Bergische Universität – Gesamthochschule Wuppertal – Fachbereich Mathematik

Analysis 2

Kapitel 1 Funktionen von mehreren Variablen

Vorlesungsausarbeitung zum SS 2001

von Prof. Dr. Klaus Fritzsche

Inhaltsverzeichnis

§ 1 Topologische Strukturen

Definition. Sei V ein komplexer Vektorraum. Eine *hermitesche Form* auf V ist eine Abbildung $H : V \times V \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $H(v_1 + v_2, w) = H(v_1, w) + H(v_2, w)$ für $v_1, v_2, w \in V$,
2. $H(c \cdot v, w) = c \cdot H(v, w)$ für $c \in \mathbb{C}$ und $v, w \in V$,
3. $H(w, v) = \overline{H(v, w)}$ für $v, w \in V$.

Ist H reellwertig und „vergißt" man die komplexe Struktur von V, so erhält man eine *symmetrische Bilinearform.*

1.1 Satz. *Für jede hermitesche Form H auf V gilt:*

1. $H(v, w_1 + w_2) = H(v, w_1) + H(v, w_2)$ *für* $v, w_1, w_2 \in V$,
2. $H(v, c \cdot w) = \overline{c} \cdot H(v, w)$ *für* $c \in \mathbb{C}$ *und* $v, w \in V$,
3. $H(v, v)$ *ist für jedes* $v \in V$ *eine reelle Zahl. Insbesondere ist* $H(0, 0) = 0$.

BEWEIS: Die Aussagen sind trivial, z.B. ist

$$H(v, c \cdot w) = \overline{H(c \cdot w, v)} = \overline{c \cdot H(w, v)} = \overline{c} \cdot \overline{H(w, v)} = \overline{c} \cdot H(v, w).$$

Die letzte Aussage folgt aus der Tatsache, daß eine komplexe Zahl z genau dann reell ist, wenn $\overline{z} = z$ ist. Und es ist $H(0, 0) = H(0 \cdot 0, 0) = 0 \cdot H(0, 0) = 0$. ■

Definition. Eine hermitesche Form auf einem komplexen Vektorraum heißt ein *Skalarprodukt*, falls $H(v, v) > 0$ für jedes $v \neq 0$ ist. Der Raum V wird dann als *unitärer Raum* oder (im unendlich-dimensionalen Fall) als *Prähilbertraum* bezeichnet. Einen reellen Raum mit Skalarprodukt nennt man auch einen *euklidischen Raum.*

Beispiele.

1. Das *kanonische euklidische Skalarprodukt* auf dem $\mathbb{R}^n$ kennen wir schon, es ist gegeben durch

$$H(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu w_\nu \,.$$

Das *kanonische hermitesche Skalarprodukt* auf dem $\mathbb{C}^n$ wird gegeben durch

$$<v \,,\, w> := \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu \overline{w}_\nu \,.$$

Ist $z = (z_1, \ldots, z_n)$ und $z_\nu = x_\nu + \mathrm{i} y_\nu$, so ist

$$<z\,,\,z> = \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu \overline{z}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu^2 + y_\nu^2)\,.$$

Das ist das Quadrat der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$.

2. Für das zweite Beispiel müssen wir zunächst das Integral über komplexe Funktionen einführen.

   Ist $f = g + \mathrm{i}h$ eine Regelfunktion über $[a, b] \subset \mathbb{R}$, so setzen wir

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b g(t)\,dt + \mathrm{i} \int_a^b h(t)\,dt\,.$$

   Dann gilt:

   (a) Das Integral ist $\mathbb{C}$-linear:

$$\int_a^b (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t))\,dt = c_1 \cdot \int_a^b f_1(t)\,dt + c_2 \cdot \int_a^b f_2(t)\,dt\,.$$

   (b) Es ist

$$\int_a^b \overline{f(t)}\,dt = \overline{\int_a^b f(t)\,dt}\,.$$

   (c) Ist $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f, so ist

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)\,.$$

   Die Substitutionsregel überträgt sich sinngemäß. Die Beweise dafür sind trivial.

   (d) Es gilt die Abschätzung

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt\,.$$

   Hierzu ein Beweis: Sei $z := \int_a^b f(t)\,dt$. Im Falle $z = 0$ ist nichts zu zeigen, also können wir $z \neq 0$ annehmen und haben eine eindeutig bestimmte Darstellung $z = r \cdot e^{\mathrm{i}\lambda}$ mit $r > 0$. Dann ist $e^{-\mathrm{i}\lambda} \cdot z = r = |\int_a^b f(t)\,dt|$, also

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \mathrm{Re}\left(e^{-\mathrm{i}\lambda} \cdot \int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-\mathrm{i}\lambda} \cdot f(t))\,dt\,.$$

   Da für eine komplexe Zahl $w = u + \mathrm{i}v$ stets $\mathrm{Re}(w) = u \le \sqrt{u^2 + v^2} = |w|$ ist, folgt:

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-\mathrm{i}\lambda} \cdot f(t))\,dt \le \int_a^b |e^{-\mathrm{i}\lambda} \cdot f(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt\,.$$

Mit f und g ist auch $f \cdot g$ eine Regelfunktion. Daher können wir definieren:

$$<f\,,\,g> := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt\,.$$

Offensichtlich liefert das eine hermitesche Form auf dem Raum der Regelfunktionen, und es ist $<f\,,\,f> = \int_a^b |f(t)|^2\,dt \geq 0$ für alle f. Allerdings liegt kein Skalarprodukt vor, denn $<f\,,\,f>$ kann $= 0$ sein, auch wenn f nicht die Nullfunktion ist, z.B. eine Funktion, die an endlich vielen Stellen einen Wert $\neq 0$ annimmt.

Beschränken wir uns jedoch auf stetige Funktionen, so geht alles gut. Ist nämlich eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nicht die Nullfunktion, so gibt es ein $t_0 \in [a, b]$ mit $f(t_0) \neq 0$, und wegen der Stetigkeit gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $f(t) \neq 0$ auf $U_\varepsilon(t_0) \cap [a, b]$ ist. Dann nimmt $|f|$ auf $\{t \in [a, b] \,:\, |t - t_0| \leq \varepsilon/2\}$ ein Minimum $\delta > 0$ an, und es gibt ein Teilintervall der Länge $\geq \varepsilon/2$, wo $|f| \geq \delta$ ist. Daraus folgt:

$$<f\,,\,f> = \int_a^b |f(t)|^2\,dt \geq \delta^2 \cdot \varepsilon/2 > 0\,.$$

Also haben wir ein Skalarprodukt auf $\mathcal{C}^0([a, b])$.

1.2 Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz. *Sei $H : V \times V \to \mathbb{C}$ ein Skalarprodukt. Dann gilt für $v, w \in V$:*

$$|H(v, w)|^2 \leq H(v, v) \cdot H(w, w)\,.$$

Beweis: Es geht genauso wie beim kanonischen euklidischen Skalarprodukt. Nur der Vollständigkeit halber wiederholen wir hier den Beweis.

Sei $a := H(v, v)$, $b := H(v, w)$ und $c := H(w, w)$. Dann sind a, c reell und ≥ 0. Ist $v = w = 0$, so ist auch $a = b = c = 0$ und nichts mehr zu zeigen. Da die Aussage symmetrisch in v und w ist, können wir annehmen, daß $w \neq 0$ ist, also $c > 0$. Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig, so gilt:

$$0 \leq H(v + \lambda w, v + \lambda w) = a + \lambda\overline{b} + \overline{\lambda}b + |\lambda|^2 c\,.$$

Mit $\lambda = -b/c$ erhalten wir:

$$0 \leq a - \frac{b\overline{b}}{c} - \frac{b\overline{b}}{c} + \frac{b\overline{b}}{c^2} \cdot c = a - \frac{b\overline{b}}{c},$$

also $b\overline{b} \leq a \cdot c$. Und genau das war zu zeigen. ∎

Zwei Elemente $v, w \in V$ heißen (bezüglich H) *orthogonal*, falls $H(v, w) = 0$ ist. Sind v, w orthogonal, so ist

$$H(v + w, v + w) = H(v, v) + H(w, w) \quad \text{(Satz des Pythagoras)}\,.$$

Beispiel.

Im Raum der stetigen Funktionen auf $I = [-\pi, \pi]$ ist

$$<e^{\mathrm{i}nt}\,,\,e^{\mathrm{i}mt}> = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}(n-m)t}\,dt = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } n = m \\ \frac{1}{\mathrm{i}(n-m)} e^{\mathrm{i}(n-m)t}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{falls } n \neq m. \end{cases}$$

Für $n \neq m$ sind also die Funktionen $e^{\mathrm{i}nt}$ und $e^{\mathrm{i}mt}$ orthogonal zueinander. Die Funktionen

$$f_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\mathrm{i}nt}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

bilden somit ein „Orthonormalsystem“ im Raum $\mathcal{C}^0([-\pi, \pi])$, d.h. es ist $<f_n\,,\,f_m> = 0$ für $n \neq m$ und $<f_n\,,\,f_n> = 1$ für alle n.

Definition. Sei V ein komplexer Vektorraum. Eine *Norm* auf V ist eine Funktion $N : V \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $N(v) \geq 0$ für jedes $v \in V$, und $N(v) = 0 \iff v = 0$,
2. $N(c \cdot v) = |c| \cdot N(v)$ für $c \in \mathbb{C}$ und $v \in V$,
3. $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$ für $v, w \in V$ (Dreiecks-Ungleichung).

Wir kennen schon die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Analog führt jedes Skalarprodukt H zu einer Norm, durch

$$N(v) := \sqrt{H(v, v)}\,.$$

Die ersten beiden Eigenschaften sind trivialerweise erfüllt, die Dreiecksungleichung folgt wie beim kanonischen euklidischen Skalarprodukt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung.

Aber nicht jede Norm kommt von einem Skalarprodukt. Ist M eine beliebige abstrakte Menge, so haben wir auf dem Raum $\mathcal{B} = \mathcal{B}(M, \mathbb{R})$ der beschränkten reellwertigen Funktionen auf M eine Norm erklärt durch

$$\|f\|_M := \sup\{|f(x)| \,:\, x \in M\}.$$

Für komplexwertige Funktionen geht es genauso. Diese Norm kommt normalerweise nicht von einem Skalarprodukt. Ist $M = \{1, \ldots, n\}$, so wird jede beschränkte reellwertige Funktion auf M durch ihre n Werte festgelegt. Also ist $\mathcal{B}(\{1, \ldots, n\}, \mathbb{R})$ nichts anderes als der $\mathbb{R}^n$. In diesem Fall ist die Supremums-Norm gegeben durch

$$|x| := \|x\|_{\{1,\ldots,n\}} = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)\,.$$

Die Begriffe „Metrik“ und „metrischer Raum“ haben wir schon im 1. Semester eingeführt. Auf jedem normierten Vektorraum hat man automatisch eine Metrik. Ist nämlich N eine Norm auf V, so setzen wir

$$d_N(v,w) := N(v-w)\,.$$

Wie bei der euklidischen Norm und bei der Sup-Norm folgen auch allgemein die Eigenschaften einer Metrik:

1. $d_N(v,w) \geq 0$ für alle v,w, und $d_N(v,w)=0 \iff v=w$,
2. $d_N(v,w) = d_N(w,v)$,
3. $d_N(v,w) \leq d_N(v,u) + d_N(u,w)$.

Mit Hilfe einer Metrik kann man die Konvergenz von Folgen und die Cauchy-Eigenschaft definieren. Ein metrischer Raum heißt bekanntlich vollständig, wenn jede Cauchyfolge einen Grenzwert besitzt. Der $\mathbb{R}^n$ ist – wie jeder endlich-dimensionale reelle oder komplexe Vektorraum – vollständig. Ein unendlich-dimensionaler Vektorraum mit einer Norm braucht nicht vollständig zu sein. Wenn er es dennoch ist, nennt man ihn einen *Banach-Raum*. Kommt die Norm sogar von einem Skalarprodukt, so spricht man von einem *Hilbertraum*.

Für $I := [a,b]$ ist der Raum $\mathcal{C}^0(I)$ mit der Sup-Norm ein Banach-Raum. Mit der Integral-Norm (und dem zugehörigen Skalarprodukt) ist er aber **kein** Hilbertraum! Vielmehr kann man $\mathcal{C}^0(I)$ zum vollständigen Hilbertraum $\mathcal{L}^2(I)$ der sogenannten „quadratintegrablen Funktionen“ erweitern. Diesen werden wir zu einem späteren Zeitpunkt kennenlernen.

Es gibt metrische Räume, die keine Vektorräume sind (z.B. eine Kugel im $\mathbb{R}^n$ mit der induzierten Metrik), aber auch nicht jede Metrik auf einem Vektorraum kommt von einer Norm.

Sei etwa $I = (a,b)$ ein **offenes** Intervall und $E := \mathcal{C}^0(I)$. Wir setzen

$$I_k := [a + r/k, b - r/k] \text{ (für ein festes } r \text{ mit } 0 < r < b-a)$$

und

$$p_k(f) := \|f\|_{I_k} \text{ für } f \in E.$$

Weiter sei

$$\delta(f) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \cdot \frac{p_k(f)}{1+p_k(f)} \qquad \text{und} \qquad d(f,g) := \delta(f-g)\,.$$

Behauptung: d ist eine Metrik auf E.

Beweis: 1) Für jede reelle Zahl $x \geq 0$ ist $0 \leq \dfrac{x}{1+x} < 1$. Also ist die Reihe sicherlich immer konvergent und $d(f,g)$ eine nicht-negative reelle Zahl. Speziell ist

$\delta(0) = 0$, und wenn $\delta(f) = 0$ ist, so muß $p_k(f) = 0$ sein, für alle k. Das geht nur, wenn $f = 0$ ist. Somit ist $d(f, g) = 0 \iff f = g$.

2) Die Gleichung $d(f, g) = d(g, f)$ ist trivialerweise erfüllt.

3) Es bleibt die Dreiecks-Ungleichung. Die Funktion $h(x) = x/(1 + x)$ ist auf $\mathbb{R}_+$ differenzierbar und $h'(x) = 1/(1 + x)^2 > 0$. Also wächst h streng monoton. Außerdem ist $h(x+y) = x/(1+x+y)+y/(1+x+y) \le h(x)+h(y)$. Benutzt man schließlich noch die schon bekannte Dreiecksungleichung für p_k, so erhält man:

$$h(p_k(f + g)) \le h(p_k(f) + p_k(g)) \le h(p_k(f)) + h(p_k(g))\,.$$

Das ergibt die Ungleichung $\delta(f + g) \le \delta(f) + \delta(g)$, und damit ist

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \delta(f - g) = \delta((f - f_0) + (f_0 - g)) \\ &\le \delta(f - f_0) + \delta(f_0 - g) \\ &= d(f, f_0) + d(f_0, g). \end{aligned}$$

Also ist d eine Metrik. ∎

Aber δ ist keine Norm, und man kann zeigen, daß d von überhaupt keiner Norm herrührt.

