darstellung
$$\xi = \sum_{\mu=1}^n \widetilde{\xi}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu}.$$
Dabei ist
$$\begin{aligned}
\widetilde{\xi}^\mu &= \xi[y^\mu] = \xi[\pi_\mu \circ \psi] \\
&= \sum_{\nu=1}^n \xi^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}[\pi_\mu \circ \psi] \\
&= \sum_{\nu=1}^n \xi^\nu (D_\nu(\pi_\mu \circ \psi \circ \varphi^{-1})) \circ \varphi \\
&= \sum_{\nu=1}^n \xi^\nu (J_\nu^\mu \circ \varphi),
\end{aligned}$$

wobei die J^μ_ν die Koeffizienten der Funktionalmatrix

$$J_{\psi\circ\varphi^{-1}} = \left(D_\nu(\pi_\mu \circ \psi \circ \varphi^{-1}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \nu = 1,\dots,n \\ \mu = 1,\dots,n \end{array} \right).$$

sind.

Die Physiker gebrauchen gerne die „Summationskonvention“. Indizes, über die summiert wird, tauchen einmal hochgestellt und einmal tiefgestellt auf, und das Summenzeichen wird dann weggelassen:

$$\widetilde{\xi}^\mu = J^\mu_\nu \cdot \xi^\nu.$$

Ein „kontravarianter Vektor“ auf einer Mannigfaltigkeit ist ein (von den Koordinaten abhängiges) n-Tupel $\xi_\varphi = (\xi^1,\dots,\xi^n)$, das sich bei einem Koordinatenwechsel wie oben transformiert. Die hochgestellten Indizes bei den ξ^ν signalisieren das „kontravariante“ Verhalten. Dagegen sind „kovariante Vektoren“ Pfaffsche Formen. Sie werden durch n-Tupel $a_\varphi = (a_1,\dots,a_n)$ beschrieben, die Tiefstellung der Indizes deutet das Transformationsverhalten $\widetilde{a}_\mu = J^\nu_\mu \cdot a_\nu$ (also durch die transponierte Matrix) an.

Das gibt eine Idee davon, wie man Differentialformen auf einer Mannigfaltigkeit einführen sollte, nämlich durch Vorgabe lokaler k-Formen mit passendem Transformationsverhalten.

Definition. Sei $(U_\iota, \varphi_\iota)_{\iota\in I}$ ein Atlas für die Mannigfaltigkeit X. Eine k-dimensionale *Differentialform* (kurz: k-Form) auf X ist eine Familie $(\omega_\iota)_{\iota\in I}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. ω_ι ist eine k-Form auf $B_\iota := \varphi_\iota(U_\iota) \subset \mathbb{R}^n$.

2. Ist $U_\iota \cap U_\kappa \neq \varnothing$, so ist

$$\left(\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1}\right)^* \omega_\iota = \omega_\kappa \quad \text{ auf } \varphi_\kappa(U_\iota \cap U_\kappa).$$

Bemerkung. Arbeiten wir mit einer speziellen Karte φ, so bezeichnen wir die zugehörige lokale k-Form mit ω_φ.

Sei $x \in X$, (U,φ) eine Karte für X mit $x \in U$ und $v \in T_x(X)$ ein Tangentialvektor. Bezüglich der Karte φ besitzt v die lokale Darstellung $v_\varphi = (v^1_\varphi,\dots,v^n_\varphi)$, gegeben durch

$$v = \sum_{\nu=1}^n v^\nu_\varphi \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_x.$$

Ist (V,ψ) eine weitere Karte mit $x \in V$, so ist

$$v_\psi = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))(v_\varphi).$$

Sei jetzt ω eine k-Form auf X, $x \in X$ und $v_1, \ldots, v_k \in T_x(X)$. Ist (U, φ) eine Karte mit $x \in U$, so wird ω bezüglich dieser Karte durch eine k-Form ω_φ auf $B = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ beschrieben, und wir setzen

$$\omega_x(v_1, \ldots, v_k) := \omega_\varphi(\varphi(x); (v_1)_\varphi, \ldots, (v_k)_\varphi).$$

Ist (V, ψ) eine weitere Karte, so ist

$$\begin{aligned}
\omega_\psi(\psi(x); (v_1)_\psi, \ldots, (v_k)_\psi) &= (\varphi \circ \psi^{-1})^* \omega_\varphi(\psi(x); (v_1)_\psi, \ldots, (v_k)_\psi) \\
&= \omega_\varphi(\varphi(x); D(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(x))((v_1)_\psi), \ldots, D(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(x))((v_k)_\psi)) \\
&= \omega_\varphi(\varphi(x); (v_1)_\varphi, \ldots, (v_k)_\varphi).
\end{aligned}$$

Das zeigt, daß ω_x koordinateninvariant definiert ist. Offensichtlich ist ω_x eine alternierende k-Form auf $T_x(X)$. Wir hätten eine Differentialform also auch als Verteilung $\omega = (\omega_x)_{x \in X}$ definieren können. Die Differenzierbarkeit hätten wir dann folgendermaßen definieren müssen:

Sind $\xi_1, \ldots, \xi_k$ differenzierbare Vektorfelder, so wird durch

$$\omega(\xi_1, \ldots, \xi_k)(x) := \omega_x((\xi_1)_x, \ldots, (\xi_k)_x)$$

eine Funktion $\omega(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ auf der Mannigfaltigkeit definiert. Die Form ω ist genau dann differenzierbar, wenn $\omega(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ für jede Wahl der ξ_i differenzierbar ist.

Beispiel.

