Bergische Universität – Gesamthochschule Wuppertal – Fachbereich Mathematik

Analysis 1

Kapitel 4 Integralrechnung

Vorlesungsausarbeitung zum WS 2000/01

von Prof. Dr. Klaus Fritzsche

Inhaltsverzeichnis

§ 1 Stammfunktionen

1.1 Satz. *Sei $a < b$ und $(M_\iota)_{\iota \in J}$ ein beliebiges System offener Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $[a,b] \subset \bigcup_{\iota \in J} M_\iota$.*

Dann gibt es eine endliche Teilmenge $J_0 \subset J$, so daß $[a,b] \subset \bigcup_{\iota \in J_0} M_\iota$ ist.

BEWEIS: Sei

$$T := \{t \in [a,b] \,:\, [a,t] \text{ ist in der Vereinigung von endlich vielen } M_\iota \text{ enthalten }\}.$$

T ist nicht leer, denn a liegt in einem M_{ι_0}, und dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so daß $U_\varepsilon(a) \subset M_{\iota_0}$ ist. Das bedeutet, daß z.B. $a + \varepsilon/2$ zu T gehört.

Nun sei $t_0 := \sup(T)$. Dann ist $a < t_0 \le b$, und auch t_0 muß in einem M_{ι_1} liegen. Es gibt ein δ mit $0 < \delta < t_0 - a$, so daß $U_\delta(t_0) \subset M_{\iota_1}$ ist.

Weil $[a, t_0 - \delta/2]$ in endlich vielen M_ι liegt, und $[t_0 - \delta/2, t_0 + \delta/2]$ in M_{ι_1}, muß $t_0 = b$ sein und $[a,b]$ in endlich vielen M_ι liegen. ∎

Sei $I = [a,b]$ ein fest gewähltes Intervall. Unter einer *Zerlegung* von I verstehen wir eine endliche Menge $\mathfrak{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ mit

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Eine Zerlegung $\mathfrak{Z}'$ heißt *Verfeinerung* der Zerlegung $\mathfrak{Z}$, falls $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{Z}'$ ist.

Definition. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *Treppenfunktion*, falls es eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ von $[a,b]$ gibt, so daß $f|_{(x_{i-1},x_i)} \equiv c_i$ konstant ist, für $i = 1, \ldots, n$.

Multipliziert man eine Treppenfunktion mit einer komplexen Zahl, so erhält man wieder eine Treppenfunktion. Und auch die Summe zweier Treppenfunktionen ist wieder eine Treppenfunktion. Allerdings muß man dabei zu einer gemeinsamen Verfeinerung der Zerlegungen übergehen, um eine Zerlegung für die Summe zu erhalten. Mit $T(I)$ bezeichnen wir den (komplexen) Vektorraum der Treppenfunktionen auf I.

Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ heißt *Regelfunktion*, falls f in jedem inneren Punkt $x \in I$ einen rechtsseitigen und linksseitigen Limes und an den in I enthaltenen Randpunkten einen einseitigen Limes besitzt.

Beispiele.

1. Ist f stetig auf I, so ist f offensichtlich eine Regelfunktion.

2. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende (reellwertige) Funktion und x_0 ein Punkt von I. Dann ist für jede Folge (x_n) in I mit $x_n < x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ die Folge $f(x_n)$ eine durch $f(x_0)$ nach oben beschränkte Folge. Wählt man (x_n) monoton wachsend, so ist auch $(f(x_n))$ monoton wachsend, und man kann den Satz von der monotonen Konvergenz anwenden. Es sei $c = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

   Nun sei (y_m) eine beliebige andere Folge in I mit $y_m < x_0$, die gegen x_0 konvergiert. Wir wollen zeigen, daß $(f(y_m))$ ebenfalls gegen c konvergiert. Dazu sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt ein n_0, so daß $c - \varepsilon < f(x_n) \le c$ für $n \ge n_0$ ist. Und es gibt ein m_0, so daß $x_{n_0} \le y_m < x_0$ für $m \ge m_0$ ist. Zu jedem solchen m kann man aber ein $n(m)$ mit $y_m < x_{n(m)}$ finden. Dann ist $c - \varepsilon < f(x_{n_0}) \le f(y_m) \le f(x_{n(m)}) \le c$, also $|f(y_m) - c| < \varepsilon$. Das zeigt die Existenz des linksseitigen Limes. Beim rechtsseitigen Limes geht man analog vor, und das ganze funktioniert natürlich auch bei monoton fallenden Funktionen. Also ist jede monotone Funktion eine Regelfunktion.

1.2 Satz. *Eine Funktion $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Regelfunktion, wenn es eine Folge (τ_n) von Treppenfunktionen auf I gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert.*

BEWEIS: 1) Es sei f gleichmäßiger Limes einer Folge von Treppenfunktionen. Es sei $x_0 \in [a, b)$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt eine Treppenfunktion τ mit $\|f - \tau\| < \varepsilon/2$ und ein $\delta > 0$, so daß τ auf $(x_0, x_0 + \delta)$ konstant ist. Für $x, y \in (x_0, x_0 + \delta)$ ist dann

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - \tau(x)| + |\tau(y) - f(y)| < \varepsilon.$$

Wir wenden das zunächst auf eine beliebige Folge (x_n) in (x_0, b) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ an. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ und dem zugehörigen δ gibt es ein n_0, so daß $x_0 < x_n < x_0 + \delta$ für $n \ge n_0$ ist, und dann ist

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon, \text{ für } n, m \ge n_0.$$

Also ist $(f(x_n))$ eine Cauchyfolge, die gegen ein $c \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Wir wollen zeigen, daß $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = c$ ist. Dazu geben wir wieder ein $\varepsilon > 0$ vor und wählen wie oben dazu ein passendes δ und ein passendes n_0, so daß $x_0 < x_n < x_0 + \delta$ und $|f(x_n) - c| < \varepsilon/2$ für $n \ge n_0$ ist, und $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ für $x, y \in (x_0, x_0 + \delta)$. Für ein beliebiges x mit $x_0 < x < x_0 + \delta$ und $n \ge n_0$ ist dann

$$|f(x) - c| \le |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - c| < \varepsilon.$$

Die Existenz des linksseitigen Limes zeigt man genauso.