Wir haben im 1. Semester definiert, was offene und abgeschlossene Mengen in einem metrischen Raum sind. Dies nehmen wir zum Anlaß für eine weitere Definition.

Definition. Sei X eine beliebige nicht-leere Menge. Eine *topologische Struktur* auf X ist ein System $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

1. $\varnothing \in \mathcal{O}$ und $X \in \mathcal{O}$.
2. $U, V \in \mathcal{O} \implies U \cap V \in \mathcal{O}$.
3. Ist $(U_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie von Elementen aus $\mathcal{O}$, so gehört auch $\displaystyle\bigcup_{\iota\in I} U_\iota$ zu $\mathcal{O}$.

Ein *topologischer Raum* ist eine Menge X mit einer topologischen Struktur. Man bezeichnet $\mathcal{O}$ dann als das System der *offenen* Mengen von X.

Beispiele.

1. Jeder metrische Raum (X, d) ist auch ein topologischer Raum. Eine Menge $U \subset X$ gehört zum System $\mathcal{O}$ der offenen Mengen von X, wenn es zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $U_\varepsilon(x) \subset U$ ist.
2. Ist X ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge, so trägt Y die „Relativtopologie“ oder „Spurtopologie“. Man nennt eine Menge $U \subset Y$ offen, falls es eine offene Menge $\widehat{U} \subset X$ mit $\widehat{U} \cap Y = U$ gibt. Die Eigenschaften einer topologischen Struktur lassen sich leicht nachrechnen. Ist z.B. $U = \widehat{U} \cap Y$

und $V = \widehat{V} \cap Y$, mit offenen Mengen $\widehat{U}, \widehat{V} \subset X$, so ist $\widehat{U} \cap \widehat{V}$ offen in X und $(\widehat{U} \cap \widehat{V}) \cap Y = U \cap V$.

Ist X ein metrischer Raum und Y mit der induzierten Metrik versehen, so ergibt das genau die Relativtopologie.

3. Es kann auf einer Menge X i.a. viele verschiedene topologische Strukturen geben. So ist z.B. $\mathcal{O} = \{\varnothing, X\}$ immer eine Topologie (auch die „Klumpen-Topologie" genannt), und die Familie $\mathcal{O} = P(X)$ aller Teilmengen von X ist ebenfalls eine Topologie.

Auch in einem allgemeinen topologischen Raum X existiert der Begriff der Umgebung. Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt *Umgebung* von $x \in X$, falls es eine offene Teilmenge $U \in \mathcal{O}$ gibt, so daß $x \in U \subset M$ gilt.

Definition. Ein topologischer Raum X heißt ein *Hausdorff-Raum*, falls gilt: Zu je zwei verschiedenen Elementen x und y aus X gibt es Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap V = \varnothing$.

Jeder metrische Raum ist ein Hausdorff-Raum, aber eine Menge X mit der Klumpen-Topologie und mit mindestens 2 Elementen ist sicherlich kein Hausdorff-Raum. Es gibt auch noch interessantere topologische Räume, die nicht metrisch sind, aber darauf soll hier nicht näher eingegangen werden.

Übrigens nennen wir auch in einem beliebigen topologischen Raum eine Teilmenge *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement offen ist.

Kehren wir zurück zu den normierten Vektorräumen. Zwei Normen N_1 und N_2 auf einem (reellen oder komplexen) Vektorraum heißen *äquivalent*, falls es Konstanten $c, c^* > 0$ gibt, so daß gilt:

$$c \cdot N_1(v) \le N_2(v) \le c^* \cdot N_1(v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Beispiel.

Auf dem $\mathbb{R}^n$ betrachten wir die beiden Normen $N_1(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ und $N_2(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$. Dann ist

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \|\mathbf{x}\| \le |\mathbf{x}| \le \|\mathbf{x}\|.$$

Die euklidische Norm und die sup-Norm sind also äquivalent.

1.3 Satz. *Zwei äquivalente Normen auf einem Vektorraum V definieren die gleiche topologische Struktur.*

Beweis: Sei $v_0 \in V$ ein beliebiger Punkt. Es reicht zu zeigen, daß jede N_1-Kugel um v_0 eine N_2-Kugel um v_0 enthält, und umgekehrt.

a) Ist $r_1 > 0$ gegeben, so setzen wir $r_2 := c \cdot r_1$.

Für $v \in B_{r_2}^{(N_2)}(v_0)$ (also $N_2(v - v_0) < r_2$) ist dann $N_1(v - v_0) \leq (1/c) \cdot N_2(v - v_0) < r_2/c = r_1$, also auch $v \in B_{r_1}^{(N_1)}(v_0)$.

b) Ist $r_2 > 0$ gegeben, so setzen wir $r_1 := (1/c^*) \cdot r_2$. Ist $N_1(v - v_0) < r_1$, so ist $N_2(v - v_0) \leq c^* \cdot N_1(v - v_0) = r_2$. ∎

1.4 Satz. *Je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent, d.h. jede Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ induziert die gleiche topologische Struktur.*

Beweis: Da es sich wirklich um eine Äquivalenzrelation handelt, reicht es zu zeigen, daß eine beliebige Norm N äquivalent zur Supremums-Norm ist.

Jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ hat eine Darstellung $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Dann ist

$$\begin{aligned} N(x) &\leq |x_1| \cdot N(e_1) + \cdots + |x_n| \cdot N(e_n) \\ &\leq c^* \cdot |x|, \end{aligned}$$

mit $c^* := N(e_1) + \cdots + N(e_n)$.

Annahme, es gibt kein $c > 0$, so daß $c \cdot |x| \leq N(x)$ für alle x ist. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein x_n mit $|x_n| > n \cdot N(x_n)$, also

$$N(y_n) < \frac{1}{n}\,, \text{ für } y_n := \frac{x_n}{|x_n|}\,.$$

Weil $|y_n| = 1$ ist, gibt es eine konvergente Teilfolge. Wir nehmen an, daß (y_n) schon selbst gegen ein y_0 konvergiert (in der Sup-Norm). Dann konvergiert $|y_n - y_0|$ gegen Null. Außerdem ist

$$\begin{aligned} N(y_0) &= N(y_0 - y_n + y_n) \;\leq\; N(y_0 - y_n) + N(y_n) \\ &\leq c^* \cdot |y_0 - y_n| + \frac{1}{n}\,. \end{aligned}$$

Da die rechte Seite gegen Null konvergiert, ist $N(y_0) = 0$, also $y_0 = 0$. Auf der anderen Seite ist

$$1 = |y_n| = |y_0 + (y_n - y_0)| \leq |y_0| + |y_n - y_0|\,.$$

Damit haben wir einen Widerspruch. ∎

Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt *innerer Punkt* von M, falls es eine Umgebung

$U(x_0) \subset X$ mit $U \subset M$ gibt. Der Punkt heißt *Berührungspunkt* von M, falls jede Umgebung $U(x_0)$ einen Punkt von M enthält.

Die Menge $\mathring{M}$ der inneren Punkte von M nennt man den *offenen Kern* von M.

Die Menge $\overline{M}$ der Berührungspunkte von M nennt man die *abgeschlossene Hülle* von M.

1.5 Satz. *Es ist* $\mathring{M} = \bigcup\limits_{\substack{V \subset M \\ V \text{ offen}}} V$.

Beweis: Wir bezeichnen die Menge auf der rechten Seite mit M^*.

1) Liegt x in $\mathring{M}$, so ist x innerer Punkt von M und es gibt eine offenen Menge V mit $x \in V \subset M$. Also gehört x zu M^*.

2) Offensichtlich ist $M^* \subset \mathring{M}$, wegen (1) also $\mathring{M} = M^*$. ∎

1.6 Folgerung. $\mathring{M}$ *ist offen. Ist M selbst schon offen, so ist* $\mathring{M} = M$.

1.7 Satz. *Für den offenen Kern gelten die folgenden Aussagen:*

1. $\mathring{M} \subset M$,
2. *Aus* $N \subset M$ *folgt* $\mathring{N} \subset \mathring{M}$,
3. $\mathring{\mathring{M}} = \mathring{M}$.

Der Beweis ist trivial.

1.8 Satz. *Es ist* $\overline{M} = \bigcap\limits_{\substack{A \supset M \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$.

Beweis: Da $X \setminus \overline{M}$ die Menge der inneren Punkte von $X \setminus M$ ist, folgt der Satz aus der analogen Aussage über den offenen Kern durch Komplementbildung. ∎

1.9 Folgerung. $\overline{M}$ *ist abgeschlossen. Ist M selbst schon abgeschlossen, so ist* $\overline{M} = M$.

1.10 Satz. *Für die abgeschlossene Hülle gelten die folgenden Aussagen:*

1. $M \subset \overline{M}$,

2. *Aus $N \subset M$ folgt $\overline{N} \subset \overline{M}$,*

3. $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

Auch hier ist der Beweis trivial.

Definition. $\partial M := \overline{M} \setminus \mathring{M}$ heißt der *Rand* von M.

Ein Punkt x liegt also genau dann im Rand von M, wenn jede Umgebung von x sowohl M als auch $X \setminus M$ trifft. Es ist $M \cup \partial M = \overline{M}$ und $M \setminus \partial M = \mathring{M}$.

Beispiele.

1. Ist $M = [a, b) \subset \mathbb{R}$, so ist $\mathring{M} = (a, b)$, $\overline{M} = [a, b]$ und $\partial M = \{a, b\}$.

2. Sei $M = [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Dann ist $\mathring{M} = \varnothing$, $\overline{M} = [a, b]$ und $\partial M = [a, b]$.

3. Versieht man $\mathbb{Q}$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Relativtopologie, so ist $M := \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$ natürlich offen in $\mathbb{Q}$. Aber M ist auch abgeschlossen in $\mathbb{Q}$, denn das Komplement ist offen. Also ist dann $\overline{M} = \mathring{M} = M$ und $\partial M = \varnothing$. Das gilt, wie gesagt, in der Relativtopologie. In $\mathbb{R}$ ist M weder offen, noch abgeschlossen. Dort ist $\overline{M} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ und $\mathring{M} = \varnothing$, also $\partial M = \overline{M}$.

Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes hatten wir kompakt genannt, wenn jede Punktfolge in K eine (in K) konvergente Teilfolge besitzt. Äquivalent dazu ist die Bedingung, daß jede Punktfolge in K wenigstens einen Häufungspunkt in K besitzt. Wir werden diese Eigenschaft ab jetzt *folgenkompakt* nennen. Im $\mathbb{R}^n$ bedeutet sie gerade, daß K abgeschlossen und beschränkt ist. In einem beliebigen topologischen Raum machen beide Begriffe keinen Sinn, weil wir dort weder beschränkte Mengen noch die Konvergenz von Folgen vernünftig definieren können. Da muß man sich etwas anderes einfallen lassen.

Eine *offene Überdeckung* eines topologischen Raumes X ist ein System $(U_\iota)_{\iota \in I}$ von offenen Teilmengen von X mit

$$X = \bigcup_{\iota \in I} U_\iota \,.$$

Ist $I_0 = \{\iota_1, \ldots, \iota_N\} \subset I$ eine endliche Teilmenge und $X = U_{\iota_1} \cup \ldots \cup U_{\iota_N}$, so nennt man $\{U_{\iota_1}, \ldots, U_{\iota_N}\}$ eine *endliche Teilüberdeckung*.

Definition. Ein topologischer Raum X heißt *kompakt*, falls gilt:

1. X ist ein Hausdorff-Raum.

2. Jede offene Überdeckung von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

Diese Definition ist zwar nicht sehr anschaulich, aber recht praktisch.

Eine Teilmenge K eines topologischen Hausdorff-Raumes X heißt kompakt, wenn sie – mit der Relativtopologie – ein kompakter topologischer Raum ist. Das bedeutet, daß es zu jeder (in X) offenen Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung gibt.

Auf metrischen Räumen stimmen der alte und der neue Kompaktheitsbegriff überein:

1.11 Satz. *Ein metrischer Raum X ist genau dann kompakt, wenn er folgenkompakt ist.*

Beweis: Sei X kompakt und (x_n) eine Folge in X, so daß $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine unendliche Menge ist (sonst ist nichts zu zeigen). Wenn F keinen Häufungspunkt besitzt, dann gibt es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U_x, so daß $U_x \cap F$ endlich ist. Die Mengen U_x überdecken X, daher gibt es endlich viele offene Mengen $U_1, \ldots, U_N$, die schon X überdecken und für die stets $U_i \cap F$ endlich ist. Das bedeutet, daß F endlich ist. Widerspruch! X muß folgenkompakt sein.

Ist umgekehrt X folgenkompakt, so betrachten wir eine offene Überdeckung $(U_\iota)_{\iota \in I}$ von X. Zunächst mal zeigen wir, daß es ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem x ein $\iota(x) \in I$ mit $U_\varepsilon(x) \subset U_{\iota(x)}$ gibt.

Beweis dafür: Wenn es dieses ε nicht gibt, so finden wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$, so daß $U_{1/n}(x_n)$ in keinem U_ι enthalten ist. Ist $y_\nu = x_{n_\nu}$ eine Teilfolge, die gegen ein y_0 konvergiert, so muß dieses y_0 aber in einem U_{ι_0} liegen.

Wir wählen ein $r > 0$, so daß auch noch $U_r(y_0) \subset U_{\iota_0}$ ist, und wir wählen ein $\nu \in \mathbb{N}$, so daß $1/n_\nu < r/2$ und $y_\nu \in U_{r/2}(y_0)$ ist. Dann gilt für $x \in U_{1/n_\nu}(y_\nu)$:

$$d(x, y_0) \le d(x, y_\nu) + d(y_\nu, y_0) < \frac{1}{n_\nu} + \frac{r}{2} < r,$$

also $U_{1/n_\nu}(x_{n_\nu}) \subset U_r(y_0) \subset U_{\iota_0}$. Das ist ein Widerspruch.

Damit können wir annehmen, daß ein ε mit der gewünschten Eigenschaft existiert. Wir wählen dann ein $x_1 \in X$ beliebig, ein $x_2 \in X \setminus U_\varepsilon(x_1)$, ein $x_3 \in X \setminus (U_\varepsilon(x_1) \cup U_\varepsilon(x_2))$ und so weiter.

Wenn $(U_\iota)_{\iota \in I}$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt, dann können auch nicht endlich viele $U_\varepsilon(x_n)$ überdecken. Also bricht die Folge der x_n nicht ab. Wieder muß eine Teilfolge $z_\mu = x_{n_\mu}$ einen Grenzwert z_0 in X haben. Für großes μ muß $d(z_\mu, z_{\mu+1}) < \varepsilon$ sein, aber andererseits liegt nach Konstruktion $z_{\mu+1}$ nicht in $U_\varepsilon(z_\mu)$. Das ist ein Widerspruch. Somit muß es eine endliche Teilüberdeckung geben, und das heißt, daß X kompakt ist. ∎

§ 2 Partielle Differenzierbarkeit

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wie kann man sich eine solche Funktion veranschaulichen? Eine erste Möglichkeit bietet der *Graph*

$$G_f = \{(\mathbf{x}, y) \in D \times \mathbb{R} \,:\, y = f(\mathbf{x})\}\,.$$

Jede „vertikale Gerade“ $\{(\mathbf{x}, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ durch einen festen Punkt $\mathbf{x} \in D$ trifft den Graphen in genau einem Punkt. Will man den Graphen skizzieren, so muß man ein $(n+1)$-dimensionales Bild erstellen. Im Falle $n = 2$ erhält man (bei hinreichend regulärem f) eine Fläche über dem Definitionsbereich D.

