Bergische Universität – Gesamthochschule Wuppertal – Fachbereich Mathematik

Analysis 3

Kapitel 2 Differentialformen im $\mathbb{R}^n$

Vorlesungsausarbeitung zum WS 2001/02

von Prof. Dr. Klaus Fritzsche

Inhaltsverzeichnis

§ 1 Alternierende Multilinearformen

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $V^* = L(V, \mathbb{R})$ sein Dualraum.

Definition. Eine Abbildung

$$\varphi : (V^*)^p \times V^q \to \mathbb{R},$$

die in jedem Argument linear (insgesamt also $(p+q)$-fach multilinear) ist, heißt ein *p-fach kontravarianter* und *q-fach kovarianter Tensor* (über V). Die Menge aller dieser Tensoren sei mit $T^p_q(V)$ bezeichnet.

Beispiele.

1. Eine Linearform $\varphi \in V^*$ ist ein 1-fach kovarianter Tensor.

   Der Vektorraum $T^0_q(V)$ aller q-fach kovarianten Tensoren wird auch mit $L_q(V; \mathbb{R})$ bezeichnet (Menge der q-fachen Multilinearformen über V).

   Wir betrachten erst einmal den Fall $V = \mathbb{R}^n$. Jedem Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ist eine Linearform $\lambda_{\mathbf{a}}$ zugeordnet, mit

   $$\lambda_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \mathbf{a} \bullet \mathbf{x} = a_1 x_1 + \cdots a_n x_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^t.$$

   Die Zuordnung $\mathbf{a} \mapsto \lambda_{\mathbf{a}}$ definiert eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ auf $(\mathbb{R}^n)^* = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, mit $\lambda_{\mathbf{a}}(\mathbf{e}_i) = a_i$. Ist umgekehrt eine Linearform $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$ gegeben, so setzen wir $\mathbf{v}(\varphi) := (\varphi(\mathbf{e}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{e}_n))$. Das liefert uns eine lineare Abbildung von $(\mathbb{R}^n)^*$ nach $\mathbb{R}^n$, und wegen

   $$\lambda_{\mathbf{v}(\varphi)}(\mathbf{x}) = x_1 \cdot \varphi(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_n \varphi(\mathbf{e}_n) = \varphi(x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n) = \varphi(\mathbf{x})$$

   $$\text{und} \qquad \mathbf{v}(\lambda_{\mathbf{a}}) = (\lambda_{\mathbf{a}}(\mathbf{e}_1), \ldots, \lambda_{\mathbf{a}}(\mathbf{e}_n)) = (a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{a}$$

   sind die beiden Abbildungen invers zueinander.

   Leider läßt sich die Zuordnung $\mathbf{a} \mapsto \lambda_{\mathbf{a}}$ nicht so ohne weiteres auf einen beliebigen endlich-dimensionalen Vektorraum V übertragen. Ist allerdings ein *Skalarprodukt* $<\ldots, \ldots>$ (also eine positiv definite symmetrische Bilinearform) auf V gegeben, so können wir jedem Vektor $a \in V$ genau wie oben eine Linearform λ_a zuordnen, durch

   $$\lambda_a(x) := <a\,,\, x>.$$

   Ist $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine ON-Basis von V, so besitzt jeder Vektor $x \in V$ eine eindeutig bestimmte Darstellung

   $$x = \sum_{i=1}^{n} <x\,,\, a_i> a_i\ .$$

Wenn wir jeder Linearform $\varphi \in V^*$ durch

$$v(A,\varphi) := \sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i)a_i$$

einen Vektor $v = v(A,\varphi) \in V$ zuordnen, so erhalten wir eine lineare Abbildung von V^* nach V, die allerdings von der gewählten Basis A abhängt.

Ist $v = v(A,\varphi)$ und $x \in V$ beliebig, so ist

$$\lambda_a(x) = <\sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i)a_i\,,\, x> = \sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i)<a_i\,,\, x> = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} <a_i\,,\, x>a_i\Big) = \varphi(x),$$

und umgekehrt ist

$$v(A,\lambda_a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_a(a_i)a_i = \sum_{i=1}^{n} <a\,,\, a_i>a_i = a.$$

Also ist die Zuordnung $a \mapsto \lambda_a$ ein Isomorphismus und v_A die Umkehrabbildung.

Die Linearformen $\alpha^i := \lambda_{a_i}$, $i = 1,\ldots,n$, bilden die *duale Basis* zur Basis A. Tatsächlich ist

$$\alpha^i(a_j) = <a_i\,,\, a_j> = \delta_{ij}.$$

2. Ein 1-fach kontravarianter Tensor ist ein Element des Bidualraumes V^{**}. Nun gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$j : V \to V^{**}, \text{ mit } j(v)(\varphi) := \varphi(v).$$

Offensichtlich ist j linear, und wenn $j(v) = 0$ ist, so ist $\varphi(v) = 0$ für alle Linearformen $\varphi \in V^*$. Schreibt man $v = v_1a_1 + \cdots + v_na_n$, mit einer beliebigen Basis $\{a_1,\ldots,a_n\}$ von V, und ist $\{\alpha^1,\ldots,\alpha^n\}$ die dazu duale Basis von V^*, so ist $0 = \alpha^i(v) = v_i$ für alle i, also $v = 0$. Das zeigt die Injektivität, und aus Dimensionsgründen ist j dann ein Isomorphismus. Also kann man 1-fach kontravariante Tensoren als Vektoren auffassen.

Es seien nun zwei Vektorräume V und W mit Basen $A = \{a_1,\ldots,a_m\}$ und $B = \{b_1,\ldots,b_n\}$ gegeben. Dann gibt es zu jedem Vektor $x = x_1a_1 + \cdots + x_ma_m \in V$ und jedem Vektor $y = y_1b_1 + \cdots + y_nb_n \in W$ eine Koordinatendarstellung

$$\vec{x}_A = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{y}_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, so definieren wir die Matrix

$$M_{B,A}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

durch

$$f(a_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i,\ j = 1, \ldots, m.$$

Dann ist

$$f\big(\sum_{j=1}^{m} x_j a_j\big) = \sum_{j=1}^{m} x_j \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j\Big) b_i,$$

also $M_{B,A}(f) \cdot \vec{x}_A = \overrightarrow{f(x)}_B$.

Die lineare Abbildung f induziert eine *duale Abbildung* $f^* : W^* \to V^*$ durch

$$f^*(\varphi) := \varphi \circ f.$$

In einem Vektorraum mit Skalarprodukt kann man sich das folgendermaßen vorstellen:

Ist die Linearform $\varphi \in W^*$ nicht die Nullform, so ist $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ und $\mathrm{Ker}(\varphi)$ eine Hyperebene. Ist $\varphi = \lambda_a$ (mit $a \in W$), so ist

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{x \in W \,:\, <a\,,\, x> = 0\}$$

das orthogonale Komplement zu der Geraden $\mathbb{R}a$. Man kann jetzt φ mit der (zu $\mathrm{Ker}(\varphi)$ parallelen) Schar affiner Hyperebenen $H_r = ra + \mathrm{Ker}(\varphi)$, $r \in \mathbb{R}$, identifizieren. Ist $x \in W$, $x = ra + x^*$ mit $x^* \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, so ist $\varphi(x) = r<a\,,\, a>$. Nun ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f^*(\varphi)) &= \{x \in V \,:\, \varphi \circ f(x) = 0\} \\ &= \{x \in V \,:\, f(x) \in \mathrm{Ker}(\varphi)\} \\ &= f^{-1}(\mathrm{Ker}(\varphi)). \end{aligned}$$

Die Linearform $f^*(\varphi)$ wird also durch die zu $f^{-1}(\mathrm{Ker}(\varphi))$ parallele Schar von Hyperebenen veranschaulicht. Das funktioniert übrigens nicht in umgekehrter Richtung, denn das Bild einer Hyperebene unter einer linearen Abbildung ist i.a. keine Hyperebene.