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und $M \subset B$ eine p-dimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Es gibt ein System von lokalen Parametrisierungen $\psi_\iota : T_\iota \to M$, $\iota \in I$, (mit $T_\iota \subset \mathbb{R}^p$ offen), so daß die Mengen $U_\iota := \psi_\iota(T_\iota)$ ganz M überdecken. Dann ist das System $(U_\iota, \psi_\iota^{-1})_{\iota \in I}$ ein differenzierbarer Atlas für M. Ist nun $W \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von $\overline{M}$ und ω eine (beliebig oft differenzierbare) k-Form auf W, so wird durch das System der k-Formen $\omega_\iota := (\psi_\iota)^* \omega$ eine k-Form auf M definiert, die wir mit $\omega|_M$ bezeichnen.

Sei $\mathbf{a} \in M$ und $\psi : T \to U \subset M$ eine lokale Parametrisierung mit $\psi(\mathbf{u}) = \mathbf{a}$, $\varphi := \psi^{-1}$. Außerdem seien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \operatorname{Im} D\psi(\mathbf{u})$. Es gibt Vektoren $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^p$ mit $D\psi(\mathbf{u})(\mathbf{w}_i) = \mathbf{v}_i$, für $i = 1, \ldots, k$. Dann sind die Tangentialvektoren $\theta_{\mathbf{a}} \mathbf{v}_i \in T_{\mathbf{a}}(M)$ gegeben durch

$$\theta_{\mathbf{a}} \mathbf{v}_i(f) = D(f \circ \psi)(\mathbf{u})(\mathbf{w}_i), \ i = 1, \ldots, k.$$

Also ist $(\theta_{\mathbf{a}} \mathbf{v}_i)_\varphi = \mathbf{w}_i$, und es folgt:

$$\begin{aligned}
(\omega|_M)_{\mathbf{a}}(\theta_{\mathbf{a}} \mathbf{v}_1, \ldots, \theta_{\mathbf{a}} \mathbf{v}_k) &= \psi^* \omega(\mathbf{u}; \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k) \\
&= \omega(\mathbf{a}; D\psi(\mathbf{u})\mathbf{w}_1, \ldots, D\psi(\mathbf{u})\mathbf{w}_k) \\
&= \omega(\mathbf{a}; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k).
\end{aligned}$$

Die Differentialform $\omega|_M$ ist also tatsächlich nichts anderes als die Einschränkung von ω auf Punkte und Tangentialvektoren von M.

Sind $x^\nu = \pi_\nu \circ \varphi$ die lokalen Koordinaten auf einer Kartenumgebung $U \subset X$, so hat man 1-Formen $dx^1, \ldots, dx^n$ auf U mit

$$dx^\nu(\xi) = \xi[x^\nu], \ \text{ für } \nu = 1, \ldots, n.$$

Jede k-Form ω auf U kann dann auf eindeutige Weise in der Form

$$\omega|_U = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

geschrieben werden, mit $\omega_{i_1 \ldots i_k} = \omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}})$.

3.1 Satz. *Sei $\omega = (\omega_\iota)_{\iota \in I}$ eine k-Form auf X. Dann wird durch $(d\omega)_\iota := d(\omega_\iota)$ eine $(k+1)$-Form $d\omega$ auf X definiert.*

Der Beweis ist trivial, denn es gilt allgemein:

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega).$$

Lokal wird $d\omega$ wie im $\mathbb{R}^n$ gebildet.

Definition. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\omega = f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ ein stetige n-Form mit kompaktem Träger auf B. Dann setzt man

$$\int_B \omega := \int_B f(\mathbf{x})\,dx_1 \ldots dx_n.$$

3.2 Satz. *Sei $\Phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$, ω eine n-Form mit kompaktem Träger auf V. Dann ist*

$$\int_U \Phi^*\omega = \operatorname{sign}\det(J_\Phi) \int_V \omega.$$

Beweis: Sei $\omega = f\,dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$. Die Transformationsformel liefert:

$$\begin{aligned}
\int_u \Phi^*\omega &= \int_U (f \circ \Phi) \cdot \det(J_\Phi)\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \\
&= \int_U f(\Phi(\mathbf{x})) \cdot \det J_\Phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \\
&= \operatorname{sign}\det(J_\Phi) \cdot \int_U f(\Phi(\mathbf{x})) \cdot |\det J_\Phi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \\
&= \operatorname{sign}\det(J_\Phi) \cdot \int_V f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} \\
&= \operatorname{sign}\det(J_\Phi) \cdot \int_V \omega.
\end{aligned}$$

∎

Ist also Φ orientierungserhaltend (d.h. $\det J_\Phi > 0$), so ist $\displaystyle\int_U \Phi^*\omega = \int_V \omega$.

Definition. Eine Mannigfaltigkeit heißt *orientierbar*, falls es einen Atlas für X gibt, so daß alle Kartenwechsel orientierungserhaltend sind.

Ist X orientierbar, so versteht man unter einer *Orientierung* von X die Wahl eines maximalen Atlas, bei dem alle Kartenwechsel orientierungstreu sind.

Sei ω eine n-Form auf X. Sei (U, φ) eine Karte und $\omega_\varphi = a_\varphi\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Es ist $\omega_x = 0$ genau dann, wenn $a_\varphi(\varphi(x)) = 0$ ist. Diese Bedingung ist unabhängig von den Koordinaten. Wir schreiben dafür $\omega(x) = 0$.

Ist f eine differenzierbare Funktion auf X, so wird durch

$$(f \cdot \omega)_x = f(x) \cdot \omega_x$$

eine n-Form $f \cdot \omega$ auf X definiert. Dabei ist $(f \cdot \omega)_\varphi = (f \circ \varphi^{-1}) \cdot \omega_\varphi$.

3.3 Satz. *Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit X ist genau dann orientierbar, wenn es auf X eine nirgends verschwindende stetige n-Form gibt.*

Beweis: 1) Sei ω_0 eine nirgends verschwindende n-Form auf X, $(U_\iota, \varphi_\iota)_{\iota \in I}$ ein Atlas für X. Dann gibt es zu jedem $\iota \in I$ eine nirgends verschwindende stetige Funktion h_ι auf $B_\iota = \varphi_\iota(U_\iota) \subset \mathbb{R}^n$, so daß $(\omega_0)_\iota = h_\iota\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ ist. Indem man notfalls die Koordinate x^n durch $-x^n$ ersetzt, kann man erreichen, daß stets $h_\iota > 0$ auf B_ι ist.