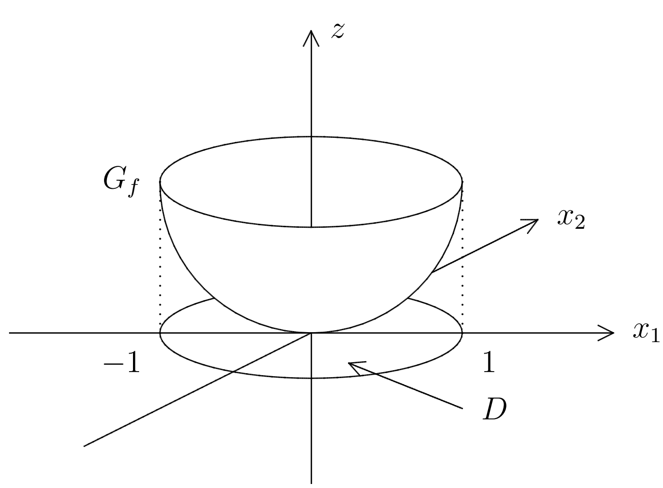
Eine andere Möglichkeit der Darstellung ist die Benutzung der *Niveaumengen*

$$f^{-1}(c) := \{\mathbf{x} \in D \mid f(\mathbf{x}) = c\}.$$

Hier ist „nur“ ein n-dimensionales Bild erforderlich. Allerdings gehen bei dieser Darstellung Informationen verloren. Im Falle $n = 2$ erhält man die von der Landkarte bekannten Höhenlinien.

Beispiel.

Sei $D := B_1(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^2$ und $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2$. Der Graph $G_f := \{(x_1, x_2, z) \in D \times \mathbb{R} \mid z = f(x_1, x_2)\}$ ist eine Fläche im $\mathbb{R}^3$, die man sich noch vorstellen kann.



Die Niveaumengen sind hier ebene Kreislinien:

Sorry, dieses Bild wurde von PDFLATEX nicht akzeptiert!

Definition. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{a} \in B$ und $f : B \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet man

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t}$$

als *Richtungsableitung* von f in $\mathbf{a}$ in Richtung $\mathbf{v}$ (sofern der Grenzwert existiert).

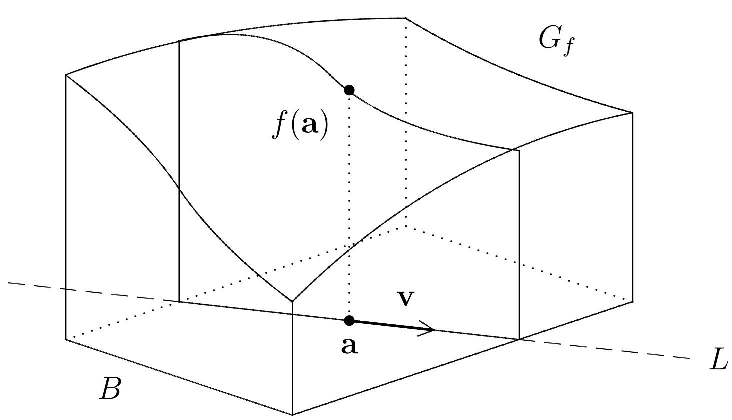
Was bedeutet das anschaulich?

$\alpha(t) := \mathbf{a} + t\mathbf{v}$ parametrisiert eine Gerade $L \subset \mathbb{R}^n$. Sie geht durch den Punkt $\mathbf{a}$ und hat den Richtungsvektor $\mathbf{v}$. Die Funktion

$$f_L(t) := f \circ \alpha(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$$

ist eine gewöhnliche Funktion einer Veränderlichen, und die Richtungsableitung von f in $\mathbf{a}$ mit Richtung $\mathbf{v}$ ist nichts anderes als die gewöhnliche Ableitung $(f_L)'(0)$.

Den Graphen von f_L erhält man, indem man den Graphen von f mit der über der Geraden L gelegenen Ebene $\{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \mathbf{x} \in L\}$ schneidet.



Beispiel.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := 1 - \mathbf{x} \bullet \mathbf{x}$. Dann ist

$$\begin{aligned} f_L(t) &= f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) = 1 - (\mathbf{a} + t\mathbf{v}) \bullet (\mathbf{a} + t\mathbf{v}) \\ &= 1 - \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} - (2\mathbf{a} \bullet \mathbf{v})t - (\mathbf{v} \bullet \mathbf{v})t^2, \end{aligned}$$

also

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = (f_L)'(0) = -2\mathbf{a} \bullet \mathbf{v}\,.$$

2.1 Satz. *Sei f in $\mathbf{a}$ in Richtung $\mathbf{v}$ differenzierbar, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ und $\alpha \neq 0$ eine Konstante. Dann ist f in $\mathbf{a}$ auch in Richtung $\alpha\mathbf{v}$ differenzierbar, und es gilt:*

$$D_{\alpha\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \alpha \cdot D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}).$$

BEWEIS: Es ist

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t(\alpha\mathbf{v})) - f(\mathbf{a})}{t} &= \lim_{t\to 0} \left(\alpha \cdot \frac{f(\mathbf{a} + (t\alpha)\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t\alpha} \right) \\ &= \alpha \cdot \lim_{s\to 0} \frac{f(\mathbf{a} + s\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{s} \\ &= \alpha \cdot D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

∎

Es reicht daher, wenn man sich bei den Richtungsableitungen auf Vektoren der Länge 1 beschränkt.

Sei $\|\mathbf{v}\| = 1$. Die Menge $\mathcal{V}$ aller in $\mathbf{a}$ in Richtung $\mathbf{v}$ differenzierbaren Funktionen bildet einen reellen Vektorraum, und die Zuordnung

$$f \mapsto D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})$$

ist eine Linearform auf $\mathcal{V}$.

2.2 Satz. *Sind f und g Elemente von $\mathcal{V}$, so liegt auch $f \cdot g$ in $\mathcal{V}$, und es gilt die **Produktregel**:*

$$D_{\mathbf{v}}(f \cdot g)(\mathbf{a}) = f(a) \cdot D_{\mathbf{v}} g(\mathbf{a}) + D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) \cdot g(a).$$

BEWEIS: Es ist $(f \cdot g)_L = (f_L) \cdot (g_L)$, und mit der Produktregel für Funktionen einer reellen Veränderlichen folgt:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}(f \cdot g)(\mathbf{a}) &= ((f \cdot g)_L)'(0) \\ &= (f_L \cdot g_L)'(0) \\ &= f_L(0) \cdot (g_L)'(0) + (f_L)'(0) \cdot g_L(0) \\ &= f(\mathbf{a}) \cdot D_{\mathbf{v}} g(\mathbf{a}) + D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

■

Eine besondere Rolle spielen die Ableitungen in Richtung der Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Definition. Die Funktion f sei in $\mathbf{a}$ in Richtung des i–ten Einheits–Vektors $\mathbf{e}_i$ differenzierbar. Dann sagt man, f ist in $\mathbf{a}$ nach x_i *partiell differenzierbar*, und die Zahl

$$D_i f(\mathbf{a}) := D_{\mathbf{e}_i} f(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{h}(f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a}))$$

heißt die i–te *partielle Ableitung* von f in $\mathbf{a}$. Statt $D_i f(\mathbf{a})$ kann man auch $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ oder $f_{x_i}(\mathbf{a})$ schreiben.

Wenn alle partiellen Ableitungen von f in $\mathbf{a}$ existieren, dann heißt f in $\mathbf{a}$ *partiell differenzierbar*.

Wie führt man die partielle Differentiation praktisch durch? Sei f in $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ nach x_i partiell differenzierbar. Dann definieren wir

$$f_i : (a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon) \to \mathbb{R}$$

durch

$$f_i(s) := f(\mathbf{a} + (s - a_i) \cdot \mathbf{e}_i) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, s, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} D_i f(\mathbf{a}) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f_i(a_i + t) - f(a_i)}{t} \\ &= f_i'(a_i) \,. \end{aligned}$$

Um also die i–te partielle Ableitung von f in $\mathbf{a}$ auszurechnen, muß man in $f(x_1, \ldots, x_n)$ die Variablen x_j, $j \neq i$, durch die entsprechenden Komponenten a_j von $\mathbf{a}$ ersetzen. Danach hängt die Funktion nur noch von der einen verbliebenen Variablen x_i ab und kann im gewöhnlichen Sinne nach dieser Variablen an der Stelle a_i differenziert werden.

Beispiel.

Sei $f(x, y, z) := x^2 \cdot \cos(yz)$.

Um partiell nach x zu differenzieren, muß man die Variablen y und z festhalten und nur die Funktion $x \mapsto x^2 \cdot \cos(yz)$ betrachten. Also ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x \cdot \cos(yz).$$

Um partiell nach y zu differenzieren, muß man die Variablen x und z festhalten und nur die Funktion $y \mapsto x^2 \cdot \cos(yz)$ betrachten. So erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2 \cdot (-\sin(yz) \cdot z) = -x^2 z \sin(yz)$$

und analog

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -x^2 y \sin(yz).$$

Es sieht so aus, als hätte man die Verallgemeinerung der Differenzierbarkeit auf mehrere Veränderliche gefunden. Aber leider hat die partielle Differenzierbarkeit nicht alle gewünschten Eigenschaften. Sie hat z.B. noch nicht einmal die Stetigkeit der Funktion selbst zur Folge:

Beispiel.

Wir betrachten die Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Die Funktionen $x \mapsto f(x,0) \equiv 0$ und $y \mapsto f(0,y) \equiv 0$ sind sicherlich im Nullpunkt differenzierbar. Also ist f in $\mathbf{0} = (0,0)$ partiell differenzierbar. Andererseits ist f dort nicht stetig:

Wenn man $\mathbf{y}_\nu := ((a_\nu)^2, a_\nu)$ setzt, mit einer Nullfolge (a_ν), so konvergiert diese Folge gegen $(0,0)$, aber es ist

$$\lim_{\nu\to\infty} f(\mathbf{y}_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{(a_\nu)^4}{2(a_\nu)^4} = \frac{1}{2}.$$

Das dürfte nicht passieren, wenn f im Nullpunkt stetig wäre.

Eine weitere Schwäche der partiellen Differenzierbarkeit tritt auf, wenn man höhere Ableitungen betrachtet:

Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : B \to \mathbb{R}$ in allen Punkten von B partiell differenzierbar, so bilden die partiellen Ableitungen $D_i f$ wieder reellwertige Funktionen auf B. Sind sie alle in einem Punkt $\mathbf{a} \in B$ stetig, so nennt man f in $\mathbf{a}$ *stetig partiell differenzierbar.*

Definition. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : B \to \mathbb{R}$ überall partiell differenzierbar und alle partiellen Ableitungen $D_i f$ in einem Punkt $\mathbf{a} \in B$ wiederum partiell differenzierbar. Dann definiert man für $i,j = 1,\ldots,n$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) := D_i(D_j f)(\mathbf{a}).$$

Man nennt diesen Ausdruck die 2–te partielle Ableitung von f nach x_i und x_j an der Stelle $\mathbf{a}$ und schreibt dafür auch $f_{x_i x_j}(\mathbf{a})$.

Beispiel.

Sei $f(x_1, x_2) := e^{k\cdot x_1} \cdot \cos(x_2)$. Dann gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = k \cdot e^{k\cdot x_1} \cdot \cos(x_2) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = -e^{k\cdot x_1} \cdot \sin(x_2),$$

sowie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) = -ke^{ka_1}\sin(a_2).$$

Man kann sich nun fragen, ob man die 2-ten Ableitungen immer miteinander vertauschen kann, ob es also bei höheren partiellen Ableitungen nicht auf die Reihenfolge ankommt. Leider ist das nicht generell der Fall:

Beispiel.

$$\text{Sei} \quad f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Dann gilt für $(x,y) \neq (0,0):$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3y - y^3x}{x^2+y^2}\right) \\ &= \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - (x^3y - y^3x)2x}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}, \end{aligned}$$

also

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y \qquad (\text{für } y \neq 0).$$

Weiter ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0.$$

Also ist sogar $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) \equiv -y$ für alle y und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1.$

Entsprechend erhalten wir für $(x,y) \neq (0,0):$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3y - y^3x}{x^2+y^2}\right) \\ &= \frac{(x^3 - 3y^2x)(x^2+y^2) - (x^3y - y^3x)2y}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \end{aligned}$$

also
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) \equiv x \text{ für } x \neq 0,$$
und
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0.$$
Somit ist $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = +1$.

Zum Glück gilt folgendes hinreichende Kriterium für die Gleichheit der gemischten zweiten Ableitungen:

2.3 Satz von Schwarz. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : B \to \mathbb{R}$ auf ganz B nach allen Variablen partiell differenzierbar, $\mathbf{x}_0 \in B$.*

Wenn die gemischten zweiten Ableitungen $D_i(D_j f)$ und $D_j(D_i f)$ auf einer Umgebung von $\mathbf{x}_0$ in B existieren und in $\mathbf{x}_0$ stetig sind, so ist
$$D_i(D_j f)(\mathbf{x}_0) = D_j(D_i f)(\mathbf{x}_0).$$

Beweis: Es reicht, den Fall $n = 2$ zu betrachten. Wir bezeichnen die Variablen mit x und y und betrachten f in der Nähe eines Punktes (x_0, y_0), wo f stetig partiell differenzierbar ist.

Für kleines k ist $g(x) := f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$ in der Nähe von x_0 differenzierbar. Es gibt also zu jedem hinreichend kleinen h ein c_1 zwischen x_0 und $x_0 + h$, so daß $g(x_0 + h) - g(x_0) = g'(c_1) \cdot h$ ist. Das folgt aus dem 1. Mittelwertsatz.

