

# Analysis 3

## Kapitel 1 Ergänzungen zur Lebesgue-Theorie

Vorlesungsausarbeitung zum WS 2001/02

von Prof. Dr. Klaus Fritzsche

### Inhaltsverzeichnis

§1	Steilkurs zum Lebesgue-Integral .....	2
§2	Die Transformationsformel .....	7
§3	Integralberechnungen .....	16
§3	Der Satz von Sard .....	22

## § 1 Steilkurs zum Lebesgue-Integral

In diesem Paragraphen gebe ich eine kurze Einführung in den Lebesgueschen Integralbegriff. Der Aufbau unterscheidet sich etwas von dem in Analysis 2, aber die Ergebnisse stimmen natürlich überein. Da ich hier auf alle Beweise verzichte, kann ich auch viele technische Details weglassen und erhalte so eine sehr übersichtliche Darstellung.

Unter einem *Quader* im  $\mathbb{R}^n$  versteht man eine Menge der Gestalt

$$Q = I_1 \times \dots \times I_n,$$

wobei die  $I_\nu$  beliebige beschränkte Intervalle sind. Wir lassen auch „entartete“ Intervalle zu, die leer sind oder nur aus einem Punkt bestehen. Sind  $a_\nu \leq b_\nu$  die beiden Endpunkte des Intervalls  $I_\nu$ , so heißt die Zahl  $l(I_\nu) := b_\nu - a_\nu$  die *Länge* von  $I_\nu$ , und die Zahl

$$v_n(Q) := l(I_1) \cdot \dots \cdot l(I_n)$$

heißt das (*n-dimensionale*) *Volumen* von  $Q$ .

Unter einer *Quadersumme* verstehen wir eine endliche Vereinigung von Quadern. Jede Quadersumme  $S$  kann in disjunkte Teilquader zerlegt werden. Man definiert dann das *Volumen*  $v_n(S)$  als Summe der Volumina aller Teilquader. Die Wahl der Zerlegung spielt dabei keine Rolle.

Ist  $G \subset \mathbb{R}^n$  **offen**, so setzt man

$$v_n(G) := \sup\{v_n(S) : S \text{ Quadersumme mit } S \subset G\}.$$

Diese Zahl darf auch den Wert  $+\infty$  annehmen. Ist  $G$  beschränkt, so ist  $v_n(G) < \infty$ .

Ist  $K \subset \mathbb{R}^n$  **kompakt**, so setzt man

$$v_n(K) := \inf\{v_n(S) : S \text{ Quadersumme mit } K \subset \overset{\circ}{S}\}.$$

Das Volumen einer kompakten Menge ist stets endlich.

Ist nun  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine beliebige **beschränkte** Menge, so definiert man das *innere Maß*  $\mu_*(M)$  und das *äußere Maß*  $\mu^*(M)$  durch

$$\begin{aligned} \mu_*(M) &:= \sup\{v_n(K) : K \text{ kompakt und } K \subset M\} \\ \text{und } \mu^*(M) &:= \inf\{v_n(G) : G \text{ offen und } M \subset G\}. \end{aligned}$$

Man sieht sofort, daß die hier gegebene Definition des äußeren Maßes mit der aus Analysis 2 übereinstimmt:

$$\mu^*(M) = \inf\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} v_n(Q_\nu) : Q_\nu \text{ Quader mit } M \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu\right\}.$$

**Definition.** Eine beschränkte Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt *(Lebesgue-)meßbar*, falls  $\mu_*(M) = \mu^*(M)$  ist. Der gemeinsame Wert  $\mu_n(M)$  wird das *(Lebesguesche) Maß* von  $M$  genannt.

Im allgemeinen ist stets  $\mu_*(M) \leq \mu^*(M)$ . Kompakte und beschränkte offene Mengen, sowie Quadersummen sind immer meßbar, und ihr Maß stimmt mit ihrem Volumen überein.

**1.1 Satz.** Eine beschränkte Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann meßbar, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine kompakte Menge  $K$  und eine offene Menge  $G$  gibt, so daß gilt:

1.  $K \subset M \subset G$ .
2.  $v_n(G \setminus K) < \varepsilon$ .

Ist  $R > 0$ , so setzen wir

$$Q_R := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |x_\nu| < R \text{ für } \nu = 1, \dots, n\}.$$

**Definition.** Eine beliebige Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt *meßbar*, falls  $M \cap Q_R$  für jedes  $R > 0$  meßbar ist.

Der Grenzwert  $\mu_n(M) := \lim_{R \rightarrow \infty} \mu_n(M \cap Q_R)$  wird als *Lebesguesches Maß* von  $M$  bezeichnet. Ist  $\mu_n(M) < \infty$ , so nennen wir  $M$  *endlich-meßbar*.

Ist  $\mu_n(M) = 0$ , so heißt  $M$  eine *Nullmenge*.

Ein System  $\mathcal{M}$  von Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  heißt eine  *$\sigma$ -Algebra*, falls gilt:

1.  $\emptyset \in \mathcal{M}$ .
2. Ist  $A \in \mathcal{M}$ , so ist auch das Komplement  $X \setminus A \in \mathcal{M}$ .
3. Ist  $(A_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare Familie in  $\mathcal{M}$ , so ist auch  $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \in \mathcal{M}$ .

Man kann zeigen, daß die meßbaren Mengen eine  $\sigma$ -Algebra bilden, und daß das Lebesgue-Maß  $\sigma$ -additiv ist: Sind die Mengen  $A_\nu$  meßbar und paarweise disjunkt, so ist auch ihre Vereinigung  $A$  meßbar, und es gilt:

$$\mu_n\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_n(A_\nu).$$

Die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die alle offenen (und alle abgeschlossenen) Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  enthält, nennt man die *Borel algebra*  $\mathcal{B}$ . Ihre Elemente heißen *Borelmengen*. Abzählbare Vereinigungen von kompakten Mengen und abzählbare Durchschnitte von offenen Mengen sind spezielle Borelmengen.

**1.2 Satz.** Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann meßbar, wenn sie Vereinigung einer Borelmenge und einer Nullmenge ist.

Borelmengen sind vergleichsweise „schön“. Die Komplikationen kommen bei den meßbaren Mengen über die Nullmengen herein. Da diese aber das Maß Null haben, kann man sie oft ignorieren. Man sagt, eine Eigenschaft sei *fast überall* erfüllt, wenn sie es außerhalb einer Nullmenge ist. Teilmengen und abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind wieder Nullmengen.

**Definition.** Eine Funktion  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *einfach*, falls gilt:

1.  $\varphi$  nimmt nur endlich viele Werte an.
2. Ist  $c \neq 0$ , so ist  $\varphi^{-1}(c)$  endlich-meßbar.

Die einfachen Funktionen stellen eine Verallgemeinerung der Treppenfunktionen dar. Sie sind endliche Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen paarweise disjunkter endlich-meßbarer Mengen.

Ist  $\varphi = c_1\chi_{M_1} + \dots + c_q\chi_{M_q}$  eine einfache Funktion (mit paarweise disjunkten endlich-meßbaren Mengen  $M_\nu$ ), so setzt man

$$\int \varphi d\mu_n := \sum_{\nu=1}^q c_\nu \cdot \mu_n(M_\nu).$$

Das Integral hängt nicht von der Darstellung von  $\varphi$  ab.

**Definition.** Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  heißt *meßbar*, falls für jedes  $c \in \mathbb{R}$  die Menge  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \geq c\}$  meßbar ist.

Es sind dann auch die Mengen  $\{f < c\}$ ,  $\{f > c\}$  und  $\{f \leq c\}$  meßbar.

**1.3 Satz.** Ist  $f \geq 0$  eine meßbare Funktion, so gibt es eine monoton wachsende Folge  $(\varphi_\nu)$  von einfachen Funktionen, die punktweise gegen  $f$  konvergiert. Der Wert

$$\int f d\mu_n := \sup\left\{\int \varphi_\nu d\mu_n : \nu \in \mathbb{N}\right\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

hängt nicht von der speziellen Folge  $(\varphi_\nu)$  ab.

**Definition.** Sei  $f \geq 0$  eine meßbare Funktion auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Ist  $\int f d\mu_n < \infty$ , so heißt  $f$  *integrierbar*.