Sei jetzt $A^* = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^m\} \subset V^*$ die duale Basis zu $\{a_1, \ldots, a_m\}$, und $B^* = \{\beta^1, \ldots, \beta^n\} \subset W^*$ die duale Basis zu $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Dann kann f^* durch die Matrix $M_{A^*,B^*}(f^*) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ beschrieben werden. Bezeichnen wir die Einträge in dieser Matrix mit a^*_{ji}, so ist

$$f^*(\beta^i) = \sum_{j=1}^{m} a^*_{ji} \alpha^j,$$

also

$$\begin{aligned} a^*_{ji} &= f^*(\beta^i)(a_j) = \beta^i \circ f(a_j) \\ &= \beta^i\Big(\sum_{\nu=1}^n a_{\nu j} b_\nu\Big) \\ &= \sum_{\nu=1}^n a_{\nu j}\beta^i(b_\nu) = a_{ij}. \end{aligned}$$

Das zeigt, daß $M_{A^*,B^*}(f^*) = M_{B,A}(f)^t$ ist.

Definition. Sind $f_1, \ldots, f_q$ Linearformen auf V, so wird deren *Tensorprodukt* $f_1 \otimes \ldots \otimes f_q \in L_q(V;\mathbb{R})$ definiert durch

$$(f_1 \otimes \ldots \otimes f_q)(v_1, \ldots, v_q) := f_1(v_1) \cdots f_q(v_q).$$

1.1 Satz. *Ist $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Basis von V und $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ die dazu duale Basis, so bilden die Tensorprodukte $\alpha^{i_1} \otimes \ldots \otimes \alpha^{i_q}$ mit $1 \le i_1, \ldots, i_q \le n$ eine Basis des Raumes $L_q(V;\mathbb{R})$. Insbesondere ist $\dim L_q(V;\mathbb{R}) = n^q$.*

BEWEIS: 1) Lineare Unabhängigkeit:

Sei $\displaystyle\sum_{i_1,\ldots,i_q} c_{i_1\ldots i_q}\alpha^{i_1} \otimes \cdots \otimes \alpha^{i_q} = 0$. Setzt man q-Tupel $(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q})$ ein, so erhält man $c_{j_1\ldots j_q} = 0$ für alle $j_1, \ldots, j_q$.

2) Ist φ eine beliebige q-fache Multilinearform, so setzen wir

$$\psi := \sum_{i_1,\ldots,i_q} \varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_q})\alpha^{i_1} \otimes \cdots \otimes \alpha^{i_q}.$$

Dann ist $(\psi - \varphi)(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}) = 0$ für alle $j_1, \ldots, j_q$, also $(\psi - \varphi)(v_1, \ldots, v_q) = 0$ für alle $v_1, \ldots, v_q$, und damit $\varphi = \psi$. ∎

Definition. Eine Multilinearform $\varphi \in L_q(V;\mathbb{R})$ heißt *alternierend* oder *schiefsymmetrisch*, falls für $i = 1, \ldots, q-1$ gilt:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_q) = -\varphi(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_q).$$

Da man beliebige Permutationen aus Vertauschungen zusammensetzen kann, folgt:

1.2 Satz.

1. *$\varphi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(q)}) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \varphi(x_1, \ldots, x_q)$ für alle Permutationen $\sigma \in S_q$.*

2. $\varphi(x_1, \ldots, x_q) = 0$, *falls zwei Argumente gleich sind.*

Definition. Es sei $A^q(V) \subset L_q(V; K)$ der Unterraum aller alternierenden q-fachen Multilinearformen auf V.

Speziell ist $A^0(V) = \mathbb{R}$, $A^1(V) = V^*$ und $A^q(V) = 0$ für $q > n$.

Definition. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_q \in V^*$ Linearformen, so setzt man

$$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_q = \sum_{\sigma \in S_q} \operatorname{sign}(\sigma) \lambda_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \lambda_{\sigma(q)}.$$

1.3 Satz. *Es ist*

$$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_q(v_1, \ldots, v_q) = \det\Big(\lambda_i(v_j) \;\Big|\; i, j = 1, \ldots, q\Big).$$

Die Behauptung folgt sofort aus der Definition der Determinante.

1.4 Folgerung. $\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_q$ *ist alternierend, und für* $\sigma \in S_q$ *ist*

$$\lambda_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \lambda_{\sigma(q)} = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_q.$$

Beweis: Die Determinante

$$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_q(v_1, \ldots, v_q) = \det\Big(\lambda_i(v_j) \;\Big|\; i, j = 1, \ldots, q\Big)$$

ist alternierend in den Zeilen (also den λ_i) und den Spalten (also den v_j). ∎

Für $1 \leq i_1, \ldots, i_q \leq n$ sei $\delta(i_1, \ldots, i_q)$ das (eindeutig bestimmte) Vorzeichen derjenigen Permutation, die $(i_1, \ldots, i_q)$ auf $(j_1, \ldots, j_q)$ mit $1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n$ abbildet.

1.5 Hilfssatz 1. *Ist* $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ *die duale Basis zu* $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *und* $1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n$, *so ist*

$$\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \{i_1, \ldots, i_q\} \neq \{j_1, \ldots, j_q\}, \\ \delta(i_1, \ldots, i_q) & \text{falls } \{i_1, \ldots, i_q\} = \{j_1, \ldots, j_q\}. \end{cases}$$

Beweis: Ist $\{i_1, \ldots, i_q\} \neq \{j_1, \ldots, j_q\}$, so ist $\alpha^{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes \alpha^{i_{\sigma(q)}}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}) = 0$ für jedes $\sigma \in S_q$. Sei daher $\{i_1, \ldots, i_q\} = \{j_1, \ldots, j_q\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}) &= \delta(i_1, \ldots, i_q) \alpha^{j_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{j_q}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}) \\ &= \delta(i_1, \ldots, i_q) \sum_{\sigma \in S_q} \operatorname{sign}(\sigma) \alpha^{j_1}(a_{j_{\sigma(1)}}) \cdots \alpha^{j_q}(a_{j_{\sigma(q)}}) \\ &= \delta(i_1, \ldots, i_q). \end{aligned}$$

Von der Summe bleibt nur der Summand mit $\sigma = \mathrm{id}$ übrig. ∎

1.6 Hilfssatz 2. *Ist $\varphi \in A^q(V)$, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Basis von V und*

$$\varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_q}) = 0 \text{ für } 1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n,$$

so ist $\varphi = 0$.