Nun ist

$$h_\kappa\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = (\omega_0)_\kappa = \det(J_{\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1}})\omega_\iota = \det(J_{\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1}}) \cdot h_\iota\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Also muß $\det(J_{\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1}}) > 0$ sein, der Atlas ist orientiert.

2) Jetzt sei vorausgesetzt, daß X orientierbar ist, und (U_ι, φ_ι) sei ein orientierter Atlas. Weiter sei $(f_\iota)_{\iota \in I}$ eine Teilung der Eins zur Überdeckung $(U_\iota)_{\iota \in I}$. Für jedes $\iota \in I$ induziert $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ eine n-Form ω_ι auf U_ι. Auf $U_\iota \cap U_\kappa$ ist $\omega_\iota = d_{\iota\kappa} \cdot \omega_\kappa$, mit $d_{\iota\kappa} = \det(J_{\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1}}) \circ \varphi_\kappa > 0$. Die Form $f_\iota \cdot \omega_\iota$ ist eine n-Form auf X mit Träger in U_ι. Wir setzen

$$\omega_0 := \sum_{\iota \in I} f_\iota \cdot \omega_\iota.$$

Sei $x \in X$, I_0 die endliche Menge aller $\iota \in I$ mit $x \in \mathrm{Tr}(f_\iota)$ und $\iota_0 \in I_0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(\omega_0)_x &= \sum_{\iota \in I_0} f_\iota(x) \cdot (\omega_\iota)_x \\ &= \Big(\sum_{\iota \in I_0} f_\iota(x) d_{\iota\iota_0}(x)\Big) \cdot (\omega_{\iota_0})_x.\end{aligned}$$

Weil $f_\iota(x) \geq 0$, $\sum_{\iota \in I_0} f_\iota(x) = 1$ und $d_{\iota\iota_0}(x) > 0$ ist, folgt: $(\omega_0)_x \neq 0$. ∎

Ist X zusammenhängend, so nennt man zwei nirgends verschwindende n-Formen ω_1, ω_2 äquivalent, falls es eine überall positive stetige Funktion f auf X gibt, so daß $\omega_1 = f \cdot \omega_2$ ist. Eine Orientierung von X entspricht der Auswahl einer Äquivalenzklasse.

Beispiel.

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit $M \subset G$ heißt *Hyperfläche*, falls $\dim(M) = n-1$ ist. Ein stetiges *Normalenfeld* auf M ist eine stetige Abbildung $\boldsymbol{\nu} : M \to \mathbb{R}^n$, so daß $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v} = 0$ für $\mathbf{x} \in M$ und jeden Tangentialvektor $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}(M)$ gilt. Ist auch noch $\|\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\| \equiv 1$, so spricht man von einem *Einheitsnormalenfeld*.

Ist M orientiert und $\mathbf{x} \in M$, so kann man entscheiden, wann eine Basis $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}\}$ von $T_{\mathbf{x}}(M)$ positiv orientiert ist. Ein Normalenvektor $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ heißt *positiv orientiert* bezüglich der „inneren Orientierung“ von M, falls die Basis $\{\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}), \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}\}$ von $\mathbb{R}^n$ positiv orientiert ist. Die Festlegung eines Normalenvektors bezeichnet man auch als „transversale Orientierung“ vom M in $\mathbf{x}$. Man beachte: Im Falle $n = 3$ ist mit $\{\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}), \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ auch die Basis $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\}$ positiv orientiert, also $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ ein positives Vielfaches von $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$.

Ist speziell $M = f^{-1}(\mathbf{0})$, mit einer differenzierbaren Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ und $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ für $\mathbf{x} \in M$, so steht der Gradient $\nabla f(\mathbf{x})$ senkrecht auf M, und

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) := \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}$$

ist ein stetiges Einheitsnormalenfeld auf M.

Wir wollen jetzt zeigen, daß auch die innere Orientierung einer beliebigen Hyperfläche M eine transversale Orientierung von M durch ein Einheitsnormalenfeld induziert, und umgekehrt.

Sei zunächst M eine orientierte Hyperfläche. Dann kann man in jedem $\mathbf{x} \in M$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis $\{\mathbf{a}_1(\mathbf{x}), \ldots, \mathbf{a}_{n-1}(\mathbf{x})\}$ von $T_{\mathbf{x}}(M)$ finden. Im Normalenraum $N_{\mathbf{x}}(M) = \big(T_{\mathbf{x}}(M)\big)^\perp$ liegen genau zwei Vektoren $\pm\mathbf{v}$ der Länge 1. Wir wählen einen solchen Vektor $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$. Da eine Hyperfläche lokal immer die Gestalt $f^{-1}(\mathbf{0})$ hat, können wir lokal $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) / \|\nabla f(\mathbf{x})\|$ wählen. Dann ist $\varepsilon(\mathbf{x}) := \det(\mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{a}_1(\mathbf{x}), \ldots, \mathbf{a}_{n-1}(\mathbf{x})) \in \{1, -1\}$, und wir setzen

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) := \varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}).$$

Dieser Vektor hängt nicht mehr von der Wahl des Vektors $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ ab, und er ändert sich auch nicht, wenn wir zu einer anderen positiv orientierten ON-Basis von $T_{\mathbf{x}}(M)$ übergehen. Offensichtlich ist $\{\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}), \mathbf{a}_1(\mathbf{x}), \ldots, \mathbf{a}_{n-1}(\mathbf{x})\}$ eine positiv orientierte ON-Basis des $\mathbb{R}^n$. In der Nähe eines beliebigen Punktes

$\mathbf{x}_0 \in M$ können wir $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ und die Basis $\{\mathbf{a}_1(\mathbf{x}), \ldots, \mathbf{a}_{n-1}(\mathbf{x})\}$ so wählen, daß sie stetig von $\mathbf{x}$ abhängen. Dann ist aber auch $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ stetig.