**Bemerkung.** In Analysis 2 haben wir die Integrierbarkeit definiert, ohne den Begriff der Meßbarkeit zu verwenden. Allerdings haben wir später bewiesen, daß jede integrierbare Funktion meßbar ist, und daß eine meßbare Funktion genau dann integrierbar ist, wenn  $\int |f| d\mu_n < \infty$  ist.

**1.4 Satz.** Ist  $f \geq 0$  eine beschränkte meßbare Funktion mit kompaktem Träger (also  $f = 0$  außerhalb einer kompakten Menge), so ist  $f$  integrierbar. Ist  $f$  sogar fast überall stetig, so ist  $f$  im Riemannsches Sinne integrierbar.

Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  beliebig, so setzen wir  $f^+ := \max(f, 0)$  und  $f^- := -\min(f, 0)$ . Dann ist  $f = f^+ - f^-$ . Die Funktion  $f$  heißt *integrierbar*, falls  $f$  meßbar ist und  $f^+$  und  $f^-$  integrierbar sind, und dann setzt man

$$\int f d\mu_n := \int f^+ d\mu_n - \int f^- d\mu_n.$$

**1.5 Satz von B. Levi (von der monotonen Konvergenz).** Sei  $(f_\nu)$  eine Folge nicht-negativer meßbarer Funktionen. Dann ist

$$\int \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \right) d\mu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int f_\nu d\mu.$$

Sind alle  $f_\nu$  integrierbar und ist die rechte Seite der Gleichung endlich, so konvergiert  $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$  fast überall gegen eine integrierbare Funktion.

**1.6 Lebesguescher Satz von der dominierten Konvergenz.** Sei  $(f_\nu)$  eine Folge von meßbaren Funktionen, die fast überall punktweise gegen eine Grenzfunktion  $f$  konvergiert. Außerdem gebe es eine integrierbare Funktion  $g$ , so daß  $|f_\nu(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x})$  für alle  $\nu$  und fast alle  $\mathbf{x}$  ist.

Dann sind die  $f_\nu$  und  $f$  integrierbar, und es gilt:

$$\int f d\mu_n = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int f_\nu d\mu_n.$$

Meßbare (bzw. integrierbare) Funktionen können auf einer Nullmenge abgeändert werden, ohne daß sich etwas an der Meßbarkeit (bzw. Integrierbarkeit) ändert.

**1.7 Satz von Cavalieri.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$  meßbar (bzw. eine Nullmenge). Dann ist der „Schnitt“

$$M_{\mathbf{y}} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M\}$$

für fast alle  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  meßbar (bzw. eine Nullmenge). Weiter ist die Funktion

$$f_M(\mathbf{y}) := \begin{cases} \mu_n(M_{\mathbf{y}}) & \text{falls } M_{\mathbf{y}} \text{ meßbar,} \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

meßbar, und es gilt:

$$\mu_{n+m}(M) = \int_{\mathbb{R}^m} f_M(\mathbf{y}) d\mu_m(\mathbf{y}).$$

Ist sogar  $\mu_{n+m}(M) < \infty$ , so ist  $f_M$  integrierbar.

**1.8 Satz von Fubini.** Sei  $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Dann gibt es eine Nullmenge  $N \subset \mathbb{R}^m$ , so daß gilt:

1. Für alle  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \setminus N$  ist die Funktion  $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  über  $\mathbb{R}^n$  integrierbar.
2. Ist  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$F(\mathbf{y}) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mu_n(\mathbf{x}) & \text{für } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \setminus N \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so ist  $F$  (über  $\mathbb{R}^m$ ) integrierbar, und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^m} F(\mathbf{y}) d\mu_m(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mu_{n+m}.$$

Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine nicht-negative Funktion, so ist die *Ordinatenmenge* von  $f$  gegeben durch

$$M^f := \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq t < f(\mathbf{x})\}.$$

**1.9 Satz.** Sei  $f$  meßbar (bzw. integrierbar). Dann ist  $M^f$  meßbar (bzw. endlichmeßbar) und

$$\mu_{n+1}(M^f) = \int f d\mu_n.$$

## § 2 Die Transformationsformel

**2.1 Satz.** Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $A \subset B$  eine Nullmenge und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar. Dann ist auch  $f(A)$  eine Nullmenge.

BEWEIS: Aus der stetigen Differenzierbarkeit von  $f$  und dem Schrankensatz folgt, daß  $f$  lokal Lipschitz-stetig ist. Da es reicht, für jeden Quader  $Q$  zu zeigen, daß  $f(A \cap Q)$  eine Nullmenge ist, können wir annehmen, daß es eine Konstante  $C > 0$  gibt, so daß gilt:

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq C \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \text{ für } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B.$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Es gibt eine Folge  $(W_k)$  von Würfeln mit

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(W_k) < \varepsilon.$$

Dann gibt es Würfel  $W'_k$  mit  $\mu_n(W'_k) \leq C^n \cdot \mu_n(W_k)$  und  $f(A) \subset \bigcup_k W'_k$ . Also ist  $\mu_n(f(A)) \leq C^n \cdot \varepsilon$ . Das bedeutet, daß  $f(A)$  eine Nullmenge ist. ■

Ziel dieses Abschnittes ist es, den folgenden Satz zu beweisen:

**2.2 Die Transformationsformel.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\varphi : U \rightarrow V$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus auf eine offene Menge  $V \subset \mathbb{R}^n$ .

1. Eine Funktion  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann integrierbar, wenn

$$(f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi| : U \rightarrow \mathbb{R}$$

integrierbar ist.

2. Ist  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, so ist

$$\int_V f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_U f \circ \varphi(\mathbf{x}) |\det D\varphi(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}.$$

Zunächst betrachten wir die

**2.3 Spezielle Transformationsformel.** Wie oben sei  $\varphi : U \rightarrow V$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus. Ist  $A \subset U$  meßbar mit endlichem Maß, so ist auch  $\varphi(A)$  meßbar, und es gilt:

$$\mu_n(\varphi(A)) = \int_A |\det D\varphi(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}.$$

**Bemerkung.** Da  $\varphi : U \rightarrow V$  ein Homöomorphismus ist, induziert  $\varphi$  eine Bijektion zwischen den Borel-Algebren  $\mathcal{B}(U)$  und  $\mathcal{B}(V)$ . Da  $\varphi$  als  $\mathcal{C}^1$ -Abbildung außerdem

Nullmengen auf Nullmengen abbildet, ist das Bild einer meßbaren Menge unter  $\varphi$  wieder meßbar.

**2.4 Satz.** *Sei  $\varphi$  ein fester  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus. Die Transformationsformel gilt genau dann für jede integrierbare Funktion  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn die spezielle Transformationsformel für jede meßbare Menge  $A \subset U$  mit endlichem Maß gilt.*

BEWEIS: Gilt die allgemeine Transformationsformel, so ergibt sich die spezielle, indem man  $f = \chi_{\varphi(A)}$  setzt.

Sei umgekehrt die spezielle Transformationsformel bewiesen. Da in der allgemeinen Formel beide Seiten linear in  $f$  sind, folgt sie sofort für einfache Funktionen.

Ist  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  eine nicht-negative integrierbare Funktion, so gibt es eine monoton wachsende Folge von einfachen Funktionen  $\tau_\nu$ , die punktweise gegen  $f$  konvergiert, und dann ist

$$\int_V f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_V \tau_\nu(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

Dabei ist  $\int_V \tau_\nu(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_U \tau_\nu \circ \varphi(\mathbf{x}) |\det D\varphi(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}$ , und die Folge der integrierbaren Funktionen  $g_\nu := (\tau_\nu \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|$  konvergiert monoton wachsend gegen  $(f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|$ . Da die Folge der Integrale beschränkt bleibt, folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz (B. Levi), daß  $(f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|$  über  $U$  integrierbar ist, und die Integrale  $\int_U g_\nu(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$  konvergieren gegen  $\int_U f \circ \varphi(\mathbf{x}) |\det D\varphi(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}$ .

Ist  $f = f^+ - f^-$  eine beliebige integrierbare Funktion, so folgt die Behauptung wieder aus der Linearität beider Seiten. Und daß aus der Integrierbarkeit der Funktion  $(f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|$  auch die Integrierbarkeit von  $f$  folgt, erhält man aus den obigen Betrachtungen, indem man  $\varphi$  durch  $\varphi^{-1}$  ersetzt. ■

**2.5 Satz.** *Gilt die spezielle Transformationsformel für jeden Quader  $Q$  mit  $\overline{Q} \subset U$ , so gilt sie auch für jede meßbare Menge  $A \subset U$  (mit endlichem Maß).*

BEWEIS: Wir zeigen den Satz in mehreren Schritten. Dabei verwenden wir die folgende Abkürzung:

$E(A)$  bedeutet: Die spezielle Transformationsformel ist wahr für  $A$ .