BEWEIS: Ist $\{i_1, \ldots, i_q\} = \{j_1, \ldots, j_q\}$ mit $1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n$, so ist

$$\varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_q}) = \delta(i_1, \ldots, i_q) \cdot \varphi(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}) = 0.$$

Sind nun $x_j = x_{j1}a_1 + \cdots + x_{jn}a_n$, $j = 1, \ldots, q$, beliebige Vektoren, so ist

$$\varphi(x_1, \ldots, x_q) = \sum_{i_1, \ldots, i_q} x_{1i_1} \cdots x_{qi_q} \varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_q}) = 0.$$

∎

1.7 Satz. *Die Formen $\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q}$ mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n$ bilden eine Basis von $A^q(V)$. Insbesondere ist* $\dim(A^q(V)) = \binom{n}{q}$.

BEWEIS: 1) Lineare Unabhängigkeit: Sei

$$\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n} c_{i_1 \ldots i_q} \alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q} = 0.$$

Dann ist

$$0 = \Big(\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n} c_{i_1 \ldots i_q} \alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q} \Big)(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}) = c_{j_1 \ldots j_q} \text{ für } j_1 < \ldots < j_q.$$

2) Erzeugendensystem: Sei $\varphi \in A^q(V)$. Dann definieren wir $\psi \in A^q(V)$ als

$$\psi := \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n} \varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_q}) \alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q}.$$

Dann sieht man sofort: $\psi = \varphi$.

Die Dimension von $A^q(V)$ ist die Anzahl der q-Tupel $(i_1, \ldots, i_q)$ mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n$. Jedes solche q-Tupel bestimmt genau eine q-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$, und zu jeder der Mengen gibt es nur eine zulässige Anordnung der Elemente. ∎

Setzt man nun das Produkt

$$(\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_p}) \wedge (\alpha^{j_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{j_q}) := \alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_p} \wedge \alpha^{j_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{j_q}$$

bilinear fort, so erhält man das sogenannte *Dachprodukt*

$$A^p(V) \times A^q(V) \xrightarrow{\wedge} A^{p+q}(V), \text{ mit } (\varphi, \psi) \mapsto \varphi \wedge \psi.$$

Dieses Produkt hat folgende Eigenschaften:

1. $(\omega \wedge \varphi) \wedge \psi = \omega \wedge (\varphi \wedge \psi)$.
2. $\omega \wedge \varphi = (-1)^{pq} \varphi \wedge \omega$ für $\omega \in A^p(V)$, $\varphi \in A^q(V)$. (Antikommutativgesetz).
3. Für Linearformen $\varphi, \psi \in V^*$ ist $\varphi \wedge \psi = \varphi \otimes \psi - \psi \otimes \varphi$.

Die Eigenschaften (1) und (2) folgen ganz leicht für Basisformen und dann wegen der Bilinearität für beliebige Formen.

Definition. Zwei (geordnete) Basen $\{a_1, \ldots, a_n\}$, $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eines n-dimensionalen Vektorraumes V heißen *gleich-orientiert*, falls der durch $T(a_i) = b_i$ gegebene Automorphismus von V eine positive Determinante besitzt.

Die Menge der geordneten Basen von V wird durch die Relation „gleichorientiert“ in zwei Äquivalenzklassen zerlegt. Basen in zwei verschiedenen Klassen gehen durch einen Automorphismus mit negativer Determinante auseinander hervor. Unter einer *Orientierung* von V versteht man die Auswahl einer der beiden Klassen.

Der $\mathbb{R}^n$ hat hier eine Sonderstellung inne. Eine Basis des $\mathbb{R}^n$ heißt *positiv orientiert*, wenn sie in der gleichen Orientierungsklasse wie die Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ liegt. So ist z.B. $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$ eine positiv orientierte Basis des $\mathbb{R}^3$, während $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ negativ orientiert ist.

1.8 Satz. *Ist V ein n-dimensionaler orientierter Vektorraum mit Skalarprodukt, so gibt es genau eine n-Form Ω_V, so daß*

$$\Omega_V(a_1, \ldots, a_n) = 1$$

für jede positiv orientierte ON-Basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ von V ist.

Beweis: Wir wählen eine spezielle positiv orientierte ON-Basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ und die dazu duale Basis $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$. Dann setzen wir

$$\Omega_V := \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^n.$$

Offensichtlich ist $\Omega_V(a_1, \ldots, a_n) = 1$. Ist $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine andere (ebenfalls positiv orientierte) ON-Basis, so geht sie aus $\{a_1, \ldots, a_n\}$ durch eine Transformation T mit $\det(T) = 1$ hervor (vgl. Lineare Algebra). Andererseits gilt allgemein:

$$\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^n(Ta_1, \ldots, Ta_n) = \det(T) \cdot \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^n(a_1, \ldots, a_n).$$

Also ist auch $\Omega_V(b_1, \ldots, b_n) = 1$. ∎

Definition. Die n-Form Ω_V heißt *Volumenform* von V. Speziell wird $\Delta := \Omega_{\mathbb{R}^n} = \varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n$ auch als *Determinantenform* bezeichnet.

Ist M eine (n,n)-Matrix mit den Zeilenvektoren $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, so ist $\Delta(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \det(M)$.

Es sei weiterhin V ein n-dimensionaler orientierter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis und $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ die zugehörige duale Basis. Wir wollen den Raum $A^{n-1}(V)$ untersuchen.

Eine Basis von $A^{n-1}(V)$ bilden die n (n-1)-Formen

$$\omega^i := \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\alpha^i} \wedge \ldots \wedge \alpha^n, \quad i = 1, \ldots, n,$$

wobei das Dach über α^i bedeutet, daß dieser Faktor weggelassen werden soll. Man erhält also die Formen

$$\omega^1 = \alpha^2 \wedge \ldots \wedge \alpha^n, \quad \omega^2 = \alpha^1 \wedge \alpha^3 \wedge \ldots \wedge \alpha^n, \quad \ldots, \quad \omega^n = \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^{n-1}.$$

1.9 Satz (Die kanonische $(n-1)$-Form zu einem Vektor). *Es gibt zu jedem Vektor $v \in V$ genau eine $(n-1)$-Form $\Lambda_v \in A^{n-1}(V)$, so daß gilt:*

$$\varphi \wedge \Lambda_v = \varphi(v) \cdot \Omega_V, \qquad \text{für alle } \varphi \in V^*.$$

In Koordinaten: Ist $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine positiv orientierte ON-Basis und $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ die dazu duale Basis, sowie $v = v_1 a_1 + \cdots + v_n a_n$, so ist

$$\Lambda_v = \sum_{i=1}^{n} v_i (-1)^{i+1} \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\alpha^i} \wedge \ldots \wedge \alpha^n.$$

Beweis: Der Eindeutigkeitsbeweis liefert auch gleich die Formel:

Wenn es eine Form $\Lambda_v = \sum_{j=1}^{n} c_j \omega_j$ mit der geforderten Eigenschaft gibt, so muß für $v = v_1 a_1 + \cdots + v_n a_n$ gelten:

$$\begin{aligned} v_i \cdot \Omega_V &= \alpha^i(v) \cdot \Omega_V \\ &= \alpha^i \wedge \Lambda_v \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha^i \wedge \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\alpha^j} \wedge \ldots \wedge \alpha^n \\ &= c_i \cdot (-1)^{i+1} \cdot \Omega_V. \end{aligned}$$

Also ist dann $\Lambda_v = \sum_{i=1}^{n} v_i (-1)^{i+1} \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\alpha^i} \wedge \ldots \wedge \alpha^n$.