Sei umgekehrt $\boldsymbol{\nu}$ ein stetiges Einheitsnormalenfeld auf M. Sei $\mathbf{x}_0 \in M$ und $\psi : T \to M$ eine lokale Parametrisierung ($T \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen) mit $\psi(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$. Wir können annehmen, daß T zusammenhängend ist. Dann ist

$$\Delta(\mathbf{u}) := \det\big(\boldsymbol{\nu}(\psi(\mathbf{u})), D_1\psi(\mathbf{u}), \ldots, D_{n-1}\psi(\mathbf{u})\big)$$

eine stetige Funktion auf T, die überall das gleiche Vorzeichen haben muß. Indem man notfalls in T eine Spiegelung davorschaltet, kann man erreichen, daß $\Delta(\mathbf{u}) > 0$ auf T ist. Dann verwenden wir $\varphi := \psi^{-1}$ als Karte für M.

Nun seien zwei solche Parametrisierungen $\psi_1 : T_1 \to M$ und $\psi_2 : T_2 \to M$ gegeben. Wir müssen zeigen, daß $\Phi := \psi_2^{-1} \circ \psi_1$ orientierungstreu ist. Es sei $\mathbf{a}_i(\mathbf{u}) := D_i\psi_1(\mathbf{u})$ und $\mathbf{b}_j(\mathbf{v}) := D_j\psi_2(\mathbf{v})$ für $\mathbf{v} = \psi_2^{-1} \circ \psi_1(\mathbf{u})$. Dann gilt:

$$D\psi_1(\mathbf{u}) = D\psi_2(\mathbf{v}) \circ D(\psi_2^{-1} \circ \psi_1)(\mathbf{u}),$$

also

$$\big(\mathbf{a}_1(\mathbf{u}), \ldots, \mathbf{a}_{n-1}(\mathbf{u})\big) = \big(\mathbf{b}_1(\mathbf{v}), \ldots, \mathbf{b}_{n-1}(\mathbf{v})\big) \cdot J_{\psi_2^{-1}\circ\psi_1}(\mathbf{u}).$$

Die Basen $\{\boldsymbol{\nu}, \mathbf{a}_1(\mathbf{u}), \ldots, \mathbf{a}_{n-1}(\mathbf{u})\}$ und $\{\boldsymbol{\nu}, \mathbf{b}_1(\mathbf{v}), \ldots, \mathbf{b}_{n-1}(\mathbf{v})\}$ sind gleich orientiert, und der Basiswechsel zwischen ihnen wird durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J_{\psi_2^{-1}\circ\psi_1}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

beschrieben. Daher muß $\det(J_{\psi_2^{-1}\circ\psi_1}(\mathbf{u})) > 0$ sein. Das war zu zeigen.

Es folgt insbesondere, daß jede Hyperfläche der Form $f^{-1}(\mathbf{0})$ orientierbar ist, also z.B. auch jede Hypersphäre.

Es sei jetzt X eine orientierbare n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und ω eine stetige n-Form mit kompaktem Träger auf X. Weiter sei $(U_\iota, \varphi_\iota)_{\iota\in I}$ ein orientierter Atlas für X und $(f_\iota)_{\iota\in I}$ eine dazu passende Teilung der Eins.

Definition. Ist $\text{Tr}(\omega) \subset U_\iota$ und $B_\iota := \varphi_\iota(U_\iota) \subset \mathbb{R}^n$, so ist $\displaystyle\int_X \omega := \int_{B_\iota} \omega_\iota$.

Ist ω beliebig, so setzen wir

$$\int_X \omega := \sum_{\iota\in I} \int_X f_\iota \cdot \omega.$$

Wir müssen uns erst mal überlegen, daß diese Definition sinnvoll ist.

1) Nach Voraussetzung ist $K := \mathrm{Tr}(\omega)$ kompakt. Zu jedem $x \in K$ gibt es eine offene Umgebung $U = U(x)$, die nur für endlich viele ι den Träger von f_ι trifft. Da man K mit endlich vielen solchen Umgebungen überdecken kann, ist die Summe in der Integraldefinition endlich.

2) Ist $\mathrm{Tr}(\omega) \subset U_\iota \cap U_\kappa$, so ist

$$\int_{B_\kappa} \omega_\kappa = \int_{B_\kappa} (\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1})^* \omega_\iota = \int_{B_\iota} \omega_\iota,$$

weil die Koordinatentransformationen orientierungstreu sind.

3) Sei $(V_\nu)_{\nu \in N}$ ein weiterer (gleich-orientierter) Atlas und $(g_\nu)_{\nu \in N}$ eine dazu passende Teilung der Eins. Dann ist $f_\iota g_\nu = 0$ für fast alle (ι, ν), und es gilt:

$$\sum_\iota \big(\sum_\nu f_\iota g_\nu \big) = \sum_\iota f_\iota \big(\sum_\nu g_\nu \big) = \sum_\iota f_\iota = 1,$$

also

$$\begin{aligned} \sum_\iota \int f_\iota \omega &= \sum_\iota \int \big(\sum_\nu g_\nu \big) f_\iota \omega \\ &= \sum_{\iota,\nu} \int g_\nu f_\iota \omega \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sum_\nu \int g_\nu \omega &= \sum_\nu \int \big(\sum_\iota f_\iota \big) g_\nu \omega \\ &= \sum_{\iota,\nu} \int g_\nu f_\iota \omega. \end{aligned}$$