1) Ist  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  eine disjunkte Vereinigung von meßbaren Mengen (und selbst von endlichem Maß) und gilt  $E(A_i)$  für jedes  $i$ , so gilt auch  $E(A)$ .

Diese Aussage folgt aus der Bijektivität von  $\varphi$  und der  $\sigma$ -Additivität des Lebesgue-Maßes.



2) Ist  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$  eine absteigende Folge endlich-meßbarer Mengen und gilt  $E(A_i)$  für jedes  $i$ , so gilt auch  $E\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$ .

Das folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz (B. Levi). Die Konvergenz ist hier absteigend, und die Folge der Integrale ist nach unten durch Null beschränkt.

3) Jede offene Menge  $M \subset U$  ist disjunkte Vereinigung von Quadern  $Q$  mit  $\overline{Q} \subset M$ . Aus der Voraussetzung und (1) folgt also  $E(M)$  für jede offene Menge  $M$ . Wegen (2) gilt dann auch  $E(G)$  für jede  $G_\delta$ -Menge (abzählbarer Durchschnitt von offenen Mengen) mit endlichem Maß.

4) Jede meßbare Menge  $A$  mit endlichem Maß kann in der Form  $A = G \cup N$  geschrieben werden, wobei  $G$  eine  $G_\delta$ -Menge mit  $\mu(G) < \infty$ ,  $N$  eine Nullmenge und  $G \cap N = \emptyset$  ist. Da  $E(G)$  und  $E(N)$  gelten, erhalten wir schließlich  $E(A)$ . ■

**Bemerkung.** Ist  $Q$  ein beliebiger Quader, so ist  $N := \overline{Q} \setminus Q$  eine Nullmenge und daher  $\mu(\varphi(\overline{Q})) = \mu(\varphi(Q))$ , sowie

$$\int_{\overline{Q}} |\det D\varphi(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = \int_Q |\det D\varphi(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \int_N |\det D\varphi(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = \int_Q |\det D\varphi(\mathbf{x})| d\mathbf{x}.$$

Es reicht deshalb,  $E(Q)$  für jeden abgeschlossenen Quader  $Q \subset U$  zu zeigen.

**2.6 Satz.** Die allgemeine Transformationsformel gilt im Falle  $n = 1$ .

**BEWEIS:** Es reicht, die spezielle Transformationsformel für jedes abgeschlossene Intervall  $I = [a, b]$  zu beweisen. Dazu sei  $\varphi(I) = [c, d]$ . Da  $\varphi$  ein Diffeomorphismus ist, ist  $\varphi'(t) \neq 0$  für alle  $t$ . Also ist entweder  $\varphi' \geq 0$ ,  $\varphi(a) = c$  und  $\varphi(b) = d$ , oder  $\varphi' \leq 0$ ,  $\varphi(a) = d$  und  $\varphi(b) = c$ . Im ersten Fall ist  $\mu_1(\varphi(I)) = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi'(t) dt = \int_a^b |\varphi'(t)| dt$  (denn  $\varphi'(t) \geq 0$ ). Im zweiten Fall ist

$$\mu_1(\varphi(I)) = \varphi(a) - \varphi(b) = - \int_a^b \varphi'(t) dt = \int_a^b |\varphi'(t)| dt.$$

Damit ist alles gezeigt. ■

**2.7 Satz.** Ist  $\varphi$  eine Permutation der Koordinaten, so gilt die spezielle (und damit auch die allgemeine) Transformationsformel.

**BEWEIS:** Sei  $\sigma \in S_n$  eine Permutation und  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ , so gelten für einen Quader  $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  die folgenden Gleichungen:

$$\mu_n(\varphi(Q)) = (b_{\sigma(1)} - a_{\sigma(1)}) \cdot \dots \cdot (b_{\sigma(n)} - a_{\sigma(n)})$$

und

$$\int_Q |\det D\varphi(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n),$$

denn es ist  $|\det D\varphi(\mathbf{x})| \equiv 1$ . ■

**2.8 Satz.** *Gilt die spezielle Transformationsformel für  $\varphi : U \rightarrow V$  und für  $\psi : V \rightarrow W$ , so gilt sie auch für  $\psi \circ \varphi : U \rightarrow W$ .*

BEWEIS: Es wurde schon gezeigt, daß aus der speziellen auch die allgemeine Transformationsformel folgt. Sei nun  $A \subset U$  meßbar. Dann ist auch  $\varphi(A)$  meßbar, und es gilt:

$$\mu_n(\psi(\varphi(A))) = \int_{\varphi(A)} |\det D\psi(\mathbf{y})| d\mathbf{y}.$$

Weiter ist

$$\int_{\varphi(A)} |\det D\psi(\mathbf{y})| d\mathbf{y} = \int_A |\det D\psi(\varphi(\mathbf{x}))| \cdot |\det D\varphi(\mathbf{x})| d\mathbf{x}.$$

Aus der Kettenregel und dem Determinanten-Produktsatz folgt die Behauptung. ■

Als letztes Hilfsmittel brauchen wir die folgende Aussage:

**2.9 Satz.** *Jeder Punkt  $\mathbf{x} \in U$  besitze eine offene Umgebung  $W \subset U$ , so daß die spezielle Transformationsformel für  $\varphi|_W : W \rightarrow \varphi(W)$  gilt. Dann gilt die spezielle Transformationsformel auch für  $\varphi : U \rightarrow V$ .*

BEWEIS: Das System  $\mathcal{W}_0$  aller offenen Kugeln in  $U$  mit rationalem Mittelpunkt und rationalem Radius ist abzählbar, und jede offene Teilmenge  $W \subset U$  ist Vereinigung solcher Kugeln. Nun sei  $\mathcal{W} = \{W_j : j \in \mathbb{N}\}$  das Teilsystem derjenigen Kugeln aus  $\mathcal{W}_0$ , die in einer offenen Menge  $W$  enthalten sind, so daß die Transformationsformel für  $\varphi|_W : W \rightarrow \varphi(W)$  gilt. Dann ist  $\mathcal{W}$  eine offene Überdeckung von  $U$ , und die Formel gilt auch für alle Einschränkungen  $\varphi|_{W_j}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

Sei  $A \subset U$  meßbar. Wir setzen  $A_1 := A \cap W_1$  und  $A_{j+1} := (A \cap W_{j+1}) \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_j)$ . Dann sind alle Mengen  $A_j$  meßbar, und  $A$  ist disjunkte Vereinigung der  $A_j$ . Weil  $A_j$  in  $W_j$  liegt, gilt  $E(A_j)$  für jedes  $j$ , und damit gilt auch  $E(A)$ . ■

Jetzt kommen wir zum

BEWEIS der Transformationsformel:

Sei  $\mathbf{x}_0 \in U$ . Es genügt zu zeigen, daß es eine offene Umgebung  $U_0$  von  $\mathbf{x}_0$  in  $U$  gibt, so daß die spezielle Formel für  $\varphi|_{U_0}$  gilt. Wir führen Induktion nach  $n$ . Der Induktionsanfang wurde bereits durchgeführt (mit  $U_0 = U$ ).