2) Sei nun f eine Regelfunktion, und $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Zu jedem $x \in I$ gibt es Zahlen $\alpha(x), \beta(x)$ mit $\alpha(x) < x < \beta(x)$, so daß gilt:

$$|f(s) - f(t)| < \frac{1}{n}, \text{ falls } s,t \in (\alpha(x), x) \cap I \text{ oder } s,t \in (x, \beta(x)) \cap I.$$

Die offenen Intervalle $I_x := (\alpha(x), \beta(x))$ überdecken I. Nach dem Satz vom Anfang dieses Paragraphen gibt es endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_n \in I$ mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, so daß I bereits von $I_{x_1}, \ldots, I_{x_n}$ überdeckt wird.

Wir bilden eine Menge N aus a, b, den Punkten x_i und den Punkten $\alpha(x_i)$ und $\beta(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Wir ordnen die endlich vielen Elemente von N linear an, d.h. wir schreiben $N = \{a_0, \ldots, a_k\}$, mit $a_{i-1} < a_i$ für $i = 1, \ldots, k$.

Nun definieren wir die Treppenfunktion τ_n auf I durch

$$\tau_n(t) := \begin{cases} f((a_{i-1} + a_i)/2) & \text{in } (a_{i-1}, a_i), \\ f(a_i) & \text{für } t = a_i. \end{cases}$$

Dann ist offensichtlich $\|\tau_n - f\| < \dfrac{1}{n}$. Das bedeutet, daß (τ_n) auf I gleichmäßig gegen f konvergiert. ■

1.3 Satz. *Ist $I = [a, b]$, so bildet die Menge $\mathcal{R}(I)$ der Regelfunktionen auf I einen Untervektorraum der beschränkten Funktionen auf I. Das Produkt von zwei Regelfunktionen ist wieder eine Regelfunktion. Ist f gleichmäßiger Limes einer Folge von Regelfunktionen, so ist f selbst eine Regelfunktion.*

BEWEIS: Summen und Produkte von Treppenfunktionen sind wieder Treppenfunktionen. Aus den Grenzwertsätzen folgt das gleiche für Regelfunktionen.

Ist f eine beliebige Regelfunktion, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Treppenfunktion τ mit $\|f - \tau\| < \varepsilon$, also

$$\|f\| = \|(f - \tau) + \tau\| \le \|f - \tau\| + \|\tau\| < \varepsilon + \|\tau\|.$$

Das zeigt, daß jede Regelfunktion beschränkt ist.

Sei schließlich (f_n) eine Folge von Regelfunktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt ein n_0, so daß $\|f - f_n\| < \varepsilon/2$ für $n \ge n_0$ ist. Und zu jedem $n \ge n_0$ gibt es eine Treppenfunktion τ_n mit $\|f_n - \tau_n\| < \varepsilon/2$. Dann ist

$$\|f - \tau_n\| \le \|f - f_n\| + \|f_n - \tau_n\| < \varepsilon.$$

Das zeigt, daß f eine Regelfunktion ist. ■

Definition. Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$ eine beliebige Funktion. Eine Funktion $F : I \to \mathbb{C}$ heißt *Stammfunktion* von f, falls gilt:

1. F ist stetig.
2. Es gibt eine (höchstens) abzählbare Teilmenge $Q \subset I$, so daß F auf $I \setminus Q$ differenzierbar und dort $F' = f$ ist.

Zum Beispiel ist $-\cos(x)$ auf $\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $\sin(x)$, $(1/c) \cdot e^{ct}$ eine Stammfunktion von e^{ct} (auch für komplexes c) und $F(x) := |x|$ ist Stammfunktion von

$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

1.4 Satz. *F_1, F_2 seien zwei Stammfunktionen einer Funktion f auf I. Dann ist $F_1 - F_2$ konstant.*

BEWEIS: Sei $F := F_1 - F_2$. Dann ist fast überall F differenzierbar und $F'(x) = 0$. Daraus folgt, daß F konstant ist. ■

Eine zentrale Aussage ist nun der folgende

1.5 Satz. *Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion. Dann besitzt f auf I eine Stammfunktion F.*

BEWEIS: 1) Zunächst sei f eine Treppenfunktion. Dann gibt es eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ von I, so daß $f(x) \equiv c_i$ auf (x_{i-1}, x_i) ist, für $i = 1, \ldots, n$. In diesem Falle kann man eine Stammfunktion F von f direkt angeben:

$$F(x) := \sum_{\nu=0}^{i-1} c_{\nu+1}(x_{\nu+1} - x_\nu) + c_{i+1}(x - x_i), \text{ auf } [x_i, x_{i+1}), \text{ für } i = 0, \ldots, n-1,$$

$$\text{und} \qquad F(x_n) := \sum_{\nu=0}^{n-1} c_{\nu+1}(x_{\nu+1} - x_\nu).$$

Offensichtlich ist F auf $[x_i, x_{i+1})$ stetig, und

$$\lim_{x \to x_{i+1}-} F(x) = \sum_{\nu=0}^{i} c_{\nu+1}(x_{\nu+1} - x_\nu) = F(x_{i+1}).$$

Also ist F auf ganz $[a, b]$ stetig und auf jedem Intervall (x_i, x_{i+1}) differenzierbar, mit $F'(x) = c_i$. Außerdem ist $F(a) = 0$.

