Bergische Universität – Gesamthochschule Wuppertal – Fachbereich Mathematik

Analysis 2

Kapitel 3 Integrationstheorie

Vorlesungsausarbeitung zum SS 2001

von Prof. Dr. Klaus Fritzsche

Inhaltsverzeichnis

§ 1 Maßtheorie

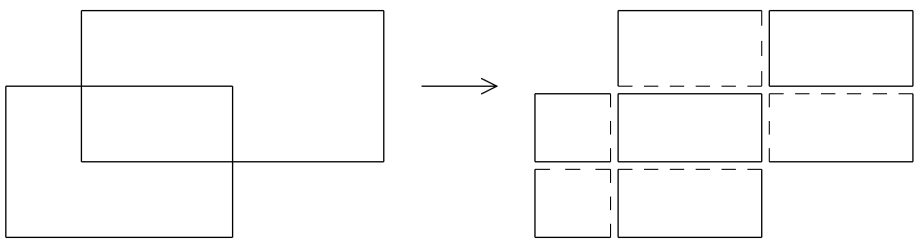
Unter einem *Quader* im $\mathbb{R}^n$ versteht man eine Menge der Gestalt

$$Q = I_1 \times \ldots \times I_n,$$

wobei die I_ν endliche Intervalle sind, die offen, halboffen oder abgeschlossen sein können. Wir lassen auch Intervalle zu, die leer sind oder nur aus einem Punkt bestehen. Wie üblich bezeichnen wir die Länge eines Intervalls I mit $l(I)$. Dann heißt

$$v_n(Q) := l(I_1) \cdot \ldots \cdot l(I_n) \quad \text{das } \textit{(n-dimensionale) Volumen} \text{ von } Q.$$

Unter einer *Quadersumme* verstehen wir eine endliche Vereinigung von Quadern. Jede Quadersumme kann in disjunkte Teilquader zerlegt werden.



Ist eine Quadersumme S in dieser Art in Teilquader zerlegt, so definiert man das *Volumen* $v_n(S)$ als Summe der Volumina aller Teilquader. Da man von zwei verschiedenen Zerlegungen stets zu einer „gemeinsamen Verfeinerung“ übergehen kann, spielt die Wahl der Zerlegung keine Rolle, und es ist auch egal, welchem Teilquader jeweils eine Trennwand zugeordnet wird.

1.1 Satz. *Sei $\mathcal{A}$ das System aller Quadersummen im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:*

1. *Die leere Menge gehört zu $\mathcal{A}$, und es ist $v_n(\varnothing) = 0$.*
2. *Ist $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{A}$, so gehört auch $A \cup B$ zu $\mathcal{A}$.*

   Ist außerdem $A \cap B = \varnothing$, so ist $v_n(A \cup B) = v_n(A) + v_n(B)$.
3. *Mit $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{A}$ ist auch $A \cap B \in \mathcal{A}$.*
4. *Mit $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{A}$ ist auch $A \setminus B \in \mathcal{A}$.*

   Ist $B \subset A$, so ist $v_n(B) \le v_n(A)$ und $v_n(A \setminus B) = v_n(A) - v_n(B)$.

Die Aussagen sind intuitiv klar. Saubere Beweise wären zwar elementar, aber technisch aufwendig (man muß immer alle Zerlegungen aufschreiben). Deshalb verzichten wir hier auf eine ausführliche Darstellung.

Ein Mengensystem mit den obigen Eigenschaften (ohne die Funktion v_n) nennt man übrigens eine *Mengen-Algebra*.

Das folgende Resultat ist nicht mehr intuitiv klar, denn es kommt ein Grenzprozeß ins Spiel.

1.2 Satz. *Die Quadersumme A besitze eine disjunkte Zerlegung $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ in Quadersummen A_i (so daß also $A_i \cap A_j = \varnothing$ für $i \neq j$ ist). Dann gilt:*

$$v_n(A) = \sum_{i=1}^{\infty} v_n(A_i)\,.$$

Beweis: 1) Für $N \in \mathbb{N}$ sei $A_N := \bigcup_{i=1}^{N} A_i \subset A$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{N} v_n(A_i) = v_n(A_N) \leq v_n(A).$$

Da die Partialsummen der Reihe beschränkt und die Glieder nicht-negativ sind, ist die Reihe konvergent, und es ist auch $\sum_{i=1}^{\infty} v_n(A_i) \leq v_n(A)$.

2) Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen Zahlen $\varepsilon_i > 0$, so daß $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = \varepsilon$ ist. Es gibt **offene** Quadersummen A_i^*, so daß gilt:

$$A_i \subset A_i^* \quad \text{und} \quad v_n(A_i^*) < v_n(A_i) + \varepsilon_i\,.$$

Das System der Quadersummen A_i^* bildet eine offene Überdeckung der **kompakten** Menge $\overline{A}$. Dann liegt $\overline{A}$ natürlich schon in der Vereinigung von endlich vielen Überdeckungselementen, d.h. es gibt ein N mit $A \subset \overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{N} A_i^*$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} v_n(A) &\leq v_n\Big(\bigcup_{i=1}^{N} A_i^*\Big) \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} v_n(A_i^*) \\ &< \sum_{i=1}^{N} v_n(A_i) + \varepsilon, \end{aligned}$$

also $v_n(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v_n(A_i)$. Damit ist alles gezeigt. ∎

Der sehr simple Volumenbegriff für Quadersummen soll nun erweitert werden. Dazu müssen wir etwas weiter ausholen.

Definition. Sei X eine beliebige Grundmenge. Eine *σ-Algebra* in X ist ein System $\mathcal{M}$ von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

1. $\varnothing \in \mathcal{M}$.
2. Ist $A \in \mathcal{M}$, so ist auch das Komplement $X \setminus A \in \mathcal{M}$.
3. Ist $(A_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie in $\mathcal{M}$, so ist auch $\displaystyle\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \in \mathcal{M}$.

Indem man bei (1) und (3) jeweils zu den Komplementen übergeht, erhält man:

1.3 Folgerung. *Ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra in X, so gilt:*

4. $X \in \mathcal{M}$.

5. Liegen die A_ν in $\mathcal{M}$, so liegt auch $\displaystyle\bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$ in $\mathcal{M}$.

Der Beweis ist trivial.

Bemerkung. Sei $\mathcal{M}$ ein System von Teilmengen von X. Gilt (1), (2) und die folgende Eigenschaft (3)', so ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra.

> *3'. Für $A, B \in \mathcal{M}$ ist auch $A \cap B \in \mathcal{M}$. Ist (A_ν) ein abzählbares System paarweise disjunkter Elemente von $\mathcal{M}$, so ist $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \in \mathcal{M}$.*

Beispiele.

1. Die Potenzmenge $P(X)$ ist eine σ-Algebra in X.
2. Das System $\mathcal{M} := \{\varnothing, X\}$ bildet eine σ-Algebra in X.
3. Sei $\mathcal{A} \subset P(X)$ ein **beliebiges** Mengensystem. Dann ist der Durchschnitt $E(\mathcal{A})$ aller σ-Algebren $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{M} \subset P(X)$ wieder eine σ-Algebra, und zwar die kleinste in X, die $\mathcal{A}$ enthält (der Beweis erfordert ein bißchen mengentheoretisches Herumrechnen). Man nennt $E(\mathcal{A})$ *die von $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra.*

   Ist $X = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{A}$ das System der Quadersummen, so nennt man $\mathcal{B}_n := E(\mathcal{A})$ die *Borel-Algebra* des $\mathbb{R}^n$, und ihre Elemente *Borelmengen.* Da jede offene Menge eine abzählbare Vereinigung von Quadern ist, enthält $\mathcal{B}_n$ sämtliche offenen und abgeschlossenen Mengen des $\mathbb{R}^n$, und natürlich auch Differenzen solcher Mengen. Es ist sehr schwer, eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ zu konstruieren, die keine Borelmenge ist. Trotzdem gibt es sehr viele davon.

   Bei der Konstruktion der Borel-Algebra kann man übrigens statt von Quadersummen auch einfach von Quadern ausgehen.

Abzählbare Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen nennt man F_σ-Mengen, abzählbare Durchschnitte von offenen Mengen nennt man G_δ-Mengen.

Definition. Unter einem *Maß-Raum* versteht man ein Tripel $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. X ist eine nicht-leere Menge.
2. $\mathcal{M}$ ist eine σ-Algebra in X.
3. $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ ist eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:
   (a) $\mu(\varnothing) = 0$.
   (b) Sind die Mengen $A_i \in \mathcal{M}$ paarweise disjunkt, so ist $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$ (man nennt das *σ-Additivität*).

Beispiele.

1. Sei X beliebig, $\mathcal{M} = P(X)$ und
$$\mu(A) := \begin{cases} \infty & \text{falls } A \text{ unendlich ist,} \\ \#(A) & \text{falls } A \text{ endlich ist.} \end{cases}$$
Man nennt μ das *Zählmaß*.
2. Sei X beliebig, $\mathcal{M} = P(X)$, $x_0 \in X$ und
$$\delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x_0 \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
In diesem Fall spricht man von einem *Dirac-Maß*.
3. Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) = 1$. Dann spricht man von einem *Wahrscheinlichkeitsmaß*, die Mengen $A \in \mathcal{M}$ heißen *Ereignisse* und die Zahl $\mu(A)$ nennt man die Wahrscheinlichkeit von A.
4. Nichttriviale Maßräume zu konstruieren ist schwer. Im Falle des Lebesgue-Maßes werden wir das weiter unten tun.
5. Ist $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{M} = \mathcal{A}$ das System der Quadersummen und $\mu(A) := v_n(A)$, so sind fast alle Eigenschaften eines Maßraumes erfüllt. Trotzdem liegt kein Maßraum vor, denn $\mathcal{A}$ ist keine σ-Algebra.

1.4 Satz. *Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Alle benutzten Mengen seien Elemente von $\mathcal{M}$. Dann gilt:*

1. *Ist $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, so ist $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.*

2. *Ist $A \subset B$, so ist $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

3. *Ist (A_i) eine Folge von nicht-notwendig paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{M}$, so ist $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.*

BEWEIS: 1) Setze $A_3 = A_4 = \ldots = \varnothing$. Dann folgt die Behauptung aus der σ-Additivität.

2) Es ist $B = A \cup (B \setminus A)$, also $\mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B)$.

3) Schreibe $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) \cup \ldots$ und benutze σ-Additivität.

■

Definition. Sei M eine beliebige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Dann nennt man

$$\mu_n^*(M) := \inf\{\sum_{\nu=1}^{\infty} v_n(Q_\nu) \mid \text{ die } Q_\nu \text{ sind Quader oder leer, mit } M \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu\}$$

das äußere Maß von M im $\mathbb{R}^n$.

Bemerkungen.

1. Da der $\mathbb{R}^n$ Vereinigung von Quadern ist, besitzt jede Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ein äußeres Maß. Offensichtlich ist $\mu_n^*(\mathbb{R}^n) = \infty$ und $\mu_n^*(\varnothing) = 0$. Bei einer beliebigen Menge kann man zunächst nur sagen, daß $0 \leq \mu_n^*(M) \leq \infty$ ist.

2. Es sind auch Quader $Q = I_1 \times \ldots \times I_n$ zugelassen, bei denen eins oder mehrere der Intervalle I_λ nur aus einem Punkt bestehen. Dann ist natürlich $v_n(Q) = 0$.

3. Ist M beschränkt, so liegt M bereits in einem einzigen Quader Q. Deshalb ist in diesem Fall $\mu_n^*(M) < \infty$.

1.5 Satz (Eigenschaften des äußeren Maßes).

1. *Ist $M \subset N \subset \mathbb{R}^n$, so ist $\mu_n^*(M) \leq \mu_n^*(N)$.*

2. *Es ist stets $\mu_n^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n^*(M_i)$.*

3. *Das äußere Maß ist translationsinvariant, d.h. es ist*

$$\mu_n^*(\mathbf{x} + M) = \mu_n^*(M)$$

für jede Menge M und jeden Vektor $\mathbf{x}$ im $\mathbb{R}^n$.

BEWEIS: Wir schreiben v statt v_n und μ^* statt μ_n^*.

1) ist trivial.

2) Wenn $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$ divergiert, ist nichts zu zeigen. Sei also $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) < \infty$. Es sei dann weiter ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben und Zahlen $\varepsilon_i > 0$ so gewählt, daß $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = \varepsilon$ ist.

Für jedes i gibt es Quader Q_{ij}, so daß gilt:

$$A_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_{ij} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_{ij}) \leq \mu^*(A_i) + \varepsilon_i.$$

Dann ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i,j} Q_{ij}$, und es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} v(Q_{ij}) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} v(Q_{ij}) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} (\mu^*(A_i) + \varepsilon_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Weil ε beliebig ist, folgt die Behauptung.

c) Offensichtlich ist $v(\mathbf{x} + Q) = v(Q)$ für jeden Vektor $\mathbf{x}$ und jeden Quader Q. Daraus folgt sofort die entsprechende Aussage für das äußere Maß. ∎

Definition. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine *Nullmenge (im $\mathbb{R}^n$)*, falls $\mu_n^*(M) = 0$ ist.

M ist also genau dann eine Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge von Quadern Q_i gibt, so daß gilt:

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} v_n(Q_i) < \varepsilon.$$

Eine Nullmenge dieser Art nennt man auch eine *Lebesgue-Nullmenge*. Kommt man sogar stets mit endlich vielen Quadern aus, so spricht man von einer *Jordan-Nullmenge*. Das ist ein Begriff, der in die Riemannsche Integrationstheorie gehört.

Beispiele.

1. Jede 1-punktige Menge ist eine Nullmenge, denn sie ist selbst ein entarteter Quader vom Volumen 0.

2. Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind wieder Nullmengen.

   Beweis: Sei (M_ν) ein System von Nullmengen, $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu den Mengen M_ν gibt es jeweils Folgen von Quadern $Q_{\nu,i}$ mit

$$M_\nu \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_{\nu,i} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} v_n(Q_{\nu,i}) < \varepsilon \cdot 2^{-\nu}.$$

   Dann ist $\displaystyle\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu \subset \bigcup_{\nu,i} Q_{\nu,i}$ und $\displaystyle\sum_{\nu,i} v_n(Q_{\nu,i}) < \varepsilon \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} = \varepsilon.$ ∎

   Also ist z.B. $\mathbb{Q}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}$.

3. Ist N eine Nullmenge und $M \subset N$, so ist auch M eine Nullmenge.

4. Sei $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge. Dann ist auch $N \times \mathbb{R}^m$ eine Nullmenge im $\mathbb{R}^{n+m}$.

   Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt Quader $Q_i \subset \mathbb{R}^n$, so daß gilt:

$$N \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} v_n(Q_i) < \varepsilon.$$

   Sei nun $P \subset \mathbb{R}^m$ irgend ein Quader. Dann ist

$$N \times P \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \times P, \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} v_{n+m}(Q_i \times P) < \varepsilon \cdot v_m(P).$$

   Da ε beliebig gewählt war, ist $N \times P$ eine Nullmenge im $\mathbb{R}^{n+m}$. Da $\mathbb{R}^m$ eine abzählbare Vereinigung von Quadern ist, ist auch $N \times \mathbb{R}^m$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^{n+m}$. ∎

   Also ist die Hyperebene $H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ (und genauso jede andere achsenparallele Hyperebene) eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$. Daraus folgt z.B.: Die Vereinigung aller achsenparallelen Hyperebenen, die einen Punkt mit rationalen Koordinaten enthalten, bildet eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$. Nullmengen sind also nicht so „klein", wie man erst vermuten würde.

1.6 Satz. *Sei $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $G_f := \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$.*

Beweis: Es sei $W := [0,1]^{n-1}$. Dann reicht es zu zeigen, daß $G_{f|_W}$ eine Nullmenge ist. Als stetige Funktion ist f auf dem kompakten Würfel W gleichmäßig stetig. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$, so daß gilt:

$$\text{Ist } \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta, \text{ so ist } |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon.$$

Sei $k > (2n)/\delta$ eine natürliche Zahl. Dann können wir W in k^{n-1} gleich-große Teilwürfel der Kantenlänge $1/k$ zerlegen. Jeder Teilwürfel ist in einem offenen

Würfel Q der Kantenlänge $2/k$ enthalten. Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$ ist dann $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < (2n)/k < \delta$, also $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon$. Das bedeutet, daß $G_f \cap (Q \times \mathbb{R})$ in einem Quader P mit $v_n(P) = v_{n-1}(Q) \cdot 2\varepsilon = (2/k)^{n-1} \cdot 2\varepsilon$ enthalten ist. Daraus folgt:

$$\mu_n^*(G_{f|W}) \leq k^{n-1} \cdot \left(\frac{2}{k}\right)^{n-1} \cdot 2\varepsilon = 2^n \cdot \varepsilon.$$

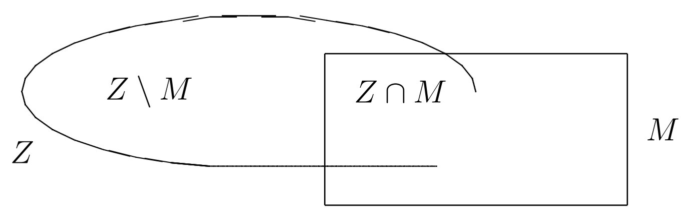
Da ε beliebig war, ist $\mu_n^*(G_f) = 0$. ∎

Es folgt die Definition des Lebesgue-Maßes (nach Caratheodory).

Definition. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *meßbar (im Sinne von Lebesgue)*, falls gilt:

Für jede Menge $Z \subset \mathbb{R}^n$ ist $\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap M) + \mu^*(Z \setminus M)$.

Die Zahl $\mu_n(M) := \mu_n^*(M)$ nennt man das *(n-dimensionale Lebesgue-)Maß* der Menge M.



Die geforderte Eigenschaft erscheint so selbstverständlich, daß man sich fragt, warum ausgerechnet sie die Meßbarkeit charakterisieren soll. Eine Erklärung dafür ist schwer, aber wir werden sehen, daß es funktioniert. Versucht man, die Meßbarkeit auf andere Weise einzuführen, so landet man irgendwann genau bei dem Problem, die obige Eigenschaft zu beweisen. Verlassen wir uns also darauf, daß Caratheodorys Definition sinnvoll ist.

1.7 Satz.

1. *Jede Nullmenge N ist meßbar, mit $\mu_n(M) = 0$.*
2. *Jede Quadersumme S ist meßbar, mit $\mu_n(S) = v_n(S)$.*
3. *Das System $\mathcal{M}$ aller meßbaren Mengen bildet eine σ-Algebra.*
4. *Das Tripel $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu_n)$ bildet einen Maßraum.*

BEWEIS: Für beliebige Mengen M und Z ist $Z = (Z \cap M) \cup (Z \setminus M)$ und daher $\mu^*(Z) \leq \mu^*(Z \cap M) + \mu^*(Z \setminus M)$. Um zu zeigen, daß M meßbar ist, braucht man deshalb nur die umgekehrte Ungleichung

$$\mu^*(Z \cap M) + \mu^*(Z \setminus M) \leq \mu^*(Z)$$

zu beweisen.

1) Sei M eine Nullmenge. Dann ist auch $Z \cap M$ eine Nullmenge und daher $\mu^*(Z \cap M) = 0$. Außerdem ist $Z \setminus M \subset Z$ und daher $\mu^*(Z \setminus M) \leq \mu^*(Z)$. Das ergibt die gewünschte Ungleichung.

2) Sei M eine Quadersumme. Da M disjunkte Vereinigung von endlich vielen Quadern ist, ist $\mu^*(M) = v_n(M)$.

Zu einer Menge Z geben wir ein $\varepsilon > 0$ vor. Dann gibt es Quader Q_i mit

$$Z \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} v_n(Q_i) \leq \mu^*(Z) + \varepsilon.$$

Die Mengen $A_i := M \cap Q_i$ und $B_i := Q_i \setminus M$ sind wieder Quadersummen. Sie sind disjunkt, und es ist $v_n(Q_i) = v_n(A_i) + v_n(B_i)$.