Da jede Linearform φ eine Linearkombination der α^i ist, folgt ganz leicht, daß die so definierte Form Λ_v die gewünschte Eigenschaft hat. ∎

Speziell ist $\lambda_a \wedge \Lambda_v = <a\,,\,v>\Omega_V$.

Beispiel.

Sei $V = \mathbb{R}^3$. Wir benutzen das euklidische Skalarprodukt und als Orthonormalbasis die Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ der Einheitsvektoren. Ist $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, so ist

$$\lambda_{\mathbf{a}} = a_1\varepsilon^1 + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^2$$

und

$$\Lambda_{\mathbf{a}} = a_1\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 + a_2\varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1 + a_3\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= a_1(v_2w_3 - v_3w_2) + a_2(v_3w_1 - v_1w_3) + a_3(v_1w_2 - v_2w_1) \\ &= \Delta(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{a}). \end{aligned}$$

Außerdem ist $\lambda_{\mathbf{a}} \wedge \Lambda_{\mathbf{b}} = (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\Delta$.

1.10 Satz. *Sind* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$*, so gibt es genau einen Vektor* $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$*, so daß*

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \bullet \mathbf{a} = \Delta(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{a}) = \Lambda_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

für alle Vektoren $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ *gilt.*

Beweis: Durch $\mathbf{a} \mapsto \Delta(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{a})$ wird eine Linearform gegeben. Es muß also einen (eindeutig bestimmten) Vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ geben, so daß $\lambda_{\mathbf{z}}(\mathbf{a}) = \Delta(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{a})$ ist. Wir setzen dann $\mathbf{v} \times \mathbf{w} := \mathbf{z}$. ∎

Man nennt $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ das *Vektorprodukt* von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$.

1.11 Satz (Eigenschaften des Vektorproduktes).

1. $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)$.
2. $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ *ist bilinear und alternierend.*
3. $\mathbf{v} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$.
4. *Ist* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ *eine positiv orientierte ON-Basis des* $\mathbb{R}^3$*, so gilt:*

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \text{ und } \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_2.$$

BEWEIS: 1) Die Komponenten von $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ sind die drei Zahlen $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \bullet \mathbf{e}_i = \Lambda_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, $i = 1, 2, 3$. Dabei ist $\Lambda_{\mathbf{e}_1} = \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3$, $\Lambda_{\mathbf{e}_2} = \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1$ und $\Lambda_{\mathbf{e}_3} = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2$.

2) ergibt sich aus den Eigenschaften der Determinantenform.

3) Es ist

$$\mathbf{v} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \Delta(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$$

und analog auch $\mathbf{w} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \Delta(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$.

4) Aus (2) ergibt sich, daß $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ auf $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ senkrecht steht. Sei nun $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ eine ON-Basis des $\mathbb{R}^3$, also $\mathbf{a}_i \bullet \mathbf{a}_j = \delta_{ij}$.

A ist genau dann *positiv orientiert*, wenn $\Delta(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) > 0$ ist. Weil die $\mathbf{a}_i$ die Zeilen einer Orthogonalmatrix bilden, muß dann sogar $\Delta(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 1$ gelten.

Es muß $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = c_{12} \cdot \mathbf{a}_3$ sein, mit einem geeigneten Faktor $c_{12} \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$c_{12} = c_{12} \cdot (\mathbf{a}_3 \bullet \mathbf{a}_3) = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \bullet \mathbf{a}_3 = \Delta(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 1.$$

Die beiden anderen Fälle gehen genauso. ∎

1.12 Satz. $\lambda_{\mathbf{a}} \wedge \lambda_{\mathbf{b}} = \Lambda_{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}$.

BEWEIS: Wir rechnen die Formel „zu Fuß“ nach:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\mathbf{a}} \wedge \lambda_{\mathbf{b}} &= \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \varepsilon^i\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{3} b_j \varepsilon^j\right) \\
&= \sum_{i,j} a_i b_j \varepsilon^i \wedge \varepsilon^j \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \\
&= \Lambda_{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}.
\end{aligned}$$

∎

1.13 Satz.

1. $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \bullet (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{v} \bullet \mathbf{x} & \mathbf{v} \bullet \mathbf{y} \\ \mathbf{w} \bullet \mathbf{x} & \mathbf{w} \bullet \mathbf{y} \end{pmatrix}$.

2. $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} - (\mathbf{w} \bullet \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$.

BEWEIS: 1) Es ist

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \bullet (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) &= \Lambda_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
&= (\lambda_{\mathbf{v}} \wedge \lambda_{\mathbf{w}})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
&= \lambda_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \cdot \lambda_{\mathbf{w}}(\mathbf{y}) - \lambda_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) \cdot \lambda_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) \\
&= (\mathbf{v} \bullet \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{w} \bullet \mathbf{y}) - (\mathbf{w} \bullet \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} \bullet \mathbf{y}) \\
&= \det \begin{pmatrix} \mathbf{v} \bullet \mathbf{x} & \mathbf{v} \bullet \mathbf{y} \\ \mathbf{w} \bullet \mathbf{x} & \mathbf{w} \bullet \mathbf{y} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2) Sind $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ linear abhängig, so kommt auf beiden Seiten Null heraus. Seien also $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ linear unabhängig. Wendet man darauf das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren an, so erhält man eine ON-Basis $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ des von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ aufgespannten Unterraums. Mit $\mathbf{c} := \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ erhält man eine ON-Basis $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ des $\mathbb{R}^3$, und es gibt Konstanten α, β, γ, ε und δ, so daß gilt:

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{w} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} \quad \text{und} \quad \mathbf{u} = \gamma \cdot \mathbf{a} + \varepsilon \cdot \mathbf{b} + \delta \cdot \mathbf{c}.$$

Außerdem ist

$$\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \bullet \mathbf{c} = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} & \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \bullet \mathbf{a} & \mathbf{b} \bullet \mathbf{b} \end{pmatrix} = 1,$$

also $\mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$ und $\mathbf{c} \times \mathbf{b} = -\mathbf{a}$. Damit folgt:

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = (\|\mathbf{v}\|\beta \cdot \mathbf{c}) \times (\gamma \cdot \mathbf{a} + \varepsilon \cdot \mathbf{b} + \delta \cdot \mathbf{c}) = (\|\mathbf{v}\|\beta) \cdot (\gamma \cdot \mathbf{b} - \varepsilon \cdot \mathbf{a}),$$

sowie

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v} \bullet \mathbf{u})\mathbf{w} &= (\|\mathbf{v}\|\gamma) \cdot (\alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b}) \\
&= (\|\mathbf{v}\|\gamma\alpha) \cdot \mathbf{a} + (\|\mathbf{v}\|\beta) \cdot (\gamma \cdot \mathbf{b})
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(\mathbf{w} \bullet \mathbf{u})\mathbf{v} &= (\alpha\gamma + \beta\varepsilon) \cdot (\|\mathbf{v}\| \cdot \mathbf{a}) \\
&= (\|\mathbf{v}\|\gamma\alpha) \cdot \mathbf{a} + (\|\mathbf{v}\|\beta) \cdot (\varepsilon \cdot \mathbf{a}).
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt das die gewünschte Formel. ∎

§ 2 Differentialformen

Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine k-mal stetig differenzierbare *Differentialform der Dimension* q (oder kurz: *q-Form*) auf U ist eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung

$$\omega : U \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

so daß für jedes $\mathbf{x} \in U$ die Abbildung $\omega_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) := \omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q)$$

eine alternierende q-fache Multilinearform ist.