Nach Voraussetzung ist auch $y \mapsto f_x(c_1, y)$ in der Nähe von y_0 differenzierbar, und es gibt zu jedem hinreichend kleinen k ein c_2 zwischen y_0 und $y_0 + k$, so daß $f_x(c_1, y_0 + k) - f_x(c_1, y_0) = f_{yx}(c_1, c_2) \cdot k$ ist. Zusammen ergibt das:
$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - (f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)) &= \\ &= g(x_0+h) - g(x_0) \\ &= (f_x(c_1, y_0+k) - f_x(c_1, y_0)) \cdot h \\ &= f_{yx}(c_1, c_2) \cdot hk\,. \end{aligned}$$

Analog können wir $h(y) := f(x_0+h, y) - f(x_0, y)$ betrachten. Es gibt ein e_2 zwischen y_0 und $y_0 + k$, so daß $h(y_0 + k) - h(y_0) = h'(e_2) \cdot k$ ist, und es gibt ein e_1 zwischen x_0 und $x_0 + h$, so daß $f_y(x_0 + h, e_2) - f_y(x_0, e_2) = f_{xy}(e_1, e_2) \cdot h$ ist. Das führt zu der Gleichung
$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - (f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)) = f_{xy}(e_1, e_2) \cdot hk.$$

Also ist $f_{yx}(c_1, c_2) = f_{xy}(e_1, e_2)$, und wegen der Stetigkeit der zweiten Ableitungen in (x_0, y_0) erhält man beim Grenzübergang $h \to 0$ und $k \to 0$ die Gleichung $f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$. ∎

Es genügt übrigens schon, daß **eine** der beiden gemischten Ableitungen in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ existiert und in $\mathbf{x}_0$ stetig ist. Dann kann man die Existenz der anderen Ableitung und die Gleichheit beweisen.

Die Bildung der partiellen Ableitung $D_i f$ kann man auch als Anwendung eines „linearen Operators“ D_i auf die Funktion f auffassen.

Man faßt nun gerne die n partiellen Ableitungs–Operatoren zu einem vektoriellen Operator zusammen:

$$\nabla := (D_1, \dots, D_n) \quad \text{(gesprochen: „Nabla“).}$$

Ist $f : B \to \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion, so heißt der Vektor

$$\mathbf{grad}(f)(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}))$$

der *Gradient* von f im Punkt $\mathbf{a}$.

Wir wollen jetzt folgende Situation untersuchen:

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{a} \in B$ und $f : B \to \mathbb{R}$ in der Nähe von $\mathbf{a}$ partiell differenzierbar. Weiter sei $\alpha : I \to B$ ein differenzierbarer Weg, mit $\alpha(t_0) = \mathbf{a}$. Dann kann man f auf das Bild von α einschränken und erhält

$$g := f \circ \alpha : I \to \mathbb{R},$$

also eine reellwertige Funktion von **einer** Veränderlichen! Ist g in t_0 differenzierbar, und wenn ja, wie kann man dann die Ableitung von g berechnen?

Der folgende Satz dient der Vorbereitung der Lösung unseres Problems. Doch zuvor ein paar Worte über konvexe Mengen:

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, falls gilt: Mit je zwei Punkten $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{y}_0$ aus M gehört auch ihre Verbindungsstrecke

$$S(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) := \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0) \ : \ 0 \le t \le 1\}$$

zu M.

Behauptung: Jede (offene oder abgeschlossene) Kugel ist konvex.

BEWEIS: Wir betrachten nur eine offene Kugel B vom Radius r um $\mathbf{0}$. Ist $\mathbf{x}_0 \in B$ und $\mathbf{y}_0 \in B$, so folgt:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0)\| &= \|(1-t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{y_0}\| \\ &\le (1-t) \cdot \|\mathbf{x}_0\| + t \cdot \|\mathbf{y}_0\| \\ &< (1-t)r + tr \ = \ r. \end{aligned}$$

■

2.4 Satz. *Sei $f : U_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar und $\mathbf{x} \in U_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ beliebig. Die Punkte $\mathbf{z}_0, \ldots, \mathbf{z}_n$ seien definiert durch $\mathbf{z}_0 := \mathbf{x}_0$ und $\mathbf{z}_i := \mathbf{z}_{i-1} + (x_i - x_i^{(0)}) \cdot \mathbf{e}_i$ für $i = 1, \ldots, n$.*

Dann liegen alle $\mathbf{z}_i$ und die Verbindungsstrecken von $\mathbf{z}_{i-1}$ nach $\mathbf{z}_i$ in $U_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$, und auf jeder dieser Verbindungsstrecken gibt es einen Punkt $\mathbf{c}_i$, so daß gilt:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{c}_i) \cdot (x_i - x_i^{(0)}) \,.$$

Beweis: Es ist $\mathbf{z}_i = (x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, also $\|\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_0\| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$. Wegen der Konvexität der Kugel liegen auch die Verbindungsstrecken in $U_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$.

Sei $\alpha_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $\alpha_i(t) := x_i^{(0)} + t(x_i - x_i^{(0)})$. Dann ist

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha_i(t), x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = \mathbf{z}_{i-1} + t(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{i-1}) \,.$$

Die Funktion $f_i(s) := f(x_1, \ldots, x_{i-1}, s, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ ist für jedes $t \in [0,1]$ in $\alpha_i(t)$ differenzierbar, und es gilt:

$$f_i \circ \alpha_i(t) = f(\mathbf{z}_{i-1} + t(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{i-1}))$$

und daher

$$(f_i \circ \alpha_i)'(t) = f_i'(\alpha_i(t)) \cdot \alpha_i'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{z}_{i-1} + t(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{i-1})) \cdot (x_i - x_i^{(0)}).$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi_i \in (0,1)$ mit

$$(f_i \circ \alpha_i)'(\xi_i) = f_i(\alpha_i(1)) - f_i(\alpha_i(0)) = f(\mathbf{z}_i) - f(\mathbf{z}_{i-1}) \,.$$

Setzen wir $\mathbf{c}_i := \mathbf{z}_{i-1} + \xi_i(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{i-1})$, so ist

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{c}_i) \cdot (x_i - x_i^{(0)}) &= \sum_{i=1}^{n} (f(\mathbf{z}_i) - f(\mathbf{z}_{i-1})) \\ &= f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \,. \end{aligned}$$

∎

2.5 Folgerung (Spezielle Kettenregel). *Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\alpha : I \to B$ in $t_0 \in I$ differenzierbar und $f : B \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar und in $\mathbf{a} := \alpha(t_0)$ sogar stetig partiell differenzierbar, so ist auch $f \circ \alpha$ in t_0 differenzierbar, und es gilt:*

$$(f \circ \alpha)'(t_0) = \alpha'(t_0) \bullet \nabla f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha(t_0)) \cdot \alpha_i'(t_0).$$

BEWEIS: Wir wählen ein $\varepsilon > 0$, so daß $U_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset B$ ist, und ein $\delta > 0$, so daß $\alpha(t) \in U_\varepsilon$ ist, für $|t - t_0| < \delta$. Nach dem Satz gibt es zu jedem t Punkte $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$ mit $\|\mathbf{c}_i - \mathbf{a}\| \le \|\alpha(t) - \mathbf{a}\|$ und

$$f(\alpha(t)) - f(\alpha(t_0)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{c}_i)(\alpha_i(t) - \alpha_i(t_0)).$$

Teilt man beide Seiten durch $t - t_0$ und läßt man t gegen t_0 gehen, so erhält man die Behauptung. ∎

2.6 Folgerung. *Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : B \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar und in $\mathbf{a} \in B$ sogar stetig partiell differenzierbar, so existieren in $\mathbf{a}$ alle Richtungsableitungen von f, und es ist $D_\mathbf{v} f(\mathbf{a}) = \mathbf{v} \cdot \nabla f(\mathbf{a})^t$.*

BEWEIS: Für einen beliebigen Richtungsvektor $\mathbf{v}$ sei $\alpha(t) := \mathbf{a} + t\mathbf{v}$. Dann ist $f \circ \alpha$ in $t = 0$ differenzierbar, und weil $\alpha'(t) \equiv \mathbf{v}$ ist, folgt:

$$(f \circ \alpha)'(0) = \mathbf{v} \bullet \nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{v} \cdot \nabla f(\mathbf{a})^t.$$

Andererseits ist

$$(f \circ \alpha)'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f \circ \alpha(t) - f \circ \alpha(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t},$$

und das ist die Richtungsableitung $D_\mathbf{v} f(\mathbf{a})$. ∎

Wir können jetzt das Wesen des Gradienten etwas besser ergründen:

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : B \to \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion. Für $c \in \mathbb{R}$ sei

$$F_c := \{\mathbf{x} \in B \mid f(\mathbf{x}) = c\}$$

die entsprechende Niveaumenge von f.

2.7 Satz. *Sei $\mathbf{a} \in B$, $f(\mathbf{a}) = c$ und $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$.*

1. *$\nabla f(\mathbf{a})$ zeigt in die Richtung, in der f am schnellsten wächst.*
2. *Ist $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbarer Weg mit $\alpha(0) = \mathbf{a}$, der ganz in F_c verläuft, so steht $\nabla f(\mathbf{a})$ auf $\alpha'(0)$ senkrecht.*

BEWEIS: 1) Wir betrachten beliebige Vektoren $\mathbf{v}$ mit $\|\mathbf{v}\| = 1$. Zu zeigen ist, daß $D_\mathbf{v} f(\mathbf{a})$ genau dann sein Maximum annimmt, wenn $\mathbf{v}$ in die Richtung des Gradienten zeigt. Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) &= \nabla f(\mathbf{a}) \bullet \mathbf{v} \\ &= \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos\theta, \end{aligned}$$

wobei $\theta \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen $\mathbf{v}$ und $\nabla f(\mathbf{a})$ ist.

Dieser Ausdruck wird genau dann maximal, wenn $\theta = 0$ ist, also $\mathbf{v} = \dfrac{\nabla f(\mathbf{a})}{\|\nabla f(\mathbf{a})\|}$.

2) Verläuft α ganz in F_c, so ist $f \circ \alpha(t) \equiv c$, also

$$0 = (f \circ \alpha)'(0) = \nabla f(\mathbf{a}) \bullet \alpha'(0).$$

∎

Man sagt dann auch, der Gradient steht auf der Niveaumenge senkrecht.

§ 3 Parameterintegrale

In diesem Paragraphen sollen parameterabhängige Integrale der Form

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_a^b f(x_1, \ldots, x_n, t)\, dt$$

mit stetigem f untersucht werden. Gefragt wird nach stetiger und partiell differenzierbarer Abhängigkeit von den Parametern $x_1, \ldots, x_n$. Außerdem werden „Doppelintegrale“ der Form

$$\int_a^b \int_c^d f(s,t)\, dt\, ds$$

untersucht.

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : B \times I \to \mathbb{R}$ stetig.

3.1 Hilfssatz. *Ist $(\mathbf{x}_k)$ eine in B gegen ein $\mathbf{x}_0$ konvergente Punktfolge und $f_k : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_k(t) := f(\mathbf{x}_k, t)$, so konvergiert die Funktionenfolge f_k auf I gleichmäßig gegen $f_0(t) := f(\mathbf{x}_0, t)$.*

Beweis: Die punktweise Konvergenz ist trivial.

Die Menge $Q := \{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbf{x}_0\}$ ist kompakt, und daher auch die Menge $Q \times I$. Also ist $f|_{Q\times I}$ gleichmäßig stetig. Nun sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so daß für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$ und $t \in I$ gilt:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \implies |f(\mathbf{x}, t) - f(\mathbf{y}, t)| < \varepsilon\,.$$

Wählen wir $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß, daß $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\| < \delta$ für $k \geq k_0$ ist, so ist $|f_k(t) - f_0(t)| < \varepsilon$ für $t \in I$ und $k \geq k_0$. ∎

3.2 Satz. *Unter den obigen Voraussetzungen ist* $F(\mathbf{x}) := \int_a^b f(\mathbf{x}, t)\,dt$ *stetig.*

BEWEIS: Sei $\mathbf{x}_0 \in B$ und $(\mathbf{x}_k)$ eine gegen $\mathbf{x}_0$ konvergente Folge. Laut Hilfssatz konvergiert $f_k(t) := f(\mathbf{x}_k, t)$ gleichmäßig gegen $f_0(t) := f(\mathbf{x}_0, t)$.

Nach dem Satz über die Vertauschbarkeit von Integration und gleichmäßiger Konvergenz konvergiert dann

$$F(\mathbf{x}_k) = \int_a^b f_k(t)\,dt \quad \text{gegen} \quad \int_a^b f_0(t)\,dt = F(\mathbf{x}_0).$$

Das bedeutet, daß F in $\mathbf{x}_0$ stetig ist. ∎

3.3 Satz. *Ist* $f(\mathbf{x}, t)$ *auf* $B \times I$ *stetig partiell differenzierbar nach* $x_1, \ldots, x_n$*, so ist* $F(\mathbf{x}) := \int_a^b f(\mathbf{x}, t)\,dt$ *stetig partiell differenzierbar auf* B*, und es gilt für* $i = 1, \ldots, n$*:*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t)\,dt.$$

BEWEIS: O.B.d.A. können wir uns auf den Fall $n = 1$ beschränken.

Sei $x_0 \in B$ und (x_k) eine in B gegen x_0 konvergente Folge. Es sei $x_k \neq x_0$ für alle k. Wir können außerdem annehmen, daß es ein abgeschlossenes Intervall $J \subset B$ gibt, das alle x_k enthält.

Wir setzen $g_k(t) := \dfrac{f(x_k, t) - f(x_0, t)}{x_k - x_0}$ und $g(t) := f_x(x_0, t)$ und zeigen, daß (g_k) auf I gleichmäßig gegen g konvergiert.

Sei $\varepsilon > 0$. Da f_x auf der kompakten Menge $J \times I$ gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß für $(x, t) \in J \times I$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f_x(x, t) - f_x(x_0, t)| < \varepsilon\,.$$

Wir wählen k_0, so daß $|x_k - x_0| < \delta$ für $k \geq k_0$ ist. Nach dem Mittelwertsatz gibt es zu solchen k und zu jedem t ein $c_k(t)$ zwischen x_0 und x_k mit $g_k(t) = f_x(c_k(t), t)$.

Für $k \geq k_0$ ist auch $|c_k(t) - x_0| < \delta$ und daher $|g_k(t) - g(t)| < \varepsilon$, für alle $t \in I$.

Der Satz über die Vertauschbarkeit von Integration und gleichmäßiger Konvergenz liefert nun:

$$\begin{aligned}\frac{F(x_k) - F(x_0)}{x_k - x_0} &= \int_a^b \frac{f(x_k, t) - f(x_0, t)}{x_k - x_0}\,dt \\ &= \int_a^b g_k(t)\,dt\end{aligned}$$

konvergiert gegen $\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)\,dt$. Also ist F in x_0 differenzierbar, und $F'(x_0) = \int_a^b f_x(x_0, t)\,dt$. ∎

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : B \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Sind alle partiellen Ableitungen $D_i f$ wieder partiell differenzierbar, so heißt f zweimal partiell differenzierbar. Induktiv definiert man dann:

f heißt $(k+1)$-mal partiell differenzierbar, falls f k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen

$$D_{i_k}(D_{i_{k-1}}(\dots D_{i_1} f)\dots)), \quad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$$

noch ein weiteres Mal partiell differenzierbar sind.

f heißt k-mal stetig partiell differenzierbar, falls f k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ stetig sind.