Wegen $Z \cap M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ und $Z \setminus M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ folgt:

$$\begin{aligned}
\mu^*(Z \cap M) + \mu^*(Z \setminus M) &\leq \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) + \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} v_n(A_i) + \sum_{i=1}^{\infty} v_n(B_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} v_n(Q_i) \leq \mu^*(Z) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Jetzt läßt man ε gegen Null gehen.

3) a)Weil $\mu^*(Z \cap \varnothing) = \mu^*(\varnothing) = 0$ und $\mu^*(Z \setminus \varnothing) = \mu^*(Z)$ ist, ist $\varnothing$ meßbar.

b) Sei M meßbar und $M' := \mathbb{R}^n \setminus M$. Dann ist $Z \cap M' = Z \setminus M$ und $Z \setminus M' = Z \cap M$. Also ist auch M' meßbar.

c) Seien A, B meßbare Mengen. Dann ist

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A)$$

und

$$\mu^*(Z \cap A) = \mu^*((Z \cap A) \cap B) + \mu^*((Z \cap A) \setminus B).$$

Zusammen ergibt das:

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap (A \cap B)) + \Big(\mu^*(Z \cap (A \setminus B)) + \mu^*(Z \setminus A)\Big),$$

denn es ist $(Z \cap A) \setminus B = Z \cap (A \setminus B)$.

Außerdem ist $\Big(Z \setminus (A \cap B)\Big) \cap A = Z \cap (A \setminus B)$ und $\Big(Z \setminus (A \cap B)\Big) \setminus A = Z \setminus A$. Weil A meßbar ist, folgt daraus:

$$\mu^*(Z \setminus (A \cap B)) = \mu^*(Z \cap (A \setminus B)) + \mu^*(Z \setminus A).$$

Setzt man das oben ein, so erhält man, daß $A \cap B$ meßbar ist.

Es ist klar, daß dann auch $A \cup B$ meßbar ist.

d) Es seien wieder A, B meßbare Mengen und zusätzlich $A \cap B = \varnothing$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mu^*(Z \cap (A \cup B)) &= \mu^*([Z \cap (A \cup B)] \cap A) + \mu^*([Z \cap (A \cup B)] \setminus A) \\ &= \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \cap B). \end{aligned}$$

e) Induktiv folgt: Sind $A_1, \ldots, A_k$ meßbar und paarweise disjunkt, so ist

$$\mu^*(Z \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_k)) = \sum_{i=1}^{k} \mu^*(Z \cap A_i).$$

Setzt man $Z := A_1 \cup \ldots \cup A_k$, so erhält man $\mu^*(A_1 \cup \ldots \cup A_k) = \mu^*(A_1) + \cdots + \mu^*(A_k)$.

f) Nun sei (A_i) ein abzählbares System paarweise disjunkter meßbarer Mengen. Wir wollen zeigen, daß $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ meßbar ist.

Für beliebiges k ist $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ meßbar und daher

$$\begin{aligned} \mu^*(Z) &= \mu^*(Z \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_k)) + \mu^*(Z \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_k)) \\ &\geq \sum_{i=1}^{k} \mu^*(Z \cap A_i) + \mu^*(Z \setminus A). \end{aligned}$$

Dann muß sogar gelten:

$$\mu^*(Z) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap A_i) + \mu^*(Z \setminus A).$$

Und weil $\mu^*(Z \cap A) = \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} Z \cap A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap A_i)$ ist, folgt die Ungleichung

$$\mu^*(Z) \geq \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A).$$

Damit ist A meßbar und $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra.

4) Für $M \in \mathcal{M}$ ist $0 \leq \mu_n(M) \leq \infty$, und es ist $\mu_n(\varnothing) = 0$.

Sind die Mengen A_i paarweise disjunkt und meßbar, so gilt für jedes k :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\mu^*(A_i) &= \mu^*(\bigcup_{i=1}^{k}A_i)\\ &\le \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)\\ &\le \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i).\end{aligned}$$

Läßt man k gegen Unendlich gehen, so erhält man:

$$\mu_n(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu_n(A_i).$$

Damit ist μ_n ein (σ-additives) Maß. ■

Man nennt das so konstruierte Maß μ_n das n-dimensionale *Lebesgue-Maß*.

1.8 Folgerung. *Jede Borelmenge ist meßbar.*

1.9 Satz. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge U und eine abgeschlossene Menge A, so daß $A \subset M \subset U$ und $\mu_n(U \setminus A) < \varepsilon$ ist.*

Außerdem gibt es eine Borelmenge (genauer: eine F_σ-Menge) F und eine Borelmenge (genauer: eine G_δ-Menge) G, so daß $F \subset M \subset G$ und $\mu_n(G \setminus F) = 0$ ist.

Beweis: Wir wählen eine Folge (Q_i) von *kompakten* Quadern mit $Q_i \subset Q_{i+1}$ und $\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i = \mathbb{R}^n$. Dann sind alle Mengen $M_i := M \cap Q_i$ meßbar, mit $\mu(M_i) < \infty$. Nach Konstruktion des Maßes kann man eine offene Menge U_i (eine Vereinigung von offenen Quadern) finden, so daß $M_i \subset U_i$ und $\mu(U_i \setminus M_i) < \dfrac{\varepsilon}{2^{i+1}}$ ist.

Sei $U := \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Dann ist U offen, $M \subset U$ und $U \setminus M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(U_i \setminus M_i)$, also

$$\mu(U \setminus M) \le \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Genauso kann man jetzt mit $M' := \mathbb{R}^n \setminus M$ verfahren. Dann erhält man eine offene Menge W mit $M' \subset W$ und $\mu(W \setminus M') \le \dfrac{\varepsilon}{2}$. Dann ist $A := W' = \mathbb{R}^n \setminus W$ abgeschlossen, $A \subset M$ und $M \setminus A = A' \cap M = W \cap M = W \setminus M'$, also $\mu(M \setminus A) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Zusammen ergibt das:

$$\mu(U \setminus A) = \mu(U \setminus M) + \mu(M \setminus A) \le \varepsilon.$$

Für den Beweis des zweiten Teils des Satzes wählen wir $\varepsilon = 1/j$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ Dann erhalten wir offene Mengen U_j und abgeschlossene Mengen A_j mit $A_j \subset M \subset U_j$ und $\mu(U_j \setminus A_j) \leq 1/j$.

Sei $F := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ und $G := \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$. Dann sind F und G Borelmengen mit $F \subset M \subset G$. Weil $G \setminus F$ in jeder der Mengen $U_j \setminus A_j$ enthalten ist, muß $\mu(G \setminus F) = 0$ sein. ∎

1.10 Folgerung. *$M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann meßbar, wenn es eine Borelmenge B und eine Nullmenge N gibt, so daß $M = B \cup N$ ist. Für jede solche Zerlegung ist $\mu_n(M) = \mu^*(B)$.*

Ist M meßbar, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge (Q_i) von offenen Quadern mit $M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ und $\sum_{i=1}^{\infty} v_n(Q_i) < \mu(M) + \varepsilon$.

Beweis: Natürlich ist jede Menge der Form $M = B \cup N$ meßbar. Sei umgekehrt vorausgesetzt, daß M meßbar ist. Dann gibt es Borelmengen F, G mit $F \subset M \subset G$ und $\mu(G \setminus F) = 0$. Wir setzen $B := F$ und $N := M \setminus F$. Das tut's! Offensichtlich ist $\mu(M) = \mu(B) + \mu(M \setminus B) = \mu(B) = \mu^*(B)$. Die letzte Aussage folgt aus der Zerlegung $M = B \cup (N \setminus B)$. Dann ist $\mu(M) = \mu(B) + \mu(N \setminus B) = \mu(B) = \mu^*(B)$.

∎

§ 2 Das Lebesgue-Integral

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, so nennt man

$$\chi_M(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathbf{x} \in M, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die *charakteristische Funktion* von M. Ist M meßbar mit endlichem Maß, so verstehen wir unter dem *Integral* von χ_M die Zahl

$$\int \chi_M \, d\mu := \mu(M).$$

Definition. Unter einer *einfachen Funktion* (oder einer *verallgemeinerten Treppenfunktion*) versteht man eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen meßbarer Mengen mit endlichem Maß.

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine einfache Funktion, wenn es endlich viele Zahlen $c_1, \ldots, c_N$ und paarweise disjunkte meßbare Mengen $M_1, \ldots, M_N$ von endlichem Maß gibt, so daß gilt:

$$f = c_1 \cdot \chi_{M_1} + \cdots + c_N \cdot \chi_{M_N}.$$

f nimmt also nur endlich viele Werte an. Ist $c \neq 0$, so ist $f^{-1}(c)$ leer oder eine meßbare Menge von endlichem Maß.

Unter dem *Integral* einer solchen einfachen Funktion f versteht man die Zahl

$$\int f \, d\mu := c_1 \cdot \mu(M_1) + \cdots + c_N \cdot \mu(M_N).$$

2.1 Satz. *Das Integral von einfachen Funktionen hat folgende Eigenschaften:*

1. *Die Zuordnung* $f \mapsto \int f \, d\mu$ *ist linear.*
2. *Ist* $f \leq g$, *so ist* $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.
3. *Ist* $Q_0 := [0,1]^n$ *der Einheitsquader im* $\mathbb{R}^n$, *so ist* $\int \chi_{Q_0} \, d\mu = 1$.
4. *Mit* f *ist auch* $|f|$ *einfach, und es ist* $|\int f \, d\mu| \leq \int |f| \, d\mu$.
5. *Sei* Q *ein Quader. Ist* $f(\mathbf{x}) \equiv 0$ *für* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus Q$, *so ist*

$$|\int f \, d\mu| \leq v_n(Q) \cdot \sup\{|f(\mathbf{x})| \, : \mathbf{x} \in Q\}.$$

BEWEIS: Die Aussagen sind alle mehr oder weniger trivial.

Zu (1): Zwei einfache Funktionen f und g können immer in Bezug auf das gleiche Mengensystem beschrieben werden.

Für (2) reicht es zu zeigen: Ist $f \geq 0$, so ist $\displaystyle\int f\,d\mu \geq 0$.

(4) folgt aus der Ungleichung $-|f| \leq f \leq |f|$.

Zu (5): Ist $c := \sup\{|f(\mathbf{x})| \,:\, \mathbf{x} \in Q\}$, so ist $0 \leq |f| \leq c \cdot \chi_Q$. ∎

Bevor wir jetzt den Integralbegriff verallgemeinern, wollen wir die Klasse der meßbaren Funktionen einführen.

Definition. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt *meßbar*, falls gilt:

$$\forall\, c \in \mathbb{R} \text{ ist die Menge } \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, f(\mathbf{x}) \geq c\} \text{ meßbar.}$$

2.2 Satz. *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann meßbar, wenn eine der folgenden Eigenschaften erfüllt ist:*

1. $\forall\, c \in \mathbb{R}$ *ist* $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, f(\mathbf{x}) < c\}$ *meßbar.*
2. $\forall\, c \in \mathbb{R}$ *ist* $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, f(\mathbf{x}) \leq c\}$ *meßbar.*
3. $\forall\, c \in \mathbb{R}$ *ist* $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, f(\mathbf{x}) > c\}$ *meßbar.*

BEWEIS: Man benutzt, daß die Menge der meßbaren Mengen eine σ-Algebra bildet, sowie folgende Gleichungen:

$$\{f < c\} = \mathbb{R}^n \setminus \{f \geq c\}, \quad \{f \leq c\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{f < c + \frac{1}{i}\} \text{und} \qquad \{f > c\} = \mathbb{R}^n \setminus \{f \leq c\}.$$

∎

2.3 Folgerung. *Ist f meßbar, so sind für alle $c, d \in \mathbb{R}$ die Mengen*

$$\{\mathbf{x} \,:\, f(\mathbf{x}) = c\} \quad \textit{und} \quad \{\mathbf{x} \,:\, c < f(\mathbf{x}) < d\}$$

meßbar.

Beispiele.

1. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, so ist jede Menge $\{f > c\} = f^{-1}((c, \infty))$ offen und damit meßbar. Also sind stetige Funktionen meßbar.

2. Sei $f = c_1 \cdot \chi_{M_1} + \cdots + c_N \cdot \chi_{M_N}$ eine einfache Funktion und $c_1 < c_2 < \ldots < c_N$. Dabei sei 0 eine der N Zahlen. Für $c \leq c_1$ ist $\{f < c\} = \varnothing$, für $c_i < c \leq c_{i+1}$ ist $\{f < c\} = M_1 \cup \ldots \cup M_i$. Und für $c > c_N$ ist $\{f < c\} = \mathbb{R}^n$. Also ist f meßbar.

3. Ist (f_k) eine Folge von meßbaren Funktionen, so sind auch die Funktionen $f := \inf(f_k)$ und $F := \sup(f_k)$ meßbar. Insbesondere folgt daraus, daß auch der Limes einer punktweise konvergenten Folge von meßbaren Funktionen wieder meßbar ist.

   Beweis dafür: $\{f < c\} = \bigcup_k \{f_k < c\}$ und $\{F > c\} = \bigcup_k \{f_k > c\}$.

   Ist (f_k) konvergent, so ist $\lim_{k\to\infty} f_k = \inf_k(\sup_{i\geq k} f_i)$.

4. Aus (3) folgt: Ist f meßbar, so ist auch $f^+ := \max(f, 0)$, $f^- := -\min(f, 0)$ und $|f| := \max(f^+, f^-)$ meßbar.

5. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion (d.h. auf jedem abgeschlossenen Intervall eine Regelfunktion), so ist f meßbar. Das ist klar, weil f Limes von Treppenfunktionen und jede Treppenfunktion einfach ist.

2.4 Satz. *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann meßbar, wenn es eine Folge (φ_ν) von einfachen Funktionen gibt, die punktweise gegen f konvergiert.*

Ist $f \geq 0$, so kann man erreichen, daß (φ_ν) monoton wächst.

Beweis: Wir haben nur eine Richtung zu zeigen. Sei f meßbar. Wegen der möglichen Zerlegung $f = f^+ - f^-$ können wir annehmen, daß $f \geq 0$ ist. Für $i \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} M_{k,i} &:= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, \frac{k}{2^i} \leq f(\mathbf{x}) < \frac{k+1}{2^i}\}, \text{ für } k = 0, 1, \ldots, i \cdot 2^i - 1, \\ \text{und} \quad M_{i\cdot 2^i, i} &:= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, f(\mathbf{x}) \geq i\}. \end{aligned}$$

Diese Mengen sind meßbar und paarweise disjunkt. Durch

$$\varphi_i(\mathbf{x}) := \begin{cases} k \cdot 2^{-i} & \text{auf } M_{k,i} \text{ für } k = 1, 2, \ldots, i \cdot 2^i - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wird eine einfache Funktion φ_i definiert. Es ist $0 \leq \varphi_i \leq \varphi_{i+1}$, und (φ_i) konvergiert punktweise gegen f (auf jeder kompakten Menge sogar gleichmäßig). ∎

2.5 Folgerung. *Die Menge aller reellwertigen meßbaren Funktionen bildet einen Vektorraum.*

Definition. Sei $\mathcal{F}$ ein Vektorraum von reellwertigen Funktionen. Wir nennen $\mathcal{F}$ einen *zulässigen* Raum, falls gilt:

1. Jede Funktion $f \in \mathcal{F}$ ist meßbar.
2. Mit f gehört auch $|f|$ zu $\mathcal{F}$.
3. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $\chi_M \le f$ für ein $f \in \mathcal{F}$, so ist $\mu(M) < \infty$ und χ_M gehört auch zu $\mathcal{F}$.

Beispiel.

Der Raum der einfachen Funktionen ist zulässig, aber im Raum aller meßbaren Funktionen ist die letzte Eigenschaft nicht erfüllt.

Definition. Eine *Integralfunktion* auf einem zulässigen Vektorraum $\mathcal{F}$ ist eine Funktion $I : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. I ist linear (und damit insbesondere $I(0) = 0$).
2. Ist $f \le g$, so ist $I(f) \le I(g)$.
3. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $\mu(M) < \infty$, so ist $I(\chi_M) = \mu(M)$.

2.6 Satz. *Sei I eine Integralfunktion auf einem zulässigen Raum $\mathcal{F}$. Dann gilt:*

4. *Es ist stets $|I(f)| \le I(|f|)$.*
5. *Ist Q ein Quader, $f \in \mathcal{F}$ und $f(\mathbf{x}) = 0$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus Q$, so ist $I(f) \le v_n(Q) \cdot \sup\{|f(\mathbf{x})| \,:\, \mathbf{x} \in Q\}$.*

BEWEIS:

1) Wegen $-|f| \le f \le |f|$ ist $-I(|f|) \le I(f) \le I(|f|)$, also $|I(f)| \le I(|f|)$.

2) Sei $c := \sup\{|f(\mathbf{x})| \,:\, \mathbf{x} \in Q\}$. Ist $c = \infty$, so ist nichts zu zeigen. Sonst ist $f \le c \cdot \chi_Q$ und $I(f) \le c \cdot v_n(Q)$. ∎

Beispiel.

Durch $I(\varphi) := \int \varphi \, d\mu$ wird eine Integralfunktion auf dem Raum der einfachen Funktionen definiert.

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und φ eine einfache Funktion, so ist auch $\varphi \cdot \chi_M$ eine einfache Funktion, und wir definieren:

$$\int_M \varphi \, d\mu := \int \varphi \cdot \chi_M \, d\mu.$$

Sind M und N meßbar mit $M \cap N = \varnothing$, so ist

$$\int_{M \cup M} \varphi \, d\mu = \int_M \varphi \, d\mu + \int_N \varphi \, d\mu.$$

Definition. Sei I ein Integral auf $\mathcal{F}$. Dann wird die L^1-*Seminorm* auf $\mathcal{F}$ definiert durch $\|f\|_1 := I(|f|)$.

2.7 Satz. *Die L^1-Seminorm hat folgende Eigenschaften:*

1. *Es ist stets $\|f\|_1 \geq |I(f)| \geq 0$. Ist $f = 0$, so ist auch $\|f\|_1 = 0$.*
2. *Es ist $\|\lambda \cdot f\|_1 = |\lambda| \cdot \|f\|_1$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.*
3. *Es ist $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.*

Beweis: 1) und 2) sind völlig trivial. Zu 3):

$$\|f + g\|_1 = I(|f + g|) \leq I(|f| + |g|) = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

■

Zur Norm fehlt bloß die Eigenschaft: $\|f\|_1 = 0 \implies f = 0$. Die ist i.a. nicht erfüllt!

Definition. Sei $\mathcal{F}$ ein zulässiger Raum mit Integralfunktion I. Eine L^1-Cauchyfolge in $\mathcal{F}$ ist eine Folge (f_i) von Funktionen aus $\mathcal{F}$, so daß gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, i_0, \text{ s.d. } \forall\, i, j \geq i_0 \text{ gilt: } \|f_i - f_j\|_1 < \varepsilon.$$

Definition. Wir sagen, daß eine Eigenschaft *fast überall* erfüllt ist, wenn sie außerhalb einer Nullmenge gilt.

Beispiel.

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann fast überall stetig, wenn es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so daß f in jedem Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N$ stetig ist.

Das gilt z.B. für eine Regelfunktion, aber **nicht** für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2.8 Haupt-Lemma. *Sei I eine Integralfunktion auf einem zulässigen Raum $\mathcal{F}$. Ist (f_i) eine L^1-Cauchyfolge in $\mathcal{F}$, so gibt es eine Teilfolge (f_{i_ν}) mit folgenden Eigenschaften:*

1. *(f_{i_ν}) konvergiert fast überall (punktweise) gegen eine Funktion f (die nicht notwendigerweise wieder in $\mathcal{F}$ liegen muß).*

2. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine meßbare Menge Z mit $\mu(Z) < \varepsilon$, so daß (f_{i_ν}) auf $\mathbb{R}^n \setminus Z$ sogar gleichmäßig konvergiert.*

Konvergiert $\|f_i\|_1$ zusätzlich gegen Null, so ist $f = 0$ fast überall.