Den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller k-mal stetig differenzierbaren q-Formen auf U bezeichnen wir mit $\Omega_k^q(U)$.

Bemerkungen.

1. $\Omega_k^0(U) = \mathcal{C}^k(U)$ ist der Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf U.

2. Im Falle $q = 1$ erhält man die schon bekannten Pfaffsche Formen. Die (beliebig oft differenzierbaren) 1-Formen dx_i sind definiert durch $dx_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = v_i$, also $(dx_i)_{\mathbf{x}} = \varepsilon^i$, für $i = 1, \ldots, n$.

3. Ist φ eine p-Form und ψ eine q-Form auf U, so ist $\varphi \wedge \psi$ mit $(\varphi \wedge \psi)_{\mathbf{x}} = \varphi_{\mathbf{x}} \wedge \psi_{\mathbf{x}}$ eine $(p+q)$-Form auf U.

2.1 Satz. *Jede q-Form φ aus $\Omega_k^q(U)$ kann eindeutig in der Form*

$$\varphi = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_q \le n} a_{i_1 \ldots i_q} \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$$

geschrieben werden, mit $\mathcal{C}^k$-Funktionen $a_{i_1 \ldots i_q}$. Dabei ist

$$a_{i_1 \ldots i_q}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_q}).$$

Der BEWEIS ist offensichtlich.

Definition. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $F : U \to V$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung, $k \ge 1$, so wird jeder q-Form $\omega \in \Omega_{k-1}^q(V)$ ihre *Liftung* $F^*\omega \in \Omega_{k-1}^q(U)$ zugeordnet, durch

$$F^*\omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) := \omega(F(\mathbf{x}), DF(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1), \ldots, DF(\mathbf{x})(\mathbf{v}_q)).$$

2.2 Satz. *Sei $k \ge 1$, $F : U \to V$ k-mal stetig differenzierbar. Die Liftung $F^* : \Omega_{k-1}^q(V) \to \Omega_{k-1}^q(U)$ hat folgende Eigenschaften:*

1. *F^* ist $\mathbb{R}$-linear.*

2. *Ist f eine $\mathcal{C}^{k-1}$-Funktion auf V und $\omega \in \Omega^q_{k-1}(V)$, so ist $F^*(f \cdot \omega) = (f \circ F) \cdot F^*(\omega)$.*

3. *Ist f eine $\mathcal{C}^k$-Funktion auf V, so ist $F^*(df) = d(f \circ F)$. Insbesondere ist $F^*(dy_i) = dF_i$, wenn $F = (F_1, \dots, F_m)$ ist.*

4. *Ist $\varphi \in \Omega^p_{k-1}(V)$ und $\psi \in \Omega^q_{k-1}(V)$, so ist $F^*(\varphi \wedge \psi) = (F^*\varphi) \wedge (F^*\psi)$.*

Beweis: Die ersten beiden Eigenschaften folgen sofort aus der Definition.

Zu (3):

$$\begin{aligned} F^*(df)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) &= df\big(F(\mathbf{x}), DF(\mathbf{x})(\mathbf{v})\big) \\ &= Df(F(\mathbf{x}))\big(DF(\mathbf{x})(\mathbf{v})\big) \\ &= D(f \circ F)(\mathbf{x})(\mathbf{v}) \\ &= d(f \circ F)(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

(4) Sind $\omega_1, \dots, \omega_q$ Pfaffsche Formen auf V, so ist

$$\begin{aligned} &(F^*\omega_1 \otimes \cdots \otimes F^*\omega_q)(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q) = \\ &= F^*\omega_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1) \cdots F^*\omega_q(\mathbf{x}, \mathbf{v}_q) \\ &= \omega_1(F(\mathbf{x}), DF(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1)) \cdots \omega_q(F(\mathbf{x}), DF(\mathbf{x})(\mathbf{v}_q)) \\ &= (\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_q)(F(\mathbf{x}), DF(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1), \dots, DF(\mathbf{x})(\mathbf{v}_q)). \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß $F^*(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_q) = (F^*\omega_1) \wedge \ldots \wedge (F^*\omega_q)$ und dann allgemein $F^*(\varphi \wedge \psi) = (F^*\varphi) \wedge (F^*\psi)$ ist. ∎

Ist $F = (F_1, \dots, F_n)$, so ergibt sich daraus:

2.3 Folgerung 1. *Ist $\varphi = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_q \le n} a_{i_1 \ldots i_q}\, dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_q}$, so ist*

$$F^*\varphi = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_q \le n} (a_{i_1 \ldots i_q} \circ F)\, dF_{i_1} \wedge \ldots \wedge dF_{i_q}.$$

Also wird $F^*\varphi$ gebildet, indem man F überall dort einsetzt, wo es möglich ist. Manchmal schreibt man deshalb auch $\varphi \circ F$ an Stelle von $F^*\varphi$.

2.4 Folgerung 2. *Ist $n = m$, so ist*

$$F^*(a\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n) = (a \circ F) \cdot \det J_F \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} dF_1 \wedge \ldots \wedge dF_n &= \\ &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_n} (F_1)_{x_{i_1}} \cdots (F_n)_{x_{i_n}} \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) (F_1)_{x_{\sigma(1)}} \cdots (F_n)_{x_{\sigma(n)}} \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= (\det J_F) \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

∎

2.5 Satz. *Zu jeder offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, $q \geq 0$ und $k \geq 1$ gibt es eine eindeutig bestimmte $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $d = d_U : \Omega_k^q(U) \to \Omega_{k-1}^{q+1}(U)$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Ist $f \in \Omega_k^0(U)$ eine Funktion, so ist df das schon bekannte Differential.*
2. *Ist $\omega \in \Omega_k^p(U)$ und $\varphi \in \Omega_k^q(U)$, so ist*

$$d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^p \omega \wedge d\varphi.$$

3. *Ist $k \geq 2$ und $\omega \in \Omega_k^q(U)$, so ist $dd\omega = 0$.*

BEWEIS: 1) Eindeutigkeit:

Ist $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n} a_{i_1 \ldots i_q} \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$, so folgt:

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n} d\big(a_{i_1 \ldots i_q} \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}\big) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n} \big(da_{i_1 \ldots i_q} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} + a_{i_1 \ldots i_q} \, d(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q})\big) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n} da_{i_1 \ldots i_q} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}, \end{aligned}$$

denn es ist $d(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}) = 0$, wie ein simpler Induktionsbeweis (unter Verwendung der Eigenschaften (1), (2) und (3)) zeigt.