2) Nun sei f eine beliebige Regelfunktion, und (τ_n) eine Folge von Treppenfunktionen, die auf I gleichmäßig gegen f konvergiert.

Sei F_n Stammfunktion von τ_n. Es gibt – wie wir im ersten Teil gesehen haben – eine endliche Teilmenge $Q_n \subset I$, so daß F_n auf $I \setminus Q_n$ differenzierbar und $F_n' = \tau_n$ ist. Außerdem können wir voraussetzen, daß $F_n(a) = 0$ ist. Sei Q die höchstens abzählbare Vereinigung aller Q_n. Dann sind alle F_n auf $I \setminus Q$ differenzierbar. Nach dem Satz über die Vertauschbarkeit von Limes und Ableitung konvergiert (F_n) auf I gleichmäßig gegen eine stetige Funktion F, die auf $I \setminus Q$ differenzierbar ist, mit $F' = f$. Also ist F Stammfunktion von f. ■

1.6 Folgerung. *Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es eine differenzierbare Funktion F auf I mit $F' = f$.*

Beweis: Da f eine Regelfunktion ist, besitzt f eine Stammfunktion F. Außerhalb einer abzählbaren Teilmenge $Q \subset I$ ist $F' = f$. Aber da f stetig ist, muß F auch in den Punkten von Q differenzierbar und dort $F' = f$ sein. ∎

Ist F eine beliebige differenzierbare Funktion, so braucht F' keine Regelfunktion zu sein. Umgekehrt braucht die Stammfunktion einer Regelfunktion nicht überall differenzierbar zu sein, wir nennen sie *fast überall stetig differenzierbar.*

Definition. Eine Funktion $F : I = (a, b] \to \mathbb{R}$ heißt in $x_0 \in I$ *linksseitig differenzierbar*, wenn es eine Funktion $\Delta_- : (a, x_0] \to \mathbb{R}$ gibt, so daß gilt:

1. $F(x) = F(x_0) + (x - x_0) \cdot \Delta_-(x)$, für $a < x < x_0$,
2. Es existiert $F'_-(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0-} \Delta_-(x)$.

Der Wert $F'_-(x_0)$ heißt dann die *linksseitige Ableitung* von f in x_0.

Die *rechtsseitige Differenzierbarkeit* und die *rechtsseitige Ableitung* $F_+(x_0)$ einer Funktion $F : [a, b) \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in [a, b)$ werden analog definiert, und die Begriffe übertragen sich auch auf komplexwertige Funktionen.

Ist F in x_0 linksseitig und rechtsseitig differenzierbar und ist $F'_-(x_0) = F'_+(x_0)$, so ist F dort differenzierbar, und der gemeinsame Wert der links- und rechtsseitigen Ableitung ist die gewöhnliche Ableitung von F in x_0.

1.7 Satz. *Die Stammfunktion F einer Regelfunktion f ist überall rechts- und linksseitig differenzierbar, und es ist*

$$F'_+(x_0) = f(x_0+) \quad \text{und} \quad F'_-(x_0) = f(x_0-).$$

Beweis: Wir begnügen uns mit der Annäherung an x_0 von rechts. Wir setzen

$$\Delta_+(x) := \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{für } x > x_0.$$

Dann haben wir die Darstellung

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0) \cdot \Delta_+(x), \qquad \text{für } x > x_0.$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß $\lim\limits_{x \to x_0+} \Delta_+(x)$ existiert.

Dazu sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Weil f eine Regelfunktion ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(x_0+)| < \varepsilon, \qquad \text{für } x_0 < x < x_0 + \delta.$$

Weiter gibt es eine höchstens abzählbare Teilmenge $Q \subset I$, so daß F auf $I \setminus Q$ differenzierbar und dort $F' = f$ ist. In $(x_0, x_0 + \delta) \setminus Q$ ist dann auch $F - f(x_0+) \cdot \mathrm{id}$ differenzierbar und

$$|(F - f(x_0+) \cdot \mathrm{id})'(x)| = |f(x) - f(x_0+)| < \varepsilon\,.$$

Aus dem verallgemeinerten Schrankensatz folgt dann für alle $x, y \in (x_0, x_0 + \delta)$:

$$|F(x) - F(y) - f(x_0+) \cdot (x - y)| < \varepsilon \cdot |x - y|.$$

Da alle beteiligten Funktionen in x_0 stetig sind, kann man y gegen x_0 gehen lassen und erhält dann zumindest noch

$$|F(x) - F(x_0) - f(x_0+) \cdot (x - x_0)| \le \varepsilon \cdot |x - x_0|,$$

also

$$|\Delta_+(x) - f(x_0+)| \le \varepsilon.$$

Damit ist F bei x_0 rechtsseitig differenzierbar, und $F'_+(x_0) = f(x_0+)$. Der Beweis für die linksseitige Ableitung verläuft analog. ∎

Definition. Die Gesamtheit aller Stammfunktionen einer Regelfunktion $f \in \mathcal{R}(I)$ bezeichnet man mit dem Symbol

$$\int f(x)\,dx\,.$$

Man spricht auch vom *unbestimmten Integral* über $f(x)$.

Ist F eine spezielle Stammfunktion von f, so ist

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + c \,:\, c \in \mathbb{R}\}.$$

Der Kürze halber schreibt man meist: $\int f(x)\,dx = F(x) + c$. Diese Abkürzung ist aber nur dann erlaubt, wenn sie so gebraucht wird, daß sie jederzeit als die obige Menge aller Stammfunktionen interpretiert werden kann!