BEWEIS: Zu jedem k gibt es ein N_k, so daß für $i, j \geq N_k$ gilt:

$$\|f_i - f_j\|_1 < \frac{1}{2^{2k}}\,.$$

Wir sorgen dafür, daß (N_k) streng monoton wächst und setzen $g_k := f_{N_k}$. Dann ist (g_k) eine Teilfolge von (f_i) und

$$\|g_l - g_k\|_1 = \|f_{N_l} - f_{N_k}\|_1 < \frac{1}{2^{2k}} \text{ für } l \geq k.$$

Sei $Y_k := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |g_{k+1}(\mathbf{x}) - g_k(\mathbf{x})| \geq 2^{-k}\}$. Da alle f_i meßbar sind, ist Y_k eine meßbare Menge. Weiter ist $2^k|g_{k+1} - g_k| \in \mathcal{F}$ und $\chi_{Y_k} \leq 2^k|g_{k+1} - g_k|$, also $\mu(Y_k) < \infty$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^k}\mu(Y_k) &= I(\frac{1}{2^k} \cdot \chi_{Y_k}) \\ &\leq I(|g_{k+1} - g_k|) \\ &= \|g_{k+1} - g_k\|_1 \;<\; \frac{1}{2^{2k}}, \end{aligned}$$

also $\mu(Y_k) < 2^{-k}$.

Nun sei $Z_m := \displaystyle\bigcup_{k=m}^{\infty} Y_k$. Dann ist

$$\mu(Z_m) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^m}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Auf $\mathbb{R}^n \setminus Z_m$ ist $|g_{k+1} - g_k| < 2^{-k}$ für $k \geq m$. Daraus folgt, daß die Reihe

$$\sum_{k=m}^{\infty}(g_{k+1} - g_k)$$

auf $\mathbb{R}^n \setminus Z_m$ gleichmäßig konvergiert. Das bedeutet, daß die Folge

$$g_M = g_1 + \sum_{k=1}^{M}(g_{k+1} - g_k)$$

auf jeder Menge $\mathbb{R}^n \setminus Z_m$ gleichmäßig und auf $\displaystyle\bigcup_m(\mathbb{R}^n \setminus Z_m) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_m Z_m$ zumindest punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Dabei ist $\mu(\displaystyle\bigcap_{m=1}^{\infty} Z_m) = 0$.

Wenn $\|f_i\|_1$ zusätzlich gegen Null konvergiert, dann kann man die Teilfolge $g_k = f_{N_k}$ so wählen, daß $\|g_j\|_1 < 1/2^{2k}$ für $j \geq k$ ist. Setzt man jetzt $M_k := \{\mathbf{x} : |g_k(\mathbf{x})| > 2^{-k}\}$ und $W_m := \bigcap_{k=m}^{\infty} M_k$, so folgt wie oben, daß $\mu(W_m) \leq 2^{-(m-1)}$ ist, und auf $\mathbb{R}^n \setminus W_m$ ist $|g_k| < 2^{-k}$ für $k \geq m$. Das bedeutet, daß (g_k) auf $\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_m Z_m$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. Das heißt, daß fast überall $f = 0$ ist. ■

2.9 Satz. *Sei (φ_ν) eine L^1-Cauchyfolge von einfachen Funktionen. Dann gilt:*

1. *Die Folge der Integrale $\int \varphi_\nu \, d\mu$ konvergiert in $\mathbb{R}$.*
2. *Konvergiert (φ_ν) fast überall gegen Null, so konvergiert $\|\varphi_\nu\|_1$ gegen Null, und auch die Folge der Integrale $\int \varphi_\nu \, d\mu$ konvergiert gegen Null.*

Beweis: 1) Es ist $|\int \varphi_\nu \, d\mu - \int \varphi_\mu \, d\mu| = |\int (\varphi_\nu - \varphi_\mu) \, d\mu| \leq \|\varphi_\nu - \varphi_\mu\|_1$. Also bildet auch $(\int \varphi_\nu \, d\mu)$ eine Cauchyfolge, und weil $\mathbb{R}$ vollständig ist, konvergiert diese Folge.

2) Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein ν_0, so daß $\|\varphi_\nu - \varphi_\mu\|_1 < \varepsilon$ für $\nu, \mu \geq \nu_0$ ist.

Sei $M := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \varphi_{\nu_0}(\mathbf{x}) \neq 0\}$. Weil φ_{ν_0} einfach ist, ist M eine meßbare Menge von endlichem Maß, und für $\nu \geq \nu_0$ ist

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus M} |\varphi_\nu| \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n \setminus M} |\varphi_\nu - \varphi_{\nu_0}| \, d\mu \leq \|\varphi_\nu - \varphi_{\nu_0}\|_1 < \varepsilon.$$

Nach dem Haupt-Lemma gibt es eine Menge $Z \subset M$ mit $\mu(Z) < \dfrac{\varepsilon}{\sup_M |\varphi_{\nu_0}|}$, so daß (φ_ν) auf $M \setminus Z$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert (nach Übergang zu einer Teilfolge). Für großes ν ist dann

$$\int_{M \setminus Z} |\varphi_\nu| \, d\mu \leq \mu(M) \cdot \sup_M |\varphi_\nu| < \varepsilon.$$

Schließlich ist für $\nu \geq \nu_0$ auch

$$\begin{aligned} \int_Z |\varphi_\nu| \, d\mu &\leq \int_Z |\varphi_\nu - \varphi_{\nu_0}| \, d\mu + \int_Z |\varphi_{\nu_0}| \, d\mu \\ &\leq \|\varphi_\nu - \varphi_{\nu_0}\|_1 + \mu(Z) \cdot \sup_M |\varphi_{\nu_0}| \; < \; 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Wegen der Zerlegung

$$\|\varphi_\nu\|_1 = \int |\varphi_\nu| \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n \setminus M} |\varphi_\nu| \, d\mu + \int_{M \setminus Z} |\varphi_\nu| \, d\mu + \int_Z |\varphi_\nu| \, d\mu$$

konvergiert $\|\varphi_\nu\|_1$ gegen 0. Wegen $0 \leq |\int \varphi_\nu \, d\mu| \leq \|\varphi_\nu\|_1$ konvergiert auch die Folge der Integrale gegen Null. ■

Definition. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *integrierbar (im Sinne von Lebesgue)*, falls es eine L^1-Cauchyfolge (φ_ν) von einfachen Funktionen gibt, die fast überall (punktweise) gegen f konvergiert. Wir nennen (φ_ν) dann eine *approximierende Folge.*

Die Zahl $\displaystyle\int f\,d\mu := \lim_{\nu\to\infty}\int \varphi_\nu\,d\mu$ heißt das *(Lebesguesche) Integral* von f.

2.10 Satz. *Mit f ist auch $|f|$ integrierbar. Das Integral von f und die L^1-Seminorm $\|f\|_1 := \int |f|\,d\mu$ hängen nicht von der approximierenden Folge ab.*

Beweis: Ist (φ_ν) eine approximierende Folge für f, so ist $(|\varphi_\nu|)$ eine approximierende Folge für $|f|$.[1] Es bleibt nur zu zeigen, daß das Integral nicht von der approximierenden Folge abhängt.

Sind (φ_ν), (ψ_ν) zwei L^1-Cauchyfolgen von einfachen Funktionen, die fast überall punktweise gegen f konvergieren, so setzen wir $\tau_\nu := \varphi_\nu - \psi_\nu$. Dann ist auch τ_ν einfach, und

$$\|\tau_\nu - \tau_\mu\|_1 \le \|\varphi_\nu - \varphi_\mu\|_1 + \|\psi_\nu - \psi_\mu\|_1.$$

Das bedeutet, daß (τ_ν) eine L^1-Cauchyfolge ist, die fast überall gegen Null konvergiert. Also ist $\displaystyle\lim_{\nu\to\infty}\int \varphi_\nu\,d\mu = \lim_{\nu\to\infty}\int \psi_\nu\,d\mu$. ∎

2.11 Satz.

1. *Ist f integrierbar und fast überall $f = g$, so ist auch g integrierbar, und $\displaystyle\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$.*
2. *Jede integrierbare Funktion ist meßbar.*

Beweis: 1) Es gibt eine Nullmenge N und eine L^1-Cauchyfolge (φ_ν), so daß auf $\mathbb{R}^n \setminus N$ gilt: $f = g$ und $\varphi_\nu \to f$. Dann konvergiert (φ_ν) auch fast überall gegen g, und es ist $\int g\,d\mu = \int f\,d\mu$.

2) Wir verwenden die approximierende Folge (φ_ν) und setzen

$$\psi_\nu(\mathbf{x}) := \begin{cases} \varphi_\nu(\mathbf{x}) & \text{auf } \mathbb{R}^n \setminus N \\ 0 & \text{auf } N. \end{cases}$$

Dann ist ψ_ν auch einfach, und die Folge (ψ_ν) ist überall punktweise konvergent, gegen eine meßbare Funktion h, so daß $h = f$ auf $\mathbb{R}^n \setminus N$ ist. Für $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \ge c\} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N : h(\mathbf{x}) \ge c\} \cup \{\mathbf{x} \in N : f(\mathbf{x}) \ge c\} \\ &= \big(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h(\mathbf{x}) \ge c\} \setminus N_1\big) \cup N_2,\end{aligned}$$

[1] Weil stets $||a| - |b|| \le |a - b|$ ist, ist $(|\varphi_\nu|)$ eine L^1-Cauchyfolge.

mit den Nullmengen $N_1 := \{\mathbf{x} \in N : h(\mathbf{x}) \geq c\}$ und $N_2 := \{\mathbf{x} \in N : f(\mathbf{x}) \geq c\}$. Also ist f meßbar. ∎

2.12 Satz. *Die integrierbaren Funktionen besitzen folgende Eigenschaften:*

1. *Die Zuordnung* $f \mapsto \int f\,d\mu$ *ist linear.*
2. *Mit* f, g *ist auch* $\max(f,g)$ *und* $\min(f,g)$ *integrierbar.*
3. *Ist* $f \leq g$ *fast überall, so ist* $\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$.
4. *Ist* M *meßbar mit endlichem Maß, so ist* χ_M *integrierbar und* $\int \chi_M\,d\mu = \mu(M)$.
5. *Ist* f *integrierbar, so ist* $|\int f\,d\mu| \leq \|f\|_1$.

Beweis: 1) folgt aus den Konvergenzsätzen und der Linearität des Integrals für einfache Funktionen.

2) Es ist $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g|$ und $\min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g|$.

3) Ist $f \geq 0$, so ist $0 \leq |\int f\,d\mu| \leq \int f\,d\mu$ (wegen Eigenschaft (5)). Wir dürfen dann natürlich (3) nicht – wie es sonst üblich ist – beim Beweis von (5) benutzen.

4) Klar!

5) Ist (φ_ν) approximierende Folge für f, so ist $|\int \varphi_\nu\,d\mu| \leq \int |\varphi_\nu|\,d\mu$. Beim Übergang zum Grenzwert bleibt die Ungleichung erhalten. ∎

Ist (φ_ν) eine approximierende Folge für die integrierbare Funktion f und M meßbar, so ist $(\varphi_\nu \cdot \chi_M)$ eine approximierende Folge für $f \cdot \chi_M$. Man definiert dann:

$$\int_M f\,d\mu := \int f \cdot \chi_M\,d\mu\,(= \lim_{\nu\to\infty} \int_M \varphi_\nu\,d\mu\,).$$

2.13 Satz. *Ist* M *meßbar und* f *integrierbar, so ist* $|\int_M f\,d\mu| \leq \mu(M) \cdot \sup_M |f|$.

Ist $M = A \cup B$ *mit zwei meßbaren disjunkten Mengen* A, B, *so ist*

$$\int_M f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu.$$

Der Beweis ist sehr einfach.

2.14 Satz. *Sei* f *integrierbar. Dann gilt:*

$$\|f\|_1 = 0 \iff f = 0 \textit{ fast überall.}$$

BEWEIS: Ist $f = 0$ fast überall, so ist natürlich $\|f\|_1 = 0$.

Sei umgekehrt vorausgesetzt, daß $\|f\|_1 = 0$ ist. Weil f integrierbar ist, ist $|f|$ meßbar, und es gibt eine Folge (φ_ν) von einfachen Funktionen mit $0 \leq \varphi_\nu \leq \varphi_{\nu+1}$, die punktweise gegen $|f|$ konvergiert. Dann ist

$$\int \varphi_\nu \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu = \|f\|_1 = 0$$

und daher $\mu(\{\mathbf{x} : \varphi_\nu(\mathbf{x}) > 0\}) = 0$ für alle ν. Dann folgt:

$$\mu(\{\mathbf{x} : |f(\mathbf{x})| > 0\}) = \mu\Big(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \{\mathbf{x} : \varphi_\nu(\mathbf{x}) > 0\}\Big) = 0.$$

Also ist $f = 0$ fast überall. ∎

2.15 Satz. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, so daß $\chi_M \leq f$ ist. Dann ist $\mu(M) < \infty$ (und damit χ_M integrierbar).*

BEWEIS: Offensichtlich ist $f \geq 0$ überall. Sei $Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots$ eine aufsteigende Folge von Quadern, die ganz $\mathbb{R}^n$ ausschöpft. Dann konvergiert die Folge (φ_ν) der einfachen Funktionen $\varphi_\nu := \chi_{Q_\nu \cap M}$ punktweise und monoton wachsend gegen χ_M. Weil $\varphi_\nu \leq \chi_{Q_\nu} \cdot f$ ist, ist

$$\mu(Q_\nu \cap M) = \int \varphi_\nu \, d\mu \leq \int_{Q_\nu} f \, d\mu \leq \int f \, d\mu < \infty.$$

Die Folge der Zahlen $\mu(Q_\nu \cap M)$ ist also monoton wachsend und nach oben beschränkt. Wegen der σ-Additivität des Lebesgue-Maßes ist

$$\mu(M) = \mu(Q_1 \cap M) + \sum_{i=2}^{\infty} \mu((Q_i \setminus Q_{i-1}) \cap M) = \lim_{N \to \infty} \mu(Q_N \cap M).$$

Das bedeutet, daß $\mu(M) < \infty$ ist. ∎

Damit ist gezeigt, daß der Raum $\mathcal{L}^1$ aller integrierbaren Funktionen ein zulässiger Raum ist.

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine meßbare Teilmenge. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt *integrierbar*, falls

$$\widehat{f}(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{auf } M, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

integrierbar ist. Man setzt dann $\displaystyle\int_M f \, d\mu_n := \int \widehat{f} \, d\mu_n$.

Die Menge aller integrierbaren Funktionen auf M wird mit $\mathcal{L}^1(M)$ bezeichnet.

2.16 Satz. *Wenn eine L^1-Cauchyfolge (φ_ν) von einfachen Funktionen fast überall gegen eine integrierbare Funktion f konvergiert, dann konvergiert $\|\varphi_\nu - f\|_1$ gegen Null.*

BEWEIS: Es ist $|\varphi_\nu - \varphi_\mu|$ eine approximierende Folge für die integrierbare Funktion $|\varphi_\nu - f|$, und daher

$$\lim_{\nu\to\infty} \|\varphi_\nu - f\|_1 = \lim_{\nu\to\infty} \int |\varphi_\nu - f|\, d\mu = \lim_{\nu\to\infty} \lim_{\mu\to\infty} \int |\varphi_\nu - \varphi_\mu|\, d\mu = 0,$$

wegen der Cauchy-Eigenschaft der φ_ν. ∎

2.17 Satz von Riesz-Fischer. *Jede L^1-Cauchyfolge (f_k) von integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ konvergiert bezüglich der L^1-Seminorm gegen eine integrierbare Funktion f, und es ist*

$$\int f\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k\, d\mu.$$

Außerdem gibt es eine Teilfolge (f_{k_ν}), die fast überall (punktweise) gegen f konvergiert. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine meßbare Menge Z mit $\mu(Z) < \varepsilon$, so daß (f_{k_ν}) auf $\mathbb{R}^n \setminus Z$ gleichmäßig konvergiert.

BEWEIS: Jede Funktion f_k besitzt eine approximierende Folge, die dann auch bezüglich der L^1-Norm gegen f_k konvergiert. Also gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine einfache Funktion φ_k, so daß $\|\varphi_k - f_k\|_1 < 1/k$ ist. Es ist

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_1 \le \|\varphi_n - f_n\|_1 + \|f_n - f_m\|_1 + \|\varphi_m - f_m\|_1.$$

Das bedeutet, daß auch (φ_k) eine L^1-Cauchyfolge ist.

Nach dem Haupt-Lemma gibt es eine Teilfolge (φ_{k_ν}), die fast überall punktweise gegen eine (damit integrierbare) Funktion f konvergiert. Dann konvergiert $\|\varphi_{k_\nu} - f\|_1$ gegen Null. Jetzt ist

$$\|f_{k_\nu} - f\|_1 \le \|f_{k_\nu} - \varphi_{k_\nu}\|_1 + \|\varphi_{k_\nu} - f\|_1.$$

Das bedeutet, daß (f_{k_ν}) bezüglich der L^1-Norm gegen f konvergiert, und das gilt dann auch für die ursprüngliche Folge (f_k), weil die eine Cauchyfolge bildet. Wegen

$$0 \le |\int f_k\, d\mu - \int f\, d\mu| = |\int (f_k - f)\, d\mu| \le \|f_k - f\|_1$$

ist $\lim\limits_{k\to\infty} \int f_k\, d\mu = \int f\, d\mu$.

Der Raum $\mathcal{L}^1$ ist zulässig und $I(f) = \int f\, d\mu$ ist offensichtlich eine Integralfunktion. Also können wir erneut das Haupt-Lemma anwenden. O.B.d.A. konvergiert die Teilfolge (f_{k_ν}) fast überall punktweise gegen f, und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine meßbare Menge Z mit $\mu(Z) < \varepsilon$, so daß (f_{k_ν}) auf $\mathbb{R}^n \setminus Z$ gleichmäßig konvergiert. ∎

§ 3 Konvergenzsätze

3.1 Satz von der monotonen Konvergenz (Beppo Levi). *Sei* (f_ν) *eine fast überall monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen, und die Folge der Integrale* $\displaystyle\int f_\nu \, d\mu_n$ *sei nach oben beschränkt. Dann konvergiert* (f_ν) *fast überall gegen eine integrierbare Funktion* f*, und es ist*

$$\int f \, d\mu_n = \lim_{\nu \to \infty} \int f_\nu \, d\mu_n.$$

Beweis: Wegen der Monotonie ist

$$\|f_{\nu+\lambda} - f_\nu\|_1 = \int (f_{\nu+\lambda} - f_\nu) \, d\mu = \int f_{\nu+\lambda} \, d\mu - \int f_\nu \, d\mu,$$

und die rechte Seite strebt mit wachsendem ν gegen Null, nach dem Satz von der monotonen Konvergenz für Zahlenfolgen. Also ist (f_ν) eine L^1-Cauchyfolge, und es gibt eine Teilfolge (f_{ν_i}), die fast überall gegen eine integrierbare Funktion f konvergiert (Riesz-Fischer). Wegen der Monotonie konvergiert dann auch die ursprüngliche Folge (f_ν) fast überall gegen f. Außerdem konvergiert $\|f - f_\nu\|_1$ gegen Null, also $\displaystyle\int f_\nu \, d\mu$ gegen $\displaystyle\int f \, d\mu$. ∎

3.2 Folgerung 1. *Sei* (f_ν) *eine Folge nicht-negativer integrierbarer Funktionen. Wenn die Reihe* $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \int f_\nu \, d\mu$ *konvergiert, dann stimmt* $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ *fast überall mit einer integrierbaren Funktion* f *überein, und es gilt:*

$$\int \Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \Big) \, d\mu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int f_\nu \, d\mu.$$

3.3 Folgerung 2. *Sei* (f_ν) *eine fast überall monoton fallende Folge integrierbarer Funktionen, und die Folge der Integrale* $\displaystyle\int f_\nu \, d\mu_n$ *sei nach unten beschränkt. Dann konvergiert* (f_ν) *fast überall gegen eine integrierbare Funktion* f*, und es ist*

$$\int f \, d\mu_n = \lim_{\nu \to \infty} \int f_\nu \, d\mu_n.$$

Beweis: Wende Beppo Levi auf die Folge $(-f_\nu)$ an. ∎

3.4 Satz von der dominierten Konvergenz (Lebesgue). *Sei* (f_ν) *eine Folge von integrierbaren Funktionen, die fast überall punktweise gegen eine Grenzfunktion*

f konvergiert. Außerdem gebe es eine integrierbare Funktion g, so daß $|f_\nu(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x})$ für alle ν und fast alle $\mathbf{x}$ ist.