2) Existenz:

Wir definieren d durch die oben gewonnene Gleichung. Das ist möglich, wegen der eindeutig bestimmten Basisdarstellung der Differentialformen. Es ist klar, daß d dann linear ist, und daß df das Differential von f ist.

Wir benutzen eine abgekürzte Schreibweise:
Für ein q-Tupel $(i_1, \ldots, i_q)$ mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n$ benutzen wir einen Großbuchstaben I, an Stelle von $a_{i_1 \ldots i_q} \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$ schreiben wir $a_I \, dx_I$.

Ist $\omega = a_I\,dx_I$ und $\varphi = b_J\,dx_J$, so ist

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \varphi) &= d(a_I b_J\,dx_I \wedge dx_J) \\ &= d(a_I b_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \big[(da_I)b_J + a_I(db_J)\big] \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (da_I \wedge dx_I) \wedge (b_J dx_J) + db_J \wedge (a_I\,dx_I) \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \varphi + (-1)^p \omega \wedge d\varphi. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} ddf &= d\Big(\sum_i f_{x_i}\,dx_i\Big) \\ &= \sum_i d(f_{x_i}) \wedge dx_i \\ &= \sum_{i,j} f_{x_i x_j}\,dx_j \wedge dx_i \\ &= \sum_{j<i} \big(f_{x_i x_j} - f_{x_j x_i}\big)\,dx_j \wedge dx_i \;=\; 0. \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} dd(a_I\,dx_I) &= d(da_I \wedge dx_I) \\ &= dda_I \wedge dx_I - da_I \wedge d(dx_I) \;=\; 0. \end{aligned}$$

■

Bemerkung. Ist $V \subset U$ offen, so ergibt sich sofort aus der Definition:

$$d(\omega|_V) = (d\omega)|_V.$$

2.6 Satz. *Ist $F : U \to V$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung und $\omega \in \Omega^q_{k-1}(V)$, so ist*

$$d(F^*\omega) = F^*(d\omega).$$

Beweis: Sei $\omega = a\,dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_q}$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(F^*\omega) &= d((a \circ F)\,dF_{i_1} \wedge \ldots \wedge dF_{i_q}) \\ &= d(a \circ F) \wedge dF_{i_1} \wedge \ldots \wedge dF_{i_q} + (a \circ F)\,d(dF_{i_1} \wedge \ldots \wedge dF_{i_q}) \\ &= F^*(da) \wedge F^*(dy_{i_1}) \wedge \ldots \wedge F^*(dy_{i_q}) \\ &= F^*(da \wedge dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_q}) \;=\; F^*(d\omega). \end{aligned}$$

■

2.7 Satz. *$F : U \to V$ und $G : V \to W$ seien $\mathcal{C}^k$-Abbildungen, $\omega \in \Omega^q_{k-1}(W)$. Dann ist*

$$(G \circ F)^*\omega = F^*(G^*\omega).$$

BEWEIS:

$$\begin{aligned}(G \circ F)^*\omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) &= \omega(G \circ F(\mathbf{x}), D(G \circ F)(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1), \ldots, D(G \circ F)(\mathbf{x})(\mathbf{v}_q)) \\ &= G^*\omega(F(\mathbf{x}), DF(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1), \ldots, DF(\mathbf{x})(\mathbf{v}_q)) \\ &= F^*(G^*\omega)(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q).\end{aligned}$$

■

Für den Rest dieses Paragraphen betrachten wir nur den $\mathcal{C}^\infty$-Fall. Dabei sei $\Omega^q(U) := \Omega^q_\infty(U)$, und $\mathcal{V}(U)$ sei der Raum der $\mathcal{C}^\infty$-Vektorfelder auf U. Dann werden die „musikalischen Isomorphismen“ $\flat : \mathcal{V}(U) \to \Omega^1(U)$ und $\sharp : \Omega^1(U) \to \mathcal{V}(U)$ definiert durch $\xi^\flat := \lambda_\xi$ und $\sharp := \flat^{-1}$. Dann ist

$$\xi^\flat = \xi_1\, dx_1 + \cdots + \xi_n\, dx_n, \text{ für } \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

2.8 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gibt es genau einen Isomorphismus*

$$* : \Omega^1(U) \to \Omega^{n-1}(U),$$

so daß für alle Vektorfelder ξ, η auf U gilt:

$$\xi^\flat \wedge *(\eta^\flat) = (\xi \bullet \eta)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

BEWEIS: 1) Eindeutigkeit: Wenn es den Isomorphismus $*$ gibt, dann gilt:

$$dx_i \wedge *dx_i = \mathbf{e}_i^\flat \wedge *(\mathbf{e}_i^\flat) = dx_1 \wedge \ldots dx_n,$$

also

$$*dx_i = (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

2) Wird umgekehrt $*$ auf diese Weise definiert, so ist

$$\begin{aligned}\xi^\flat \wedge *(\eta^\flat) &= \sum_{i,j} \xi_i \eta_j (-1)^{j-1}\, dx_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= \Big(\sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i\Big)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.\end{aligned}$$

■

2.9 Folgerung.

$$*(\xi^\flat) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \xi_i \, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n = \Lambda_\xi .$$

Im Falle $n = 3$ ist

$$*dx_1 = dx_2 \wedge dx_3, \quad *dx_2 = dx_3 \wedge dx_1 \quad \text{und} \quad * \, dx_3 = dx_1 \wedge dx_2 .$$

Wir benutzen dies, um die Operatoren der klassischen Vektoranalysis einzuführen. Dabei wird $dV := dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ als *Volumenelement* bezeichnet.

Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, f eine differenzierbare Funktion auf U und ξ, η Vektorfelder auf U. Dann werden die Vektorfelder $\mathbf{grad}\, f$ und $\mathbf{rot}\, \xi$, sowie die Funktion $\mathbf{div}\, \eta$ definiert durch

$$df = (\mathbf{grad}\, f)^\flat, \quad d(\xi^\flat) = *((\mathbf{rot}\, \xi)^\flat) \quad \text{und} \quad d(*(\eta^\flat)) = (\mathbf{div}\, \eta)\, dV .$$

2.10 Satz. *In Koordinaten ist*

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}\, f &= (f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}), \\
\mathbf{rot}\, \xi &= (D_2(\xi_3) - D_3(\xi_2), D_3(\xi_1) - D_1(\xi_3), D_1(\xi_2) - D_2(\xi_1)) \\
\mathbf{div}\, \eta &= (\eta_1)_{x_1} + (\eta_2)_{x_2} + (\eta_3)_{x_3} .
\end{aligned}$$

Beweis: Die erste Formel ist trivial, offensichtlich ist

$$df = f_{x_1}\, dx_1 + f_{x_2}\, dx_2 + f_{x_3}\, dx_3 = (f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3})^\flat .$$