3.4 Folgerung. *Mit den Bezeichnungen des obigen Satzes gilt:*

Ist f r-mal stetig partiell differenzierbar, so ist auch F r-mal stetig partiell differenzierbar, und man kann Differentiationen bis zur Ordnung r mit dem Integral vertauschen.

Beweis: Induktion nach r. ∎

Wir betrachten nun eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Rechteck,

$$f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}.$$

Dann sind die Funktionen

$$F_1(s) := \int_c^d f(s,t)\,dt \quad \text{bzw.} \quad F_2(t) := \int_a^b f(s,t)\,ds$$

stetig und daher wieder integrierbar. Überraschenderweise gilt:

3.5 Satz (Fubini).

$$\int_a^b \int_c^d f(s,t)\,dt\,ds = \int_c^d \int_a^b f(s,t)\,ds\,dt.$$

Beweis: Für $c \leq \tau \leq d$ sei $g(s, \tau) := \displaystyle\int_c^\tau f(s,t)\,dt$. Diese Funktion ist nach dem Satz über die Stetigkeit von Parameterintegralen für jedes feste τ eine stetige Funktion von s, und nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist g für festes $s \in [a, b]$ nach τ stetig partiell differenzierbar, mit

$$\frac{\partial g}{\partial \tau}(s, \tau) = f(s, \tau).$$

Also können wir den Satz über die Differenzierbarkeit von Parameterintegralen anwenden:

$$\varphi(\tau) := \int_a^b g(s,\tau)\,ds = \int_a^b \left(\int_c^\tau f(s,t)\,dt \right)\,ds$$

ist stetig differenzierbar, mit

$$\varphi'(\tau) = \int_a^b f(s,\tau)\,ds.$$

Nun ist

$$\varphi(c) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(d) = \int_a^b \int_c^d f(s,t)\,dt\,ds,$$

also

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_a^b f(s,t)\,ds\,dt &= \int_c^d \varphi'(t)\,dt \\ &= \varphi(d) - \varphi(c) \\ &= \int_a^b \int_c^d f(s,t)\,dt\,ds. \end{aligned}$$

∎

Beispiele.

1. Wir betrachten $f(x,y) := x^y$ auf $[0,1] \times [a,b]$, mit $0 < a < b$. Die Voraussetzungen des Satzes von Fubini sind erfüllt. Die rechte Seite ist leicht ausgerechnet:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_0^1 x^y\,dx\,dy &= \int_a^b \left(\frac{1}{y+1} x^{y+1} \Big|_{x=0}^{x=1} \right)\,dy \\ &= \int_a^b \frac{1}{y+1}\,dy \\ &= \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right). \end{aligned}$$

Die linke Seite führt auf ein komplizierteres Integral:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_a^b x^y\,dy\,dx &= \int_0^1 \left(\int_a^b e^{y\cdot\ln x}\,dy \right)\,dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{\ln x} e^{y\cdot\ln x} \Big|_{y=a}^{y=b} \right)\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx. \end{aligned}$$

Das ist ein uneigentliches Integral, bei dem nicht sofort klar ist, wie man es ausrechnen sollte. Mit Hilfe des Satzes von Fubini haben wir jedoch schon den Wert!

2. Die Funktion
$$f(x,y) := \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
ist auf $[0,1] \times [0,1] \setminus \{(0,0)\}$ definiert, aber im Nullpunkt nicht mehr stetig. Der Satz von Fubini kann nicht angewandt werden, aber dennoch existieren die iterierten Integrale:

Ist $(x,y) \neq (0,0)$, so existieren die Funktionen
$$F_1(x,y) := \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad F_2(x,y) := \frac{-y}{x^2+y^2}\,,$$
mit
$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,.$$
Für $y > 0$ ist daher
$$\int_0^1 f(x,y)\,dx = \frac{x}{x^2+y^2}\,\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1+y^2}$$
und
$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy = \arctan(y)\,\Big|_{y=0}^{y=1} = \arctan(1) \;=\; \frac{\pi}{4}.$$
Andererseits ist
$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\,\Big|_{y=0}^{y=1} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{-1}{1+x^2}\,dx \\ &= -\arctan(x)\,\Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= -\arctan(1) \;=\; -\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Es ist also gefährlich, bei mehrfachen Integralen einfach so drauf los zu integrieren!!

Statt eines Doppelintegrals kann man auch mehrfache Integrale betrachten:

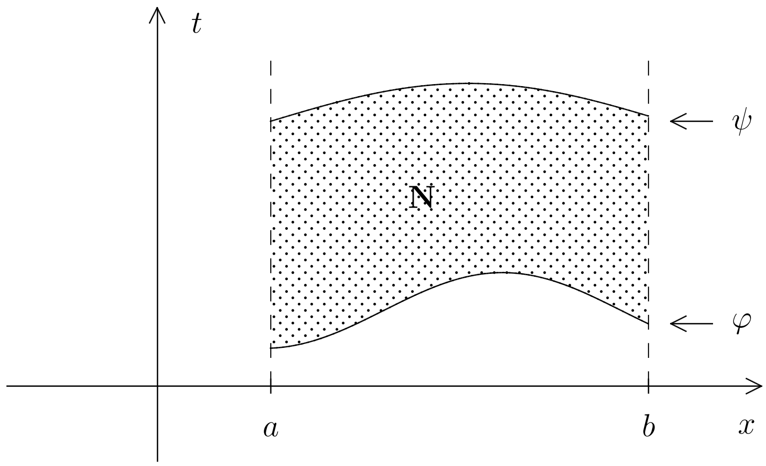
Ist $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert das iterierte Integral
$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_n \,\ldots\, dx_2\,dx_1.$$
Mit dem Satz von Fubini und einem Induktionsbeweis kann man zeigen, daß der Wert des Integrals nicht von der Reihenfolge der Integrationen abhängt.

Jetzt wollen wir noch eine etwas kompliziertere Situation betrachten:

Es seien $\varphi, \psi : I := [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit $\varphi \le \psi$. Die Menge

$$N := \{(x, t) \in I \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \le t \le \psi(x)\}$$

nennt man einen *Normalbereich* (bezüglich der x-Achse).



Nun sei U eine offenen Umgebung der Menge N im $\mathbb{R}^2$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige und nach der ersten Variablen stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann gilt:

3.6 Satz (Leibnizsche Formel). $F(x) := \displaystyle\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t)\, dt$ *ist auf* $[a, b]$ *differenzierbar, mit*

$$F'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt + f(x, \psi(x))\psi'(x) - f(x, \varphi(x))\varphi'(x).$$

BEWEIS: Sei $c \le \varphi(x) \le \psi(x) \le d$ auf I. Die Funktion $g(x, \tau) := \displaystyle\int_c^\tau f(x, t)\, dt$ ist nach τ und nach x stetig partiell differenzierbar. Also ist

$$\widetilde{F}(x, u, v) := \int_u^v f(x, t)\, dt = g(x, v) - g(x, u)$$

nach allen drei Variablen stetig differenzierbar. Außerdem ist

$$F(x) = \widetilde{F}(x, \varphi(x), \psi(x)).$$

Die Anwendung der speziellen Kettenregel ergibt:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial u}(x, \varphi(x), \psi(x))\varphi'(x) + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial v}(x, \varphi(x), \psi(x))\psi'(x) \\ &= \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) - \frac{\partial g}{\partial u}(x, \varphi(x))\varphi'(x) + \frac{\partial g}{\partial v}(x, \psi(x))\psi'(x) \\ &= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt - f(x, \varphi(x))\varphi'(x) + f(x, \psi(x))\psi'(x). \end{aligned}$$

■

Als nächstes betrachten wir ein Beispiel aus der Variationsrechnung. Sei $I = [a, b]$ und $\mathcal{L} : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. In der Physik würde man $\mathcal{L}$ als *Lagrange-Funktion* bezeichnen. Untersucht wird das „Funktional"

$$S[\varphi] := \int_a^b \mathcal{L}(t, \varphi(t), \varphi'(t))\, dt\,,$$

das auf der Menge $K := \{\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b]) \,:\, \varphi(a) = c_1 \text{ and } \varphi(b) = c_2\}$ definiert ist, mit Konstanten c_1 und c_2. Es gibt viele Situationen, wo es darum geht, ein φ zu finden, für das $S[\varphi]$ minimal wird.

3.7 Satz (Eulersche Gleichung). *Notwendig dafür, daß $S[\varphi]$ minimal ist, ist die Gültigkeit der Gleichung*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t))\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \equiv 0\,.$$

Beweis: Sei $S[\varphi] \le S[\psi]$ für alle $\psi \in K$, und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $g(a) = g(b) = 0$. Dann liegt auch $\varphi + \varepsilon g$ in K, für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$, und es ist $S[\varphi] \le S[\varphi + \varepsilon g]$.

Das bedeutet, daß $F(\varepsilon) := S[\varphi + \varepsilon g]$ bei $\varepsilon = 0$ ein Minimum besitzt. Nach den Sätzen über Parameter-Integrale hängt F differenzierbar von ε ab, und es muß natürlich $F'(0) = 0$ sein. Aber mit $\mathbf{x}(t, \varepsilon) := (t, \varphi(t) + \varepsilon\varphi(t), \varphi'(t) + \varepsilon\varphi'(t))$ gilt:

$$\begin{aligned} F'(0) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\mathcal{L}(t, \varphi(t) + \varepsilon g(t), \varphi'(t) + \varepsilon g'(t))\, dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(\mathbf{x}(t, \varepsilon))g(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(\mathbf{x}(t, \varepsilon))g'(t)\right)\, dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(\mathbf{x}(t, \varepsilon)) - \frac{d}{dt}[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(\mathbf{x}(t, \varepsilon))]\right) g(t)\, dt. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt ergibt sich durch partielle Integration. Setzen wir $f(t) := \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(\mathbf{x}(t, \varepsilon)) - \dfrac{d}{dt}[\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(\mathbf{x}(t, \varepsilon))]$, so haben wir zu zeigen, daß $f(t) \equiv 0$ ist. Angenommen, es gibt ein $t_0 \in (a, b)$ mit $f(t_0) \neq 0$, etwa sei $f(t_0) =: r > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so daß $f(t) > r/2$ für $|t - t_0| < \delta$ ist.

Wie wir anschließend sehen werden, können wir g so wählen, daß $g(t) > 0$ für $|t - t_0| < \delta$ ist, und sonst überall $= 0$.

Das führt zu der Gleichung

$$0 = \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} f(t)g(t)\, dt \ge \frac{r}{2}\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} g(t)\, dt > 0\,.$$

Das ist ein Widerspruch, es muß wirklich $f(t) \equiv 0$ sein. ■

3.8 Lemma. *Ist $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$, so gibt es eine beliebig oft differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ positiv und sonst überall $= 0$ ist.*

BEWEIS: Die Funktion

$$h(x) := \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \le 0 \end{cases}$$

ist beliebig oft differenzierbar und > 0 genau dann, wenn $x > 0$ ist. Also ist für $c > 0$ die Funktion $h_c(x) := h(c + x) \cdot h(c - x)$ auch beliebig oft differenzierbar, und > 0 genau dann, wenn $-c < x < c$ ist.

Die Funktion $g(t) := h_\delta(t - t_0)$ leistet das Gewünschte. ■

Bemerkungen.

1. Die Gültigkeit der Eulerschen Gleichung sagt nichts darüber aus, ob wirklich ein Minimum vorliegt. Das muß man stets mit zusätzlichen Mitteln untersuchen. Wenn überhaupt kein Minimum existiert, kann es auch sein, daß die Eulersche Gleichung keine Lösung hat.

2. Meistens arbeitet man mit einer Lagrange-Funktion $\mathcal{L} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und variiert Wege $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit festem Anfangspunkt $\mathbf{a} = \alpha(a)$ und festem Endpunkt $\mathbf{b} = \alpha(b)$. Wenn das Funktional

$$S[\alpha] := \int_a^b \mathcal{L}(t, \alpha(t), \alpha'(t))\, dt$$

bei einem Weg α sein Minimum annimmt, müssen notwendigerweise die Eulerschen Gleichungen gelten:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i}(t, \alpha(t), \alpha'(t))\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(t, \alpha(t), \alpha'(t)) \equiv 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

Ein Beispiel werden wir später kennenlernen.

§ 4 Die Bogenlänge

Ein *Weg* ist bekanntlich eine stetige Abbildung $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Einen stückweise stetig differenzierbaren Weg nennen wir einen *Integrationsweg*. $\alpha(a)$ ist der *Anfangspunkt* und $\alpha(b)$ der *Endpunkt* des Weges. Ist $\alpha(a) = \alpha(b)$, so nennt man den Weg *geschlossen*. Die Bildmenge $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir als *Spur* von α. Manchmal schreiben wir dafür auch $|\alpha|$.

α heißt *glatt*, falls α auf ganz $I := [a, b]$ stetig differenzierbar und $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in I$ ist.

Beispiele.

1. Sei $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor $\neq \mathbf{0}$. Dann ist die *Gerade*

$$\alpha(t) := \mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{v}, \text{ für } t \in \mathbb{R},$$

ein glatter Weg, und der *Kreis*

$$\alpha(t) := \mathbf{x}_0 + (r\cos t, r\sin t), \text{ für } t \in [0, 2\pi]$$

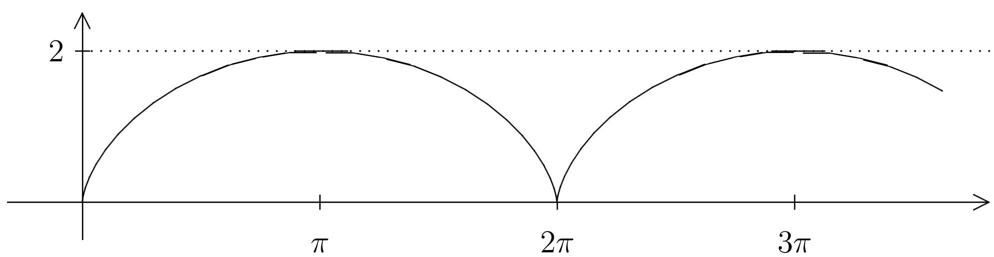
ist ein geschlossener glatter Weg.

2. Der Weg

$$\alpha(t) := (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

wird als *Zykloide* bezeichnet. Es ist $\alpha'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$, und das wird genau dann Null, wenn $\cos(t) = 1$ ist, also bei $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Das bedeutet, daß α an diesen Stellen nicht glatt ist. Bei den Punkten $(2k\pi, 0)$ treten Ecken auf.

Ansonsten ist α glatt. Die y-Komponente $\alpha_2(t)$ nimmt jeweils bei $t = (2k+1)\pi$ ein Maximum an, ansonsten bewegen sich die Werte zwischen 0 und 2.



Sind I, J zwei Intervalle, so nennt man eine k-mal stetig differenzierbare bijektive Abbildung $\varphi : I \to J$ eine *$\mathcal{C}^k$-Parametertransformation*. Ist φ streng monoton wachsend, so nennt man φ *orientierungstreu*.