Wir nehmen an, daß die Behauptung für  $n - 1$  schon bewiesen ist,  $n \geq 2$ . Weil  $D\varphi(\mathbf{x}_0) \neq 0$  ist und eine Permutation der Koordinaten nichts ausmacht, können wir annehmen, daß  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \neq 0$  ist. Wir setzen dann

$$\psi(x_1, \dots, x_n) := (\varphi_1(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n).$$

Weil  $\det J_\psi(\mathbf{x}_0) \neq 0$  ist, ist  $\psi$  lokal invertierbar. Nach Übergang zu geeigneten kleineren Umgebungen setzen wir

$$\varrho(\mathbf{y}) := \varphi \circ \psi^{-1}(\mathbf{y})$$

und erhalten folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ \psi \searrow & & \nearrow \varrho = \varphi \circ \psi^{-1} \\ & W & \end{array}$$

Weil einerseits  $\varrho \circ \psi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_n) = (\varphi_1(\mathbf{x}), \dots, \varphi_n(\mathbf{x}))$  und andererseits  $\varrho \circ \psi(x_1, \dots, x_n) = \varrho(\varphi_1(\mathbf{x}), x_2, \dots, x_n)$  ist, folgt:

$$\varrho(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \varrho_2(\mathbf{y}), \dots, \varrho_n(\mathbf{y})).$$

$\varphi = \varrho \circ \psi$  setzt sich also aus Abbildungen zusammen, von denen jede mindestens eine Komponente festläßt. Nach einer Permutation der Koordinaten können wir deshalb annehmen, daß  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \varphi_2(\mathbf{z}), \dots, \varphi_n(\mathbf{z}))$  ist. Wir schreiben:

$$\varphi(t, \mathbf{z}) = (t, \varphi_t(\mathbf{z})),$$

wobei  $\varphi_t$  eine Abbildung von  $U_t := \{\mathbf{z} : (t, \mathbf{z}) \in U\}$  nach  $\mathbb{R}^{n-1}$  ist. Für die Funktionalmatrix von  $\varphi$  gilt dann:

$$J_\varphi(t, \mathbf{z}) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline * & & & \\ \vdots & & J_{\varphi_t}(\mathbf{z}) & \\ * & & & \end{array} \right).$$

Also ist  $\det J_\varphi(t, \mathbf{z}) = \det J_{\varphi_t}(\mathbf{z})$  und

$$\begin{aligned} (\varphi A)_t &= \{\mathbf{y} : (t, \mathbf{y}) \in \varphi(A)\} \\ &= \{\mathbf{y} : \exists \mathbf{z} \text{ mit } (t, \mathbf{z}) \in A \text{ und } \varphi(t, \mathbf{z}) = (t, \mathbf{y})\} \\ &= \{\mathbf{y} : \exists \mathbf{z} \in A_t \text{ mit } \varphi_t(\mathbf{z}) = \mathbf{y}\} \\ &= \varphi_t(A_t). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
 \mu_n(\varphi(A)) &= \int_{\mathbb{R}} \mu_{n-1}((\varphi A)_t) dt \quad (\text{Cavalieri}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \mu_{n-1}(\varphi_t(A_t)) dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{A_t} |\det D\varphi_t(\mathbf{z})| d\mathbf{z} \right) dt \quad (\text{Induktionsannahme}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{A_t} |\det D\varphi(t, \mathbf{z})| d\mu_{n-1} \right) dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A |\det D\varphi| d\mu_n \quad (\text{Fubini}) \\
 &= \int_A |\det D\varphi| d\mu_n.
 \end{aligned}$$

### Beispiele.

1. Sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ein abgeschlossener Quader,  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  eine invertierbare Matrix und  $L = L_A$  die zugehörige (bijektive) lineare Transformation. Dann ist

$$\mu_n(L(Q)) = |\det A| \cdot \mu_n(Q).$$

Das ergibt sich sofort aus der speziellen Transformationsformel und der Tatsache, daß  $J_L(\mathbf{x}) = A$  für alle  $\mathbf{x}$  ist.

Sind  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  linear unabhängige Vektoren im  $\mathbb{R}^n$ , so nennt man

$$P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) := \{\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

das von den Vektoren aufgespannte *Parallelotop*. Es handelt sich um das Bild des Einheitsquaders unter der Transformation  $L_A$ . Im Falle  $n = 2$  ergibt sich ein Parallelogramm, im Falle  $n = 3$  spricht man von einem *Spat*. Nun gilt:

$$\mu_n(P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)) = |\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)|.$$

Diese Aussage liefert eine geometrische Deutung der Determinante. Die Reihenfolge der Vektoren  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  bestimmt eine Orientierung des  $\mathbb{R}^n$ . Also kann man  $\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  als „orientiertes Volumen“ von  $P(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  auffassen.

2. Ist  $A$  eine orthogonale Matrix und  $\mathbf{x}_0$  ein fester Vektor, so nennt man die Abbildung

$$F(\mathbf{x}) := \mathbf{x}_0 + \mathbf{x} \cdot A^t$$

eine *euklidische Bewegung*. Im 2-dimensionalen Fall setzt sich jede Bewegung aus Translationen, Spiegelungen und Drehungen zusammen.

Weil  $J_F = A$  und im Falle einer orthogonalen Matrix  $|\det A| = 1$  ist, läßt jede Bewegung das Volumen invariant, und darüber hinaus ist

$$\int_{F(A)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_A f \circ F(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

für meßbare Mengen  $A$  und integrierbare Funktionen  $f$ . Das ist die „Bewegungsinvarianz“ des Lebesgue-Integrals.

### 3. Ebene Polarkoordinaten

Sei  $U := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0 \text{ und } 0 < \varphi < 2\pi\}$ . Jeder Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , der nicht auf der positiven  $x$ -Achse liegt, kann durch Polarkoordinaten  $(r, \varphi) \in U$  beschrieben werden:

$$(x, y) = F(r, \varphi) := (r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi).$$

Bekanntlich ist  $\det J_F(r, \varphi) = r$ .

Ist etwa  $K := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq r \leq b \text{ und } \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$ , mit  $0 < a < b$  und  $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ , und  $f$  stetig auf  $F(K)$ , so ist

$$\begin{aligned} \int_{F(K)} f(x, y) d(x, y) &= \int_K f(F(r, \varphi)) r d(r, \varphi) \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi. \end{aligned}$$

Wir können natürlich auch über Mengen integrieren, die die positive  $x$ -Achse treffen, denn diese Achse ist eine Nullmenge.

### 4. Zylinderkoordinaten

Hier sei  $U = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0, 0 < \varphi < 2\pi \text{ und } z \text{ beliebig}\}$  und

$$F(r, \varphi, z) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z).$$

Für die Funktionaldeterminante ergibt sich wieder  $\det J_F(r, \varphi, z) = r$ .

Ist etwa  $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } 0 \leq z \leq 1\}$ , so ist  $T = F(Q)$ , mit

$$Q := \{(r, \varphi, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \text{ und } 0 \leq z \leq 1\}.$$

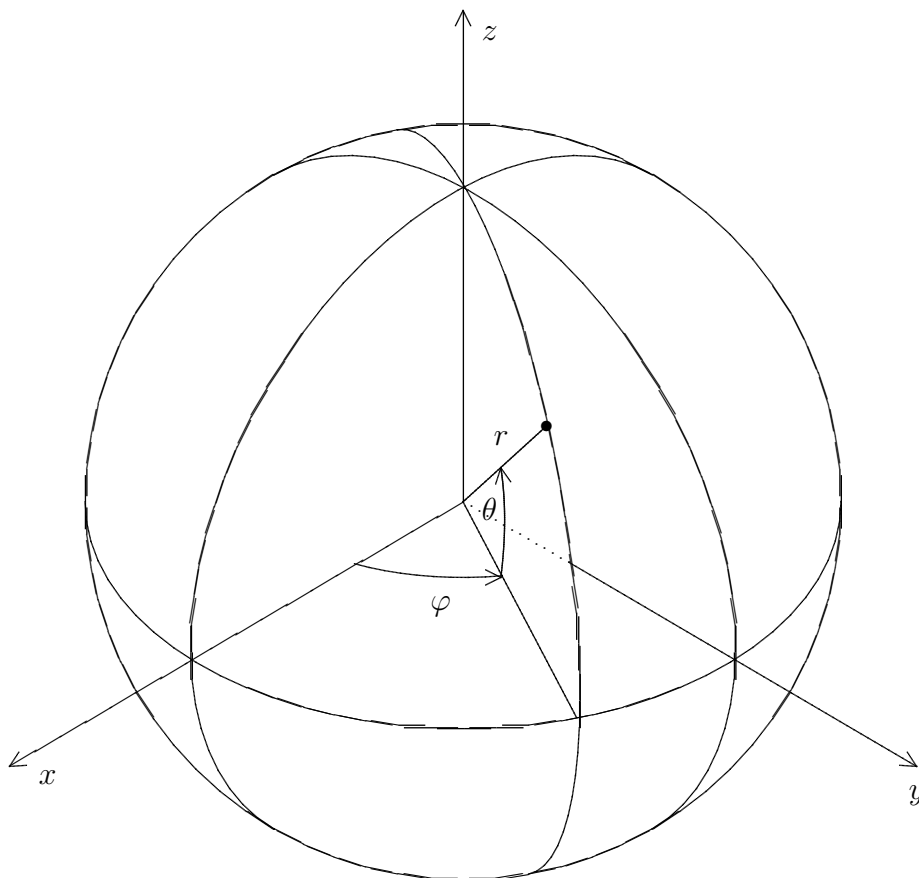
Also ist z.B.