Ist $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ und $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, so gilt:

$$\begin{aligned}
d(\xi^\flat) &= d(\xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2 + \xi_3 dx_3) \\
&= d\xi_1 \wedge dx_1 + d\xi_2 \wedge dx_2 + d\xi_3 \wedge dx_3 \\
&= D_2(\xi_1) dx_2 \wedge dx_1 + D_3(\xi_1) dx_3 \wedge dx_1 + D_1(\xi_2) dx_1 \wedge dx_2 \\
&\quad + D_3(\xi_2) dx_3 \wedge dx_2 + D_1(\xi_3) dx_1 \wedge dx_3 + D_2(\xi_3) dx_2 \wedge dx_3 \\
&= (D_2(\xi_3) - D_3(\xi_2)) dx_2 \wedge dx_3 + (D_3(\xi_1) - D_1(\xi_3)) dx_3 \wedge dx_1 \\
&\quad + (D_1(\xi_2) - D_2(\xi_1)) dx_1 \wedge dx_2 \\
&= *(D_2(\xi_3) - D_3(\xi_2), D_3(\xi_1) - D_1(\xi_3), D_1(\xi_2) - D_2(\xi_1))^\flat .
\end{aligned}$$

Und schließlich ist

$$\begin{aligned}
d(*(\eta^\flat)) &= d(\eta_1 dx_2 \wedge dx_3 + \eta_2 dx_3 \wedge dx_1 + \eta_3 dx_1 \wedge dx_2) \\
&= d\eta_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + d\eta_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + d\eta_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\
&= ((\eta_1)_{x_1} + (\eta_2)_{x_2} + (\eta_3)_{x_3}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \, .
\end{aligned}$$

∎

2.11 Satz. *Sei f eine differenzierbare Funktion und ξ ein Vektorfeld. Dann gilt:*

1. $\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\, f = (0,0,0)$.
2. $\mathbf{div}\,\mathbf{rot}\,\xi = 0$.

BEWEIS:

1) $0 = ddf = d((\mathbf{grad}\, f)^\flat) = *((\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\, f)^\flat)$, also $\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\, f = (0,0,0)$.

2) $0 = dd(\xi^\flat) = d(*(\mathbf{rot}\,\xi)^\flat) = (\mathbf{div}\,\mathbf{rot}\,\xi)dV$, also $\mathbf{div}\,\mathbf{rot}\,\xi = 0$. ∎

In der Notation des vorigen Paragraphen ist

$$\xi^\flat(\eta) = \lambda_\xi(\eta) = \xi \bullet \eta \quad \text{und} \quad *\,\xi^\flat(\eta,\zeta) = \Lambda_\xi(\eta,\zeta) = \xi \bullet (\eta \times \zeta),$$

also $\xi^\flat \wedge \eta^\flat = *((\xi \times \eta)^\flat)$.

Außerdem haben wir das folgende „kommutative Diagramm“ :

$$\begin{array}{ccccccc}
\{\text{0-Formen}\} & \xrightarrow{d} & \{\text{1-Formen}\} & \xrightarrow{d} & \{\text{2-Formen}\} & \xrightarrow{d} & \{\text{3-Formen}\} \\
\| & & \uparrow \flat & & \uparrow *\flat & & \uparrow \cdot dV \\
\{\text{Funktionen}\} & \xrightarrow{\mathbf{grad}} & \{\text{Vektorfelder}\} & \xrightarrow{\mathbf{rot}} & \{\text{Vektorfelder}\} & \xrightarrow{\mathbf{div}} & \{\text{Funktionen}\}
\end{array}$$

Die „Kommutativität“ bedeutet:

$$(\nabla f)^\flat = df, \quad *((\mathbf{rot}\,\xi)^\flat) = d(\xi^\flat), \quad \text{und} \quad \mathbf{div}(\eta)\, dV = d(*\eta^\flat).$$

Die einfachen Rechenregeln für die Poincaré-Ableitung d und das obige kommutative Diagramm liefern uns für viele Formeln besonders einfache Beweise.

2.12 Formeln der klassischen Vektoranalysis. *Sei f eine differenzierbare Funktion, ξ und η Vektorfelder. Dann gilt:*

1. $\mathbf{rot}(f \cdot \xi) = f \cdot \mathbf{rot}(\xi) + \mathbf{grad}\, f \times \xi$.
2. $\mathbf{div}(\xi \times \eta) = \mathbf{rot}\,\xi \bullet \eta - \xi \bullet \mathbf{rot}\,\eta$.
3. $\mathbf{div}(f \cdot \xi) = \mathbf{grad}\, f \bullet \xi + f \cdot \mathbf{div}\,\xi$.

BEWEIS: Wir benutzen die Tatsache, daß $*$ und $\flat$ Isomorphismen sind, mit

$$*(f \cdot \xi) = f * \xi \text{ und } (f \cdot \xi)^\flat = f \cdot \xi^\flat.$$

1) Es ist

$$\begin{aligned}
*(\mathbf{rot}(f \cdot \xi))^\flat &= d((f \cdot \xi)^\flat) \;=\; d(f \cdot \xi^\flat) \\
&= df \wedge \xi^\flat + f\, d(\xi^\flat) \\
&= (\mathbf{grad}\, f)^\flat \wedge \xi^\flat + f\; *(\mathbf{rot}\,\xi)^\flat \\
&= *\big((\mathbf{grad}\, f \times \xi)^\flat + f \cdot (\mathbf{rot}\,\xi)^\flat\big) \\
&= *(\mathbf{grad}\, f \times \xi + f \cdot \mathbf{rot}\,\xi)^\flat.
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\mathbf{div}(\xi \times \eta)\, dV &= d(*(\xi \times \eta)^\flat) \\
&= d(\xi^\flat \wedge \eta^\flat) \\
&= d\xi^\flat \wedge \eta^\flat - \xi^\flat \wedge d\eta^\flat \\
&= *(\mathbf{rot}\,\xi)^\flat) \wedge \eta^\flat - \xi^\flat \wedge *(\mathbf{rot}\,\eta)^\flat \\
&= (\mathbf{rot}\,\xi \bullet \eta - \xi \bullet \mathbf{rot}\,\eta)\, dV.
\end{aligned}$$

3) Schließlich gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{div}(f \cdot \xi)\, dV &= d(*(f \cdot \xi)^\flat) \;=\; d(f \;*\xi^\flat) \\
&= df \wedge *\xi^\flat + f\, d*(\xi^\flat) \\
&= (\mathbf{grad}\, f \bullet \xi + f \cdot \mathbf{div}\,\xi)\, dV.
\end{aligned}$$

■

Man kann darüber streiten, ob diese Methode einfacher als das direkte Nachrechnen ist. Allerdings kann man rasch Routine im Umgang mit d, $*$ und $\flat$ gewinnen, und die Gefahr, sich zu verrechnen, ist wesentlich geringer, als wenn man etwa $\mathbf{div}(\xi \times \eta)$ in Koordinaten ausrechnen müßte.

§ 3 Das Poincarésche Lemma

Ist $\omega = d\varphi$, so ist $d\omega = dd\varphi = 0$. Wir wollen nun zeigen, daß in gewissen Fällen auch die Umkehrung gilt. Dazu erinnern wir uns: Ein Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig* bezüglich eines Punktes $\mathbf{x}_0 \in U$, falls mit jedem Punkt $\mathbf{x} \in U$ auch die gesamte Verbindungsstrecke zwischen $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{x}$ zu U gehört. Der Einfachheit halber betrachten wir nur $\mathcal{C}^\infty$-Formen.