Zwei k-mal stetig differenzierbare Wege $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ und $\beta : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ heißen äquivalent, falls es eine orientierungstreue $\mathcal{C}^k$-Parametertransformation $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ mit $\alpha \circ \varphi = \beta$ gibt. Es handelt sich dabei wirklich um eine Äquivalenzrelation:

1. Wegen $\alpha \circ \mathrm{id} = \alpha$ ist jeder Weg zu sich selbst äquivalent.

2. Ist $\alpha \circ \varphi = \beta$, so ist $\beta \circ \varphi^{-1} = \alpha$. Weil mit φ auch φ^{-1} eine orientierungstreue Parametertransformation ist, ist die Relation symmetrisch.

3. Ist $\alpha \circ \varphi = \beta$ und $\beta \circ \psi = \gamma$, so ist $\alpha \circ (\varphi \circ \psi) = \gamma$. Das ergibt die Transitivität.

Eine Äquivalenzklasse von $\mathcal{C}^k$-Wegen nennt man eine *$\mathcal{C}^k$-Kurve*.

Die Parametertransformation $\sigma : [a, b] \to [a, b]$ mit $\sigma(t) := a + b - t$ ändert die Orientierung. Ist $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, so sind α und $\alpha \circ \sigma$ nicht äquivalent.

Bezeichnen wir die Äquivalenzklasse von α mit C, so wird die Klasse von $\alpha \circ \sigma$ mit $-C$ bezeichnet. Wir sprechen von der umgekehrt durchlaufenen Kurve.

Sind $\alpha_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\alpha_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ die Parametrisierungen zweier Kurven C_1 und C_2 mit $\alpha_1(b) = \alpha_2(c)$, so kann man die Kurven hintereinander durchlaufen, mit Hilfe der Parametrisierung $\gamma : [a, b+d-c] \to \mathbb{R}^n$, die durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} \alpha_1(t) & \text{für } a \le t \le b \\ \alpha_2(t-b+c) & \text{für } b \le t \le b+d-c \end{cases}$$

definiert wird. Die Äquivalenzklasse von γ wird dann mit $C_1 + C_2$ bezeichnet. Man beachte aber, daß diese Summation nicht kommutativ ist!

Eine Kurve C heißt *regulär*, wenn sie eine glatte Parametrisierung besitzt. Sie heißt *stückweise regulär*, wenn es eine Zerlegung $C = C_1 + \cdots + C_N$ mit regulären Kurven C_i gibt. Sie besitzt dann eine stückweise stetig differenzierbare Parametrisierung, wird also durch einen Integrationsweg parametrisiert.

Definition. Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg. Dann definiert man die *Länge* von α durch

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt.$$

Es ist nicht klar, warum man so die Weglänge definieren kann. Das wollen wir noch etwas genauer untersuchen.

Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein **stetiger** Weg. Wir betrachten Zerlegungen $\mathfrak{Z} = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ von $[a,b]$ und bilden die Summen

$$\Lambda(\mathfrak{Z}, \alpha) := \sum_{i=1}^{N} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|,$$

sowie $\Lambda(\alpha) := \sup\limits_{\mathfrak{Z}} \Lambda(\mathfrak{Z}, \alpha)$. Der Weg α heißt *rektifizierbar*, falls $\Lambda(\alpha) < \infty$ ist. Anschaulich ist $\Lambda(\mathfrak{Z}, \alpha)$ die Länge eines Polygonzuges, der α approximiert, und für einen rektifizierbaren Weg kann man $\Lambda(\alpha)$ sicherlich als Weglänge interpretieren.

4.1 Satz. *Ist α stetig differenzierbar, so ist α rektifizierbar und $\Lambda(\alpha) = L(\alpha)$.*

BEWEIS: Für eine spezielle Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ von $[a,b]$ gilt:

$$\begin{aligned} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| &= \|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha'(t)\, dt\| \\ &\le \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(t)\|\, dt. \end{aligned}$$

Der Beweis der letzten Ungleichung sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

Dann ist auf jeden Fall $\Lambda(\mathfrak{Z}, \alpha) \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt$ für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$, und daher auch $\Lambda(\alpha) \leq L(\alpha)$.

Um die umgekehrte Ungleichung zu zeigen, geben wir uns ein $\varepsilon > 0$ vor. Da α' als stetige (vektorwertige) Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ sogar gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft:

$$\text{Ist } |s - t| < \delta, \text{ so ist } \|\alpha'(s) - \alpha'(t)\| < \varepsilon.$$

Sei nun $\mathfrak{Z} = \{t_0, \ldots, t_N\}$ eine Zerlegung, so daß $|t_i - t_{i-1}| < \delta$ für alle i ist. Dann gilt für jedes $t \in [t_{i-1}, t_i]$

$$\|\alpha'(t)\| = \|\alpha'(t_i) + (\alpha'(t) - \alpha'(t_i))\| \leq \|\alpha'(t_i)\| + \varepsilon.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(t)\|\,dt &\leq (\|\alpha'(t_i)\| + \varepsilon) \cdot (t_i - t_{i-1}) \\
&= \|\alpha'(t_i)(t_i - t_{i-1})\| + \varepsilon(t_i - t_{i-1}) \\
&= \|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\alpha'(t) + (\alpha'(t_i) - \alpha'(t)))\,dt\| + \varepsilon(t_i - t_{i-1}) \\
&\leq \|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha'(t)\,dt\| + \|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\alpha'(t_i) - \alpha'(t))\,dt\| + \varepsilon(t_i - t_{i-1}) \\
&\leq \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| + 2\varepsilon(t_i - t_{i-1}).
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt &\leq \Lambda(\mathfrak{Z}, \alpha) + 2\varepsilon(b - a) \\
&\leq \Lambda(\alpha) + 2\varepsilon(b - a).
\end{aligned}$$

Wir können ε gegen Null gehen lassen und erhalten $L(\alpha) \leq \Lambda(\alpha)$. ∎

Beispiele.

1. Die Verbindungsstrecke zweier Punkte $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ ist gegeben durch $\alpha(t) := (1 - t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2$, für $0 \leq t \leq 1$. Es ist $\alpha'(t) \equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, also

   $$L(\alpha) = \int_0^1 \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|\,dt = \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|.$$

   Das ist genau das, was man erwartet.

2. Bei der Kreislinie $\alpha(t) := (r\cos t, r\sin t)$ ist $\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$ und $\|\alpha'(t)\| = r$, also

   $$L(\alpha) = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r.$$

3. Bei der Zykloide $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ist $\alpha'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$, also $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2 - 2\cos(t)}$. Nun ist

$$\cos t = \cos(2 \cdot \frac{t}{2}) = \cos^2(\frac{t}{2}) - \sin^2(\frac{t}{2}) = 1 - 2\sin^2(\frac{t}{2}),$$

also

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2 - (2 - 4\sin^2(\frac{t}{2}))} = 2|\sin(\frac{t}{2})|.$$

Daher ergibt sich für einen Zykloidenbogen (von $t = 0$ bis $t = 2\pi$):

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= 2\int_0^{2\pi} |\sin(\frac{t}{2})|\,dt \\ &= 4\int_0^{2\pi} |\sin x(t)| x'(t)\,dt \qquad (\text{mit } x(t) := \frac{t}{2}\,) \\ &= 4\int_0^{\pi} |\sin x|\,dx \\ &= 4 \cdot (-\cos x)\,\Big|_0^{\pi} = 8. \end{aligned}$$

Es ist bemerkenswert, daß man als Ergebnis eine rationale Zahl erhält!

4. Sei $\alpha(t) := (a\cos t, b\sin t)$ die Ellipse mit den Halbachsen a und b, und $a > b$. Dann ist $\alpha'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$ und $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$. Also erhält man als Länge des Ellipsenbogens das Integral

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt \\ &= a\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2}\cos^2 t}\,dt \\ &= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2\cos^2 t}\,dt, \end{aligned}$$

mit $k := \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$. Ein Integral dieses Typs nennt man ein *Elliptisches Integral*. Es ist nicht elementar lösbar, man muß es numerisch auswerten.

5. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist $\alpha(t) := (t, f(t))$ eine Kurve, deren Spur der Graph von f ist. Es ist $\alpha'(t) = (1, f'(t))$, also

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}.$$

Damit ist

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\,dt.$$

Wir beschreiben nun die Weglänge mit Hilfe der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

die durch

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{y}\| = \big((y_1)^2 + \cdots + (y_n)^2\big)^{1/2} \ .$$

gegeben wird. Dann ist $L(\alpha) = \int_a^b \mathcal{L}(t, \alpha(t), \alpha'(t))\,dt$ die Länge eines beliebigen glatten Weges $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Wir suchen den kürzesten Weg, der $\mathbf{x}_1 := \alpha(a)$ mit $\mathbf{x}_2 := \alpha(b)$ verbindet. Wenn es einen solchen Weg gibt, muß er die Eulerschen Gleichungen erfüllen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i}(t, \alpha(t), \alpha'(t))\right) \equiv 0, \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Da $\mathcal{L}_{y_i}(t, \alpha(t), \alpha'(t)) = \alpha_i'(t)/\|\alpha'(t)\|$ ist, bedeutet das, daß $\alpha'(t)/\|\alpha'(t)\|$ konstant ist. Es gibt also einen festen Vektor $\mathbf{v}$ und eine positive stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, so daß $\alpha'(t) = f(t) \cdot \mathbf{v}$ ist. Integration liefert:

$$\alpha(t) = \alpha(a) + g(t) \cdot \mathbf{v},$$

mit einer streng monoton wachsenden stetig differenzierbaren Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dabei ist $g(a) = 0$ und $g(b) = \int_a^b f(t)\,dt$. Bis auf die durch g gegebene Parametertransformation stimmt α also mit der Geraden $t \mapsto \alpha(a) + t \cdot \mathbf{v}$ überein, für $0 \le t \le g(b)$.

Daß die Verbindungsstrecke wirklich der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist, sieht man sehr leicht, denn jeder verbindende Polygonzug ist länger (wegen der Dreiecksungleichung). Die Variationsrechnung wird vor allem dann gebraucht, wenn die Wege zusätzliche Bedingungen erfüllen sollen.

Ist $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein **glatter** Weg, so definiert man

$$s_\alpha(t) := \int_a^t \|\alpha'(\tau)\|\,d\tau, \text{ für } a \le t \le b.$$

Diese Bogenlängenfunktion ist stetig differenzierbar mit Ableitung $s_\alpha'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$. Also ist $s_\alpha : [a,b] \to [0, L(\alpha)]$ streng monoton wachsend und damit eine Parametertransformation.

$$\widetilde{\alpha} := \alpha \circ (s_\alpha)^{-1} : [0, L(\alpha)] \to \mathbb{R}^n$$

ist somit eine zu α äquivalente Parametrisierung. Sie heißt die *Parametrisierung nach der Bogenlänge* oder auch die *ausgezeichnete Parametrisierung* der durch α bestimmten Kurve. Es ist

$$\widetilde{\alpha}'(s) = \alpha'(s_\alpha^{-1}(s)) \cdot (s_\alpha^{-1})'(s) = \frac{\alpha'(s_\alpha^{-1}(s))}{s_\alpha'(s_\alpha^{-1}(s))} = \frac{\alpha'(s_\alpha^{-1}(s))}{\|\alpha'(s_\alpha^{-1}(s))\|}.$$

Das bedeutet, daß $\|\widetilde{\alpha}'(s)\| \equiv 1$ ist, und es folgt, daß der Parameter der ausgezeichneten Parametrisierung (der traditionsgemäß immer mit s bezeichnet wird) jeweils der gerade zurückgelegten Weglänge entspricht. Wenn $\|\alpha'(t)\| \equiv 1$ ist, so muß α schon die ausgezeichnete Parametrisierung sein.

Theoretisch kann jede reguläre Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert werden, aber praktisch ist das meist nicht durchführbar. Schon beim Ellipsenbogen ist dafür die Berechnung eines elliptischen Integrals erforderlich.

Definition. Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein glatter Weg. Dann nennt man

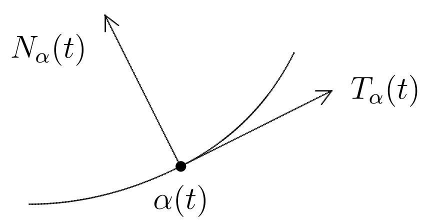
$$T_\alpha(t) := \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

den *Tangenteneinheitsvektor* von α in t.

Ist $n = 2$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ und $D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch $D(u, v) := (-v, u)$ gegebene Drehung, so nennt man

$$N_\alpha(t)) := D(T_\alpha(t)) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \cdot (-\alpha_2'(t), \alpha_1'(t))$$

den *Normaleneinheitsvektor* von α in t.



Sei jetzt α eine mindestens zweimal stetig differenzierbare ausgezeichnet parametrisierte ebene Kurve. Dann ist $T_\alpha(s) = \alpha'(s)$ differenzierbar, und weil $T_\alpha(s) \bullet T_\alpha(s) \equiv 1$ ist, ergibt Differenzieren nach t:

$$T_\alpha'(s) \bullet T_\alpha(s) \equiv 0.$$

Das bedeutet, daß $T_\alpha'(s)$ ein Vielfaches von $N_\alpha(s)$ ist. Der Proportionalitätsfaktor $\kappa_\alpha(s)$ in der Gleichung

$$T_\alpha'(s) = \kappa_\alpha(s) \cdot N_\alpha(s)$$

wird als *Krümmung* von α bei s bezeichnet. Eine genauere Deutung soll hier nicht vorgenommen werden. Man beachte aber, daß für diese Definition der Krümmung unbedingt die ausgezeichnete Parametrisierung benutzt werden muß.

Beispiele.

1. Sei $\alpha(t) := \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$ mit $\|\mathbf{v}\| = 1$. Dann ist $\alpha'(t) \equiv \mathbf{v}$, also α ausgezeichnet parametrisiert. Weiter ist $T_\alpha'(t) \equiv 0$ und sicherlich $N_\alpha(t) \neq 0$, also $\kappa_\alpha(t) \equiv 0$.

2. Die ausgezeichnete Parametrisierung eines Kreises vom Radius r um $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ ist gegeben durch
$$\alpha(t) = (x_0 + r\cos(\frac{t}{r}), y_0 + r\sin(\frac{t}{r})).$$
Tatsächlich ist dann $\alpha'(t) = (-\sin(t/r), \cos(t/r))$, also
$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t/r) + \cos^2(t/r)} = 1.$$
Somit ist
$$T'_\alpha(t) = -\frac{1}{r} \cdot (\cos(t/r), \sin(t/r)) \quad \text{und} \quad N_\alpha(t) = (-\cos(t/r), -\sin(t/r)).$$
Als Krümmung ergibt sich in diesem Falle $\kappa_\alpha(t) = 1/r$. Die Krümmung wird um so kleiner, je größer der Radius ist, und so entspricht es ja auch der Anschauung.