$$\begin{aligned}
\int_T x^2 y d(x, y, z) &= \int_Q (r \cos \varphi)^2 \cdot (r \sin \varphi) \cdot r d(r, \varphi, z) \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^1 r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi dz dr d\varphi \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi dr d\varphi \\
&= \frac{1}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \\
&= -\frac{1}{5} \int_{\cos(0)}^{\cos(\pi/2)} t^2 dt \\
&= -\frac{1}{15} t^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{15}.
\end{aligned}$$

### 5. Räumliche Polarkoordinaten

Sei  $U = \{(r, \varphi, \theta) \mid r > 0, 0 < \varphi < 2\pi \text{ und } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$ , und

$$F(r, \varphi, \theta) := (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta).$$



Hier ist  $\varphi$  der Winkel gegenüber der positiven  $x$ -Achse (in der  $x$ - $y$ -Ebene gemessen) und  $\theta$  der Winkel gegen die  $x$ - $y$ -Ebene. Man beachte, daß die Kugelkoordinaten in der Literatur nicht einheitlich definiert werden! Als Funktionaldeterminante erhält man jetzt

$$\begin{aligned} \det J_F(r, \varphi, \theta) &= \det \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \sin \theta \cdot r^2 (\sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \varphi \sin \theta \cos \theta) \\ &\quad + r \cos \theta \cdot r (\cos^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta) \\ &= r^2 \sin \theta \cos \theta + r^2 \cos^3 \theta \\ &= r^2 \cos \theta. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist  $\det J_F(r, \varphi, \theta) > 0$  in ganz  $U$ .

Für das Volumen der (3-dimensionalen) Einheitskugel ergibt sich jetzt:

$$\begin{aligned} \mu_3(B_1(\mathbf{0})) &= \int_{B_1(\mathbf{0})} 1 \, d\mu_3 = \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \cos \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr \\ &= 2\pi \cdot \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos \theta \, d\theta \, dr \\ &= 4\pi \cdot \int_0^1 r^2 \, dr = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

6. Auch bei der Berechnung des Integrals  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \, dt$  sind die Polarkoordinaten nützlich:

Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \, dt \right)^2 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, dy \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} \cdot r \, d\varphi \, dr \\ &= \pi \cdot \int_0^{\infty} 2re^{-r^2} \, dr \\ &= \pi(-e^{-r^2}) \Big|_0^{\infty} = \pi. \end{aligned}$$

Also ist  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \, dt = \sqrt{\pi}$ .

### § 3 Integralberechnungen

Wir haben in §1 schon an die Ordinatenmengen erinnert:

$$M^f = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq t < f(\mathbf{x})\}.$$

Ist  $f$  integrierbar, so ist  $M^f$  endlich-meßbar und  $\mu_{n+1}(M^f) = \int f d\mu_n$ . Diese Tatsache kann man noch etwas verallgemeinern.

**Definition.** Ein *Normalbereich* über dem  $\mathbb{R}^n$  ist eine Menge der Gestalt

$$N(A; \varphi, \psi) := \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in A \text{ und } \varphi(\mathbf{x}) \leq t \leq \psi(\mathbf{x})\}.$$

Dabei soll  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine meßbare Menge sein, und  $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbare Funktionen mit  $\varphi(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x})$  für  $\mathbf{x} \in A$ .

Ein Normalbereich ist endlich-meßbar, und für eine integrierbare Funktion  $f$  auf  $N(A; \varphi, \psi)$  folgt mit dem Satz von Fubini sofort:

$$\int_{N(A; \varphi, \psi)} f(\mathbf{x}, t) d\mu_{n+1} = \int_A \left( \int_{\varphi(\mathbf{x})}^{\psi(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, t) dt \right) d\mu_n.$$

Angewandt wird diese Formel meist in dem Fall, wo  $A$  kompakt ist und  $\varphi$  und  $\psi$  stetige Funktionen sind.

#### Beispiele.

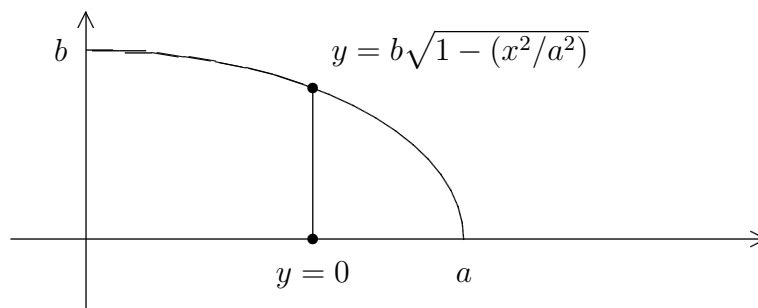
1. Sei  $B$  derjenige Teil einer Ellipsenfläche um den Nullpunkt (mit den Halbachsen  $a$  und  $b$ ), der im rechten oberen Quadranten liegt. Es soll das Integral

$$\int_B xy d\mu_2 \text{ berechnet werden. Hier ist also } f(x, y) = xy.$$

Der Rand von  $B$  ist durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = 0 \text{ und } y = 0$$

gegeben. Offensichtlich ist  $B$  ein Normalbereich bezüglich der x-Achse:





Dann ist

$$\begin{aligned}
 \int_B xy \, d\mu_2 &= \int_0^a \left( \int_0^{b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} xy \, dy \right) dx \\
 &= \int_0^a \left( \frac{xy^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} \right) dx \\
 &= \int_0^a \frac{x}{2} b^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx \\
 &= \frac{b^2}{2} \cdot \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4a^2} \right) \Big|_{x=0}^{x=a} \\
 &= \frac{a^2 b^2}{8}.
 \end{aligned}$$

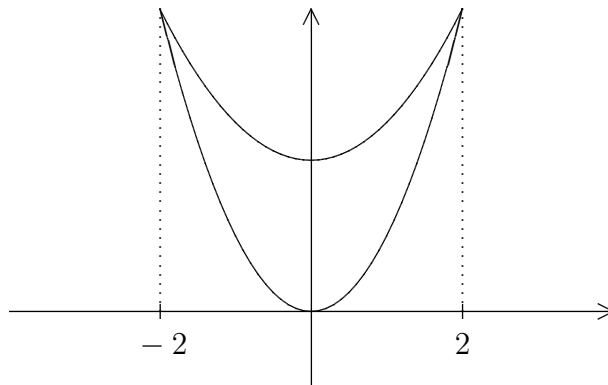
2. Sei  $\varphi(x) := x^2$  und  $\psi(x) := 2 + \frac{1}{2}x^2$ . Dann ist

$$\varphi(-2) = \psi(-2) = 4 \text{ und } \varphi(2) = \psi(2) = 4,$$

und für  $|x| \leq 2$  ist  $x^2 \leq 4$ , also  $\psi(x) - \varphi(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2 \geq 0$ . Daher ist

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2 \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

ein Normalbereich über der x-Achse:



Der Flächeninhalt von  $B$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \int \chi_B(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{-2}^2 \int_{x^2}^{2+(x^2/2)} dy \, dx \\
 &= \int_{-2}^2 \left( 2 - \frac{x^2}{2} \right) dx \\
 &= \left( 2x - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{-2}^2 \\
 &= \left( 4 - \frac{8}{6} \right) - \left( -4 + \frac{8}{6} \right) = \frac{16}{3}.
 \end{aligned}$$

**3.1 Satz.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  endlich-messbar und  $r > 0$  eine reelle Zahl. Dann ist auch

$$r \cdot M := \{r \cdot \mathbf{x} : \mathbf{x} \in M\}$$

endlich-messbar, und es gilt:

$$\mu_n(r \cdot M) = r^n \cdot \mu_n(M).$$

BEWEIS: Die Abbildung  $H_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $H_r(\mathbf{x}) := r \cdot \mathbf{x}$  ist ein Diffeomorphismus mit  $\det J_{H_r}(\mathbf{x}) \equiv r^n$ . Deshalb folgt der Satz sofort aus der Transformationsformel. ■

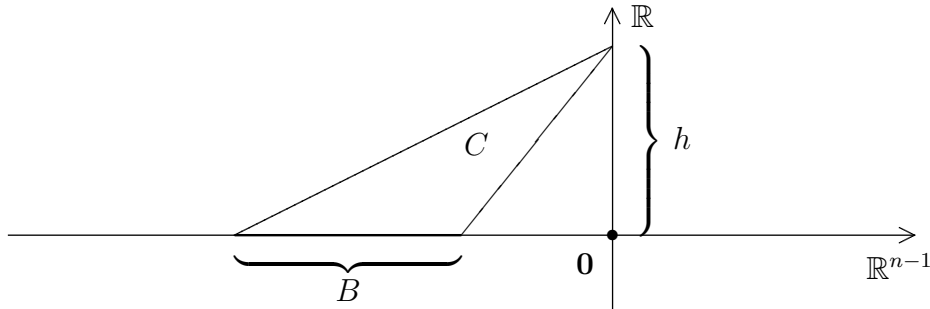
Jetzt können wir das Prinzip von Cavalieri zur Volumenmessung benutzen.