3.1 Lemma von Poincaré. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig bezüglich $\mathbf{0}$. Ist $\omega \in \Omega^q(U)$ und $d\omega = 0$, so gibt es eine Differentialform $\varphi \in \Omega^{q-1}(U)$ mit $d\varphi = \omega$.*

Beweis: Die Idee des Beweises ist relativ einfach: Wir konstruieren eine Abbildung

$$I : \Omega^q(U) \to \Omega^{q-1}(U) \quad \text{mit} \quad \omega = I(d\omega) + d(I\omega).$$

Ist dann $d\omega = 0$, so ist $\omega = d(I\omega)$.

Es reicht, Formen vom Typ $\omega = a(\mathbf{x})\,dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$ zu betrachten. Dann setzen wir

$$I\omega := \Big(\int_0^1 t^{q-1} a(t\mathbf{x})\,dt\Big)\, P_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x}),$$

mit

$$P_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j-1} x_{i_j}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}.$$

Es ist $d(P_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x})) = q \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$, und für festes t ist

$$\frac{\partial}{\partial x_j} a(t\mathbf{x}) = \sum_{\nu=1}^{n} D_\nu a(t\mathbf{x}) \cdot D_j(tx_\nu) = t \cdot D_j a(t\mathbf{x}).$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
d(I\omega) &= d\Big(\int_0^1 t^{q-1} a(t\mathbf{x})\,dt\Big) \wedge P_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x}) \\
&\quad + \Big(\int_0^1 t^{q-1} a(t\mathbf{x})\,dt\Big) \cdot dP_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^{q-1} \frac{\partial}{\partial x_j} a(t\mathbf{x})\,dt\Big)\, dx_j \wedge P_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x}) \\
&\quad + \Big(\int_0^1 q t^{q-1} a(t\mathbf{x})\,dt\Big) \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^{q} D_j a(t\mathbf{x})\,dt\Big)\, dx_j \wedge P_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x}) \\
&\quad + \Big(\int_0^1 q t^{q-1} a(t\mathbf{x})\,dt\Big) \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}.
\end{aligned}$$

Weiter ist

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} D_j a(\mathbf{x})\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}.$$

Um $I(d\omega)$ zu berechnen, müssen wir $d\omega$ erst mal in Normalform bringen. Ist $j \in \{i_1, \ldots, i_q\}$, so fällt der j-te Summand weg. Ist $\{j, i_1, \ldots, i_q\} = \{k_1, \ldots, k_{q+1}\}$ mit $1 \leq k_1 < \ldots < k_{q+1} \leq n$, so gibt es ein $\mu \in \{1, 2, \ldots, q+1\}$ mit $j = k_\mu$. Dann ist

$$\delta(j, i_1, \ldots, i_q) = (-1)^{\mu-1}$$

und daher

$$dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} = (-1)^{\mu-1}\, dx_{k_1} \wedge \ldots \wedge dx_{k_{q+1}}.$$

Ist $\nu < \mu$, so ist $k_\nu = i_\nu$. Ist $\nu > \mu$, so ist $k_\nu = i_{\nu-1}$. Daraus folgt:

$$dx_{k_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{k_\nu}} \wedge \ldots \wedge dx_{k_{q+1}} = \\ = \begin{cases} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} & \text{falls } \nu = \mu, \\ (-1)^{\mu-2} dx_j \wedge (dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\nu}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}) & \text{falls } \nu < \mu, \\ (-1)^{\mu-1} dx_j \wedge (dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_{\nu-1}}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}) & \text{falls } \nu > \mu, \end{cases}$$

also

$$\begin{aligned} P_{k_1 \ldots k_{q+1}}(\mathbf{x}) &= \sum_{\nu=1}^{q+1} (-1)^{\nu-1} x_{k_\nu}\, dx_{k_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{k_\nu}} \wedge \ldots \wedge dx_{k_{q+1}} \\ &= \delta(j, i_1, \ldots, i_q) \Big[x_j\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \\ &\quad - \sum_{\nu=1}^{\mu-1} (-1)^{\nu-1} x_{i_\nu}\, dx_j \wedge \big(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\nu}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \big) \\ &\quad + \sum_{\nu=\mu+1}^{q+1} (-1)^{\nu-1} x_{i_{\nu-1}}\, dx_j \wedge \big(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_{\nu-1}}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \big) \Big] \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} I(d\omega) &= \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^q (D_j a)(t\mathbf{x})\, dt \Big) \delta(j, i_1, \ldots, i_q)\, P_{k_1 \ldots k_{q+1}}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^q (D_j a)(t\mathbf{x})\, dt \Big) x_j\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{q} (-1)^\nu \Big(\int_0^1 t^q (D_j a)(t\mathbf{x})\, dt \Big) x_{i_\nu}\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\nu}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \\ &= \left(\int_0^1 \Big(t^q \cdot \sum_{j=1}^{n} (D_j a)(t\mathbf{x}) x_j \Big)\, dt \right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^q (D_j a)(t\mathbf{x})\, dt \Big)\, dx_j \wedge P_{i_1 \ldots i_q}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Zusammen erhält man:

$$
\begin{aligned}
d(I\omega) + I(d\omega) \;=&\\
=\;& \left(\int_0^1 \Big(qt^{q-1}a(t\mathbf{x}) + t^q \cdot \sum_{j=1}^{n} (D_j a)(t\mathbf{x})x_j\Big)\,dt\right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}\\
& + \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^q D_j a(t\mathbf{x})\,dt\Big)\,dx_j \wedge P_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x})\\
& - \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^q (D_j a)(t\mathbf{x})\,dt\Big)\,dx_j \wedge P_{i_1\ldots i_q}(\mathbf{x})\\
=\;& \left(\int_0^1 \frac{d}{dt}\Big(t^q a(t\mathbf{x})\Big)\,dt\right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \;=\; \omega.
\end{aligned}
$$

∎

Definition. Eine Differentialform ω der Dimension p heißt *geschlossen*, falls $d\omega = 0$ ist. Sie heißt *exakt*, wenn es eine Differentialform φ der Dimension $p-1$ mit $d\varphi = \omega$ gibt.

Offensichtlich ist jede exakte Differentialform geschlossen, das folgt aus der Formel $dd\omega = 0$. Auf einer sternförmigen Menge ist auch jede geschlossene Differentialform exakt.

Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so hat man folgende Sequenz von linearen Abbildungen:

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Omega^n(U) \longrightarrow 0.$$

Weil $d \circ d = 0$ ist, ist $\mathrm{Im}(d : \Omega^{q-1}(U) \to \Omega^q(U)) \subset \mathrm{Ker}(d : \Omega^q(U) \to \Omega^{q+1}(U))$. Der Vektorraum

$$H^q(U) := \mathrm{Ker}(d : \Omega^q(U) \to \Omega^{q+1}(U)) / \mathrm{Im}(d : \Omega^{q-1}(U) \to \Omega^q(U))$$

heißt *q-te de Rham Gruppe* von U (für $q \geq 1$).

Ist U sternförmig, so verschwinden alle de Rham Gruppen. Im allgemeinen hängt $H^q(U)$ nur von der topologischen Struktur von U ab.