Dann ist auch die Grenzfunktion f integrierbar, und es gilt:

$$\int f\,d\mu_n = \lim_{\nu\to\infty} \int f_\nu\,d\mu_n.$$

Beweis: Da Nullmengen keine Rolle spielen, können wir annehmen, daß (f_ν) überall (punktweise) gegen f konvergiert und daß überall $|f_\nu(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x})$ ist.

Sei $h_k(\mathbf{x}) := \sup\{|f_\nu(\mathbf{x}) - f_\lambda(\mathbf{x})| \,:\, \nu,\lambda \geq k\}$. Dann ist $0 \leq h_k \leq 2g$ überall.

Sei weiter $h_{k,m}(\mathbf{x}) := \max\{|f_\nu(\mathbf{x}) - f_\lambda(\mathbf{x})| \,:\, k \leq \nu,\lambda \leq k+m\}$. Dann ist auch $0 \leq h_{k,m} \leq 2g$, und die Folge der $h_{k,m}$ konvergiert monoton wachsend gegen h_k. Weil alle $h_{k,m}$ integrierbar sind, folgt mit Beppo Levi, daß auch h_k integrierbar ist.

Die Folge der (h_k) konvergiert monoton fallend gegen Null, also konvergiert auch $\int h_k\,d\mu$ gegen Null. Außerdem ist

$$\|f_\nu - f_\lambda\|_1 = \int |f_\nu - f_\lambda|\,d\mu \leq \int h_k\,d\mu, \text{ für } \nu,\lambda \geq k.$$

Das bedeutet, daß (f_ν) eine L^1-Cauchyfolge ist. Der Rest folgt jetzt wieder mit Riesz-Fischer, da wir ja diesmal schon vorausgesetzt haben, daß (f_ν) gegen f konvergiert. ∎

Jetzt können wir unsere bekannten Integralbegriffe mit dem Lebesgueschen Integral vergleichen:

3.5 Satz. *Sei f eine Regelfunktion auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$. Dann ist f integrierbar, und es gilt:*

$$\int_{[a,b]} f\,d\mu_1 = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Beweis: Es gibt eine Folge von Treppenfunktionen φ_ν, die auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann konvergiert $\Sigma(\varphi_\nu) = \int_a^b \varphi_\nu(t)\,dt$ gegen $\int_a^b f(t)\,dt$.

Die trivialen Fortsetzungen $\psi_\nu := \widehat{\varphi_\nu}$ sind verallgemeinerte Treppenfunktionen, und sie konvergieren – immer noch gleichmäßig – gegen $\widehat{f}$. Außerdem ist $\int \psi_\nu\,d\mu_1 = \Sigma(\varphi_\nu)$ für alle ν, und es gilt:

$$\|\psi_\nu - \psi_\mu\|_1 = \int_a^b |\varphi_\nu(t) - \varphi_\mu(t)|\,dt \leq \sup_{[a,b]}|\varphi_\nu - \varphi_\mu| \cdot (b-a).$$

Der rechte Ausdruck strebt wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (φ_ν) mit wachsendem ν,μ gegen Null. ∎

Im Falle von Funktionen einer Veränderlichen auf abgeschlossenen Intervallen kann die Berechnung von Integralen also meist in gewohnter Weise durchgeführt werden.

3.6 Satz. *Es sei f eine Regelfunktion auf dem Intervall $[a,\infty)$, und es konvergiere das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_a^\infty |f(t)|\,dt$. Dann ist f integrierbar, und es gilt:*

$$\int_{[a,\infty)} f\,d\mu_1 = \int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(t)\,dt.$$

Entsprechende Aussagen gelten auch für alle anderen Typen von uneigentlichen Integralen.

BEWEIS: Sei $f_n := |(f|_{[a,n]})|$. Dann konvergiert f_n monoton wachsend gegen $|f|$. Da $|f|$ und alle f_n Regelfunktionen sind, gilt:

$$|\int_{[a,n]} f_n\,d\mu_1| = \int_a^n |f(t)|\,dt \le \int_a^\infty |f(t)|\,dt < \infty.$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz ist dann $|f|$ integrierbar.

Die Folge $g_n := f|_{[a,n]}$ konvergiert punktweise gegen f und besteht aus integrierbaren Funktionen. Wegen $|g_n| \le |f|$ folgt nun mit dem Satz von der dominierten Konvergenz, daß f integrierbar ist, und

$$\int_{[a,\infty)} f\,d\mu_1 = \lim_{n\to\infty}\int g_n\,d\mu_1 = \lim_{n\to\infty}\int_a^n f(t)\,dt = \int_a^\infty f(t)\,dt.$$

■

Beispiel.

Obwohl das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}$ konvergiert, ist $f(x) := (\sin x)/x$ nicht über $[0,\infty)$ integrierbar, denn es müßte dann ja auch $|f(x)|$ integrierbar sein. Es ist aber

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\frac{\sin x}{x}|\,dx \ge \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{k\pi},$$

und die harmonische Reihe divergiert.

3.7 Satz (Riemannsches Integrierbarkeitskriterium). *Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und fast überall stetig. Dann ist f integrierbar.*

BEWEIS: Wir setzen zunächst $Q_1^{(1)} := Q$. Das ist ein kartesisches Produkt von n Intervallen. Wenn wir alle diese Intervalle halbieren, können wir daraus 2^n Teilquader $Q_2^{(1)}, \ldots, Q_2^{(2^n)}$ kombinieren. Wiederholen wir diese Prozedur mit jedem der einzelnen Teilquader, so gewinnen wir $2^n \cdot 2^n = 4^n$ Teilquader $Q_3^{(i)}$, $i = 1, \ldots, 4^n$. So fährt man fort, nach dem k-ten Schritt erhält man $(2^k)^n$ Teilquader.

$m_{k,i} := \inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in Q_k^{(i)}\}$ ist eine reelle Zahl, und durch

$$\varphi_k|_{\mathring{Q}_k^{(i)}} := m_{k,i}, \text{ für } i = 1, \ldots, (2^k)^n,$$

wird fast überall auf Q eine (gewöhnliche) Treppenfunktion φ_k definiert.

Nach Konstruktion wächst die Folge der φ_k fast überall monoton, denn die Wände der Teilquader bilden eine Nullmenge. In den Punkten, wo f stetig ist, kommen die φ_k der Funktion f beliebig nahe. Also konvergiert (φ_k) fast überall gegen f. Weil f beschränkt ist, bleiben die Integrale $\int \varphi_k \, d\mu$ nach oben beschränkt. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz ist f dann integrierbar. ∎

Bemerkung. Eine beschränkte und fast überall stetige Funktion f auf einem Quader nennt man auch *Riemann-integrierbar* (vgl. dazu den Anhang). In der älteren Literatur wird noch viel mit dem Riemann-Integral gearbeitet. Die Klasse der Lebesgue-integrierbaren Funktionen ist aber viel größer als die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen, und sie verhält sich viel vernünftiger bei Grenzwertprozessen.

3.8 Satz über Parameter-Integrale. *Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für jedes $\mathbf{u} \in U$ sei $f^{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ integrierbar, und $F : U \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $F(\mathbf{u}) := \int f^{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \, d\mu_n$.*

1. *Die Funktion $\mathbf{u} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ sei für jedes feste $\mathbf{x}$ in $\mathbf{u}_0 \in U$ stetig, und es gebe eine integrierbare Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so daß stets $|f(\mathbf{x}, \mathbf{u})| \le h(\mathbf{x})$ ist.*

   Dann ist F stetig in $\mathbf{u}_0$.

2. *Die Funktion $\mathbf{u} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ sei für jedes feste $\mathbf{x}$ auf U nach der Variablen u_j partiell differenzierbar, und es gebe eine integrierbare Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so daß stets $|f_{u_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u})| \le h(\mathbf{x})$ ist.*

   Dann ist auch F partiell differenzierbar nach u_j, und es gilt:

$$F_{u_j}(\mathbf{u}) = \int f_{u_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \, d\mu_n(\mathbf{x}).$$

BEWEIS: 1) Wir betrachten eine Folge $(\mathbf{u}_\nu)$, die gegen $\mathbf{u}_0$ konvergiert, und setzen $f_\nu(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_\nu)$. Dann sind alle f_ν integrierbar, und die Folge (f_ν) konvergiert punktweise gegen f_0 (mit $f_0(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0)$).

Da generell $|f_\nu| \le h$ ist, kann man den Konvergenzsatz von Lebesgue anwenden und erhält:

$$F(\mathbf{u}_0) = \int f_0 \, d\mu = \lim_{\nu\to\infty} \int f_\nu \, d\mu = \lim_{\nu\to\infty} F(\mathbf{u}_\nu).$$

2) Sei $\mathbf{u}_0 \in U$ und $\mathbf{e}_j$ der j-te Einheitsvektor im $\mathbb{R}^m$. Wir setzen

$$g_j(\mathbf{x}, t) := \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0 + t\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0)}{t}.$$

Für $t \to 0$ strebt $g_j(\mathbf{x}, t)$ gegen $f_{u_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein ξ mit $0 < \xi < t$, so daß $g_j(\mathbf{x}, t) = f_{u_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0 + \xi \cdot \mathbf{e}_j)$ ist. Nach Voraussetzung ist daher $|g_j(\mathbf{x}, t)| \le h(\mathbf{x})$. Aus dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt nun, daß $f_{u_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0)$ integrierbar ist und daß gilt:

$$\begin{aligned}
\int f_{u_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0) \, d\mu_n(\mathbf{x}) &= \lim_{t\to 0} \int g_j(\mathbf{x}, t) \, d\mu_n(\mathbf{x}) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{F(\mathbf{u}_0 + t\mathbf{e}_j) - F(\mathbf{u}_0)}{t} \\
&= F_{u_j}(\mathbf{u}_0).
\end{aligned}$$

Das ist die Behauptung. ■

3.9 Folgerung. *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wenn $f : K \times U \to \mathbb{R}$ für jedes $\mathbf{u} \in U$ über K integrierbar und auf ganz $K \times U$ nach $u_1, \ldots, u_m$ stetig partiell differenzierbar ist, dann ist $F : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und es gilt:*

$$F_{u_j}(\mathbf{u}) = \int_K f_{u_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \, d\mu_n(\mathbf{x}), \text{ für } \mathbf{u} \in U \text{ und } j = 1, \ldots, m.$$

BEWEIS: Sei $\mathbf{u}_0 \in U$ und $A = A(\mathbf{u}_0) \subset U$ eine kompakte Umgebung. Dann ist $f_{u_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ als stetige Funktion auf $K \times A$ durch eine Konstante $c > 0$ nach oben beschränkt. Nach Teil 2 des obigen Satzes ist F dann auf A nach allen Variablen partiell differenzierbar, und wegen Teil 1 sind die Ableitungen stetig. Das gilt überall auf U. ■

Wir können nun auch einen Satz über uneigentliche Parameterintegrale formulieren:

3.10 Satz. *Sei $a \in \mathbb{R}$, $I := [\alpha, \beta]$ und $f : I \times [a, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig.*

1. *Es gebe eine Regelfunktion $g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, so daß das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_a^\infty g(t)\, dt$ konvergiert und $|f(x, t)| \le g(t)$ für alle $x \in I$ und $t \ge a$ ist.*

   Dann ist $F(x) := \displaystyle\int_a^\infty f(x, t)\, dt$ stetig auf I.

2. *Für jedes $x \in I$ konvergiere das uneigentliche Integral $F(x) := \int_a^\infty f(x,t)\,dt$ absolut. Außerdem sei f auf $I \times [a,\infty)$ nach t partiell differenzierbar, und es gebe eine Regelfunktion $g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, so daß das uneigentliche Integral $\int_a^\infty g(t)\,dt$ konvergiert und $|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \le g(t)$ für alle $x \in I$ und $t \ge a$ ist.*

   Dann ist F auf I differenzierbar, und es gilt:

$$F'(x) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt.$$

BEWEIS: 1) Nach Voraussetzung ist $t \mapsto f(x,t)$ für jedes $x \in I$ integrierbar. Auch die Funktion g ist integrierbar (weil sie positiv ist). Dann folgt aus dem allgemeinen Satz über Parameter-Integrale, daß F stetig ist.

2) Diesmal ist $t \mapsto f(x,t)$ und $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ für jedes $x \in I$ integrierbar, und wieder folgt die Behauptung aus dem allgemeinen Satz. ∎

Wir wollen jetzt noch den Zusammenhang zwischen meßbaren und integrierbaren Funktionen untersuchen und dabei den Integralbegriff geringfügig verallgemeinern.

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ meßbar und nicht-negativ. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge (φ_ν) von einfachen Funktionen, die punktweise gegen f konvergiert. Es sei $I := \sup_\nu \int \varphi_\nu\,d\mu_n$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Ist $I < \infty$, so folgt unmittelbar aus dem Satz von Beppo Levi, daß f integrierbar und $I = \int f\,d\mu$ ist.

2. Ist $I = \infty$, so setzen wir $\int f\,d\mu := +\infty$.

Mit dieser Definition gilt dann z.B.:

3.11 Satz. *$M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann meßbar, wenn χ_M meßbar ist, und in diesem Falle ist $\mu(M) = \int \chi_M\,d\mu$.*

BEWEIS: Ist χ_M meßbar, so ist $M = \{\mathbf{x} : \chi_M(\mathbf{x}) > 0\}$ meßbar. Sei umgekehrt M meßbar und $c \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\{\mathbf{x} : \chi_M(\mathbf{x}) \ge c\} = \begin{cases} \mathbb{R}^n & \text{falls } c \le 0, \\ M & \text{falls } 0 < c \le 1, \\ \varnothing & \text{falls } c > 1. \end{cases}$$

Das zeigt, daß χ_M meßbar ist.

Ist $\mu(M) < \infty$, so ist definitionsgemäß $\int \chi_M \, d\mu = \mu(M)$. Andernfalls wähle man Quader $Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots$, die den $\mathbb{R}^n$ ausschöpfen. Dann ist $\varphi_\nu := \chi_{M \cap Q_\nu}$ eine Folge von einfachen Funktionen, die monoton wachsend gegen χ_M konvergiert. Weil $\int \varphi_\nu \, d\mu = \mu(M \cap Q_\nu)$ unbeschränkt ist, ist auch $\int \chi_M \, d\mu = +\infty$. ∎

3.12 Satz. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn f meßbar und $\displaystyle\int |f| \, d\mu < \infty$ ist.*

BEWEIS: Wir wissen schon, daß jede integrierbare Funktion meßbar ist, und daß mit f auch $|f|$ integrierbar ist.

Ist umgekehrt f meßbar, so ist auch $|f|$ meßbar. Weil $|f| \geq 0$ ist, bedeutet die Bedingung $\displaystyle\int |f| \, d\mu < \infty$, daß $|f|$ sogar integrierbar ist. Aus dem Satz von Lebesgue folgt daraus die Integrierbarkeit von f. ∎

Die Konvergenzsätze übertragen sich sinngemäß auf meßbare Funktionen:

1. Sei (f_ν) eine monoton wachsende Folge nicht-negativer meßbarer Funktionen und $f := \sup_\nu (f_\nu)$. Dann ist

   $$\int f \, d\mu_n = \lim_{\nu \to \infty} \int f_\nu \, d\mu_n.$$

   Ist der Limes auf der rechten Seite endlich, so ist f integrierbar.

2. Sei (f_ν) eine Folge nicht-negativer meßbarer Funktionen. Dann ist

   $$\int \Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \Big) \, d\mu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int f_\nu \, d\mu \, .$$

3. Sei (f_ν) eine Folge von meßbaren Funktionen, die fast überall punktweise gegen eine Grenzfunktion f konvergiert. Außerdem gebe es eine integrierbare Funktion g, so daß $|f_\nu(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x})$ für alle ν und fast alle $\mathbf{x}$ ist.

   Dann sind die f_ν und f integrierbar, und es gilt:

   $$\int f \, d\mu_n = \lim_{\nu \to \infty} \int f_\nu \, d\mu_n.$$

3.13 Satz.

Sei (A_i) eine aufsteigende Folge meßbarer Mengen. Dann ist

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i).$$

Ist (B_i) eine absteigende Folge meßbarer Mengen und $\mu(B_1) < \infty$, so ist

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(B_i).$$

BEWEIS: 1) Sei $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Die Folge der meßbaren Funktionen χ_{A_i} konvergiert monoton wachsend gegen χ_A. Da alle Funktionen ≥ 0 sind, folgt aus dem verallgemeinerten Satz von der monotonen Konvergenz:

$$\mu(A) = \int \chi_A \, d\mu = \lim_{i\to\infty} \int \chi_{A_i} \, d\mu = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

2) Sei $B := \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} B_1 \setminus B &= B_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} (B_1 \setminus B_i), \end{aligned}$$

also

$$\mu(B_1) - \mu(B) = \lim_{i\to\infty} (\mu(B_1) - \mu(B_i)) = \mu(B_1) - \lim_{i\to\infty} \mu(B_i).$$

Daraus folgt die zweite Behauptung. ∎

Zum Schluß noch eine Bemerkung zu den meßbaren Funktionen:

3.14 Satz. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine meßbare Funktion. Ist $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine weitere Funktion und fast überall $f = g$, so ist auch g meßbar.*

BEWEIS: Sei N eine Nullmenge, so daß $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N$ ist. Dann ist

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, g(\mathbf{x}) \geq c\} = (\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, f(\mathbf{x}) \geq c\} \setminus N) \cup \{\mathbf{x} \in N \,:\, g(\mathbf{x}) \geq c\}$$

eine meßbare Menge (für jedes $c \in \mathbb{R}$). ∎

§ 4 Der Satz von Fubini

Hauptziel diese Paragraphen ist der folgende

4.1 Satz von Fubini. *Sei $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^m$, so daß gilt:*

1. *Für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \setminus N$ ist die Funktion $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ über $\mathbb{R}^n$ integrierbar.*
2. *Ist $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$F(\mathbf{y}) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x} & \textit{für } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \setminus N \\ 0 & \textit{sonst,} \end{cases}$$

so ist F (über $\mathbb{R}^m$) integrierbar, und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^m} F(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mu_{n+m}.$$

Man schreibt die letzte Gleichung gerne in der Form

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x} \Big)\, d\mathbf{y}.$$

Dabei kann auf der rechten Seite auch zuerst nach $\mathbf{y}$ und dann nach $\mathbf{x}$ integriert werden. Das bedeutet, daß die Berechnung eines Integrals immer auf die Berechnung von iterierten 1-dimensionalen Integralen zurückgeführt werden kann.

Es sind einige Vorarbeiten erforderlich.