**Beispiele.**

1. Sei  $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$  eine messbare Menge mit endlichem Maß und  $h > 0$ . Dann nennt man die Menge

$$C := \{((1 - \lambda)\mathbf{x}, \lambda h) : \mathbf{x} \in B \text{ und } 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

den *Kegel* über  $B$  mit der Spitze in  $(0, h)$ .



Für  $t \in \mathbb{R}$  ist

$$\begin{aligned} C_t &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (\mathbf{x}, t) \in C\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \exists \lambda \in [0, 1] \text{ mit } \frac{1}{1-\lambda}\mathbf{x} \in B, \lambda h = t\} \\ &= \begin{cases} \emptyset & \text{falls } t \notin [0, h] \\ (1 - \frac{t}{h}) \cdot B & \text{für } t \in [0, h]. \end{cases} \end{aligned}$$

Nach Cavalieri ist dann

$$\begin{aligned}
\mu_n(C) &= \int_0^h \mu_{n-1}(C_t) dt \\
&= \int_0^h \mu_{n-1}\left(\left(1 - \frac{t}{h}\right) \cdot B\right) dt \\
&= \mu_{n-1}(B) \cdot \int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{n-1} dt \\
&= \mu_{n-1}(B) \cdot h \cdot \int_0^1 (1-u)^{n-1} du \\
&= \mu_{n-1}(B) \cdot \frac{h}{n}.
\end{aligned}$$

2. Das Volumen einer Hyperkugel mit Radius  $r$  im  $\mathbb{R}^n$  ist

$$\mu_n(B_r(\mathbf{0})) = r^n \cdot \mu_n(B_1(\mathbf{0})).$$

Wir müssen also nur das Volumen der Einheits-Hyperkugel bestimmen. Sei  $K_n$  die Einheits-Hyperkugel im  $\mathbb{R}^n$  und  $\tau_n := \mu_n(K_n)$ . Wir wissen bereits, daß  $\tau_1 = 2$ ,  $\tau_2 = \pi$  und  $\tau_3 = \frac{4}{3}\pi$  ist. Allgemein können wir eine Rekursionsformel entwickeln. Es gilt:

$$(K_n)_t = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } |t| > 1 \\ a \cdot K_{n-1} & \text{falls } |t| \leq 1, \end{cases}$$

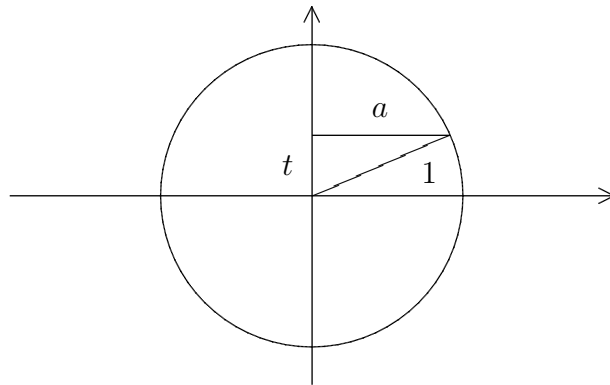
wobei

$$a^2 + t^2 = 1,$$

also

$$a = \sqrt{1 - t^2}$$

ist.



$$\begin{aligned}
\text{Also ist } \tau_n &= \int_{-1}^1 \mu_{n-1}(\sqrt{1-t^2} \cdot K_{n-1}) dt \\
&= \int_{-1}^1 (1-t^2)^{(n-1)/2} \cdot \mu_{n-1}(K_{n-1}) dt \\
&= \tau_{n-1} \cdot \int_{-1}^1 (1-t^2)^{(n-1)/2} dt.
\end{aligned}$$

Setzen wir

$$c_n := \int_{-1}^1 (1-t^2)^{(n-1)/2} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sqrt{1-\sin^2 x})^{n-1} \cos x dx = \int_0^\pi (\sin x)^n dx,$$

so ist  $\tau_n = \tau_{n-1} \cdot c_n$ . Partielle Integration ergibt:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\sin x)^n dx &= -(\sin x)^{n-1} \cos x \Big|_0^\pi + (n-1) \int_0^\pi (\sin x)^{n-2} \cos^2(x) dx \\ &= (n-1) \int_0^\pi (\sin x)^{n-2} dx - (n-1) \int_0^\pi (\sin x)^n dx, \end{aligned}$$

also

$$c_n = \frac{n-1}{n} \cdot c_{n-2}.$$

Mit  $c_1 = 2$  und  $c_2 = \pi/2$  ergibt sich eine Rekursionsformel für  $\tau_n$ .

3. Leicht läßt sich nun auch das Volumen von Rotationskörpern bestimmen: Es seien zwei stetige Funktionen  $f, g$  auf  $[a, b]$  gegeben, mit  $0 \leq g \leq f$ . Dann ist

$$R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(z) \leq x^2 + y^2 \leq f(z), z \in [a, b]\}$$

der Rotationskörper, der entsteht, wenn man den durch  $g$  und  $f$  bestimmten Normalbereich um die  $z$ -Achse rotieren läßt.

**Behauptung:**  $\mu_3(R) = \pi \cdot \int_a^b (f(z)^2 - g(z)^2) dz$ .

Zum BEWEIS genügt es, den Fall  $g(z) \equiv 0$  zu betrachten. Dann ist aber

$$\begin{aligned} \mu_3(R) &= \int_a^b \mu_2(R_t) dt \\ &= \int_a^b \mu_2(B_{f(t)}(\mathbf{0})) dt \\ &= \int_a^b f(t)^2 \pi dt. \end{aligned}$$

**3.2 Satz (Integration rotationssymmetrischer Funktionen).** Sei  $0 \leq a < b$  und  $K_{a,b} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a < \|\mathbf{x}\| < b\}$ . Ist  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig und existiert  $\int_a^b |f(r)|r^{n-1} dr$ , so ist  $\tilde{f}(\mathbf{x}) := f(\|\mathbf{x}\|)$  über  $K_{a,b}$  integrierbar und

$$\int_{K_{a,b}} f(\|\mathbf{x}\|) d\mathbf{x} = n \cdot \tau_n \cdot \int_a^b f(r)r^{n-1} dr.$$

Dabei bezeichnet  $\tau_n$  das Volumen der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel.

BEWEIS:

- 1) Der Rand der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel ist eine Nullmenge im  $\mathbb{R}^n$ , da er lokal ein Graph ist.

2) Zunächst sei  $f(r) \equiv c$  eine konstante Funktion. Dann ist auch  $\tilde{f}$  konstant und natürlich über  $K_{a,b}$  integrierbar. Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{K_{a,b}} \tilde{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int c \cdot \chi_{K_{a,b}} \, d\mu_n \\ &= c \cdot \mu_n(K_{a,b}) \\ &= c \cdot (\mu_n(B_b(\mathbf{0})) - \mu_n(B_a(\mathbf{0}))) \\ &= c \cdot \tau_n \cdot (b^n - a^n) \\ &= c \cdot \tau_n \cdot n \cdot \int_a^b r^{n-1} \, dr \\ &= n \cdot \tau_n \cdot \int_a^b f(r) r^{n-1} \, dr. \end{aligned}$$

3) Nun sei sogar  $0 < a < b$ . Ist  $f$  eine Treppenfunktion auf  $[a, b]$ , so folgt die Behauptung für  $f$  ganz leicht aus (2).