Beispiele.

1. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$

2. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + c.$

3. $\displaystyle\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + c$ und $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + c.$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + c$, auf jedem Intervall $I \subset \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > 0\}$.

5. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die in I keine Nullstellen besitzt. Dann ist entweder $|f(x)| = f(x)$ auf ganz I oder $|f(x)| = -f(x)$ auf ganz I, also $F(x) := \ln(|f(x)|)$ differenzierbar und $F'(x) = \dfrac{|f|'(x)}{|f(x)|} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, und damit
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(|f(x)|) + c\,.$$
Daraus folgt z.B.: $\displaystyle\int \tan(x)\,dx = -\ln(|\cos(x)|) + c.$

Bemerkung. Ist F auf I Stammfunktion der Regelfunktion f, so schreiben wir statt $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ auch – etwas mißbräuchlich – $\int F'(x)\,dx = F(x) + c$, obwohl F' gar nicht überall definiert ist!

Gewisse Differentiationsregeln können bei der Suche nach Stammfunktionen helfen. Wir beginnen mit der Linearität:

1.8 Satz. *Sind f und g Regelfunktionen, so ist*
$$\int (c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x))\,dx = c_1 \cdot \int f(x)\,dx + c_2 \cdot \int g(x)\,dx.$$

Der Beweis ist trivial.

Als nächstes betrachten wir die Produktregel:
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'\,.$$

Man kann sie wie folgt auf fast überall stetige Funktionen ausdehnen:

Sind f und g über einem Intervall I fast überall stetig differenzierbar, so ist auch $f \cdot g$ fast überall stetig differenzierbar, und es gilt:
$$(f \cdot g)'_\pm(x) = f'_\pm(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'_\pm(x).$$

1.9 Regel der Partiellen Integration. *Sind F und G über einem Intervall I fast überall stetig differenzierbar (also Stammfunktionen von Regelfunktionen f bzw. g), so sind die Funktionen $f \cdot G$ und $F \cdot g$ (die wir wieder mit $F' \cdot G$ bzw. $F \cdot G'$ bezeichnen) Regelfunktionen, und es gilt:*
$$\int F(x)G'(x)\,dx = F(x) \cdot G(x) - \int F'(x)G(x)\,dx\,.$$

Beweis: F und G sind stetig und überall links- und rechtsseitig differenzierbar. Außerdem gibt es (höchstens) abzählbare Teilmengen $Q_1, Q_2 \subset I$, so daß F auf $I \setminus Q_1$ und G auf $I \setminus Q_2$ differenzierbar ist. Dann ist auch $F \cdot G$ stetig, $F \cdot G$ ist natürlich auf $I \setminus (Q_1 \cup Q_2)$ differenzierbar, und dort ist $F' = f$ und $G' = g$, also $(F \cdot G)' = F' \cdot G + F \cdot G'$.

$$\begin{aligned} F(x) \cdot G(x) + c &= \int (F \cdot G)'(x)\, dx \\ &= \int F'(x) \cdot G(x)\, dx + \int F(x) \cdot G'(x)\, dx. \end{aligned}$$

∎

Auf den ersten Blick ist der Nutzen dieser Formel noch nicht zu sehen, den Vorteil erkennt man am besten an Beispielen:

Beispiele.

1.

$$\begin{aligned} \int (x^\alpha \cdot \ln(x))\, dx &= \int \left((\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1})' \cdot \ln(x) \right) dx \\ &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^\alpha}{\alpha+1}\, dx \\ &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \ln(x) - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + c \\ &= \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} \cdot ((\alpha+1) \cdot \ln(x) - 1) + c\,. \end{aligned}$$

Also ist z.B. $x \cdot (\ln(x) - 1)$ eine Stammfunktion von $\ln(x)$.

2.

$$\begin{aligned} \int \cos^2(x)\, dx &= \int (\sin'(x)) \cdot \cos(x)\, dx \\ &= \sin(x) \cdot \cos(x) - \int (\sin(x) \cdot \cos'(x))\, dx \\ &= \sin(x) \cdot \cos(x) + \int \sin^2(x)\, dx \\ &= \sin(x) \cdot \cos(x) + \int (1 - \cos^2(x))\, dx \\ &= \sin(x) \cdot \cos(x) + x - \int \cos^2(x)\, dx. \end{aligned}$$

Jetzt ist das Integral, das wir ausrechnen wollten, wieder aufgetaucht! Trotzdem hilft uns das weiter. Wir können das Integral über $\cos^2(x)$ auf die andere Seite der Gleichung bringen und erhalten:

$$\int \cos^2(x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot (x + \sin(x) \cdot \cos(x)) + c.$$

3.

$$\begin{aligned}\int e^x \cdot \sin(x)\,dx &= \int e^x \cdot (-\cos'(x))\,dx \\ &= -e^x \cdot \cos(x) - \int (e^x)' \cdot (-\cos(x))\,dx \\ &= -e^x \cdot \cos(x) + \int e^x \cdot \cos(x)\,dx.\end{aligned}$$

Eine zweite Rechnung liefert:

$$\int (e^x \cdot \cos(x))\,dx = e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \sin(x)\,dx.$$

Setzt man das in das erste Ergebnis ein, so erhält man:

$$\int e^x \cdot \sin(x)\,dx = \frac{1}{2}(e^x \cdot (\sin(x) - \cos(x))) + c.$$

Eine weitere Integrationsmethode ergibt sich aus der Kettenregel. Sei $\varphi : J \to I$ eine stetig differenzierbare Funktion und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion mit Stammfunktion F. Dann ist auch $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ eine Regelfunktion auf J (man überlege sich den einfachen Beweis dafür!), und es gilt fast überall: $(F \circ \varphi)'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$. Daraus folgt:

1.10 Substitutionsregel.

$$\left(\int f(x)\,dx\right) \circ \varphi = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

Ist φ sogar umkehrbar, so folgt:

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt\right) \circ \varphi^{-1}.$$

Merken kann man sich diese Regel mit der folgenden (allerdings sehr suspekten) Eselsbrücke: Ist $x = x(t)$, so ist

$$\int f(x)\,dx = \int f(x(t))\frac{dt}{dt}\,dx = \int f(x(t))\frac{dx}{dt}\,dt = \int f(x(t))x'(t)\,dt.$$

Diese Herleitung ist mathematisch unhaltbar, und sie liefert ein falsches Ergebnis, denn auf der linken Seite fehlt die Substitution, so daß links eine Funktion von x und rechts eine Funktion von t erscheint.

Bei den Beispielen beginnen wir mit dem einfacheren Fall, der Anwendung der Substitutionsregel **von rechts nach links**, wenn der Integrand schon in der Form $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ gegeben ist.

Beispiele.

1. Es sei eine Stammfunktion F der Regelfunktion f gegeben. Wir suchen eine Stammfunktion für $x \mapsto f(x - x_0)$. Hier bietet sich die Substitution $\varphi(x) := x - x_0$ an, mit $\varphi'(x) \equiv 1$. Dann folgt:

$$\int f(x - x_0)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right) \circ \varphi = F(x - x_0) + c.$$

   Für $x \mapsto f(a \cdot x)$ benutzen wir die Substitution $\varphi(x) := a \cdot x$, mit $\varphi'(x) \equiv a$. Dann ist $a \cdot f(a \cdot x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, und wir erhalten:

$$\int f(a \cdot x)\,dx = \frac{1}{a} \cdot \left(\int f(x)\,dx\right) \circ \varphi = \frac{1}{a} \cdot F(a \cdot x) + c.$$

   Also ist z.B.

$$\int \sin(mx)\,dx = -\frac{1}{m} \cdot \cos(mx) + c, \text{ für } m \in \mathbb{N}.$$

   und

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + (\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a}) + c\,.$$

2. Das folgende Beispiel ist eigentlich ein alter Bekannter. Es sei $f(x) := \dfrac{1}{x}$ und $\varphi(t)$ eine stetig differenzierbare Funktion ohne Nullstellen auf einem Intervall J. Dann ist $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \dfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = (\ln \circ |\varphi|)'(t)$ die logarithmische Ableitung. Die Substitutionsregel führt zu der schon bekannten Formel

$$\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt = \left(\int \frac{1}{x}\,dx\right) \circ \varphi(t) = (\ln|x|) \circ \varphi(t) + c = \ln(|\varphi(t)|) + c.$$

   Suchen wir z.B. eine Stammfunktion für $g(t) := \dfrac{t}{1 + t^2}$, so stellen wir fest, daß $2 \cdot g(t) = \dfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$ ist, für $\varphi(t) := 1 + t^2$, also

$$\int \frac{t}{1 + t^2}\,dt = \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + t^2) + c.$$

3. Manchmal ist bei einem Bruch zwar nicht der Zähler gleich der Ableitung des Nenners, aber der Bruch hat die Gestalt $\dfrac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))}$. Die Substitutionsregel liefert dann

$$\int \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))}\,dt = \left(\int \frac{dx}{g(x)}\right) \circ \varphi\,.$$

Das funktioniert z.B. in folgender Situation:

$$\begin{aligned}\int \frac{t\,dt}{1+t^4} &= \frac{1}{2}\int \frac{\varphi'(t)}{1+\varphi(t)^2}\,dt \text{ (mit } \varphi(t) := t^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{1+x^2}\,dx\right)\circ\varphi \\ &= \frac{1}{2}\arctan(x^2) + c\,.\end{aligned}$$

Hier sei noch einmal vor der „Ingenieur-Methode“ gewarnt: Man liest oft folgende Herleitung:

$$t^2 = x,\ \text{also } 2t\,dt = dx \text{ (Was soll das bedeuten?)},$$

und dann

$$\int \frac{t\,dt}{1+t^4} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\arctan(x) + c\,.$$

Die letzte Zeile ist eindeutig Unsinn! Wir werden erst im 3. Semester lernen, wie man mit Hilfe von „Differentialformen“ diese Methode mathematisch einwandfrei formulieren und anwenden kann.

Wenn die rechte Seite der Substitutionsregel der Ausgangspunkt ist, kann man die Substitution φ leicht erkennen. Schwieriger ist die Anwendung **von links nach rechts**.

Es soll z.B. eine Stammfunktion von $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ bestimmt werden. Dafür suchen wir nach einer Substitution, durch die der Integrand einfacher wird. Die Gleichung $y = \sqrt{1-x^2}$ erinnert an die Gleichung $\cos(t) = \sqrt{1-\sin^2(t)}$, deshalb probieren wir es (auf gut Glück) mit der Substitution $\varphi(t) := \sin(t)$ und erhalten:

$$\left(\int \sqrt{1-x^2}\,dx\right)\circ\varphi = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int \cos^2(t)\,dt.$$

Dieses unbestimmte Integral kennen wir schon, es ist $= \dfrac{1}{2}(t + \sin(t)\cos(t)) + c$. Da $\varphi(t) = \sin(t)$ auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ umkehrbar ist, erhalten wir:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot(\arcsin(x) + x\cdot\sqrt{1-x^2}) + c,\ \text{auf } [-1,1].$$

Nun können wir uns an weitere Beispiele wagen:

Beispiele.