3.4 Satz. *Sei X eine n-dimensionale orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit, $K \subset X$ eine Nullmenge, $X \setminus K$ offen in X und ω eine n-Form mit kompaktem Träger auf X. Dann ist*

$$\int_X \omega = \int_{X \setminus K} \omega.$$

BEWEIS: 1) Sei zunächst $\varphi : U \to B \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte und $\mathrm{Tr}(\omega) \subset U$. Dann ist $N := \varphi(K \cap U)$ eine Nullmenge in B, und es gilt:

$$\int_X \omega = \int_B \omega_\varphi = \int_{B \setminus N} \omega_\varphi = \int_{X \setminus K} \omega.$$

2) Ist ω beliebig, so wählen wir einen orientierten Atlas (U_ι, φ_ι) und eine dazu passende Teilung der Eins (f_ι). Dann gilt:

$$\int_X \omega = \sum_\iota \int_X f_\iota \cdot \omega = \sum_\iota \int_{X \setminus K} f_\iota \cdot \omega = \int_{X \setminus K} \omega.$$

∎

Der Satz ermöglicht es, in gewissen Fällen das Integral einer n-Form auch auszurechnen.

3.5 Satz. *Sei X eine n-dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit, $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader, $W = W(Q) \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung und $\psi : W \to X$ eine differenzierbare Abbildung, so daß gilt:*

1. *$\psi|_{\mathring{Q}}$ ist ein Diffeomorphismus von $\mathring{Q}$ auf eine offene Teilmenge von X.*
2. *$\psi(Q) = X$.*

Dann gilt für jede n-Form ω mit kompaktem Träger auf X :

$$\int_X \omega = \int_{\mathring{Q}} \psi^* \omega.$$

BEWEIS: Wir wählen eine feste Orientierung auf X. Sei $K := \psi(\partial Q)$. Dann ist K kompakt und $X = K \cup U$, mit $U = \psi(\mathring{Q})$. Ist $\varphi : V \to B \subset \mathbb{R}^n$ eine positiv orientierte Karte für X und $W_0 := \psi^{-1}(V) \subset W$, so ist $\varphi(K \cap V) = \varphi \circ \psi(W_0 \cap \partial Q)$ eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$. Das bedeutet, daß K eine Nullmenge in X ist, also

$$\int_X \omega = \int_{X \setminus K} \omega = \int_U \omega.$$

Weiter ist $\varphi_0 := \psi^{-1} : U \to \mathring{Q}$ eine Karte für X und $(\omega)_{\varphi_0} = \psi^* \omega$. Daraus folgt die Behauptung. ∎

Beispiel.

Sei $a > 1$. Läßt man den Kreis $(x_1 - a)^2 + x_3^2 = 1$ um die x_3-Achse rotieren, so entsteht ein „Torus“ X, eine 2-dimensionale kompakte (und orientierbare) Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Der Torus kann parametrisiert werden durch

$$\psi(u, v) := ((a + \cos v) \cos u, (a + \cos v) \sin u, \sin v).$$

Dabei sei ψ auf $Q := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le u \le 2\pi,\, 0 \le v \le 2\pi\}$ definiert. Dann ist

$$\int_X \omega = \int_{\mathring{Q}} \psi^* \omega$$

für jede 2-Form ω auf X.

Sei etwa $\omega = x_1\,dx_2 \wedge dx_3 - x_2\,dx_1 \wedge dx_3 + x_3\,dx_1 \wedge dx_2$. Dann ist

$$\begin{array}{rrcl} & \psi^*(dx_1 \wedge dx_2) & = & (a+\cos v)\sin v\,du \wedge dv, \\ & \psi^*(dx_3 \wedge dx_1) & = & (a+\cos v)\sin u \cos v\,du \wedge dv \\ \text{und} & \psi^*(dx_2 \wedge dx_3) & = & (a+\cos v)\cos u \cos v\,du \wedge dv. \end{array}$$

also

$$\psi^*\omega = (a+\cos v)(1+a\cos v)\,du \wedge dv$$

und

$$\int_X \omega = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{2\pi} [a(1+\cos^2 v) + (1+a^2)\cos v]\,du \Big)\,dv = 6\pi^2 a,$$

denn es ist

$$\int_0^{2\pi} \cos v\,dv = 0, \int_0^{2\pi} dv = 2\pi \text{ und } \int_0^{2\pi} \cos^2 v\,dv = \pi.$$

Man kann den obigen Satz noch verallgemeinern.

3.6 Satz. *Sei X eine kompakte orientierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit und ω eine n-Form auf X. Für $i = 1, \ldots, N$ gebe es offene Mengen $V_i \subset\subset U_i \subset \mathbb{R}^n$ und differenzierbare Abbildungen $\psi_i : U_i \to X$, so daß gilt:*

1. *$X_i := \psi_i(V_i)$ ist offen in X und $\psi_i : V_i \to X_i$ ist ein orientierungstreuer Diffeomorphismus.*
2. *$X_i \cap X_j = \varnothing$ für $i \neq j$.*
3. *$\overline{V}_i \setminus V_i$ ist stets eine Nullmenge.*
4. *$\psi_1(\overline{V}_1) \cup \ldots \cup \psi_N(\overline{V}_N) = X$.*

Dann ist $\displaystyle\int_X \omega = \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \psi_i^*\omega.$

§ 4 Immersionen und Submersionen

Definition. Sei X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine abgeschlossene Teilmenge $Y \subset X$ heißt *abgeschlossene Untermannigfaltigkeit* der *Codimension* q von X, falls es zu jedem $a \in Y$ eine Umgebung $U = U(a) \subset X$ und eine differenzierbare Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^q$ gibt, so daß gilt:

1. $Y \cap U = \{x \in U \,:\, f(x) = 0\}$.
2. $\mathrm{rg}_x(f) = q$ auf U.