Ist  $f$  eine Regelfunktion auf  $[a, b]$ , so gibt es eine Folge  $(\varphi_k)$  von Treppenfunktionen auf  $[a, b]$ , die dort gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Dann konvergiert auch  $(\tilde{\varphi}_k)$  auf  $\overline{K_{a,b}}$  gleichmäßig gegen  $\tilde{f}$ , und  $\tilde{f}$  ist bis auf eine abzählbare Vereinigung von Kugelrändern (also fast überall) stetig und damit integrierbar. Mit Hilfe des Konvergenzsatzes von Lebesgue kann man daraus schließen, daß die Integrale über  $\tilde{\varphi}_k$  gegen das Integral über  $\tilde{f}$  konvergieren. Das ergibt auch in diesem Falle die Behauptung.

4) Ist  $f$  nur über  $(a, b)$  stückweise stetig, so schreibt man  $(a, b)$  als aufsteigende Vereinigung von abgeschlossenen Intervallen, über denen  $f$  ja eine Regelfunktion ist. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz kommt man dann zum Ziel. ■

### Beispiel.

Sei  $f(r) := \frac{1}{r}$  auf  $(0, 1)$ . Das Integral  $\int_0^1 r^{n-1-\alpha} \, dr$  existiert genau dann, wenn  $-n + 1 + \alpha < 1$  ist, also  $\alpha < n$ . Daraus folgt:

$\int_{B_1(\mathbf{0})} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^\alpha} \, d\mathbf{x}$  existiert genau dann, wenn  $\alpha < n$  ist.

Im  $\mathbb{R}^2$  ist also  $\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}$  bei  $\mathbf{0}$  integrierbar, nicht jedoch  $\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2}$ .

Im  $\mathbb{R}^3$  sind beide Funktionen bei  $\mathbf{0}$  integrierbar.

## § 4 Der Satz von Sard

**4.1 Satz vom Rang.** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $k$ -mal) stetig differenzierbar. Ist  $r := \text{rg } Df(\mathbf{x})$  unabhängig von  $\mathbf{x} \in G$ , so gibt es zu jedem Punkt  $\mathbf{a} \in G$  eine offene Umgebung  $U$  von  $\mathbf{a}$  in  $G$ , eine offene Umgebung  $V$  von  $\mathbf{b} := f(\mathbf{a})$  im  $\mathbb{R}^m$ , sowie offene Quader  $Q \subset \mathbb{R}^n$  und  $P \subset \mathbb{R}^m$  und ( $\mathcal{C}^k$ -)Diffeomorphismen  $\varphi : Q \rightarrow U$  und  $\psi : P \rightarrow V$ , so daß gilt:

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

BEWEIS: O.B.d.A. sei  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , sowie

$$Df(\mathbf{0})(v_1, \dots, v_n) = (v_1, \dots, v_r, 0, \dots, 0).$$

Nun sei  $g : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert durch  $g(\mathbf{x}) := (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_r(\mathbf{x}), x_{r+1}, \dots, x_n)$ . Dann ist  $J_g(\mathbf{0})$  die Einheits-Matrix  $E_n$ . Also gibt es eine offene Umgebung  $U = U(\mathbf{0}) \subset G$  und einen Quader  $Q \subset \mathbb{R}^n$ , so daß  $g|_U : U \rightarrow Q$  ein Diffeomorphismus ist. Sei  $\varphi := (g|_U)^{-1} : Q \rightarrow U$ .

Ist  $\mathbf{y} = g(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_r(\mathbf{x}), x_{r+1}, \dots, x_n)$ , so ist  $f \circ \varphi(\mathbf{y}) = f \circ (g|_U)^{-1} \circ g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_r(\mathbf{x}), \dots)$  für  $\mathbf{y} \in g(U) = Q$ , also

$$f \circ \varphi(\mathbf{y}) = (y_1, \dots, y_r, u_{r+1}(\mathbf{y}), \dots, u_m(\mathbf{y})),$$

mit geeigneten Funktionen  $u_{r+1}, \dots, u_m$ .

Da  $\varphi$  ein Diffeomorphismus ist, ist  $\text{rg } D(f \circ \varphi)(\mathbf{y}) = \text{rg } Df(\varphi(\mathbf{y})) = r$ , also  $\partial u_i / \partial y_j(\mathbf{y}) = 0$  für  $i, j > r$ . Das bedeutet, daß die  $u_i$  unabhängig von  $y_{r+1}, \dots, y_n$  sind (für  $i > r$ ).

Wir schreiben jetzt  $Q = Q^r \times Q^{n-r} \subset \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$  und definieren

$$h : Q^r \times \mathbb{R}^{m-r} \rightarrow Q^r \times \mathbb{R}^{m-r}$$

durch

$$h(\mathbf{y}', z_{r+1}, \dots, z_m) := (\mathbf{y}', z_{r+1} - u_{r+1}(\mathbf{y}'), \dots, z_m - u_m(\mathbf{y}')).$$

Offensichtlich ist  $h$  ein Diffeomorphismus, und

$$\begin{aligned} h \circ f \circ \varphi(\mathbf{y}', y_{r+1}, \dots, y_n) &= h(\mathbf{y}', u_{r+1}(\mathbf{y}'), \dots, u_m(\mathbf{y}')) \\ &= (\mathbf{y}', 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Nun sei ein Quader  $P \subset Q^r \times \mathbb{R}^{m-r}$  so gewählt, daß  $h \circ f \circ \varphi(Q) \subset P$  ist, und es sei  $V := h^{-1}(P)$ . Mit  $\psi := h^{-1} : P \rightarrow V$  ist dann

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_r, 0, \dots, 0).$$

■

Sei jetzt  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $C^\infty$ -Abbildung,  $m \geq 1$ . Für  $\mathbf{x} \in U$  sei

$$\operatorname{rg}_{\mathbf{x}} f := \operatorname{rg}(Df(\mathbf{x})) = \dim(\operatorname{Im} Df(\mathbf{x})).$$

Der Punkt  $\mathbf{x}$  heißt ein *kritischer Punkt* von  $f$ , falls  $\operatorname{rg}_{\mathbf{x}} f < m$  ist, falls also

$$Df(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

nicht surjektiv ist. Der Punkt  $\mathbf{y} := f(\mathbf{x})$  heißt in diesem Fall ein *kritischer Wert*. Ist  $n < m$ , so ist jeder Punkt aus  $U$  ein kritischer Punkt und jeder Punkt aus  $f(U)$  ein kritischer Wert.

**4.2 Satz von Sard.** *Die Menge der kritischen Werte ist eine Nullmenge in  $\mathbb{R}^m$ .*

BEWEIS: Wir führen Induktion nach  $n$ .

Ist  $n = 0$ , so ist  $f(U)$  ein Punkt und die Aussage trivial.

Sei jetzt  $n > 0$  und die Behauptung für  $n - 1$  bewiesen. Es sei

$$C = \{\mathbf{x} \in U : \operatorname{rg} Df(\mathbf{x}) < m\}$$

die Menge der kritischen Punkte, und

$$C_i := \{\mathbf{x} \in U : D^\alpha f(\mathbf{x}) = 0 \text{ für } 1 \leq |\alpha| \leq i\}.$$

Dann ist  $C_i$  abgeschlossen in  $U$ , und es gilt:

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_i \supset \dots$$

Wir zeigen nun:

- A)  $f(C \setminus C_1)$  ist eine Nullmenge.
- B)  $f(C_i \setminus C_{i+1})$  ist eine Nullmenge.
- C)  $f(C_i)$  ist für genügend großes  $i$  eine Nullmenge.

Insgesamt ist dann  $f(C)$  eine Nullmenge, und das ist die Behauptung.

**Beweis von (A):**

Ist  $m = 1$ , so ist  $C = C_1 = \{\mathbf{x} \in U : Df(\mathbf{x}) = 0\}$  und  $C \setminus C_1 = \emptyset$ . Wir brauchen also nur den Fall  $m \geq 2$  zu betrachten.