1. Es soll $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ bestimmt werden.

   Da die Wurzel im Exponenten stört, versuchen wir es mit der Substitution $\varphi(t) = t^2$ und $\varphi'(t) = 2t$. Dann existiert $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$ für $x > 0$, und es ist

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \left(\int e^t \cdot 2t\,dt\right) \circ \varphi^{-1} = 2(\sqrt{x}-1)\cdot e^{\sqrt{x}} + c,$$

denn es ist $\int te^t\,dt = (t-1)e^t + c$.

2. Wir werden zeigen, daß jede rationale Funktion (außerhalb ihrer Polstellen) Stammfunktionen besitzt. Deshalb wollen wir Integranden häufig gerne mit Hilfe einer geeigneten Substitution rational machen:

   In $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$ benutzen wir die Substitution $\varphi(t) = t^6$, mit $\varphi'(t) = 6t^5$, um die beiden störenden Wurzeln in einem Schritt zu beseitigen. $\varphi^{-1}(x) = \sqrt[6]{x}$ ist auch wieder für $x > 0$ definiert, und dort gilt:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} &= \left(\int \frac{6t^5}{t^2+t^3}\,dt\right)\circ\varphi^{-1}\\ &= 6\cdot\left(\int \frac{t^3}{1+t}\,dt\right)\circ\varphi^{-1}.\end{aligned}$$

   Polynomdivision liefert $\displaystyle\frac{t^3}{1+t} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}$. Also erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} &= 6\cdot\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln|1+t|\right)\circ\varphi^{-1} + c\\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6(\sqrt[6]{x} - \ln(\sqrt[6]{x}+1)) + c,\ \text{ für } x > 0.\end{aligned}$$

3. Sei $F(u,v)$ eine rationale Funktion in u und v (also ein Ausdruck wie z.B. $\displaystyle\frac{u}{3u^2-5v^3}$). Wir wollen $\displaystyle\int F(\sin x, \cos x)\,dx$ bestimmen. In der Klasse der Winkelfunktionen, ihrer Umkehrungen und deren Ableitungen kennen wir bisher nur einen einzigen Fall, wo eine rationale Funktion auftaucht:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

   Daher versuchen wir, Sinus und Cosinus durch den Tangens auszudrücken: Es ist

$$\tan^2(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1,$$

   und damit

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)} \qquad \text{und} \qquad \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = \frac{\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}.$$

   Das ist noch nicht ganz befriedigend, weil jetzt für die Darstellung von Sinus und Cosinus durch den Tangens noch Wurzeln benötigt werden. Es gilt aber:

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)} \\ \text{und} \quad \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}. \end{aligned}$$

Jetzt verwenden wir die Substitution $\varphi(t) = 2\arctan(t)$, mit $\varphi'(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \int F(\sin x, \cos x)\,dx &= \left(\int F(\sin\varphi(t), \cos\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\right) \circ \varphi^{-1} \\ &= \left(\int F(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}) \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt\right) \circ \varphi^{-1}. \end{aligned}$$

Damit ist der ganze Integrand rational geworden.

4. Manchmal kann es auch sinnvoll sein, Winkelfunktionen einzusetzen, wie wir es schon beim ersten Beispiel zur Substitutionsregel gesehen haben. Die Substitution $\varphi(t) = \sin(t)$ ergibt z.B. für $-1 < x < 1$:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx &= \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= \left(\int \frac{1-\sin t}{\cos t}\cos t\,dt\right) \circ \varphi^{-1} \\ &= \left(\int (1-\sin t)\,dt\right) \circ \varphi^{-1} \\ &= \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c\,. \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß man jede rationale Funktion „elementar“ integrieren kann. Wichtiges Hilfsmittel ist dabei die

1.11 Partialbruchzerlegung. *$p(x), q(x)$ seien zwei Polynome mit* $\mathrm{grad}(p) < \mathrm{grad}(q)$. *Außerdem sei*

$$q(x) = (x-c_1)^{k_1} \cdots (x-c_r)^{k_r}$$

die Zerlegung von $q(x)$ in Linearfaktoren (über $\mathbb{C}$), mit paarweise verschiedenen komplexen Zahlen c_i. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{k_j} \frac{a_{jk}}{(x-c_j)^k}, \quad \textit{mit } a_{jk} \in \mathbb{C}.$$

Beweis: Wir zeigen, daß es eine eindeutig bestimmte Zerlegung

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a}{(x-c_1)^{k_1}} + \frac{p_1(x)}{q_1(x)}$$

gibt, mit $a \in \mathbb{C}$ und Polynomen $p_1(x), q_1(x)$ mit $q(x) = (x - c_1) \cdot q_1(x)$ und $\text{grad}(p_1) < \text{grad}(q_1) = \text{grad}(q) - 1$. Es ist klar, daß man dies dann iterieren kann und nach endlich vielen Schritten die gewünschte Zerlegung erhält.

a) Eindeutigkeit: Wenn es eine solche Zerlegung gibt, dann ist

$$p(x) = a \cdot (x - c_2)^{k_2} \cdots (x - c_r)^{k_r} + p_1(x) \cdot (x - c_1),$$

also $p(c_1) = a \cdot (c_1 - c_2)^{k_2} \cdots (c_1 - c_r)^{k_r}$. Damit ist a festgelegt, und dann auch $p_1(x) = (p(x) - a \cdot (x - c_2)^{k_2} \cdots (x - c_r)^{k_r})/(x - c_1)$, sowie $q_1(x) = q(x)/(x - c_1)$.