Ist $f = (f_1, \ldots, f_q)$, so ist die Rangbedingung äquivalent zu der Bedingung

$$(df_1 \wedge \ldots \wedge df_q)_x \neq 0, \text{ für } x \in U.$$

Die Menge Y ist selbst wieder eine Mannigfaltigkeit im allgemeinen Sinne, und für $x \in Y$ ist $T_y(Y) \cong \mathrm{Ker}(f_{*,x})$. Ist $X = \mathbb{R}^n$, so hat man wieder die alte Definition. Eine (beliebige) *Untermannigfaltigkeit* von X ist eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit einer offenen Teilmenge von X.

4.1 Satz. *Eine Teilmenge $Y \subset X$ ist genau dann eine Untermannigfaltigkeit der Codimension q von X, wenn es zu jedem Punkt $x_0 \in Y$ eine Karte (U, φ) für X mit $x_0 \in U$ gibt, so daß gilt:*

$$U \cap Y = \{x \in U \,:\, x^{n-q+1} = \ldots = x^n = 0\}.$$

Definition. Eine differenzierbare Abbildung $f : Y \to X$ heißt *Einbettung*, falls $f(Y)$ eine Untermannigfaltigkeit von X und $f : Y \to f(Y)$ ein Diffeomorphismus ist.

Der einfache Beweis sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

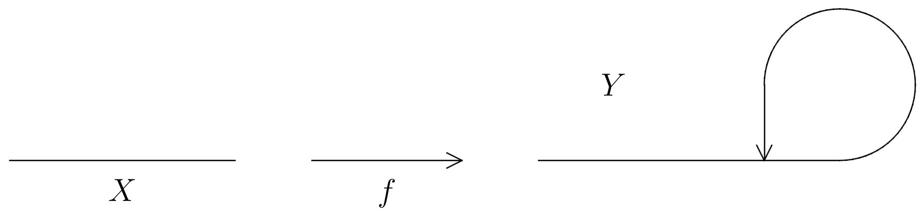
Definition. Eine differenzierbare Abbildung $f : X \to Y$ heißt *Immersion* in $x_0 \in X$, falls $f_{*,x_0} : T_{x_0}(X) \to T_{f(x_0)}(Y)$ injektiv ist. Die Abbildung f heißt eine Immersion, falls sie in jedem Punkt $x \in X$ eine Immersion ist.

4.2 Theorem. *Sei $f : X \to Y$ eine Immersion. Dann gibt es zu jedem Punkt $x_0 \in X$ eine Umgebung $U = U(x_0) \subset X$, so daß $f|_U : U \to Y$ eine Einbettung ist.*

Beweis: Es muß $n := \dim(X) < m := \dim(Y)$ sein, und nach dem Satz vom Rang gibt es offene Umgebungen $U = U(x_0) \subset X$ und $V = V(f(x_0)) \subset Y$, so daß $f|_U : U \to V$ in lokalen Koordinaten die Gestalt $f(x) = (x, 0)$ hat. Daraus folgt die Behauptung. ∎

Im allgemeinen ist eine Immersion global keine Einbettung, selbst wenn sie injektiv ist.

Beispiel einer injektiven Immersion, die keine Einbettung ist:



4.3 Satz. *Sei $f : X \to Y$ eine Immersion. Ist $f : X \to f(X)$ ein Homöomorphismus (wobei $f(X)$ mit der von Y induzierten Relativtopologie versehen ist), so ist f eine Einbettung.*

Beweis: Sei $y_0 = f(x_0) \in Y$. Weil f eine Immersion ist, gibt es offene Umgebungen $U(x_0) \subset X$ und $V(y_0) \subset Y$, so daß $f(U)$ eine Untermannigfaltigkeit von V ist. Weil $f^{-1} : f(X) \to X$ stetig ist, gibt es eine offene Umgebung $W(y_0) \subset V$, so daß $f^{-1}(W \cap f(X)) \subset U$ ist. Also ist $f(X) \cap W = f(U) \cap W$. Das bedeutet, daß $f(X)$ in der Nähe von y_0 eine Untermannigfaltigkeit von Y ist. Weil y_0 beliebig war, ist $f(X)$ Untermannigfaltigkeit von Y. Ein differenzierbarer Homöomorphismus zwischen zwei Mannigfaltigkeiten muß aber nach dem Satz über inverse Abbildungen sogar ein Diffeomorphismus sein. ∎

Beispiel.

Eine Parametrisierung $\psi : T \to M$ einer Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist nach Definition eine Immersion und ein Homöomorphismus von T auf $\psi(T)$. Also ist ψ eine Einbettung.

4.4 Satz. *Sei $f : X \to Y$ eine injektive Immersion. Ist f „lokal eigentlich", besitzt also jeder Punkt $y \in Y$ eine kompakte Umgebung A, so daß auch $f^{-1}(A)$ kompakt ist, so ist f eine Einbettung.*

Beweis: Es ist nur zu zeigen, daß $f^{-1} : f(X) \to X$ stetig ist. Dazu sei (y_k) eine Folge in $f(X)$, die gegen einen Punkt $y_0 = f(x_0)$ konvergiert. Sei $x_k := f^{-1}(y_k)$ und $x_0 := f^{-1}(y_0)$. Weiter sei A eine kompakte Umgebung von y_0 in Y, so daß $f^{-1}(A)$ ebenfalls kompakt ist. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß alle y_k in A liegen. Die stetige Abbildung $f : f^{-1}(A) \to f(X) \cap A$ (zwischen kompakten Räumen) ist ein Homöomorphismus. Also muß auch (x_k) gegen x_0 konvergieren. ∎

4.5 Folgerung. *Ist $f : X \to Y$ eine injektive Immersion und X kompakt, so ist f sogar eine Einbettung.*

Definition. Eine differenzierbare Abbildung $f : X \to Y$ heißt *Submersion* in $x_0 \in X$, falls $f_{*,x_0} : T_{x_0}(X) \to T_{f(x_0)}(Y)$ surjektiv ist.