Ist  $\mathbf{p} \in C \setminus C_1$ , so können nicht alle Ableitungen von  $f$  in  $\mathbf{p}$  gleichzeitig verschwinden. O.B.d.A. sei

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) \neq 0.$$

Wir definieren  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch  $h(\mathbf{x}) := (f_1(\mathbf{x}), x_2, \dots, x_n)$ . Dann ist klar, daß  $h$  in  $\mathbf{p}$  regulär ist. Es gibt also offene Umgebungen  $V = V(\mathbf{p}) \subset U$  und  $W = W(f(\mathbf{p})) \subset$

$\mathbb{R}^n$ , so daß  $h : V \rightarrow W$  ein Diffeomorphismus ist. Sei  $g := f \circ h^{-1} : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Dann ist

$$g(y_1, \dots, y_n) = (y_1, g_2(\mathbf{y}), \dots, g_m(\mathbf{y})),$$

denn es ist  $g(f_1(\mathbf{x}), x_2, \dots, x_n) = g \circ h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$ .

Es reicht, die Behauptung für  $g$  zu zeigen, denn es ist  $f(C \cap V) = g(C_g \cap W)$ , wenn wir mit  $C_g$  die kritische Menge von  $g$  in  $W$  bezeichnen. Wir betrachten also  $g$  und schreiben fortan  $C$  an Stelle von  $C_g$ . Es sei  $W_t := \{z \in \mathbb{R}^{n-1} : (t, z) \in W\}$ , und  $g_t : W_t \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$  sei definiert durch

$$g(t, z) = (t, g_t(z)).$$

Dann ist

$$J_g(t, z) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & & & J_{g_t}(z) \end{array} \right).$$

Also ist  $(t, z)$  genau dann ein kritischer Punkt von  $g$ , wenn  $z$  ein kritischer Punkt von  $g_t$  ist.

Sei  $C_t$  die Menge der kritischen Punkte von  $g_t$  in  $W_t$ . Nach Induktionsvoraussetzung ist die Menge  $g_t(C_t)$  der kritischen Werte von  $g_t$  eine Nullmenge. Weil

$$(g(C))_t = \{y \in \mathbb{R}^{m-1} : (t, y) \in g(C)\} = g_t(C_t)$$

stets eine Nullmenge ist, folgt mit dem Satz von Tonelli (angewandt auf die meßbare Funktion  $\chi_{g(C)}$ ), daß  $\mu_m(g(C)) = 0$  ist. Da die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, folgt (A).

**Beweis von (B):** Die Menge  $C_i \setminus C_{i+1}$  wird ähnlich behandelt.

Ist  $\mathbf{p} = (p_1, \mathbf{p}') \in C_i \setminus C_{i+1}$ , so können wir o.B.d.A. annehmen, daß es ein  $\alpha$  mit  $|\alpha| = i$  gibt, so daß gilt:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1} D^\alpha f_1 \right)(\mathbf{p}) \neq 0.$$

Dann setzen wir  $h(x_1, \dots, x_n) := (D^\alpha f_1(\mathbf{x}), x_2, \dots, x_n)$ . Offensichtlich ist  $h(C_i) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  und  $\det J_h(\mathbf{p}) \neq 0$ . Es gibt daher eine offene Umgebung  $V = V(\mathbf{p}) \subset U$  mit  $V \cap C_{i+1} = \emptyset$  und eine offene Umgebung  $W = W((0, \mathbf{p}')) \subset \mathbb{R}^n$ , so daß  $h : V \rightarrow W$  ein Diffeomorphismus ist.

Es sei  $g := f \circ h^{-1}$  auf  $W$ , und  $g(0, z) = g_0(z)$ . Nach Induktionsvoraussetzung ist die Menge der kritischen Werte von  $g_0$  eine Nullmenge. Weil alle Punkte von  $C_i$  kritisch für  $f$  sind, und weil  $f(x_1, \mathbf{x}') = g \circ h(x_1, \mathbf{x}') = g(0, \mathbf{x}') = g_0(\mathbf{x}')$  und  $Df(x_1, \mathbf{x}') = Dg(0, \mathbf{x}') \circ Dh(x_1, \mathbf{x}')$  für  $(x_1, \mathbf{x}') \in C_i$  ist, sind alle Punkte  $\mathbf{x}'$  mit  $(0, \mathbf{x}') \in h(C_i \cap V)$  kritisch für  $g_0$ . Also ist  $f(C_i \cap V)$  eine Nullmenge.

**Beweis von (C):** Es reicht, für jeden abgeschlossenen Würfel  $Q \subset U$  zu zeigen, daß  $f(Q \cap C_i)$  eine Nullmenge ist.



Sei  $\delta$  die Seitenlänge von  $Q$ . In einem Punkt  $\mathbf{p} \in Q \cap C_i$  betrachten wir die Taylorentwicklung von  $f$  der Ordnung  $i$ :

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{p}) + R(\mathbf{p}, \mathbf{h}), \text{ mit } \|R(\mathbf{p}, \mathbf{h})\| \leq k \cdot \|\mathbf{h}\|^{i+1}.$$

Dabei ist die Konstante  $k$  nur abhängig von  $f$  und  $Q$ , sofern  $\mathbf{p} + \mathbf{h}$  in  $Q$  bleibt.

Wir unterteilen jetzt  $Q$  in  $r^n$  Teilwürfel der Seitenlänge  $\delta/r$ . Dabei sei  $r$  eine beliebige (große) natürliche Zahl.

Sei  $Q'$  einer der Teilwürfel,  $\mathbf{p} \in C_i \cap Q'$  und  $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \mathbf{h} \in Q'$ . Dann ist  $\|\mathbf{h}\| \leq (\delta\sqrt{n})/r$  (Länge der Diagonale von  $Q'$ ), also

$$\|f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p})\| \leq k \cdot \left(\frac{\delta\sqrt{n}}{r}\right)^{i+1}.$$

Das bedeutet, daß  $f(Q')$  in einem Würfel mit Zentrum  $f(\mathbf{p})$  und Seitenlänge  $= \varepsilon/r^{i+1}$  enthalten ist, wobei  $\varepsilon := 2k(\delta\sqrt{n})^{i+1}$  ist.

Also wird  $f(C_i \cap Q)$  durch (höchstens)  $r^n$  Würfel überdeckt, deren Gesamtmaß höchstens

$$r^n \cdot \left(\frac{\varepsilon}{r^{i+1}}\right)^m = \varepsilon^m \cdot r^{n-m(i+1)}$$

beträgt. Wird  $i$  sehr groß, so wird  $n - m(i + 1)$  negativ, und für  $r \rightarrow \infty$  strebt  $\varepsilon^m \cdot r^{n-m(i+1)}$  gegen Null.

Das bedeutet, daß  $\mu_m(f(C_i \cap Q)) = 0$  ist. ■

**Bemerkung.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar und  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)$  ein regulärer Wert von  $f$ , also kein kritischer Wert. Dabei ist zugelassen, daß  $\mathbf{c} \notin f(U)$  liegt.

Sei  $M := f^{-1}(\mathbf{c}) \subset U$ . Ist  $M \neq \emptyset$ , so gilt für jeden Punkt  $\mathbf{a} \in M$ :  $Df(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist surjektiv. Das bedeutet, daß  $M$  eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $n - m$  ist. Das kann natürlich nur auftreten, wenn  $n \geq m$  ist. Ist  $n < m$ , so ist jeder Wert automatisch auch ein kritischer Wert und daher  $f(U)$  eine Nullmenge im  $\mathbb{R}^m$ .

Der Satz von Sard besagt, daß für fast alle  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$  die Niveaumenge  $f^{-1}(\mathbf{c})$  leer oder eine Untermannigfaltigkeit ist.

Sei  $n > m$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $\mathbf{x}_0$  regulär. Dann gibt es eine  $m$ -reihige Untermatrix  $J_0(\mathbf{x})$  von  $J_f(\mathbf{x})$  mit  $\det J_0(\mathbf{x}_0) \neq 0$ . Weil  $f$  stetig differenzierbar ist, gibt es eine Umgebung  $V = V(\mathbf{x}_0) \subset U$ , so daß  $\det J_f(\mathbf{x}) \neq 0$  für  $\mathbf{x} \in V$  ist. Nach dem Satz vom Rang hat  $f$  dann (bis auf Diffeomorphie) die Gestalt

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m),$$

sieht also aus wie eine Produktprojektion. In der Nähe von  $\mathbf{x}_0$  ist  $V$  gefasert in Untermannigfaltigkeiten der Dimension  $n - m$ .

Weil eine Menge vom Maß Null keine offene Teilmenge enthalten kann, gilt insbesondere: Die Menge der regulären Werte von  $f$  ist dicht im  $\mathbb{R}^m$ .