b) Existenz: Jetzt definieren wir

$$a := \frac{p(c_1)}{(c_1 - c_2)^{k_2} \cdots (c_1 - c_r)^{k_r}},$$

sowie

$$P(x) := p(x) - a \cdot (x - c_2)^{k_2} \cdots (x - c_r)^{k_r}.$$

Da $P(c_1) = 0$ ist, gibt es ein Polynom $p_1(x)$ mit $P(x) = p_1(x) \cdot (x - c_1)$. Also ist

$$p(x) = a \cdot (x - c_2)^{k_2} \cdots (x - c_r)^{k_r} + p_1(x) \cdot (x - c_1).$$

Wir haben natürlich $k_1 \geq 1$ vorausgesetzt. Das bedeutet, daß $q_1(x) := q(x)/(x-c_1)$ ein Polynom ist, und es folgt:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a}{(x - c_1)^{k_1}} + \frac{p_1(x)}{q_1(x)}.$$

Schließlich ist $\text{grad}(p_1) < \max(\text{grad}(p), k_2 + \cdots + k_r) \leq \text{grad}(q) - 1 = \text{grad}(q_1)$. ∎

Ist $\text{grad}(p) \geq \text{grad}(q)$, so kann man Polynomdivision mit Rest durchführen und erhält eine Darstellung

$$\frac{p(x)}{q(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

mit Polynomen $g(x), r(x)$ und $\text{grad}(r) < \text{grad}(q)$.

Seien nun $p(x)$, $q(x)$ Polynome mit reellen Koeffizienten. Sind auch alle Nullstellen von $q(x)$ reell, so erhält man reelle a_{jk}. Es bleibt das Problem der nicht-reellen Nullstellen von $q(x)$. Ist etwa c_j eine Nullstelle von $q(x)$, mit $\text{Im}(c_j) \neq 0$, so ist auch $\overline{c_j}$ eine Nullstelle von $p(x)$. Es muß also ein $i \neq j$ mit $c_i = \overline{c_j}$ geben, und es ist dann $k_i = k_j$

Behauptung: $a_{ik} = \overline{a_{jk}}$, für $k = 1, \ldots, k_j$.

BEWEIS: Weil $\overline{(p/q)(x)} = p(\overline{x})/q(\overline{x})$ ist, muß – wegen der Eindeutigkeit der Partialbruchzerlegung – gelten:

$$\frac{\overline{a_{jk}}}{(\overline{x} - \overline{c_j})^k} = \frac{a_{ik}}{(\overline{x} - c_i)^k}.$$

Dabei kann für x jede komplexe Zahl $\not\in \{c_j, c_i\}$ eingesetzt werden. daraus folgt die Behauptung. ∎

Nun ist aber

$$\frac{a}{x - c_j} + \frac{\overline{a}}{x - \overline{c_j}} = \frac{2(\mathrm{Re}(a)x - \mathrm{Re}(a\overline{c}))}{x^2 - 2\,\mathrm{Re}(c_j)x + |c_j|^2}\,.$$

Es tritt oben ein lineares und unten ein quadratisches Polynom auf, beide mit reellen Koeffizienten.

Jetzt können wir Stammfunktionen für beliebige rationale Funktionen bestimmen:

1. Der Fall eines Polynoms ist trivial.
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x-c}\,dx = \ln|x - c|$, für $c \in \mathbb{R}$.
3. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-c)^k}\,dx = \frac{1}{1-k}(x-c)^{1-k}$, für $k \geq 2$ und $c \in \mathbb{C}$, denn Produkt- und Quotientenregel gelten auch für die Differentiation von komplexwertigen Funktionen.
4. Es bleibt der Fall $f(x) = \dfrac{cx + d}{x^2 + ax + b}$, mit $a^2 - 4b < 0$. Hier nimmt man zunächst eine Substitution vor: $\varphi(t) := ut - v$, mit noch geeignet zu wählenden reellen Zahlen u und v. Dann ist

   $$\varphi(t)^2 + a \cdot \varphi(t) + b = u^2t^2 + u(a - 2v)t + v(v - a) + b\,.$$

   Setzen wir $v := a/2$, so erhalten wir

   $$\varphi(t)^2 + a \cdot \varphi(t) + b = u^2t^2 + \frac{1}{4}(4b - a^2) = (b - \frac{a^2}{4}) \cdot (t^2 + 1),$$

   wenn wir auch noch $u := (1/2)\sqrt{4b - a^2}$ setzen.

   (a) Es ist $\displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan(t)$,

   (b) und $\displaystyle\int \frac{t}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\ln(t^2 + 1)$.

   So sind alle Fälle erledigt!

§ 2 Bestimmte Integrale

Definition. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine *Treppenfunktion*, $\mathfrak{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so daß $f|_{(x_{i-1}, x_i)} \equiv c_i$ konstant ist, für $i = 1, \ldots, n$.

Die Zahl $\Sigma(f) := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$ nennt man das *Integral* von f.

Ist $x_{i-1} < \xi < x_i$, so ist

$$c_i(\xi - x_{i-1}) + c_i(x_i - \xi) = c_i(x_i - x_{i-1}).$$

Das bedeutet, daß sich $\Sigma(f)$ nicht ändert, wenn man von $\mathfrak{Z}$ zu einer Verfeinerung übergeht. Da es zu zwei verschiedenen Zerlegungen immer eine gemeinsame Verfeinerung gibt, sieht man, daß die Definition von $\Sigma(f)$ nicht von der Zerlegung abhängt.