4.6 Satz. *Sei* $\dim(X) = n$ *und* $\dim(Y) = m \le n$. *Ist* $f : X \to Y$ *differenzierbar,* $x_0 \in X$ *und* $y_0 = f(x_0) \in Y$*, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *f ist eine Submersion in x_0.*
2. *Es gibt offene Umgebungen $U(x_0) \subset X$ und $V(y_0) \subset Y$, eine $(n-m)$-dimensionale Mannigfaltigkeit Z und eine differenzierbare Abbildung $g : U \to Z$, so daß (f, g) die Umgebung U diffeomorph auf $V \times Z$ abbildet. Insbesondere ist dann folgendes Diagramm kommutativ:*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "(f,g)"] \arrow[dr, "f"'] & & V \times Z \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

3. *Es gibt eine offene Umgebung $V = V(y_0) \subset Y$ und eine differenzierbare Abbildung $s : V \to X$ mit $s(y_0) = x_0$ und $f \circ s = \mathrm{id}_V$. Man nennt eine solche Abbildung s einen* lokalen Schnitt.

BEWEIS: (1) $\implies$ (2): Wir können uns auf die lokale Situation beschränken. Es sei $U = U(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n$, $V = V(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^m$, $f : U \to V$ differenzierbar, $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und $\operatorname{rg} Df(\mathbf{0}) = m$. Wir können annehmen, daß sich die Funktionalmatrix $J_f(\mathbf{0}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ wie folgt zerlegen läßt:

$$J_f(\mathbf{0}) = \Big(J'_f(\mathbf{0}) \;\Big|\; J''_f(\mathbf{0}) \Big), \qquad \text{mit } \det J'_f(\mathbf{0}) \neq 0.$$

Für die Abbildung $\widetilde{f}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = (f(\mathbf{x}', \mathbf{x}''), \mathbf{x}'')$ gilt dann:

$$J_{\widetilde{f}}(\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{c|c} J'_f(\mathbf{0}) & J''_f(\mathbf{0}) \\ \hline \mathbf{0} & E_{n-m} \end{array} \right).$$

Also ist $\det J_{\widetilde{f}}(\mathbf{0}) \neq 0$, und es gibt Umgebungen $\widetilde{U}(\mathbf{0}) \subset U$ und $W(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n$, so daß $\widetilde{f} : \widetilde{U} \to W$ ein Diffeomorphismus ist. O.B.d.A. sei $\widetilde{U} = U$ und $W = V \times Z$, mit einer offenen Umgebung $Z = Z(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^{n-m}$. Dann definieren wir $g : U \to Z$ durch $g(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') := \mathbf{x}''$. Offensichtlich ist $(f, g) = \widetilde{f} : U \to V \times Z$ ein Diffeomorphismus.

(2) $\implies$ (3): Sei $(f, g) : U \to V \times Z$ der gegebene Diffeomorphismus. Dann setzen wir $s(y) := (f, g)^{-1}(y, g(x_0))$. Offensichtlich ist $s(y_0) = x_0$ und $(f, g) \circ s(y) = (y, g(x_0))$, also $f \circ s(y) = y$.

(3) $\implies$ (1): Aus der Gleichung $f \circ s = \mathrm{id}$ folgt, daß $f_* \circ s_* = \mathrm{id}$ ist, also f_* surjektiv. ∎

4.7 Satz. *Sei* $\dim(X) = n$, $\dim(Y) = m$, $f : X \to Y$ *(überall) eine Submersion und* $y \in Y$*. Dann ist* $f^{-1}(y)$ *leer oder eine* $(n-m)$*-dimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von* X*. Im letzteren Fall ist* $T_x(f^{-1}(y)) = \mathrm{Ker}(f_{*,x})$ *für* $x \in f^{-1}(y)$*.*

BEWEIS: Sei $x_0 \in X$, $y_0 = f(y_0)$ und $M := f^{-1}(y_0)$. Wir wählen U, V, Z, g und $W \subset V \times Z$ wie im obigen Satz, so daß $(f,g) : U \to W$ ein Diffeomorphismus ist. Dann ist

$$M \cap U = \big((f,g)^{-1}(\{y_0\} \times Z)\big) \cap U.$$

Daraus folgt, daß M eine Untermannigfaltigkeit ist.

Da f auf M konstant ist, ist $f_{*,x}|_{T_x(M)} \equiv 0$, also $T_x(M) \subset \mathrm{Ker}(f_{*,x})$. Aus Dimensionsgründen muß nun die Gleichheit gelten. ∎

4.8 Satz. *Sei* $f : X \to Y$ *eine Submersion und* $n := \dim(X) > m := \dim(Y)$*. Zusätzlich sei* X *orientierbar. Dann ist auch jede Faser* $f^{-1}(y)$ *orientierbar. Sind* X *und* Y *orientiert, so kann man eine kanonische Orientierung auf den Fasern festlegen.*

BEWEIS: Sei $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0) \in Y$. Wir können Karten (U,φ) für X bei x_0 und (V,ψ) für Y bei y_0 finden, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \\ f \downarrow & & \downarrow \mathrm{pr}_2 \\ V & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Es sei noch $\varphi(x_0) = \mathbf{0}$, $\psi(y_0) = \mathbf{0}$ und $F := f^{-1}(y_0) \cap U$. Zum Beweis der zweiten Aussage können wir für ψ eine Karte aus einem positiv orientierten Atlas für Y wählen, bei der ersten Aussage spielt das keine Rolle. Ist nur X orientiert, so kann man zumindest erreichen, daß φ zu einem positiv orientierten Atlas für X gehört.

Es ist $\mathrm{pr}_2 \circ \varphi = \psi \circ f$, bzw. $\psi^{-1} \circ \mathrm{pr}_2 = f \circ \varphi^{-1}$.