Definition. Eine **offene** Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ heißt *zusammenhängend*, falls gilt: Zu je zwei Punkten $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ aus B gibt es einen stetigen Weg $\alpha : [0,1] \to B$ mit $\alpha(0) = \mathbf{x}$ und $\alpha(1) = \mathbf{y}$.

Für abgeschlossene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ oder gar beliebige metrische Räume ist der Begriff „zusammenhängend“ etwas komplizierter zu definieren. Darauf wollen wir hier nicht weiter eingehen.

4.2 Satz. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende offene Menge. Ist $U \subset B$ offen und nicht-leer und $B \setminus U$ ebenfalls offen, so muß $U = B$ sein.*

BEWEIS: Sei $\mathbf{x}_0 \in U$ und $\mathbf{y}_0 \in B$ ein beliebiger Punkt. Es gibt einen stetigen Weg $\alpha : [0,1] \to B$ mit $\alpha(0) = \mathbf{x}_0$ und $\alpha(1) = \mathbf{y}_0$. Dann setzen wir
$$t_0 := \sup\{t \in [0,1] \,:\, \alpha(t) \in U\}.$$
Offensichtlich ist $0 < t_0 \leq 1$, und es gibt eine Folge von Zahlen $t_\nu < t_0$ mit $\lim_{\nu\to\infty} t_\nu = t_0$ und $\alpha(t_\nu) \in U$.

Würde $\mathbf{z}_0 := \alpha(t_0)$ in der offenen Menge $B \setminus U$ liegen, so wäre t_0 ein innerer Punkt von $\alpha^{-1}(B \setminus U)$. Das widerspricht der Existenz der Zahlen t_ν. Also liegt $\mathbf{z}_0$ in U. Ist $t_0 < 1$, so gibt es Zahlen t mit $t_0 < t < 1$ und $\alpha(t) \in U$. Das widerspricht der Tatsache, daß t_0 als Supremum definiert wurde. Also ist $t_0 = 1$ und damit $\mathbf{y}_0 \in U$.
■

4.3 Satz. *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende offene Menge. Dann lassen sich je zwei Punkte von B durch einen Streckenzug in B verbinden.*

BEWEIS: Sei $\mathbf{x}_0 \in B$ ein fester Punkt und

$$U := \{\mathbf{y} \in B \,:\, \mathbf{x}_0 \text{ und } \mathbf{y} \text{ lassen sich in } B \text{ durch einen Streckenzug verbinden}\}.$$

Offensichtlich ist U nicht leer. Liegt $\mathbf{y}$ in U, so wählen wir ein $\varepsilon > 0$, so daß $U_\varepsilon(\mathbf{y}) \subset B$ ist. Da jeder Punkt von $U_\varepsilon(\mathbf{y})$ durch eine Strecke mit $\mathbf{y}$ verbunden werden kann, gehört die ganze ε-Umgebung zu U. Das bedeutet, daß U offen ist.

Wenn $\mathbf{y}$ in $B \setminus U$ liegt, wählen wir ebenfalls eine ε-Umgebung um $\mathbf{y}$, die noch ganz in B liegt. Könnte irgend ein Punkt $\mathbf{x} \in U_\varepsilon(\mathbf{y})$ mit $\mathbf{x}_0$ durch einen Streckenzug verbunden werden, so könnte man diesen Weg durch die Strecke von $\mathbf{x}$ nach $\mathbf{y}$ verlängern, und $\mathbf{y}$ müßte in U liegen. Das wäre ein Widerspruch. Das bedeutet, daß auch $B \setminus U$ offen ist.

Nach dem vorigen Satz ist dann $U = B$. ∎

§ 5 Pfaffsche Formen und Kurvenintegrale

Definition. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : B \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Dann nennt man F auch ein *(stetiges) Vektorfeld* auf B.

Bemerkung. Man soll sich ein Vektorfeld so vorstellen, daß in jedem Punkt $\mathbf{x} \in B$ ein Vektor $F(\mathbf{x})$ angeheftet ist. Deshalb sollte man ein Vektorfeld eigentlich als ein Paar von Abbildungen

$$\mathbf{F} := (\mathrm{id}, F) : B \to B \times \mathbb{R}^n$$

einführen. Dann wird $F(\mathbf{x})$ als *Richtungskomponente* und $\mathbf{x}$ als *Ortskomponente* bezeichnet. Aus Bequemlichkeit haben wir hier die Ortskomponente weggelassen.

Vektorfelder können addiert und mit stetigen Funktionen multipliziert werden:

$$\begin{array}{rrcl} & (F_1 + F_2)(\mathbf{x}) & := & F_1(\mathbf{x}) + F_2(\mathbf{x}) \\ \text{und} & (f \cdot F)(\mathbf{x}) & := & f(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{x}). \end{array}$$

Definition. Eine 1-*Form* oder *Pfaffsche Form* auf B ist eine stetige Abbildung

$$\omega : B \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

die linear im zweiten Argument ist.

Beispiele.

1. Sei F ein stetiges Vektorfeld auf B. Dann ist $\omega_F : B \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

   $$\omega_F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := F(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v}$$

   eine Pfaffsche Form auf B.

2. Ist $f : B \to \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion, so wird das *totale Differential* $df : B \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$df(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v}.$$

Einen Spezialfall stellen die Differentiale dx_i dar, für $i = 1, \ldots, n$. Es ist

$$dx_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{e}_i \bullet \mathbf{v} = v_i\,.$$

Ist f eine stetige Funktion und ω eine Pfaffsche Form, so ist das Produkt $f \cdot \omega$ definiert durch

$$(f \cdot \omega)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := f(\mathbf{x}) \cdot \omega(\mathbf{x}, \mathbf{v})\,.$$

Das ist wieder eine Pfaffsche Form.

5.1 Satz. *Sei ω eine Differentialform auf B. Dann gibt es eindeutig bestimmte stetige Funktionen $\omega_1, \ldots, \omega_n$ auf B, so daß gilt:*

$$\omega = \omega_1 \cdot dx_1 + \cdots + \omega_n \cdot dx_n.$$

BEWEIS: Wir beginnen mit der Eindeutigkeit: Ist eine Darstellung der gewünschten Art gegeben, so folgt:

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) &= \omega_1(\mathbf{x}) \cdot dx_1(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) + \cdots + \omega_n(\mathbf{x}) \cdot dx_n(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) \\ &= \omega_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_j + \cdots + \omega_n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_n \bullet \mathbf{e}_j \\ &= \omega_j(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Um die Existenz der Darstellung zu erhalten, setzen wir $\omega_0 := \omega_1\, dx_1 + \cdots + \omega_n\, dx_n$, mit $\omega_j(\mathbf{x}) := \omega(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \omega_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) &= \omega_1(\mathbf{x}) \cdot dx_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \cdots + \omega_n(\mathbf{x}) \cdot dx_n(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \\ &= \omega(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) \cdot v_1 + \cdots + \omega(\mathbf{x}, \mathbf{e}_n) \cdot v_n \\ &= \omega(\mathbf{x}, v_1\mathbf{e}_1 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n) \;=\; \omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \end{aligned}$$

also $\omega = \omega_0$. ∎

Ist $F = (F_1, \ldots, F_n)$ ein Vektorfeld, so ist $\omega_F(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) = F(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{e}_j = F_j(\mathbf{x})$, also

$$\omega_F = F_1\, dx_1 + \cdots + F_n\, dx_n\,.$$

Das bedeutet, daß jede Pfaffsche Form die Gestalt ω_F (mit einem Vektorfeld F) besitzt.

Ist f stetig partiell differenzierbar, so ist $df(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) = D_{\mathbf{e}_j} f(\mathbf{x}) = f_{x_j}(\mathbf{x})$, also

$$df = f_{x_1}\, dx_1 + \cdots + f_{x_n}\, dx_n\,.$$

Ist A ein stetiges Vektorfeld auf B und $\omega : B \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Pfaffsche Form, so ist

$$\omega \circ (\mathrm{id}, A) : B \to \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Ist $\omega = \omega_F$, so gilt:

$$\begin{aligned} \omega \circ (\mathrm{id}, A)(\mathbf{x}) &= \omega_F(\mathbf{x}, A(\mathbf{x})) \\ &= F(\mathbf{x}) \bullet A(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

d.h. es ist $\omega_F \circ (\mathrm{id}, A) = F \bullet A$.

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\alpha : I := [a, b] \to B$ ein Integrationsweg und ω eine Differentialform auf B. Dann wird durch

$$t \mapsto \omega(\alpha(t), \alpha'(t))$$

eine stetige Funktion $\omega \circ (\alpha, \alpha') : I \to \mathbb{R}$ definiert.

Definition. Sei $\alpha : [a, b] \to B$ ein Integrationsweg und ω eine Differentialform auf B. Dann definiert man das Integral von ω über α durch

$$\int_\alpha \omega := \int_a^b \omega(\alpha(t), \alpha'(t))\, dt.$$

Ist $\omega = \omega_F$, so ist $\omega(\alpha(t), \alpha'(t)) = F(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)$, also

$$\int_\alpha \omega_F = \int_a^b F(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)\, dt\,.$$

5.2 Satz. *Ist $\sigma(t) := a + b - t$, so ist*

$$\int_{\alpha\circ\sigma} \omega = -\int_\alpha \omega.$$

BEWEIS: Es ist

$$\begin{aligned} \int_{\alpha\circ\sigma} \omega &= \int_a^b \omega(\alpha \circ \sigma(t), (\alpha \circ \sigma)'(t))\, dt \\ &= \int_a^b \omega(\alpha \circ \sigma(t), \alpha'(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t))\, dt \\ &= \int_a^b \omega(\alpha \circ \sigma(t), \alpha'(\sigma(t))) \cdot \sigma'(t)\, dt \text{ (Linearität)} \\ &= \int_b^a \omega(\alpha(s), \alpha'(s))\, ds \\ &= -\int_a^b \omega(\alpha(s), \alpha'(s))\, ds \\ &= -\int_\alpha \omega. \end{aligned}$$

■

5.3 Satz. *Sei $\alpha : [a,b] \to B \subset \mathbb{R}^n$ ein Integrationsweg. Dann gilt:*

1. $\displaystyle\int_\alpha (c_1 \cdot \omega_1 + c_2 \cdot \omega_2) = c_1 \cdot \int_\alpha \omega_1 + c_2 \cdot \int_\alpha \omega_2,$

   für Differentialformen ω_1, ω_2 und Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. *Ist φ eine orientierungstreue Parametertransformation, so ist*

$$\int_{\alpha\circ\varphi} \omega = \int_\alpha \omega.$$

3. *Ist $\omega = \omega_F$, so gilt die folgende „Standard-Abschätzung“:*

$$|\int_\alpha \omega| \le \sup_{|\alpha|} \|F\| \cdot L(\alpha).$$

Beweis: 1) ist trivial.

2) Sei $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ die Parametertransformation. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha\circ\varphi} \omega &= \int_c^d \omega(\alpha\circ\varphi(t), (\alpha\circ\varphi)'(t))\, dt \\
&= \int_c^d \omega(\alpha(\varphi(t)), \alpha'(\varphi(t))) \cdot \varphi'(t)\, dt \\
&= \int_a^b \omega(\alpha(s), \alpha'(s))\, ds \\
&= \int_\alpha \omega.
\end{aligned}$$

4) Zur Abschätzung benötigt man die Schwarzsche Ungleichung. Ist $\omega = \omega_F$, so gilt:

$$\begin{aligned}
|\int_\alpha \omega| &= |\int_a^b F(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)\, dt| \\
&\le \int_a^b |F(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)|\, dt \\
&\le \int_a^b \|F(\alpha(t))\| \cdot \|\alpha'(t)\|\, dt \\
&\le \sup_{|\alpha|} \|F\| \cdot \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt \\
&= \sup_{|\alpha|} \|F\| \cdot L(\alpha).
\end{aligned}$$

∎

Ist C eine Kurve, die durch den Weg α parametrisiert wird, so können wir jetzt

$$\int_C \omega := \int_\alpha \omega$$

setzen. Es wird sich später erweisen, daß man eine Pfaffsche Form auf B auch als reellwertige Funktion auf der Menge aller Kurven in B auffassen kann.

Beispiele.

1. Ist $\omega = \omega_F = F_1\,dx_1 + \cdots + F_n\,dx_n$, so ist

$$\omega(\alpha(t), \alpha'(t)) = F(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t) = F_1(\alpha(t))\alpha_1'(t) + \cdots + F_n(\alpha(t))\alpha_n'(t)$$

die orthogonale Projektion von $F(\alpha(t))$ auf die Tangente des Weges α. Beschreibt ω bzw. das zugehörige Vektorfeld F ein Kraftfeld, so wird die Komponente des Kraftfeldes in Richtung des Weges ermittelt, und das Integral liefert die Gesamtarbeit, die bei einer Bewegung längs α verrichtet werden muß.

Sei etwa $n = 2$, $\omega := y\,dx$ und $\alpha(t) := (\cos t, 1 + \sin t)$, für $0 \le t \le 2\pi$.

Dann ist $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t)$ und

$$\begin{aligned}
\int_\alpha \omega &= \int_0^{2\pi} \omega(\alpha(t), \alpha'(t))\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\alpha_2(t) \cdot \alpha_1'(t) + 0 \cdot \alpha_2'(t))\,dt \\
&= -\int_0^{2\pi} (\sin t + \sin^2 t)\,dt \\
&= -(-\cos t + \frac{1}{2}(t - \cos t \sin t)) \Big|_0^{2\pi} = -\pi.
\end{aligned}$$

2. Sei $n = 3$, $\alpha(t) := (\cos t, \sin t, 0)$ (für $0 \le t \le 2\pi$) und

$$\omega := \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy \qquad \text{für } x^2 + y^2 \ne 0.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\alpha \omega &= \int_0^{2\pi} \omega(\alpha(t), \alpha'(t))\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0) \bullet (-\sin t, \cos t, 0)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt \;=\; 2\pi.
\end{aligned}$$

Setzen wir dagegen $\beta(t) := (2 + \cos t, \sin t, 0)$, so ist

$$\begin{aligned}\int_\beta \omega &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{5+4\cos t}, \frac{2+\cos t}{5+4\cos t}, 0 \right) \bullet (-\sin t, \cos t, 0)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1+2\cos t}{5+4\cos t}\,dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{3}{5+4\cos t} \right] dt \\ &= \pi - \frac{3}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+4\cos t}.\end{aligned}$$

Die Funktion $1/(5+4\cos t)$ ist auf $[0, 2\pi]$ positiv und symmetrisch zur Geraden $t = \pi$. Daher gilt (mit der Substitution $\varphi(x) = 2\arctan(x)$):

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+4\cos t} &= 2 \cdot \int_0^{\pi} \frac{dt}{5+4\cos t} \\ &= 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{5+4 \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{2}{1+x^2}\,dx \\ &= 4 \cdot \int_0^{\infty} \frac{dx}{9+x^2} = \frac{4}{9} \cdot \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+(x/3)^2} \\ &= \frac{12}{9} \cdot (\arctan \frac{x}{3}) \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{12}{9} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}\pi.\end{aligned}$$

Also ist $\displaystyle\int_\beta \omega = 0$.