Ist $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, so wird der *Schnitt* $M_\mathbf{y} \subset \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$M_\mathbf{y} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M\}.$$

Ist z.B. $M = M' \times M'' \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, so ist

$$M_\mathbf{y} = \begin{cases} M' & \text{falls } \mathbf{y} \in M'', \\ \varnothing & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sind M' und M'' meßbar mit endlichem Maß, so ist

$$\mu_n(M_\mathbf{y}) = \mu_n(M') \cdot \chi_{M''}(\mathbf{y}).$$

4.2 Satz. *Seien M, M_ν Teilmengen des $\mathbb{R}^{n+m}$. Dann gilt für $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$:*

$$(\mathbb{R}^{n+m} \setminus M)_\mathbf{y} = \mathbb{R}^n \setminus M_\mathbf{y} \quad \textit{und} \quad \Big(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu \Big)_\mathbf{y} = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} (M_\nu)_\mathbf{y}.$$

BEWEIS:

$$\begin{aligned}\text{Es ist}\quad \mathbf{x}\in(\mathbb{R}^{n+m}\setminus M)_{\mathbf{y}} &\iff (\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{R}^{n+m}\setminus M\\ &\iff \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \text{ und } (\mathbf{x},\mathbf{y})\notin M\\ &\iff \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus M_{\mathbf{y}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{und}\quad \mathbf{x}\in\Big(\bigcup_{\nu=1}^{\infty}M_\nu\Big)_{\mathbf{y}} &\iff (\mathbf{x},\mathbf{y})\in\bigcup_{\nu=1}^{\infty}M_\nu\\ &\iff \exists\,\nu \text{ s.d. } (\mathbf{x},\mathbf{y})\in M_\nu\\ &\iff \exists\,\nu \text{ s.d. } \mathbf{x}\in(M_\nu)_{\mathbf{y}}\\ &\iff \mathbf{x}\in\bigcup_{\nu=1}^{\infty}(M_\nu)_{\mathbf{y}}.\end{aligned}$$

∎

4.3 Satz. *Sei $M\subset\mathbb{R}^{n+m}$ eine Nullmenge. Dann ist für fast alle $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m$ auch der Schnitt $M_{\mathbf{y}}$ eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$.*

BEWEIS: Für $k\in\mathbb{N}$ sei $S_k:=\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m : \mu_n(M_{\mathbf{y}})\geq 1/k\}$. Es genügt dann zu zeigen, daß $S:=\bigcup_{k=1}^{\infty}S_k$ in einer Nullmenge des $\mathbb{R}^m$ enthalten ist.

Dazu sei ein $\varepsilon>0$ vorgegeben. Es gibt zu jedem $k\in\mathbb{N}$ eine Folge (Q_ν) von Quadern $Q_\nu=Q'_\nu\times Q''_\nu\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, so daß gilt:

$$M\subset\bigcup_{\nu=1}^{\infty}Q_\nu \quad\text{und}\quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\mu_{n+m}(Q_\nu)<\frac{\varepsilon}{k\cdot 2^k}.$$

Da $\varphi_N(\mathbf{y}):=\sum_{\nu=1}^{N}\mu_n((Q_\nu)_{\mathbf{y}})=\sum_{\nu=1}^{N}\mu_n(Q'_\nu)\cdot\chi_{Q''_\nu}(\mathbf{y})$ eine einfache Funktion ist, ist $\varphi(\mathbf{y}):=\lim_{N\to\infty}\varphi_N(\mathbf{y})=\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu_n((Q_\nu)_{\mathbf{y}})$ eine (nicht-negative) meßbare Funktion. Also ist

$$T_k:=\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m : \frac{1}{k}\leq\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu_n((Q_\nu)_{\mathbf{y}})\}$$

eine meßbare Menge. Offensichlich ist S_k in T_k enthalten, denn es ist $M_{\mathbf{y}}\subset\bigcup_{\nu=1}^{\infty}(Q_\nu)_{\mathbf{y}}$. Mit dem Satz von Beppo Levi für nicht-negative meßbare Funktionen erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k}\cdot\mu_m(T_k) &= \frac{1}{k}\int\chi_{T_k}\,d\mathbf{y}\\
&\le \int_{\mathbb{R}^m}\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu_n((Q_\nu)_{\mathbf{y}})\,d\mathbf{y}\\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^m}\mu_n((Q_\nu)_{\mathbf{y}})\,d\mathbf{y}\\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^m}\mu_n(Q'_\nu)\cdot\chi_{Q''_\nu}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty}\mu_{n+m}(Q_\nu) \;<\; \frac{\varepsilon}{k\cdot 2^k}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, daß $\mu_m(T_k) < \dfrac{\varepsilon}{2^k}$ ist, also $\mu_m(S) \le \varepsilon$. Da ε beliebig war, bedeutet das, daß S eine Nullmenge ist. ■

4.4 Satz. *Ist $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine Borelmenge, so ist auch jeder Schnitt $M_{\mathbf{y}}$ eine Borelmenge im $\mathbb{R}^n$.*

BEWEIS: Sei $\mathcal{E} := \{M \subset \mathbb{R}^{n+m} : M_{\mathbf{y}}$ ist für jedes $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ eine Borelmenge$\}$. Es folgt sehr leicht, daß $\mathcal{E}$ eine σ-Algebra ist. Außerdem enthält $\mathcal{E}$ alle Quader (und damit auch alle offenen Mengen). Daher muß $\mathcal{E}$ auch die Borelalgebra im $\mathbb{R}^{n+m}$ enthalten. ■

4.5 Folgerung. *Ist $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ meßbar, so ist der Schnitt $M_{\mathbf{y}}$ für fast alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ meßbar.*

BEWEIS: Es ist $M = B \cup N$ mit einer Borelmenge B und einer Nullmenge N. Für $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ ist $M_{\mathbf{y}} = B_{\mathbf{y}} \cup N_{\mathbf{y}}$, wobei $B_{\mathbf{y}}$ eine Borelmenge und $N_{\mathbf{y}}$ für fast alle $\mathbf{y}$ eine Nullmenge ist. ■

Bemerkung. „Fast alle“ kann man nicht weglassen! Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ nicht meßbar (solche Mengen gibt es) und $Y \subset \mathbb{R}^m$ eine Nullmenge, so ist $M := X \times Y$ eine Nullmenge im $\mathbb{R}^{n+m}$ und daher meßbar. Aber für $\mathbf{y} \in Y$ sind die Schnitte $M_{\mathbf{y}} = X$ nicht meßbar.

Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine meßbare Menge. Dann kann man eine Funktion $f_M : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ definieren durch

$$f_M(\mathbf{y}) := \begin{cases} \mu_n(M_{\mathbf{y}}) & \text{falls } M_{\mathbf{y}} \text{ meßbar,}\\ +\infty & \text{sonst.}\end{cases}$$

4.6 Satz von Cavalieri. *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine meßbare Menge. Dann ist die oben definierte Funktion f_M meßbar, und es gilt:*

$$\mu_{n+m}(M) = \int_{\mathbb{R}^m} f_M(\mathbf{y})\, d\mu_m(\mathbf{y}).$$

Ist sogar $\mu_{n+m}(M) < \infty$, so ist f_M integrierbar.

Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt. Dazu führen wir folgende Redeweise ein:

> *Eine beliebige Menge $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ erfüllt das Prinzip des Cavalieri (abgekürzt durch (C)), falls gilt:*
>
> 1. *M ist meßbar,*
> 2. *f_M ist meßbar,*
> 3. $\mu_{n+m}(M) = \int_{\mathbb{R}^m} f_M \, d\mu_m(\mathbf{y})$.

Zu zeigen ist, daß jede meßbare Menge M die Eigenschaft (C) besitzt.

1. Schritt: Jeder Quader $Q \subset \mathbb{R}^{n+m}$ besitzt die Eigenschaft (C).

Natürlich ist Q meßbar, und wenn $Q = Q' \times Q'' \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ist, dann ist

$$f_Q = \mu_n(Q') \cdot \chi_{Q''}$$

meßbar (sogar integrierbar) und $\int f_Q \, d\mu_m = \mu_n(Q') \cdot \mu_m(Q'') = \mu_{n+m}(Q)$.

2. Schritt:

4.7 Lemma. *Wenn die Mengen M_ν paarweise disjunkt sind und die Eigenschaft (C) besitzen, so besitzt auch $M := \bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu$ die Eigenschaft (C).*

Beweis: Offensichtlich ist M meßbar. Zu jedem ν gibt es eine Nullmenge $N_\nu \subset \mathbb{R}^m$, so daß $(M_\nu)_\mathbf{y}$ für $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \setminus N_\nu$ meßbar ist. Dann ist auch $N := \bigcup_{\nu=1}^{\infty} N_\nu$ eine Nullmenge, und für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \setminus N$ ist $M_\mathbf{y} = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} (M_\nu)_\mathbf{y}$ meßbar. Da auch die Mengen $(M_\nu)_\mathbf{y}$ paarweise disjunkt sind, folgt für solche $\mathbf{y}$ aus der σ-Additivität des Maßes:

$$\mu_n(M_\mathbf{y}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_n((M_\nu)_\mathbf{y}).$$

Also ist fast überall $f_M = \sum_\nu f_{M_\nu}$. Nach Voraussetzung sind die Funktionen f_{M_ν} alle meßbar. Da sie auch alle nicht-negativ sind, folgt die Meßbarkeit der Reihe $\sum_\nu f_{M_\nu}$, und damit die von f_M. Weiter ist nach Voraussetzung $\mu_{n+m}(M_\nu) = \int f_{M_\nu} \, d\mu_m$ für alle ν.. Mit σ-Additivität und Beppo Levi folgt:

$$\begin{aligned}\mu_{n+m}(M) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_{n+m}(M_\nu) \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \int f_{M_\nu}\, d\mu_m \\ &= \int \Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} f_{M_\nu}\Big)\, d\mu_m \\ &= \int f_M\, d\mu_m.\end{aligned}$$

∎

3. Schritt: Da jede offene Menge als abzählbare Vereinigung paarweise disjunkter Quader geschrieben werden kann, besitzt auch jede offene Menge die Eigenschaft (C).

4. Schritt: Sei $K \subset \mathbb{R}^{n+m}$ kompakt. Dann gibt es eine beschränkte offene Menge U mit $K \subset U$. Es ist $U \setminus K$ offen und $(U \setminus K)_{\mathbf{y}} = U_{\mathbf{y}} \setminus K_{\mathbf{y}}$, also $f_{U\setminus K} = f_U - f_K$. Das bedeutet, daß $f_K = f_U - f_{U\setminus K}$ meßbar ist, und es gilt:

$$\mu_{n+m}(U) - \mu_{n+m}(K) = \mu_{n+m}(U \setminus K) = \int f_{U\setminus K}\, d\mu_m = \int f_U\, d\mu_m - \int f_K\, d\mu_m.$$

Das zeigt, daß jede kompakte Menge die Eigenschaft (C) besitzt.

5. Schritt: Sei $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ eine aufsteigende Folge von kompakten Mengen und $F := \bigcup_{\nu=1}^{\infty} K_\nu$. Dann ist $f_F = \sup f_{K_\nu}$ meßbar, und aus dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt:

$$\mu_{n+m}(F) = \sup \mu_{n+m}(K_\nu) = \sup \int f_{K_\nu}\, d\mu_m = \int f_F\, d\mu_m.$$

6. Schritt: Sei $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$ eine absteigende Folge von *beschränkten* offenen Mengen im $\mathbb{R}^{n+m}$, und $G := \bigcap_{\nu=1}^{\infty} U_\nu$. Man kann einen kompakten Quader Q mit $U_1 \subset Q$ finden. Dann ist $Q \setminus G = \bigcap_{\nu=1}^{\infty}(Q \setminus U_\nu)$ eine aufsteigende Folge von kompakten Mengen. Also besitzt auch $Q \setminus G$ die Eigenschaft (C). Wie beim 4. Schritt folgert man daraus, daß G die Eigenschaft (C) besitzt.

7. (und letzter) Schritt: Sei jetzt M eine beliebige *beschränkte* meßbare Menge. Es gibt eine Menge G, die Durchschnitt einer absteigenden Folge von beschränkten offenen Mengen ist, sowie eine Menge F, die Vereinigung einer aufsteigenden Folge von kompakten Mengen ist, so daß gilt:

$$F \subset M \subset G \text{ und } \mu_{n+m}(G \setminus F) = 0.$$

Dann ist $f_G - f_F \geq 0$ und meßbar, sowie

$$0 = \mu_{n+m}(G) - \mu_{n+m}(F) = \int f_G \, d\mu_m - \int f_F \, d\mu_m = \int (f_G - f_F) \, d\mu_m.$$

Das bedeutet, daß fast überall $f_G - f_F = 0$ ist, also $G_{\mathbf{y}} \setminus F_{\mathbf{y}}$ für fast alle $\mathbf{y}$ eine Nullmenge. Weil außerdem $F_{\mathbf{y}} \subset M_{\mathbf{y}} \subset G_{\mathbf{y}}$ ist, gibt es für solche $\mathbf{y}$ jeweils eine Nullmenge $N(\mathbf{y})$, so daß $M_{\mathbf{y}} = F_{\mathbf{y}} \cup N(\mathbf{y})$ ist. Damit ist fast überall $f_M = f_F$, also f_M eine meßbare Funktion. Außerdem ist

$$\mu_{n+m}(M) = \mu_{n+m}(F) = \int f_F \, d\mu_m = \int f_M \, d\mu_m.$$

Also besitzen alle beschränkten meßbaren Mengen die Eigenschaft (C). Da jede meßbare Menge disjunkte Vereinigung von beschränkten meßbaren Mengen ist, besitzt auch jede meßbare Menge die Eigenschaft (C). ∎

4.8 Satz. *Sei $M_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $M_2 \subset \mathbb{R}^m$, sowie $M := M_1 \times M_2$.*

1. *Ist M meßbar, so ist $\mu_{n+m}(M) = \mu_n^*(M_1) \cdot \mu_m^*(M_2)$. Dabei ist $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.*

   Ist außerdem $\mu_{n+m}(M) > 0$, so sind auch M_1 und M_2 meßbar.

2. *Sind M_1 und M_2 meßbar, so ist auch M meßbar.*

Beweis: Sei zunächst M meßbar. Ist eine der beiden Mengen M_1, M_2 nicht meßbar, so muß die andere eine Nullmenge sein, sonst könnte M nicht meßbar sein. Aber dann ist auch M eine Nullmenge, und es liegt der Fall $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ vor.

Ist also $\mu_{n+m}(M) > 0$, so müssen die beiden Mengen M_1 und M_2 meßbar sein. Die Funktion f_M ist nach Cavalieri meßbar, und es ist $f_M = \mu_n(M_1) \cdot \chi_{M_2}$, also

$$\mu_{n+m}(M) = \int f_M(\mathbf{y}) \, d\mu_m(\mathbf{y}) = \mu_n(M_1) \cdot \int \chi_{M_2}(\mathbf{y}) \, d\mu_m(\mathbf{y}) = \mu_n(M_1) \cdot \mu_m(M_2).$$

Sei umgekehrt vorausgesetzt, daß M_1 und M_2 meßbar sind.

Die Menge $\mathcal{E} = \{A \subset \mathbb{R}^n \, : \, A \times \mathbb{R}^m \text{ ist Borelmenge } \}$ ist eine σ-Algebra, die alle Quader enthält, also auch alle Borelmengen. Außerdem ist $N \times \mathbb{R}^m$ für jede Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge im $\mathbb{R}^{n+m}$ ist. Also ist $M_1 \times \mathbb{R}^m$ meßbar, und genauso $\mathbb{R}^n \times M_2$. Schließlich folgt daraus, daß

$$M_1 \times M_2 = (M_1 \times \mathbb{R}^m) \cap (\mathbb{R}^n \times M_2)$$

meßbar ist. ∎

Den Satz von Fubini wollen wir auf den Satz von Cavalieri zurückführen. Dazu betrachten wir „Ordinatenmengen“:

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine nicht-negative Funktion, so ist die *Ordinatenmenge* von f gegeben durch

$$M^f := \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, 0 \le t < f(\mathbf{x})\}.$$

4.9 Satz. *Sei f meßbar (bzw. integrierbar). Dann ist M^f meßbar (bzw. endlich-meßbar) und $\mu_{n+1}(M^f) = \int f \, d\mu_n$.*

BEWEIS: 1) Ist $f = \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \cdot \chi_{M_\nu}$ eine einfache Funktion (mit $c_\nu > 0$ und paarweise disjunkten endlich-meßbaren Mengen M_ν), so ist

$$\begin{aligned} M^f &= \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,:\, 0 \le t < f(\mathbf{x})\} \\ &= \bigcup_{\nu=1}^{N} \{(\mathbf{x}, t) \in M_\nu \times \mathbb{R} \,:\, 0 \le t < c_\nu\} \\ &= \bigcup_{\nu=1}^{N} M_\nu \times [0, c_\nu), \end{aligned}$$

also $\mu_{n+1}(M^f) = \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \cdot \mu_n(M_\nu) = \int f \, d\mu_n$.

2) Ist $f \ge 0$ beliebig meßbar, so gibt es eine monoton wachsende Folge (φ_ν) von einfachen Funktionen, die gegen f konvergiert. Sei M_ν die Ordinatenmenge von φ_ν. Dann ist

$$M_\nu \subset M_{\nu+1} \quad \text{und} \quad M^f = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu \,.$$

Daraus folgt: $\mu_{n+1}(M^f) = \lim_{\nu \to \infty} \mu_{n+1}(M_\nu) = \lim_{\nu \to \infty} \int \varphi_\nu \, d\mu_n = \int f \, d\mu_n$. ∎

BEWEIS des Satzes von Fubini:

Sei $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ integrierbar und zunächst als nicht-negativ vorausgesetzt. Dann ist

$$M^f = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \in \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R} \,:\, 0 \le t < f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\},$$

und die Schnitte von M^f sind gegeben in der Form

$$M^f(\mathbf{y}) = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,:\, 0 \le t < f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}.$$

Da M^f meßbar ist, gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^m$, so daß die Schnitte $M^f(\mathbf{y})$ für $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \setminus N$ meßbar sind. Nach Cavalieri ist die (auf $\mathbb{R}^m \setminus N$ definierte) Funktion

$$\widehat{f}(\mathbf{y}) := \mu_{n+1}(M^f(\mathbf{y}))$$

meßbar. Außerdem gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mu_{n+1}(M^f(\mathbf{y}))\,d\mu_m(\mathbf{y}) = \mu_{n+m+1}(M^f) = \int f\,d\mu_{n+m} < \infty.$$

Das zeigt, daß $\widehat{f}$ integrierbar und $\mu_{n+1}(M^f(\mathbf{y}))$ für fast alle $\mathbf{y}$ (also o.B.d.A. für $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \setminus N$) endlich ist.

Wir wenden Cavalieri noch einmal auf $M^f(\mathbf{y})$ an. Und zwar betrachten wir Schnitte $M^f(\mathbf{y})_\mathbf{x} = \{t \in \mathbb{R} \,:\, 0 \le t < f(\mathbf{x},\mathbf{y})\} = [0, f(\mathbf{x},\mathbf{y}))$. Die sind natürlich alle meßbar, und für $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \setminus N$ gilt:

$$\mu_{n+1}(M^f(\mathbf{y})) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_1(M^f(\mathbf{y})_\mathbf{x})\,d\mu_n(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mu_n.$$

Weil die linke Seite für $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \setminus N$ endlich ist, existiert das Integral auf der rechten Seite für diese $\mathbf{y}$. Und es folgt:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mu_n \Big)\,d\mu_m &= \int_{\mathbb{R}^m} \mu_{n+1}(M^f(\mathbf{y}))\,d\mu_m \\ &= \mu_{n+m+1}(M^f) \;=\; \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mu_{n+m}.\end{aligned}$$

Ist f eine beliebige integrierbare Funktion, so benutzt man die Zerlegung

$$f = f^+ - f^-.$$

Damit ist alles gezeigt. ∎

Manchmal ist es schwer, die Integrierbarkeit von f direkt nachzuweisen. Dann hilft das folgende Ergebnis:

4.10 Satz von Fubini-Tonelli. *Ist $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ meßbar und existiert eines der Integrale*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x},\mathbf{y})|\,d\mu_n \Big)\,d\mu_m \quad \textit{oder} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} |f(\mathbf{x},\mathbf{y})|\,d\mu_m \Big)\,d\mu_n,$$

so ist f integrierbar.