Nun gewinnen wir eine Karte $\varrho : U \cap F \to \mathbb{R}^{n-m}$ für die Faser F durch

$$\varrho := \mathrm{pr}_1 \circ \varphi|_{F \cap U}.$$

Dann ist $\varrho \circ \varphi^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{0})$, also $\varrho^{-1}(\mathbf{x}') = \varphi^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{0})$.

Wir betrachten jetzt zwei solcher Karten. Dann ist

$$\varrho_1 \circ \varrho_2^{-1}(\mathbf{x}') = \mathrm{pr}_1 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{0})$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_2 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') &= \psi_1 \circ f \circ \varphi_2^{-1}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \\ &= \psi_1 \circ \psi_2^{-1} \circ \mathrm{pr}_2(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \\ &= \psi_1 \circ \psi_2^{-1}(\mathbf{x}''). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$J_{\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}}(\mathbf{x}',\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} J_{\varrho_1\circ\varrho_2^{-1}}(\mathbf{x}') & \sharp \\ \mathbf{0} & J_{\psi_1\circ\psi_2^{-1}}(\mathbf{0}) \end{pmatrix}.$$

Will man nur **eine** Faser betrachten, so kann man $\psi_1 = \psi_2$ annehmen. Auf jeden Fall ist $\det J_{\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}}(\mathbf{x}',\mathbf{0}) > 0$ und $\det J_{\psi_1\circ\psi_2^{-1}}(\mathbf{0}) > 0$, und damit auch $\det J_{\varrho_1\circ\varrho_2^{-1}}(\mathbf{x}') > 0$. Damit ist alles gezeigt. ∎

Eine besondere Situation liegt vor, wenn $n = m$ ist, und $f_{*,x} : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$ für jedes $x \in X$ ein Isomorphismus. Dann ist f nach dem Satz über inverse Abbildungen ein lokaler Diffeomorphismus, braucht aber nicht global diffeomorph zu sein. Die Fasern sind in diesem Falle 0-dimensionale Untermannigfaltigkeiten. Wir haben noch nicht darüber nachgedacht, was man unter der Orientierung eines Punktes verstehen soll. Mit Atlanten kommt man da nicht so recht weiter, aber eine nirgends verschwindende 0-Form auf einem Punkt ist eine reelle Zahl $\neq 0$. Deshalb verstehen wir unter einer Orientierung eines Punktes einfach ein Vorzeichen, also eine der beiden Zahlen ± 1.

Es seien nun X und Y orientiert, jeweils durch nirgends verschwindende n-Formen ω_X und ω_Y. Die Abbildung f heißt in x *orientierungstreu*, falls $f^*(\omega_Y)$ die gleiche Orientierung wie ω_X definiert. In diesem Fall versehen wir die Faser in x mit der Orientierung $+1$, andernfalls mit der Orientierung -1.

Wir wollen jetzt in einem einfachen Fall das „Faserintegral“ einer Differentialform einführen.

Zunächst eine Vorbemerkung: Ist X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $M \subset X$ eine k-dimensionale orientierbare Untermannigfaltigkeit, so ist die natürliche Inklusion $i_M : M \hookrightarrow X$ eine differenzierbare Abbildung. Ist ω eine stetige k-Form mit kompaktem Träger auf X, so ist $i_M^*\omega$ eine k-Form auf M, und man setzt

$$\int_M \omega := \int_M i_M^*\omega.$$

In der Nähe eine Punktes von M kann man Koordinaten $x^1, \dots, x^n$ für X finden, so daß M durch $x^{k+1} = \dots = x^n = 0$ gegeben ist und $x^1, \dots, x^k$ Koordinaten für M sind. Ist $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, so ist

$$i_M^*(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \begin{cases} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k & \text{falls } i_\nu = \nu \text{ für } \nu = 1, \dots, k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sei nun $\Phi : X \to Y$ eine Submersion, $n := \dim(X) > m := \dim(Y)$. Außerdem sei ω eine stetige k-Form mit kompaktem Träger auf X, $k := n - m$. Die Mannigfaltigkeiten X und Y seien orientiert, und die Fasern $\Phi^{-1}(y)$ mögen die oben beschriebene induzierte Orientierung tragen. Für $y \in Y$ sei $i_y : \Phi^{-1}(y) \hookrightarrow X$ die natürliche Inklusion. Dann ist das *Faserintegral* $F = \displaystyle\int_{X/Y} \omega$ die differenzierbare Funktion auf Y, die durch

$$F(y) := \int_{\Phi^{-1}(y)} i_y^* \omega$$

definiert wird.

Bemerkung. Ist ω eine $(k+p)$-Form auf X, so kann man auch das Faserintegral $\displaystyle\int_{X/Y} \omega$ bilden und erhält eine p-Form auf Y. Die Differentiale in Faserrichtung werden dabei „wegintegriert“. Wir verzichten hier auf die genaue Beschreibung dieses relativ komplizierten Vorganges und begnügen uns mit dem Fall $p = 0$.

Wir müssen noch den Fall $\dim(X) = \dim(Y) = n$ betrachten. Ist g eine stetige 0-Form (also eine Funktion) mit kompaktem Träger auf X und $x_0 \in X$ ein Punkt, so ist

$$\int_{\{x_0\}} g = \varepsilon(x_0) \cdot g(x_0),$$

wobei $\varepsilon(x_0) = \pm 1$ ist, je nachdem, welche Orientierung der Punkt x_0 tragen soll. Ist x_0 ein Punkt in der Faser über einem Punkt $y_0 \in Y$, so geben wir x_0 die Orientierung $+1$, wenn f in x_0 orientierungstreu ist, und sonst die Orientierung -1. Also ist in diesem Falle

$$\Big(\int_{X/Y} g\Big)(y) = F(y) = \int_{\Phi^{-1}(y)} i_y^* g = \sum_{x \in \Phi^{-1}(y)} \varepsilon(x) \cdot g(x).$$

Weil g kompakten Träger hat, ist die Summe endlich.