Daß wir hier Null als Ergebnis bekommen, ist kein Zufall, wie wir noch sehen werden.

5.4 Hauptsatz über Kurvenintegrale. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet (also eine offene zusammenhängende Menge), und ω eine Pfaffsche Form auf G. Dann sind die folgenden Aussagen über ω äquivalent:*

1. *ω ist ein totales Differential, d.h. es gibt eine differenzierbare Funktion f auf G, so daß $\omega = df$ ist.*

2. *Sind $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ Punkte in G, so hat das Kurvenintegral $\displaystyle\int_\alpha \omega$ für alle Integrationswege $\alpha : [a, b] \to G$ mit $\alpha(a) = \mathbf{p}$ und $\alpha(b) = \mathbf{q}$ den gleichen Wert. (Das Integral ist* wegunabhängig *).*

3. *Ist $\alpha : [a, b] \to G$ ein **geschlossener** Integrationsweg, so ist*

$$\int_\alpha \omega = 0.$$

Insbesondere ist $\int_\alpha df = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$.

BEWEIS: Wir müssen noch eine neue Notation einführen.

Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ Wege in G, so können wir formal die Summe $\alpha := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ bilden. Ist ω eine Pfaffsche Form auf G, so setzt man

$$\int_\alpha \omega := \sum_{j=1}^{k} \int_{\alpha_j} \omega.$$

Wenn jeweils der Endpunkt von α_j mit dem Anfangspunkt von α_{j+1} übereinstimmt, so hat α anschaulich die Bedeutung, daß die Wege α_j nacheinander durchlaufen werden. Für die Bildung des Integrals ist diese Deutung aber nicht notwendig. Wichtig ist: Taucht ein Weg zweimal auf, mit entgegengesetzter Durchlaufrichtung, so heben sich die entsprechenden Integrale weg. Man bezeichnet solche formalen Summen von Wegen als *Ketten*.

$1 \Longrightarrow 2$: Ist $\omega = df$, so gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\alpha \omega &= \int_a^b \omega(\alpha(t), \alpha'(t)) \\
&= \int_a^b \nabla f(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)\, dt \\
&= \int_a^b (f \circ \alpha)'(t)\, dt \\
&= f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) \\
&= f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p}),
\end{aligned}$$

und das hängt nicht mehr von α ab.

Den Zusatz haben wir damit auch gleich bewiesen!

$2 \Longrightarrow 3$: Ist $\alpha : [a, b] \to G$ ein geschlossener Weg und $\mathbf{p} := \alpha(a) = \alpha(b)$, so haben α und $\alpha \circ \sigma$ den gleichen Anfangs- und Endpunkt. Also ist

$$\int_\alpha \omega = \int_{\alpha\circ\sigma} \omega = -\int_\alpha \omega,$$

und daher $\int_\alpha \omega = 0$.

$3 \Longrightarrow 1$: Sei $\mathbf{p} \in G$ ein fest gewählter Punkt. Ist $\mathbf{x} \in G$, so gibt es einen stetigen Weg α, der $\mathbf{p}$ innerhalb von G mit $\mathbf{x}$ verbindet. Man kann diesen Weg sogar als Integrationsweg (also stückweise stetig differenzierbar) wählen.

Wir setzen $f(\mathbf{x}) := \int_\alpha \omega$.

Ist β ein weiterer Weg von $\mathbf{p}$ nach $\mathbf{x}$, so stellt die Kette $C := \alpha - \beta$ einen geschlossenen Integrationsweg dar, der bei $\mathbf{p}$ beginnt und endet. Nach Voraussetzung ist

$$\int_C \omega = 0\,, \text{ also } \quad \int_\alpha \omega = \int_\beta \omega.$$

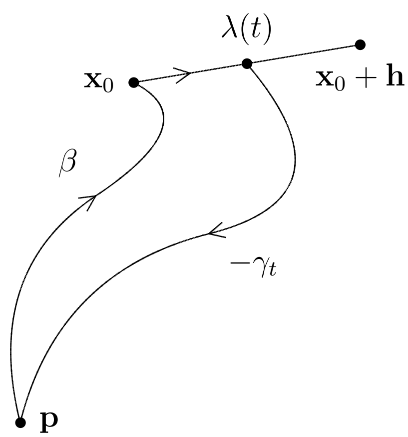
Damit ist die Funktion f auf G „wohldefiniert", d.h. unabhängig vom benutzten Weg α. Es bleibt zu zeigen, daß $df = \omega$ ist.

Sei $\mathbf{x}_0 \in G$ beliebig und $\mathbf{h}$ irgend ein Richtungsvektor. Weiter sei

$$\lambda(s) := \mathbf{x}_0 + s\mathbf{h} \text{ (für } s \in [0,1]\,)$$

die Verbindungsstrecke von $\mathbf{x}_0$ nach $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$, $\lambda_t := \lambda\Big|_{[0,t]}$ die Verbindungsstrecke von $\mathbf{x}_0$ und $\lambda(t)$, β ein Weg von $\mathbf{p}$ nach $\mathbf{x}_0$ und γ_t ein Weg von $\mathbf{p}$ nach $\lambda(t)$. Dann ist die Kette $\beta + \lambda_t - \gamma_t$ für jedes $t \in [0,1]$ geschlossen, und es gilt:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) &= \int_{\gamma_t} \omega - \int_\beta \omega \\ &= \int_{\lambda_t} \omega \\ &= \int_0^t \omega(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{h}, \mathbf{h})\, ds. \end{aligned}$$



Setzen wir $g(s) := \omega(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{h}, \mathbf{h})$, so ist

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \int_0^t g(s)\, ds,$$

und nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $c = c(t) \in [0,t]$, so daß gilt:

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = g(c) \cdot (t - 0) = \omega(\mathbf{x}_0 + c\mathbf{h}, \mathbf{h}) \cdot t,$$

also

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \omega(\mathbf{x}_0 + c(t) \cdot \mathbf{h}, \mathbf{h}) = \omega(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}).$$

Damit existieren in $\mathbf{x}_0$ alle Richtungsableitungen von f. Setzt man speziell $\mathbf{h} = \mathbf{e}_i$, so erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \omega(\mathbf{x}_0, \mathbf{e}_i), \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Aber das bedeutet, daß $df = \omega$ ist. ∎

Definition. Ist $\nabla f = F$ bzw. $df = \omega_F$, so nennt man f ein *Potential* für F.

Der Hauptsatz über Kurvenintegrale sagt zunächst nichts darüber aus, ob es zu einem stetigen Vektorfeld immer ein Potential gibt. Wir haben aber schon ein Beispiel kennengelernt, wo das Integral über eine Pfaffsche Form und einen geschlossenen Weg $\neq 0$ ist, und in diesem Fall kann kein Potential existieren.

Wir setzen jetzt voraus, daß die Komponenten F_i des Vektorfeldes F sogar stetig partiell differenzierbar sind. Damit überall $F(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = (D_1 f(\mathbf{x}), \ldots, D_n f(\mathbf{x}))$ sein kann, muß auf jeden Fall gelten:

$$D_j(F_i) = D_j D_i f = D_i D_j f = D_i(F_j), \text{ für } i, j = 1, \ldots, n.$$

Wir nennen diese notwendige Bedingung die „Integrabilitätsbedingung“. Ist sie auch hinreichend? Sie ist es zumindest in einem Spezialfall.

Definition. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\mathbf{x}_0 \in B$ ein Punkt. Die Menge B heißt *sternförmig* bezüglich $\mathbf{x}_0$, falls für jeden Punkt $\mathbf{x} \in B$ die Verbindungsstrecke von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}_0$ ganz in B liegt.

Jede konvexe Menge ist auch sternförmig (bezüglich eines jeden Punktes der Menge), umgekehrt ist eine sternförmige Menge i.a. nicht konvex.

Wir nehmen nun an, daß $B \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig bezüglich des Nullpunktes und F ein Vektorfeld mit stetig partiell differenzierbaren Komponenten auf B ist, das die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Dann setzen wir

$$f(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 F_i(t\mathbf{x})\, dt \right) x_i \,.$$

Für die nachfolgende Rechnung beachten wir:

$$\frac{d}{dt}\,(tF_j(t\mathbf{x})) = F_j(t\mathbf{x}) + t \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(t\mathbf{x}) x_i = F_j(t\mathbf{x}) + t \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t\mathbf{x}) x_i.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 F_i(t\mathbf{x})\, dt \right) x_i + \delta_{ij} \int_0^1 F_i(t\mathbf{x})\, dt \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 t\, \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t\mathbf{x})\, dt \right) x_i + \int_0^1 F_j(t\mathbf{x})\, dt \\
&= \int_0^1 \left(t \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t\mathbf{x}) x_i + F_j(t\mathbf{x}) \right) dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}\,(tF_j(t\mathbf{x}))\ dt \\
&= tF_j(t\mathbf{x}) \,\Big|_0^1 = F_j(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt:

5.5 Satz. *Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig bezüglich des Nullpunktes, sowie F ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld auf B, das die „Integrabilitätsbedingung“ $D_jF_i = D_iF_j$ (für alle i, j) erfüllt, so gibt es eine stetig partiell differenzierbare Funktion f mit $\nabla f = F$:*

Der Satz bleibt übrigens richtig, wenn B sternförmig bezüglich eines beliebigen Punktes ist.

Im Falle $n = 3$ hat man noch eine besondere Bezeichnung eingeführt.

Definition. Ist F ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, so nennt man das stetige Vektorfeld

$$\mathbf{rot}(F) := (D_2(F_3) - D_3(F_2),\ D_3(F_1) - D_1(F_3),\ D_1(F_2) - D_2(F_1))$$

die *Rotation* von F.

5.6 Folgerung. *Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ offen und sternförmig, und F ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld auf B mit $\mathbf{rot}(F) = \mathbf{0}$. Dann besitzt F auf B ein Potential.*

Beispiele.

1. Sei $F(x, y, z) := (x, y, z)$ auf einer sternförmigen Umgebung von $\mathbf{0}$. Dann ist offensichtlich $\mathbf{rot}(F) = \mathbf{0}$. Also muß F Gradient einer Funktion f sein. Wir berechnen f nach der obigen Formel:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x \int_0^1 F_1(tx,ty,tz)\,dt + y \int_0^1 F_2(tx,ty,tz)\,dt + z \int_0^1 F_3(tx,ty,tz)\,dt \\ &= x \cdot \int_0^1 tx\,dt + y \cdot \int_0^1 ty\,dt + z \cdot \int_0^1 tz\,dt \\ &= (x^2+y^2+z^2) \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2). \end{aligned}$$

   Man rechnet sofort nach, daß tatsächlich $\nabla f = F$ ist.

2. Sei $U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$. Dann ist auf U das Vektorfeld

$$F(x,y,z) := \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$$

   stetig partiell differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{-(x^2+y^2)+y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) &= 0, \\
\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) &= 0, \\
\text{und}\quad \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,z) = 0.
\end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{rot}(F) = \mathbf{0}$. Wäre F ein Gradientenfeld ∇f, so wäre $df = \omega_F$, und jedes Integral über ω und einen geschlossenen Weg müßte verschwinden. Wir haben bereits gesehen, daß das nicht der Fall ist.

Die Situation ändert sich, wenn man den Definitionsbereich einschränkt. Die Mengen $U_+ = \{x > 0\}$ und $U_- = \{x < 0\}$ sind jeweils sternförmig, und dort folgt aus der Integrabilitätsbedingung die Existenz eines Potentials. Dort verschwinden auch alle Integrale über geschlossene Wege, wie wir schon an einem Beispiel gesehen haben.

Ist g eine Potentialfunktion für F auf U_+, so muß insbesondere $g_y = F_2$ sein. Wir suchen also eine Stammfunktion von F_2 bezüglich der Variablen y.

$$\begin{aligned}
g(x,y,z) &= \int_{y_0}^{y} \frac{x}{x^2+t^2}\,dt \\
&= \int_{y_0}^{y} \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+(t/x)^2}\,dt \\
&= \int_{y_0}^{y} \frac{\varphi'(t)}{1+\varphi(t)^2}\,dt \qquad (\text{mit } \varphi(t) = \frac{t}{x}\,) \\
&= \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y)} \frac{1}{1+s^2}\,ds \\
&= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \text{const.}
\end{aligned}$$

Die Konstante könnte noch von x und z abhängen, aber die Probe zeigt, daß wir sie nicht brauchen. Tatsächlich hat schon

$$g(x,y,z) := \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

die gewünschte Eigenschaft $\nabla g = F$. Offensichtlich ist g nicht auf ganz U definiert!

Zum Schluß wollen wir eine physikalische Anwendung betrachten:

Ein Massenpunkt der Masse m bewege sich in einem Kraftfeld entlang eines Weges $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$.

Sei F_i die Kraft, die auf das Teilchen in x_i-Richtung wirkt. Bei einer infinitesimalen Verschiebung um $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ muß dann die Arbeit $F_1 v_1 + F_2 v_2 + F_3 v_3$ geleistet werden. Die Wirkung des Kraftfeldes wird also durch die Differentialform $\omega = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$ beschrieben, und $\displaystyle\int_\alpha \omega$ ist die Arbeit, die geleistet wird, wenn man das Teilchen entlang α bewegt.

Das Newtonsche Gesetz der Bewegung besagt:

$$F_i(\alpha(t)) = m \cdot \alpha_i''(t), \text{ für } i = 1, 2, 3.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int_\alpha \omega &= \int_a^b m \cdot \alpha''(t) \bullet \alpha'(t)\, dt \\ &= \frac{m}{2} \cdot \int_a^b \frac{d}{dt} [\alpha'(t) \bullet \alpha'(t)]\ dt \\ &= \frac{m}{2} \|\alpha'(t)\|^2 \Big|_a^b \\ &= \frac{m}{2} \cdot \left[\|\alpha'(b)\|^2 - \|\alpha'(a)\|^2\right]. \end{aligned}$$

$T(t) := \dfrac{m}{2} \cdot \|\alpha'(t)\|^2$ ist die *kinetische Energie* des Teilchens zur Zeit t. Die geleistete Arbeit ist also gerade die Änderung der kinetischen Energie.

Man nennt das Kraftfeld ω *konservativ*, wenn es ein Potential besitzt, wenn es also eine Funktion u mit $\omega = -dU$ gibt. Den Wert $U(\alpha(t))$ nennt man die *potentielle Energie* des Teilchens zur Zeit t.

In diesem Fall ist

$$\int_\alpha \omega = -[U(\alpha(b)) - U(\alpha(a))],$$

also $T(a) + U(\alpha(a)) = T(b) + U(\alpha(b))$. Das bedeutet, daß die *Gesamtenergie* $E(\alpha(t)) := U(\alpha(t)) + T(t)$ bei der Bewegung des Teilchens konstant bleibt. Das ist der Satz von der Erhaltung der Energie!