BEWEIS: Ist $f \ge 0$, also $f = |f|$, so wählen wir eine aufsteigende Folge von kompakten Quadern Q_ν, so daß $\displaystyle\bigcup_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu = \mathbb{R}^{n+m}$ ist. Dann konvergiert die Folge der Funktionen $f_\nu := \min(\nu, f \cdot \chi_{Q_\nu})$ monoton wachsend gegen f, und alle f_ν sind integrierbar. Nach Fubini ist

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f_\nu\,d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f_\nu\,d\mu_n\,d\mu_m \le \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu_n\,d\mu_m < \infty.$$

Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt: f ist integrierbar, und $\displaystyle\lim_{\nu\to\infty} \int f_\nu\,d\mu_{n+m} = \int f\,d\mu_{n+m}$.

Ist f beliebig, so folgt auf die gleiche Weise, daß $|f|$ integrierbar ist. Weil f als meßbar vorausgesetzt wurde, ist f dann auch selbst integrierbar. ∎

Anhang

Der Anhang enthält einige Themen, die **nicht in der Vorlesung** behandelt wurden:

1. **Cantor-Mengen.**

   Hier werden Beispiele von Mengen mit ungewöhnlichen Eigenschaften vorgestellt. Ein Spezialfall war Inhalt einer Übungsaufgabe.

2. **Beispiele zur Integralberechnung.**

   Diese Beispiele werden in Analysis 3 behandelt werden, vielleicht in etwas modifizierter Form. Daß ich sie hier einfüge, ist als Service für diejenigen gedacht, die Analysis 3 nicht hören werden, also insbesondere für alle IT-Studenten, die mit der Vorlesung „Mathematik 3“ (für Studenten der Elektrotechnik) weitermachen werden und vielleicht ein paar Beispiele zur Volumenberechnung brauchen.

3. **Riemann-Integrierbarkeit.**

   Hier stelle ich (im 1-dimensionalen Fall) die Verbindung zwischen den einzelnen Integralbegriffen her und beweise insbesondere, daß eine Funktion genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn sie beschränkt und fast überall stetig ist. Am Schluß erwähne ich kurz, was unter dem Jordan-Maß zu verstehen ist.

4. **Anmerkungen zu Lebesgue-Integral.**

   Hier fasse ich zusammen, welche Zugänge zum Lebesgue-Integral in der Literatur noch zu finden sind.

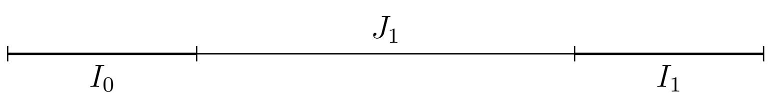
§ 1 Cantor-Mengen

Es sei $l_0, l_1, l_2, \ldots$ eine Folge positiver reeller Zahlen, so daß gilt:

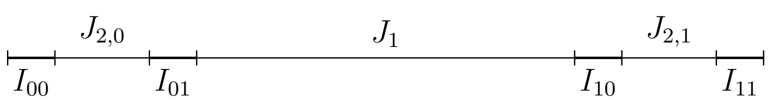
$$1 = l_0 > 2l_1 > 4l_2 > \ldots > 2^k l_k > \ldots$$

Das funktioniert **zum Beispiel** mit $l_k = 3^{-k}$.

Entfernt man aus dem Einheitsintervall $I = [0,1]$ das offene Intervall J_1 mit Mittelpunkt $1/2$ und Länge $1 - 2l_1$, so besteht der Rest $r_1(I) := I \setminus J_1$ aus zwei abgeschlossenen Intervallen I_0 und I_1 der Länge l_1. Also ist $\mu_1(r_1(I)) = 2l_1$.



Entfernt man nun aus I_0 und I_1 jeweils konzentrisch offene Intervalle $J_{2,0}$ und $J_{2,1}$ der Länge $l_1 - 2l_2$, so besteht der Rest $r_2(I) = r_1(I) \setminus (J_{2,0} \cup J_{2,1})$ aus vier abgeschlossenen Intervallen I_{00}, I_{01}, I_{10} und I_{11} der Länge l_2. Also ist $\mu_1(r_2(I)) = 4l_2$.



So fährt man fort. Hat man nach n Schritten den Rest

$$r_n(I) = \bigcup_{\alpha_i \in \{0,1\}} I_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$$

gewonnen, mit $\mu_1(r_n(I)) = 2^n \cdot l_n$ so entfernt man beim $(n+1)$-ten Schritt aus $I_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ das offene Intervall $J_{n+1, \alpha_1 \ldots \alpha_n}$ und gewinnt jeweils zwei abgeschlossene Intervalle $I_{\alpha_1 \ldots \alpha_n 0}$ und $I_{\alpha_1 \ldots \alpha_n 1}$. Der Rest $r_{n+1}(I)$ ist die Vereinigung aller dieser neuen Intervalle.

Für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n$ sei $|\alpha| := n$. Die Menge

$$C := [0,1] \setminus \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} \Big(\bigcup_{|\alpha|=n} J_{n,\alpha} \Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{|\alpha|=n} I_\alpha \Big)$$

nennt man eine *Cantor-Menge*. Offensichtlich ist $\mu_1(C) = \lim_{n\to\infty} 2^n \cdot l_n$.

Beispiele.

1. Sei $l_k := 3^{-k}$. Dann ist $\mu_1(C) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. In diesem Fall ist C also eine Nullmenge.

2. Sei $0 \leq \theta < 1$. Dann setzen wir

$$l_k := 2^{-k} \cdot \frac{\theta k + 1}{k+1}\,.$$

Man rechnet sofort nach, daß $l_0 = 1$ und $2^k l_k > 2^{k+1} l_{k+1}$ ist. In diesem Falle ist $\mu_1(C) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\theta n + 1}{n+1} = \theta$. Es läßt sich also jedes Maß zwischen 0 und 1 verwirklichen.

1.1 Satz. *C ist kompakt und enthält keinen inneren Punkt.*

Beweis: Als Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist C abgeschlossen, als Teilmenge von $[0,1]$ beschränkt und damit kompakt.

Würde C einen inneren Punkt enthalten, so auch ein offenes Intervall J. Dann gäbe es ein k mit $\mu_1(J) \geq 2^{-k}$. Andererseits ist C in der Vereinigung von 2^k paarweise disjunkten abgeschlossenen Intervallen der Länge l_k enthalten. Also ist $\mu_1(J) \leq l_k < 2^{-k}$. Das ist ein Widerspruch. ∎

1.2 Satz. *C besitzt keinen isolierten Punkt, d.h. jeder Punkt von C ist auch Häufungspunkt von C.*

Beweis: Annahme, es gibt ein $x_0 \in C$ und eine offene Umgebung $U(x_0) \subset \mathbb{R}$, so daß $U \cap C = \{x_0\}$ ist. Um keine zu komplizierten Fallunterscheidungen machen zu müssen, nehmen wir an, daß $x_0 \neq 0$ und $\neq 1$ ist. Dann gibt es Zahlen c, d mit $0 < c < x_0 < d < 1$, so daß $(c, x_0) \cup (x_0, d) \subset [0,1] \setminus C$ ist.

Dann muß (x_0, d) in einem Intervall $J_{n,\alpha}$ enthalten sein. Ist etwa $J_{n,\alpha} = (u, v)$, so muß $u = x_0$ sein. Analog folgt, daß (c, x_0) in einem Intervall $J_{m,\beta} = (p, q)$ mit $q = x_0$ enthalten ist. Bei der Konstruktion von C werden aber niemals zwei offene Intervalle (p, q) und (u, v) mit $q = u$ herausgenommen. Das ist ein Widerspruch.

Die Fälle $x_0 = 0$ und $x_0 = 1$ können ähnlich behandelt werden. ∎

1.3 Satz. *C hat die gleiche Mächtigkeit wie das Einheitsintervall, ist also insbesondere nicht abzählbar.*

Beweis: Wir führen folgende Notation ein:

$$\alpha \leq \beta \;:\Longleftrightarrow\; |\alpha| \leq |\beta| \text{ und } \alpha_i = \beta_i \text{ für } i = 1, 2, \ldots, |\alpha|.$$

Zu jeder Folge von Multiindizes $\alpha^1 \leq \alpha^2 \leq \ldots$ mit $|\alpha^i| = i$ gibt es dann genau einen Punkt $y \in C$ mit

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_{\alpha^i} = \{y\},$$

denn die Länge der Intervalle konvergiert gegen Null, und in jedem solchen Durchschnitt muß mindestens ein Punkt liegen.

Das ermöglicht es, eine Abbildung $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C$ zu definieren. Jeder unendlichen Folge $\widehat{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ wird zunächst die Folge $\alpha^i(a) := (a_1, a_2, \ldots, a_i)$ zugeordnet. Weil dann $\alpha^1(a) \le \alpha^2(a) \le \alpha^3(a) \le \ldots$ ist, ist $I_{\alpha^1(a)} \supset I_{\alpha^2(a)} \supset \ldots$, und es gibt einen eindeutig bestimmten Punkt $y(a) \in C$ im Durchschnitt aller Intervalle $I_{\alpha^i(a)}$. Die Abbildung f wird definiert durch

$$f : \widehat{a} \mapsto y(a).$$

Ist $\widehat{a'} \neq \widehat{a''}$, so gibt es ein erstes i mit $a'_i \neq a''_i$. Dann ist auch $\alpha^i(a') \neq \alpha^i(a'')$ und daher $I_{\alpha^i(a')} \cap I_{\alpha^i(a'')} = \varnothing$. Daraus folgt, daß $y(a') \neq y(a'')$ ist. Das bedeutet, daß f injektiv ist.

Ist $y \in C$ vorgegeben, so wähle man in jeder Stufe i ein Intervall I_{α^i}, das y enthält. Dann ist $\alpha^1 \le \alpha^2 \le \ldots$, und es gibt ein $\widehat{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ mit $\alpha^i = (a_1, a_2, \ldots, a_i)$ für jedes i. Offensichtlich bildet f dann $\widehat{a}$ auf y ab. Das bedeutet, daß f surjektiv und damit bijektiv ist.

Die Menge $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist aber gleichmächtig zu $[0,1]$. ■

§ 2 Beispiele zur Integrationstheorie

Definition. Ein *Normalbereich* über dem $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge der Gestalt

$$B = \{(\mathbf{x}, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in Q \text{ und } \varphi(\mathbf{x}) \le x_{n+1} \le \psi(\mathbf{x})\},$$

wobei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader ist und $\varphi, \psi : Q \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen sind, mit $\varphi(\mathbf{x}) \le \psi(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in Q$.

Normalbereiche sind kompakt (also insbesondere Borelmengen), und stetige Funktionen über kompakten Mengen sind natürlich integrierbar. Mit Fubini folgt:

$$\int_B f(\mathbf{x}, x_{n+1})\, d\mu_{n+1} = \int_Q \left(\int_{\varphi(\mathbf{x})}^{\psi(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, x_{n+1})\, dx_{n+1} \right) d\mu_n.$$

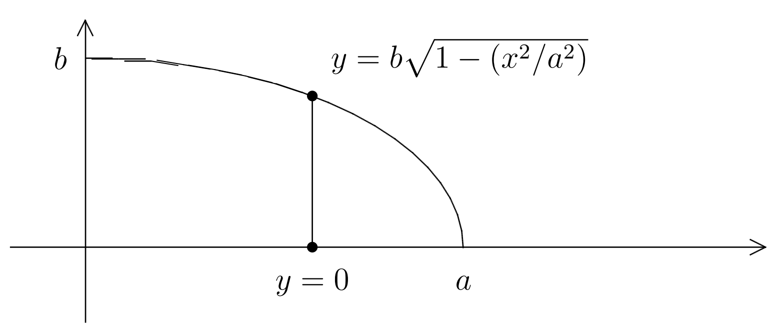
Beispiele.

1. Sei B derjenige Teil einer Ellipsenfläche um den Nullpunkt (mit den Halbachsen a und b, der im rechten oberen Quadranten liegt. Es soll das Integral $\displaystyle\int_B xy\, d\mu_2$ berechnet werden. Hier ist also $f(x, y) = xy$.

   Der Rand von B ist durch die Gleichungen

   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = 0 \text{ und } y = 0$$

   gegeben. Offensichtlich ist B ein Normalbereich bezüglich der x-Achse:

   Dann ist

$$
\begin{aligned}
\int_B xy\,d\mu_2 &= \int_0^a \left(\int_0^{b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} xy\,dy \right) dx \\
&= \int_0^a \left(\frac{xy^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} \right) dx \\
&= \int_0^a \frac{x}{2} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx \\
&= \frac{b^2}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4a^2} \right) \Big|_{x=0}^{x=a} \\
&= \frac{a^2 b^2}{8}.
\end{aligned}
$$

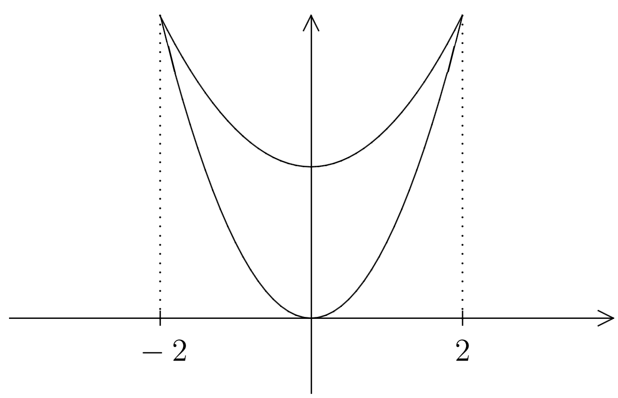
2. Sei $\varphi(x) := x^2$ und $\psi(x) := 2 + \frac{1}{2}x^2$. Dann ist

$$\varphi(-2) = \psi(-2) = 4 \text{ und } \varphi(2) = \psi(2) = 4,$$

und für $|x| \leq 2$ ist $x^2 \leq 4$, also $\psi(x) - \varphi(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2 \geq 0$. Daher ist

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2 \text{ und } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

ein Normalbereich über der x-Achse:



Der Flächeninhalt von B ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\int \chi_B(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} &= \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{2+(x^2/2)} dy\,dx \\
&= \int_{-2}^{2} (2 - \frac{x^2}{2})\,dx \\
&= (2x - \frac{x^3}{6}) \Big|_{-2}^{2} \\
&= (4 - \frac{8}{6}) - (-4 + \frac{8}{6}) = \frac{16}{3}.
\end{aligned}
$$

Wir wollen jetzt eine verallgemeinerte Substitutionsregel beweisen:

$$\begin{aligned} \text{Sei} \quad P &:= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \\ \text{und} \quad Q &:= [c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \times \ldots \times [c_n, d_n]. \end{aligned}$$

Außerdem seien $\varphi_i : [c_i, d_i] \to [a_i, b_i]$ Parametertransformationen, also bijektive stetig differenzierbare Funktionen, für $i = 1, \ldots, n$.

Ist φ_i streng monoton wachsend, so ist $\varphi_i'(x) > 0$, $\varphi_i(c_i) = a_i$ und $\varphi_i(d_i) = b_i$, andernfalls ist $\varphi_i'(x) < 0$, $\varphi_i(c_i) = b_i$ und $\varphi_i(d_i) = a_i$. Setzen wir

$$F(x_1, \ldots, x_n) := (\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n)),$$

so ist $F(Q) = P$, und für eine stetige Funktion f auf P folgt mit Hilfe des Satzes von Fubini:

$$\begin{aligned} \int_{F(Q)} f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} &= \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n \\ &= \int_{c_n}^{d_n} \cdots \int_{c_1}^{d_1} f(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n)) \cdot |\varphi_1'(x_1)| \cdot \ldots \cdot |\varphi_n'(x_n)|\, dx_1 \ldots dx_n \\ &= \int_Q f(F(\mathbf{x})) \cdot |\det J_F(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Durch Einführung der Betragsstriche wird vermieden, daß die Integrationsrichtung umgekehrt werden muß!

Beispiele.

1. Ist $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ein fester Vektor, so wird durch

   $$T(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \mathbf{a} = (x_1 + a_1, \ldots, x_n + a_n)$$

   die Translation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert. Offensichtlich ist $\det J_T(\mathbf{x}) = \det T = 1$. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader. Dann gilt offensichtlich für eine stetige Funktion f auf dem um $\mathbf{a}$ verschobenen Quader $\mathbf{a} + Q$, daß $f \circ T$ auf Q definiert ist, und es ist

   $$\int_{\mathbf{a}+Q} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_Q f(\mathbf{x} + \mathbf{a})\, d\mathbf{x}.$$

   Man spricht von der *Translationsinvarianz des Integrals*. Da beliebige meßbare Mengen durch Quader approximiert werden können, überträgt sich die Translationsinvarianz auch auf beliebige Integrale:

   $$\int f\, d\mu_n = \int (f \circ T)\, d\mu_n.$$

2. Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $r > 0$ eine feste reelle Zahl, so ist auch die Menge $r \cdot Q := \{r \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in Q\}$ ein Quader, und es ist

$$v_n(r \cdot Q) = r^n \cdot v_n(Q).$$

Ist f stetig auf $r \cdot Q$, so gilt:

$$\int_{r \cdot Q} f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int_Q r^n \cdot f(r \cdot \mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

2.1 Satz. *Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Dann ist $F(Q)$ für jeden Quader Q eine Borelmenge.*

Sei nun F sogar ein Homöomorphismus, und es gebe eine Konstante $c > 0$, so daß für jeden Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\mu_n(F(Q)) = c \cdot \mu_n(Q) \quad \text{und} \quad \mu_n(F^{-1}(Q)) = \frac{1}{c} \cdot \mu_n(Q).$$

Dann folgt:

1. *Für jede Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ ist auch $F(N)$ eine Nullmenge.*
2. *Für jede meßbare Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mu_n(M) < \infty$ ist auch $F(M)$ meßbar und $\mu_n(F(M)) = c \cdot \mu_n(M)$.*

BEWEIS: 1) Ist Q ein kompakter Quader, so ist $F(Q)$ kompakt und damit eine Borelmenge. Ein beliebiger Quader ist eine abzählbare Vereinigung von kompakten Quadern, und sein Bild unter F damit wieder eine Borelmenge.

1) Sei N eine Nullmenge, $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es eine Folge von Quadern Q_j mit

$$N \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(Q_j) < \frac{1}{c} \cdot \varepsilon.$$

Dann ist $F(N) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} F(Q_j)$, und daher

$$\mu_n^*(F(N)) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(F(Q_j)) = c \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(Q_j) < \varepsilon.$$

Also ist auch $F(N)$ eine Nullmenge.

2) Sei $\mathcal{C} := \{B \subset \mathbb{R}^n : F(B) \text{ ist eine Borelmenge } \}$. Dann folgt sehr leicht, daß $\mathcal{C}$ eine σ-Algebra ist, die alle Quader enthält. Also muß $\mathcal{C}$ sogar die gesamte Borel-Algebra umfassen. Mit anderen Worten: Ist B eine Borelmenge, so ist auch $F(B)$ eine Borelmenge.

Da jede meßbare Menge in eine Borelmenge und eine Nullmenge zerlegt werden kann, muß auch das Bild jeder meßbaren Menge unter F wieder meßbar sein. Das gleiche gilt für F^{-1}.

Sei nun M eine beliebige meßbare Menge mit $\mu_n(M) < \infty$, und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt Quader Q_j, so daß gilt:

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(Q_j) < \mu_n(M) + \frac{1}{c} \cdot \varepsilon.$$

Dann liegt $F(M)$ in der Vereinigung aller Mengen $F(Q_j)$, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\mu_n(F(M)) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(F(Q_j)) \\
&= c \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(Q_j) \\
&< c \cdot (\mu_n(M) + \frac{1}{c} \cdot \varepsilon) \\
&= c \cdot \mu_n(M) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da ε beliebig gewählt werden kann, ist $\mu_n(F(M)) \leq c \cdot \mu_n(M)$. Aber analog ist $\mu_n(M) = \mu_n(F^{-1}(F(M))) \leq \frac{1}{c} \cdot \mu_n(F(M))$. Also ist tatsächlich $\mu_n(F(M)) = c \cdot \mu_n(M)$. ∎

2.2 Folgerung. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $\mu_n(M) < \infty$, sowie $r > 0$ eine feste Zahl. Dann ist auch $r \cdot M$ meßbar und $\mu_n(r \cdot M) = r^n \cdot \mu_n(M)$.*

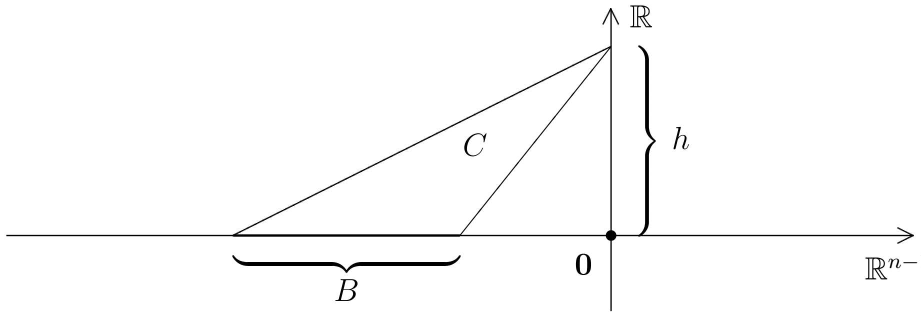
Jetzt können wir das Prinzip von Cavalieri zur Volumenmessung benutzen.

Beispiele.

1. Sei $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine meßbare Menge mit endlichem Maß und $h > 0$. Dann nennt man die Menge

   $$C := \{((1-\lambda)\mathbf{x}, \lambda h) \,:\, \mathbf{x} \in B \text{ und } 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

   den *Kegel* über B mit der Spitze in $(0, h)$.



Für $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} C_t &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (\mathbf{x}, t) \in C\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists\, \lambda \in [0,1] \text{ mit } \frac{1}{1-\lambda}\mathbf{x} \in B,\ \lambda h = t\} \\ &= \begin{cases} \varnothing & \text{falls } t \notin [0,h] \\ (1-\frac{t}{h}) \cdot B & \text{für } t \in [0,h]. \end{cases} \end{aligned}$$

Nach Cavalieri ist dann

$$\begin{aligned} \mu_n(C) &= \int_0^h \mu_{n-1}(C_t)\,dt \\ &= \int_0^h \mu_{n-1}((1-\frac{t}{h}) \cdot B)\,dt \\ &= \mu_{n-1}(B) \cdot \int_0^h (1-\frac{t}{h})^{n-1}\,dt \\ &= \mu_{n-1}(B) \cdot h \cdot \int_0^1 (1-u)^{n-1}\,du \\ &= \mu_{n-1}(B) \cdot \frac{h}{n}. \end{aligned}$$

2. Das Volumen einer Kugel mit Radius r im $\mathbb{R}^3$ ist $\mu_3(B_r(\mathbf{0})) = r^3 \cdot \mu_3(B_1(\mathbf{0}))$. Wir müssen noch das Volumen der Einheitskugel bestimmen. Aus Analysis 1 wissen wir, daß $\mu_2(B_1(\mathbf{0})) = \pi$ ist. Dann ergibt sich:

   Es ist

$$(B_1(\mathbf{0}))_t = \begin{cases} \varnothing & \text{falls } |t| > 1 \\ B_a(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^2 & \text{falls } |t| \le 1, \end{cases}$$

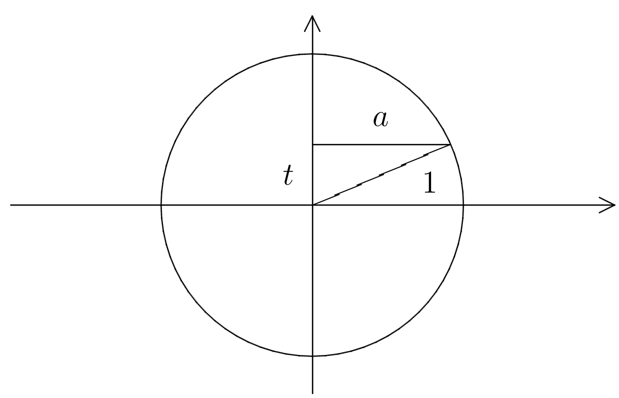
wobei

$$a^2 + t^2 = 1,$$

also

$$a = \sqrt{1-t^2}$$

ist.



$$\text{Also ist} \qquad \begin{aligned} \mu_3(B_1(\mathbf{0})) &= \int_{-1}^{1} \mu_2(B_{\sqrt{1-t^2}}(\mathbf{0}))\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} (1-t^2)\cdot\mu_2(B_1(\mathbf{0}))\,dt \\ &= \pi\cdot\int_{-1}^{1}(1-t^2)\,dt \\ &= \pi\cdot(x-\frac{x^3}{3})\Big|_{-1}^{1} \\ &= \pi(2-\frac{2}{3}) = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

Per Induktion kann man so auch das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel berechnen. Es ergibt sich eine Rekursionsformel.

3. Leicht läßt sich nun auch das Volumen von Rotationskörpern bestimmen: Es seien zwei stetige Funktionen f, g auf $[a, b]$ gegeben, mit $0 \le g \le f$. Dann ist

$$R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(z) \le x^2 + y^2 \le f(z),\ z \in [a, b]\}$$

der Rotationskörper, der entsteht, wenn man den durch g und f bestimmten Normalbereich um die z–Achse rotieren läßt.

Behauptung: $\mu_3(R) = \pi\cdot\displaystyle\int_a^b (f(z)^2 - g(z)^2)\,dz.$

Zum Beweis genügt es, den Fall $g(z) \equiv 0$ zu betrachten. Dann ist aber

$$\begin{aligned} \mu_3(R) &= \int_a^b \mu_2(R_t)\,dt \\ &= \int_a^b \mu_2(B_{f(t)}(\mathbf{0}))\,dt \\ &= \int_a^b f(t)^2\pi\,dt. \end{aligned}$$

2.3 Satz (Integration rotationssymmetrischer Funktionen). *Sei $0 \le a < b$ und $K_{a,b} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a < \|\mathbf{x}\| < b\}$. Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stückweise stetig und existiert $\displaystyle\int_a^b |f(r)|r^{n-1}\,dr$, so ist $\widetilde{f}(\mathbf{x}) := f(\|\mathbf{x}\|)$ über $K_{a,b}$ integrierbar und*

$$\int_{K_{a,b}} f(\|\mathbf{x}\|)\,d\mathbf{x} = n\cdot V_n\cdot\int_a^b f(r)r^{n-1}\,dr.$$

Dabei bezeichnet V_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel.

Beweis:

1) Der Rand der n-dimensionalen Einheitskugel ist eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$, da er lokal ein Graph ist.

2) Zunächst sei $f(r) \equiv c$ eine konstante Funktion. Dann ist auch $\widetilde{f}$ konstant und natürlich über $K_{a,b}$ integrierbar. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{K_{a,b}} \widetilde{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} &= \int c \cdot \chi_{K_{a,b}}\,d\mu_n \\
&= c \cdot \mu_n(K_{a,b}) \\
&= c \cdot (\mu_n(B_b(\mathbf{0})) - \mu_n(B_a(\mathbf{0}))) \\
&= c \cdot V_n \cdot (b^n - a^n) \\
&= c \cdot V_n \cdot n \cdot \int_a^b r^{n-1}\,dr \\
&= n \cdot V_n \cdot \int_a^b f(r) r^{n-1}\,dr.
\end{aligned}$$

3) Nun sei sogar $0 < a < b$. Ist f eine Treppenfunktion auf $[a, b]$, so folgt die Behauptung für f ganz leicht aus (2).

Ist f eine Regelfunktion auf $[a, b]$, so gibt es eine Folge (φ_k) von Treppenfunktionen auf $[a, b]$, die dort gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann konvergiert auch $(\widetilde{\varphi}_k)$ auf $\overline{K_{a,b}}$ gleichmäßig gegen $\widetilde{f}$, und $\widetilde{f}$ ist bis auf eine abzählbare Vereinigung von Kugelrändern (also fast überall) stetig und damit integrierbar. Mit Hilfe des Konvergenzsatzes von Lebesgue kann man daraus schließen, daß die Integrale über $\widetilde{\varphi}_k$ gegen das Integral über $\widetilde{f}$ konvergieren. Das ergibt auch in diesem Falle die Behauptung.

4) Ist f nur über (a, b) stückweise stetig, so schreibt man (a, b) als aufsteigende Vereinigung von abgeschlossenen Intervallen, über denen f ja eine Regelfunktion ist. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz kommt man dann zum Ziel. ■

Beispiel.

Sei $f(r) := \dfrac{1}{r}$ auf $(0, 1)$. Das Integral $\displaystyle\int_0^1 r^{n-1-\alpha}\,dr$ existiert genau dann, wenn $-n + 1 + \alpha < 1$ ist, also $\alpha < n$. Daraus folgt:

$\displaystyle\int_{B_1(\mathbf{0})} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^\alpha}\,d\mathbf{x}$ existiert genau dann, wenn $\alpha < n$ ist.

Im $\mathbb{R}^2$ ist also $\dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|}$ bei $\mathbf{0}$ integrierbar, nicht jedoch $\dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|^2}$.

Im $\mathbb{R}^3$ sind beide Funktionen bei $\mathbf{0}$ integrierbar.

Wir wollen jetzt die Substitutionsregel weiter verallgemeinern und beginnen dabei mit linearen Transformationen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

2.4 Das Volumen eines transformierten Quaders. *Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader, $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $F = F_A$ die zugehörige (bijektive) lineare Transformation.*

Dann ist $F(Q)$ meßbar und $\mu_n(F(Q)) = |\det A| \cdot \mu_n(Q)$.

BEWEIS: Da Q kompakt und F stetig ist, ist auch $F(Q)$ kompakt und damit meßbar.

1) Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation und F definiert durch

$$F(x_1, \ldots, x_n) := (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

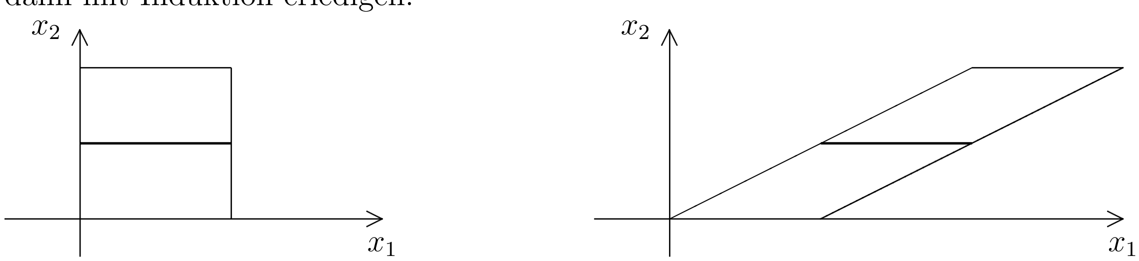
Die Determinante der zugehörigen Matrix ist dann $= \pm 1$, ihr Betrag also $= 1$. Und andererseits ist

$$F([a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]) = [a_{\sigma(1)}, b_{\sigma(1)}] \times \ldots \times [a_{\sigma(n)}, b_{\sigma(n)}],$$

also $\mu_n(F(Q)) = \mu_n(Q)$. In diesem Fall stimmt die Formel.

2) Sei $F(x_1, \ldots, x_n) := (x_1 + \lambda x_i, x_2, \ldots, x_n)$, mit einer reellen Zahl $\lambda \neq 0$ und einem $i \neq 1$. Dann sieht man sofort, daß $\det A = 1$ ist. Wir nennen F eine *Scherung*.

Zur Vereinfachung betrachten wir nur den Fall $n = 2$, den allgemeinen muß man dann mit Induktion erledigen.



Für die Schnitte von $F(Q)$ ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} F(Q)_t &= \{y \in \mathbb{R} \,:\, (y, t) \in F(Q)\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \,:\, \exists\, (x_1, x_2) \in Q \text{ mit } x_1 + \lambda x_2 = y \text{ und } x_2 = t\} \\ &= \{x_1 + \lambda t \,:\, x_1 \in [a_1, b_1]\} \\ &= \lambda t + [a_1, b_1]. \end{aligned}$$

Mit Cavalieri folgt daraus:

$$\mu_2(F(Q)) = \int_{a_2}^{b_2} \mu_1(F(Q)_t)\, dt = \int_{a_2}^{b_2} (b_1 - a_1)\, dt = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) = \mu_2(Q).$$

3) Sei schließlich $F(x_1, \ldots, x_n) := (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n)$. Die zugehörige Matrix ist eine Diagonalmatrix D mit den Einträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Nach der schon bewiesenen verallgemeinerten Substitutionsregel folgt:

$$\begin{aligned}\mu_n(F(Q)) &= \int_{F(Q)} 1\,d\mathbf{y} = \int_Q |\det J_F(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \\ &= |\det(D)| \cdot \int_Q 1\,d\mathbf{x} \\ &= |\det(D)| \cdot \mu_n(Q).\end{aligned}$$

4) Alle drei Typen F_A, die wir hier betrachtet haben, sind bijektiv, und es gilt:

$$\mu_n(F_A(Q)) = |\det A| \cdot \mu_n(Q) \quad \text{und} \quad \mu_n(F_A^{-1}(Q)) = \frac{1}{|\det(A)|} \cdot \mu_n(Q).$$

Damit folgt, daß sogar $\mu_n(F_A(M)) = |\det(A)| \cdot \mu_n(M)$ für jede meßbare Menge M mit endlichem Maß gilt. Insbesondere gilt für zwei Abbildungen F_A, F_B vom betrachteten Typ:

$$\begin{aligned}\mu_n(F_{A\cdot B}(M)) &= \mu_n(F_A(F_B(M))) = |\det A| \cdot \mu_n(F_B(M)) \\ &= |\det A| \cdot |\det B| \cdot \mu_n(M) \\ &= |\det(A\cdot B)| \cdot \mu_n(M).\end{aligned}$$

Ist nun A eine beliebige invertierbare Matrix, so liefert das Gaußverfahren Matrizen S, T und D, so daß S und T aus Permutationen und Scherungen zusammengesetzt, D eine Diagonalmatrix und $A = S \cdot D \cdot T$ ist. Das ergibt die Behauptung (nicht nur für Quader, sondern sogar für beliebige meßbare Mengen. ∎

Bemerkungen.

1. Sind $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^n$, so nennt man

   $$P(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) := \{\lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots \lambda_n\mathbf{a}_n \mid 0 \le \lambda_i \le 1 \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$$

   das von den Vektoren aufgespannte *Parallelotop*. Im Falle $n = 2$ ergibt sich ein Parallelogramm, im Falle $n = 3$ spricht man von einem „Spat“. Nach dem obigen Satz gilt für beliebiges n :

   $$v_n(P(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)) = |\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)|.$$

   Diese Aussage liefert zugleich eine geometrische Deutung für die Determinante.

2. Ist A eine orthogonale Matrix und $\mathbf{x}_0$ ein fester Vektor, so nennt man die Abbildung

   $$F(\mathbf{x}) := \mathbf{x}_0 + (A \cdot \mathbf{x}^t)^t$$

   eine *euklidische Bewegung*. Weil $|\det A| = 1$ ist, läßt eine solche euklidische Bewegung das Volumen invariant.

2.5 Folgerung. *Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, $F = F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und $f : F_A(Q) \to \mathbb{R}$ integrierbar, so ist auch $f \circ F_A : Q \to \mathbb{R}$ integrierbar, und es gilt:*

$$\int_{F_A(Q)} f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int_Q f(F_A(\mathbf{x}))|\det A|\, d\mathbf{x}.$$

BEWEIS: (Andeutung)

Sei $c := |\det A|$. Ist $c = 0$, so ist die Gleichung trivialerweise erfüllt. Sei also $c \neq 0$, d.h. F bijektiv. Ist M eine beliebige meßbare Menge, so ist auch $N := F^{-1}(M \cap F(Q))$ meßbar und außerdem von endlichem Maß, und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{F(Q)} \chi_M(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} &= \mu_n(M \cap F(Q)) = \mu_n(F(N)) \\ &= c \cdot \mu_n(N) = c \cdot \int_Q \chi_N(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \\ &= \int_Q \chi_M(F(\mathbf{x})) \cdot c\, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Dann gilt die Formel aber auch für einfache Funktionen.

Ist schließlich f eine beliebige integrierbare Funktion, so kann man f durch eine Folge (φ_ν) von einfachen Funktionen approximieren, die fast überall gegen f konvergiert und bzgl. der $\|\ldots\|_1$-Norm eine Cauchy-Folge bildet. Die Formel überträgt sich dann auch auf f. ∎

Dieser Satz läßt sich auf differenzierbare Abbildungen verallgemeinern. Das ist plausibel, da sich ja jede differenzierbare Abbildung lokal durch lineare Abbildungen approximieren läßt. Den Beweis werde ich allerdings erst in Analysis 3 vorführen.

2.6 Allgemeine Transformationsformel. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to V$ umkehrbar stetig differenzierbar. Dann gilt:*

1. *$f : V \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn $(f \circ F) \cdot |\det J_F|$ integrierbar ist.*

2. *Ist f integrierbar, so ist*

$$\int_V f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int_U f(F(\mathbf{x})) \cdot |\det J_F(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}.$$

Die Formel bleibt richtig, wenn man U durch eine kompakte Teilmenge K und V durch $F(K)$ ersetzt.

§ 3 Riemann-Integrierbarkeit

Sei $I = [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Die Definition der Riemann-Integrierbarkeit, die wir in Analysis 1, Kapitel 4, §2, gegeben haben, muß geringfügig geändert werden:

Ist $\mathfrak{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von I, und ist für jedes i mit $1 \le i \le n$ ein Zwischenpunkt $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ gegeben,[2] so wird mit $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ die Riemannsche Summe $\Sigma(f, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi})$ definiert durch

$$\Sigma(f, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi}) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Definition. f heißt über I im Riemannschen Sinne integrierbar, falls es eine reelle Zahl A und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathfrak{Z}_0$ von I gibt, so daß gilt:

Ist $\mathfrak{Z}$ eine Zerlegung von I, die feiner als $\mathfrak{Z}_0$ ist, und ist $\boldsymbol{\xi}$ eine beliebige Wahl von Zwischenpunkten zu $\mathfrak{Z}$, so ist

$$|\Sigma(f, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi}) - A| < \varepsilon\,.$$

Der Beweis dafür, daß jede Regelfunktion im Riemannschen Sinne integrierbar ist, braucht nicht verändert zu werden.

Im Folgenden soll unsere Definition des Riemann-Integrals mit der Darbouxschen Definition verglichen werden, und dann soll gezeigt werden, daß f genau dann Riemannsch integrierbar ist, wenn f beschränkt und fast überall (also bis auf eine Lebesgue-Nullmenge) stetig ist.

Ist $\mathfrak{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von I, so definieren wir m_i und M_i für $i = 1, \ldots, n$ durch $m_i := \inf\{f(x) : t_{i-1} \le x \le t_i\}$ und $M_i := \sup\{f(x) : t_{i-1} \le x \le t_i\}$. Damit wird die *Untersumme* $u(f, \mathfrak{Z})$ und die *Obersumme* $o(f, \mathfrak{Z})$ definiert durch

$$\begin{aligned} u(f, \mathfrak{Z}) &:= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ \text{und} \quad o(f, \mathfrak{Z}) &:= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Es ist stets $u(f, \mathfrak{Z}) \le \Sigma(f, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi}) \le o(f, \mathfrak{Z})$, und wenn $\mathfrak{Z}^*$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{Z}$ ist, so ist

[2] Ursprünglich hatte ich verlangt, daß ξ_i im offenen Intervall (x_{i-1}, x_i) gewählt werden soll. Das ist falsch, man muß das abgeschlossene Intervall zulassen

$$u(f,\mathfrak{Z}) \le u(f,\mathfrak{Z}^*) \le o(f,\mathfrak{Z}^*) \le o(f,\mathfrak{Z}).$$

Das *Darbouxsche Unterintegral* $\int_* f(x)\,dx$ und das *Darbouxsche Oberintegral* $\int^* f(x)\,dx$ werden definiert durch

$$\begin{aligned} \int_* f(x)\,dx &:= \sup\{u(f,\mathfrak{Z}) \,:\, \mathfrak{Z} \text{ Zerlegung von } I\} \\ \text{und} \quad \int^* f(x)\,dx &:= \inf\{o(f,\mathfrak{Z}) \,:\, \mathfrak{Z} \text{ Zerlegung von } I\}\,. \end{aligned}$$

Dann ist natürlich auch $\int_* f(x)\,dx \le \int^* f(x)\,dx$.

3.1 Satz. *f ist genau dann im Riemannschen Sinne integrierbar, wenn*

$$\int_* f(x)\,dx = \int^* f(x)\,dx$$

ist. Der gemeinsame Wert stimmt dann mit dem Riemannschen Integral von f über I überein.

Ist A das Riemannsche Integral und $(\mathfrak{Z}_k)$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls I, so daß $\mathfrak{Z}_{k+1}$ feiner als $\mathfrak{Z}_k$ und die Länge der Teilintervalle von $\mathfrak{Z}_k$ kleiner als $1/k$ ist, so gilt für beliebige Zwischenpunkte:

$$\lim_{k\to\infty} \Sigma(f,\mathfrak{Z}_k,\boldsymbol{\xi}) = A.$$

BEWEIS: 1) Sei f im Riemannschen Sinne integrierbar, A das Integral. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wähle man eine Zerlegung $\mathfrak{Z}_0$, so daß für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$, die feiner als $\mathfrak{Z}_0$ ist, gilt:

$$|\Sigma(f,\mathfrak{Z},\boldsymbol{\xi}) - A| < \varepsilon/4\,.$$

Wir halten eine solche Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{x_0,\ldots,x_n\}$ fest und wählen Punkte $\xi'_\nu, \xi''_\nu \in I_\nu = [x_{\nu-1}, x_\nu]$ mit

$$\begin{aligned} f(\xi'_\nu) &< m_\nu + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \\ \text{und} \quad f(\xi''_\nu) &< M_\nu - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \end{aligned}$$

wobei m_ν und M_ν wie oben definiert werden.

Dann ist

$$\begin{aligned} u(f,\mathfrak{Z}) &> \Sigma(f,\mathfrak{Z},\boldsymbol{\xi}') - \frac{\varepsilon}{4} \\ \text{und} \quad o(f,\mathfrak{Z}) &< \Sigma(f,\mathfrak{Z},\boldsymbol{\xi}'') + \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} o(f,\mathfrak{Z}) - u(f,\mathfrak{Z}) &< \Sigma(f,\mathfrak{Z},\boldsymbol{\xi}'') - \Sigma(f,\mathfrak{Z},\boldsymbol{\xi}') + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\le |\Sigma(f,\mathfrak{Z},\boldsymbol{\xi}'') - A| + |\Sigma(f,\mathfrak{Z},\boldsymbol{\xi}') - A| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Geht man bei der Obersumme zum Infimum und bei der Untersumme zum Supremum über (jeweils über alle $\mathfrak{Z}$ gebildet), und läßt man dann ε gegen Null gehen, so erhält man die Gleichung $\int_* f(x)\,dx = \int^* f(x)\,dx$.

2) Sei jetzt umgekehrt die Gleichheit von Unter- und Oberintegral vorausgesetzt. Sei $\mathfrak{Z}_k$ eine Folge von Zerlegungen, so daß $\mathfrak{Z}_{k+1}$ feiner als $\mathfrak{Z}_k$ und

$$o(f,\mathfrak{Z}_k) - u(f,\mathfrak{Z}_k) < 1/k$$

ist. Setzen wir $a_k := u(f,\mathfrak{Z}_k)$ und $b_k := o(f,\mathfrak{Z}_k)$, so konvergiert (a_k) monoton wachsend gegen $a := \int_* f(x)\,dx$ und (b_k) monoton fallend gegen $b := \int^* f(x)\,dx$. Nach Voraussetzung ist $a = b$, wir bezeichnen diese Zahl mit A.

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $k \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $1/k < \varepsilon$ ist. Ist $\mathfrak{Z}$ feiner als $\mathfrak{Z}_k$, so ist

$$u(f,\mathfrak{Z}_k) \le \Sigma(f,\mathfrak{Z},\boldsymbol{\xi}) \le o(f,\mathfrak{Z}_k)$$

und

$$u(f,\mathfrak{Z}_k) \le A \le o(f,\mathfrak{Z}_k),$$

also $|\Sigma(f,\mathfrak{Z},\boldsymbol{\xi}) - A| < 1/k < \varepsilon$. Das zeigt, daß f im Riemannschen Sinne integrierbar ist, und A ist das Integral. Außerdem konvergiert die Folge der Riemannschen Summen $\Sigma(f,\mathfrak{Z}_k,\boldsymbol{\xi})$ gegen A. ∎

3.2 Satz. *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist f beschränkt.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$, A das Integral von f und $\mathfrak{Z} = \{x_0,\ldots,x_n\}$ so fein, daß $|\Sigma(f,\mathfrak{Z},\boldsymbol{\xi}) - A| < \varepsilon$ ist, für jedes $\boldsymbol{\xi}$.

Sei $I_j = [x_{j-1},x_j]$ ein Teilintervall. Wir wählen $\boldsymbol{\xi}$ und $\boldsymbol{\xi}'$ so, daß $\xi_i = \xi_i'$ für $i \ne j$ ist. Dann ist einerseits

$$|\Sigma(f,\mathfrak{Z},\boldsymbol{\xi}) - \Sigma(f,\mathfrak{Z},\boldsymbol{\xi}')| \le |\Sigma(f,\mathfrak{Z},\boldsymbol{\xi}) - A| + |\Sigma(f,\mathfrak{Z},\boldsymbol{\xi}') - A| \le 2\varepsilon$$

und andererseits

$$|\Sigma(f,\mathfrak{Z},\boldsymbol{\xi}) - \Sigma(f,\mathfrak{Z},\boldsymbol{\xi}')| = |f(\xi_j) - f(\xi_j')| \cdot (x_j - x_{j-1}).$$

Daraus folgt:

$$f(\xi_j') - \frac{2\varepsilon}{x_j - x_{j-1}} < f(\xi_j) < f(\xi_j') + \frac{2\varepsilon}{x_j - x_{j-1}}.$$

Das zeigt, daß f auf $[x_{j-1},x_j]$ beschränkt ist. Da j beliebig war und da es nur endlich viele solcher Intervalle gibt, ist f auf $[a,b]$ beschränkt. ∎

Sei nun $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige **beschränkte** Funktion. Wir definieren dann Funktionen f_* und f^* auf $[a, b]$ durch

$$\begin{aligned} f_*(x) &:= \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \inf\{f(t) \,:\, x-\delta < t < x+\delta\} \\ \text{und} \quad f^*(x) &:= \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \sup\{f(t) \,:\, x-\delta < t < x+\delta\} \end{aligned}$$

3.3 Satz. *Es gilt:*

1. $f_* \le f \le f^*$,
2. *f ist genau dann stetig in x_0, wenn $f_*(x_0) = f^*(x_0)$ ist.*
3. *f_* und f^* sind meßbar und beschränkt, also (Lebesgue-)integrierbar.*

BEWEIS: 1) Sei $C > 0$ und $|f| \le C$ auf I. Dann ist offensichtlich auch $-C \le f_* \le f \le f^* \le C$.

2) Sei $x_0 \in I$. Ist f stetig in x_0 und $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es ein $\delta > 0$, so daß gilt:

$$\text{Ist } |x - x_0| < \delta, \text{ so ist } f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Daraus folgt:

$$f(x_0) - \varepsilon \le \inf_{U_\delta(x_0)} f(t) \le \sup_{U_\delta(x_0)} f(t) \le f(x_0) + \varepsilon,$$

und im Grenzwert dann

$$f(x_0) - \varepsilon \le f_*(x_0) \le f^*(x_0) \le f(x_0) + \varepsilon.$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, muß $f_*(x_0) = f^*(x_0)$ sein.

Stimmen nun andererseits f_* und f^* in x_0 überein, so geben wir uns wieder ein $\varepsilon > 0$ vor und wählen dazu ein $\delta > 0$ so, daß für $x \in U_\delta(x_0)$ gilt:

$$f(x_0) - \varepsilon = f_*(x_0) - \varepsilon \le \inf_{U_\delta(x_0)} f(t) \le f(x) \le \sup_{U_\delta(x_0)} f(t) \le f^*(x_0) + \varepsilon = f(x_0) + \varepsilon.$$

Das bedeutet, daß $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $x \in U_\delta(x_0)$ ist. Damit ist f stetig in x_0.

3) Sei $r \in \mathbb{R}$ und $M := \{x \in [a, b] \,:\, f_*(x) > r\}$. Ist $x_0 \in M$, so gibt es ein $\delta > 0$, so daß $\inf_{U_\delta(x_0)} f(t) > r$ ist.[3]

Dann ist natürlich erst recht $f(x) > r$ für $x \in U_\delta(x_0) \cap I$. Also ist M offen in I (in der Relativtopologie). Das zeigt, daß f_* meßbar ist, und analog folgt es für f^*.

[3] Liegt x_0 am Rande von I, so muß man eigentlich das Infimum über $U_\delta(x_0) \cap I$ bilden. Das wird hier nicht immer extra erwähnt.

Da die beiden Funktionen außerdem beschränkt sind (siehe (1)), sind sie Lebesgue-integrierbar. ■

Jetzt können wir den angekündigten Satz beweisen:

3.4 Satz. *Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie beschränkt und fast überall stetig ist.*

Sie ist dann auch Lebesgue-integrierbar, und die Integrale sind gleich.

BEWEIS: Wir können von vornherein voraussetzen, daß f beschränkt ist.

Ist $\mathfrak{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $I = [a, b]$, so definieren wir m_i und M_i wie üblich. Außerdem setzen wir

$$g = g_{\mathfrak{Z}} := \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \chi_{(x_{i-1}, x_i)} \quad \text{und} \quad h = h_{\mathfrak{Z}} := \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \chi_{[x_{i-1}, x_i]}.$$

Die Funktionen g und h sind einfach.

1) Sei f integrierbar. Da die Addition einer Konstante nichts ändert, können wir annehmen, daß $f \geq 1$ ist. Dann ist $g \leq f_* \leq f \leq f^* \leq h$, sowie

$$u(f, \mathfrak{Z}) = \int g \, d\mu_1 \quad \text{und} \quad o(f, \mathfrak{Z}) = \int h \, d\mu_1.$$

Sei $\mathfrak{Z}_k$ eine Folge von Zerlegungen, so daß $\lim\limits_{k\to\infty} u(f, \mathfrak{Z}_k) = \lim\limits_{k\to\infty} o(f, \mathfrak{Z}_k)$ ist, und $g_k := g_{\mathfrak{Z}_k}$, $h_k := h_{\mathfrak{Z}_k}$. Dann konvergiert $\int (h_k - g_k) \, d\mu_1$ gegen Null, und es ist $\int (f^* - f_*) \, d\mu_1 = 0$. Das bedeutet, daß fast überall $f_* = f^*$ ist, also f fast überall stetig.

2) Jetzt setzen wir voraus, daß f fast überall stetig ist. Dann ist auf jeden Fall

$$\int f_* \, d\mu_1 = \int f^* \, d\mu_1.$$

Wenn wir zeigen können, daß $\int f_* \, d\mu_1 = \int_* f(x) \, dx$ und $\int f^* \, d\mu_1 = \int^* f(x) \, dx$ ist, folgt die Riemann-Integrierbarkeit von f.

Dazu wählen wir eine Zerlegungsfolge $\mathfrak{Z}_k$, so daß $\mathfrak{Z}_{k+1}$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{Z}_k$ und die Länge der Teilintervalle von $\mathfrak{Z}_k$ kleiner als $1/k$ ist. Dann folgt:

$$\int g_k \, d\mu_1 = u(f, \mathfrak{Z}_k) \to \int_* f(x) \, dx \quad \text{und} \quad \int h_k \, d\mu_1 = o(f, \mathfrak{Z}_k) \to \int^* f(x) \, dx.$$

Sei N die Nullmenge, auf der f eventuell unstetig ist, und Z die Vereinigung aller Teilungspunkte aller Zerlegungen $\mathfrak{Z}_k$. Als abzählbare Menge ist Z und damit auch $N \cup Z$ eine Nullmenge. Wir werden zeigen, daß (g_k) außerhalb von $N \cup Z$ punktweise monoton wachsend gegen f_* (und analog (h_k) monoton fallend gegen f^*) konvergiert. Nach dem Satz von Beppo Levi ist dann

$$\int f_* \, d\mu_1 = \lim_{k\to\infty} \int g_k \, d\mu_1 = \int_* f(x) \, dx$$

und

$$\int f^* \, d\mu_1 = \lim_{k\to\infty} \int h_k \, d\mu_1 = \int^* f(x) \, dx.$$

Sei also $x_0 \in I$ ein Punkt, der nicht in $N \cup Z$ liegt. Es ist $g_k(x_0) \leq f_*(x_0)$ für alle k. Nun sei c eine reelle Zahl mit $c < f_*(x_0) = f(x_0)$. Es gibt ein $\delta > 0$, so daß sogar $c < \inf\limits_{U_\delta(x_0)} f(t)$ ist.

Für jedes k gibt es ein Teilintervall J_k der Zerlegung $\mathfrak{Z}_k$, so daß x_0 im Innern dieses Intervalls liegt, und es gibt sicherlich ein k_0, so daß $J_k \subset U_\delta(x_0)$ für $k \geq k_0$ ist. Wir setzen noch $m_k := \inf\limits_{J_k} f$. Dann ist

$$g_k(x_0) = m_k \geq \inf_{U_\delta(x_0)} f(t) > c.$$

Das bedeutet, daß $g_k(x_0)$ gegen $f_*(x_0)$ konvergiert.

Analog folgt, daß $h_k(x_0)$ gegen $f^*(x_0)$ konvergiert. Damit ist alles bewiesen.

3) f^* ist Lebesgue-integrierbar, und wenn f Riemann-integrierbar ist, so ist fast überall $f = f^*$ und damit auch f Lebesgue-integrierbar. Außerdem ist dann $\int f \, d\mu_1 = \int f^* \, d\mu_1 = \int^* f(x) \, dx$, und das ist das Riemannsche Integral von f. ∎

Im $\mathbb{R}^n$ heißt eine Menge M eine *Jordan-Nullmenge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ **endlich viele** Quader $Q_1, \ldots, Q_N$ gibt, so daß gilt:

$$M \subset Q_1 \cup \ldots \cup Q_N \quad \text{und} \quad v_n(Q_1) + \cdots + v_n(Q_N) < \varepsilon.$$

Eine Menge M heißt *Jordan-meßbar*, falls sie beschränkt und ∂M eine Jordan-Nullmenge ist.

Das Riemann-Integral wird dann für beschränkte Funktionen auf Jordan-meßbaren Mengen definiert, mit Riemannschen Summen oder mit Unter- und Obersummen bezüglich immer feiner werdenden Quaderüberdeckungen. Dann läßt sich auch im $\mathbb{R}^n$ ein zu dem obigen Satz analoges Resultat beweisen. Wir werden das hier nicht mehr ausführen, stattdessen nennen wir eine beschränkte und fast überall stetige Funktion einfach Riemann-integrierbar.

§ 4 Anmerkungen zum Lebesgue-Integral

Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zur Berechnung des Riemann-Integrals teilt man I in Teilintervalle $I_1, \ldots, I_n$, wählt Punkte $\xi_\nu \in I_\nu$ und approximiert das Integral durch Summen

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu) \cdot \mu(I_\nu).$$

Bei der Berechnung des Lebesgue-Integrals teilt man die Ordinatenachse in Teilintervalle J_k, bildet die Mengen $M_k := f^{-1}(J_k)$, sucht Werte $c_k \in J_k$ und approximiert das Integral durch Summen

$$\sum_k c_k \cdot \mu(M_k).$$

Es hat sich erwiesen, daß der zweite Weg der bessere ist.

Unsere Einführung des Lebesgue-Maßes nach Caratheodory war nicht ganz einfach. Als Alternative bietet sich an, neben dem äußeren Maß $\mu^*(M)$ auch noch für beschränkte Mengen das *innere Maß* $\mu_*(M)$ einzuführen. Ist $M \subset Q$, mit einem Quader Q, so definiert man:

$$\mu_*(M) := \mu(Q) - \mu^*(Q \setminus M).$$

Eine beschränkte Menge heißt dann *meßbar*, wenn $\mu_*(M) = \mu^*(M)$ ist. Bei unbeschränkten Mengen benutzt man eine abzählbare Zerlegung in disjunkte beschränkte Teile.

Wir hätten auch definieren können: M meßbar $\iff M = B \cup N$, mit einer Borelmenge B und einer Nullmenge N. Es folgt dann relativ leicht, daß die meßbaren Mengen eine σ-Algebra bilden, aber der Beweis der σ-Additivität bereitet dann Schwierigkeiten.

Die Einführung des Lebesgue-Integrals könnte vielleicht wie folgt noch vereinfacht werden:

- Zunächst werden meßbare Funktionen eingeführt.
- Einfache Funktionen definiert man mit beliebigen meßbaren (nicht notwendig endlich-meßbaren) Mengen. Das Integral einer einfachen Funktion kann dann auch die Werte $\pm\infty$ annehmen.
- Ist $f \geq 0$ und meßbar, so setzt man

$$\int f\,d\mu := \sup\{\int g\,d\mu \,:\, 0 \leq g \leq f,\ g \text{ einfach }\}.$$

- Es folgt für $f \geq 0$ meßbar:

$$\int f\,d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ fast überall.}$$

- Es folgen die verallgemeinerten Konvergenzsätze von Beppo Levi für nicht-negative meßbare Funktionen.

- Ist f beliebig meßbar, so setzt man

$$\int f\,d\mu := \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu,$$

  sofern wenigstens eins der beiden Integrale endlich ist. Sind beide endlich, so nennt man f *integrierbar*.

  Eine meßbare Funktion ist genau dann integrierbar, wenn $\int |f|\,d\mu < \infty$ ist.

- Jetzt folgt auch der verallgemeinerte Konvergenzsatz von Lebesgue.

- Der Satz von Fubini wird so ähnlich bewiesen, wie wir es getan haben.

  Oft wird dabei übrigens ein abstrakterer Weg eingeschlagen, der sogenannte Produktmaße benutzt.

Ein völlig anderer Weg bei der Integralkonstruktion wird bei Forster, Dieudonne und Bourbaki eingeschlagen. Da wird zunächst das Integral für stetige Funktionen mit kompaktem Träger eingeführt und dieses dann in zwei Schritten zunächst auf „halbstetige" Funktionen und dann auf integrierbare Funktionen erweitert. Dieses Vorgehen läßt sich besonders gut auf allgemeinere Räume übertragen. Das Maß von Mengen wird hinterher als Integral der zugehörigen charakteristischen Funktion eingeführt.

Ein Zwischenweg wird von Königsberger benutzt. Er definiert Treppenfunktionen zu Quaderzerlegungen und deren Integral, führt damit (über Reihen von approximierenden Treppenfunktionen) die L^1-Seminorm ein. Eine Funktion f heißt integrierbar, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen gibt, die bezüglich der L^1-Norm gegen f konvergiert. Auch hier wird das Maß von Mengen später eingeführt.

Alle diese Wege führen zum selben Integralbegriff!