2.1 Satz. *Das Integral von Treppenfunktionen besitzt folgende Eigenschaften:*

1. $\Sigma(f_1 + f_2) = \Sigma(f_1) + \Sigma(f_2)$, *für* $f_1, f_2 \in T(I)$.
2. $\Sigma(r \cdot f) = r \cdot \Sigma(f)$, *für* $f \in T(I)$ *und* $r \in \mathbb{R}$.
3. *Ist* $f \in T(I)$ *und* $f \geq 0$, *so ist* $\Sigma(f) \geq 0$.
4. *Es ist stets* $|\Sigma(f)| \leq (b - a) \cdot \|f\|$.

Der BEWEIS ist eine sehr einfache Übungsaufgabe.

Wir betrachten im Folgenden nur reellwertige Funktionen. Erinnern wir uns: Ist I ein Intervall, so ist der Raum $\mathcal{B} = \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ der beschränkten Funktionen auf I ein metrischer Raum, mit der Metrik $d(f, g) := \|f - g\|$, wobei $\|h\| = \sup_I |h|$ die sogenannte „Supremumsnorm" ist. Jede Teilmenge von $\mathcal{B}$ ist nun wieder ein metrischer Raum, mit der von $\mathcal{B}$ induzierten Metrik. Das gilt insbesondere für den Vektorraum $T(I, \mathbb{R})$ der reellwertigen Treppenfunktionen auf I. Das Integral $\Sigma : T(I, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung. Aber da $T(I, \mathbb{R})$ kein endlich-dimensionaler Vektorraum ist, ist auch nicht selbstverständlich, daß Σ stetig ist. Die Abschätzung (4) hat jedoch die Stetigkeit von Σ zur Folge. Ist nämlich $\tau_0 \in T(I, \mathbb{R})$ und ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so wählen wir ein $\delta < \varepsilon/(b - a)$. Für $\|\tau - \tau_0\| < \delta$ ist dann

$$|\Sigma(\tau) - \Sigma(\tau_0)| = |\Sigma(\tau - \tau_0)| \leq (b - a) \cdot \|\tau - \tau_0\| < \varepsilon.$$

In der Integrationstheorie versucht man nun, das Integral für Treppenfunktionen auf einen möglichst großen Funktionenraum stetig (und linear) fortzusetzen. An dieser Stelle begnügen wir uns zunächst damit, Σ auf die abgeschlossene Hülle $\overline{T(I, \mathbb{R})}$ stetig fortzusetzen. Das geht sehr einfach, denn die abgeschlossene Hülle des Raumes der Treppenfunktionen in $\mathcal{B}$ ist der Raum $\mathcal{R}(I)$ der Regelfunktionen auf I (Konvergenz in $\mathcal{B}$ ist die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen).

Sei also jetzt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, und (τ_n) eine Folge von Treppenfunktionen, die auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Behauptung:

1. Die Folge der Integrale $\Sigma(\tau_n)$ konvergiert gegen eine reelle Zahl A.

2. Der Grenzwert A hängt nur von f ab, nicht von der Folge (τ_n).

BEWEIS: 1) Für $n, m \in \mathbb{N}$ ist

$$|\Sigma(\tau_m) - \Sigma(\tau_n)| = |\Sigma(\tau_m - \tau_n)| \leq (b-a) \cdot \|\tau_m - \tau_n\|.$$

Mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz von (τ_n) die Konvergenz der Zahlenfolge $(\Sigma(\tau_n))$.

2) Wir betrachten zwei Folgen (τ_n) und (σ_n) von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergieren. Ist ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so können wir ein n_0 finden, so daß gilt:

$$\|f - \tau_n\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{und} \quad \|f - \sigma_n\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt daraus, daß $\|\tau_n - \sigma_n\| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ ist. Aber dann ist

$$|\Sigma(\tau_n) - \Sigma(\sigma_n)| \leq (b-a) \cdot \|\tau_n - \sigma_n\| < \varepsilon, \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Damit ist klar, daß $\Sigma(\tau_n)$ und $\Sigma(\sigma_n)$ gegen den gleichen Grenzwert konvergieren. ∎

Definition. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, (τ_n) eine Folge von Treppenfunktionen, die auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann heißt die Zahl

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \Sigma(\tau_n)$$

das *(bestimmte) Integral* von f (über $[a,b]$).

Bemerkung. Ist f eine Treppenfunktion, so ist $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \Sigma(f)$.

2.2 Satz. *$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ seien zwei Regelfunktionen, $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Dann gilt:*

1. $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$
2. $\displaystyle\int_a^b (c \cdot f(x))\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$
3. *Ist $f(x) \geq 0$ auf $[a,b]$, so ist auch* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$
4. *Es ist* $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq (b-a) \cdot \|f\|.$

BEWEIS: (1) und (2) folgen sehr einfach aus den Grenzwertsätzen und den entsprechenden Aussagen über Integrale von Treppenfunktionen.

3) Sei $f \geq 0$ und (τ_n) eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann ist auch $\tau_n^* := \tau_n + \|f - \tau_n\|$ eine Treppenfunktion, und es gilt:

$$\|f - \tau_n^*\| = \|f - \tau_n - \|f - \tau_n\|\| \leq 2 \cdot \|f - \tau_n\|.$$

Also konvergiert auch (τ_n^*) gleichmäßig gegen f. Es ist aber

$$\tau_n^* = f + (\tau_n - f) + \|\tau_n - f\| \geq f \geq 0,$$

und daher

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \Sigma(\tau_n^*) \geq 0.$$

4) Aus $-|f| \leq f \leq |f|$ folgt:

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

Das bedeutet:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

Weil $|f|$ durch $(|\tau_n|)$ approximiert wird und $\Sigma(|\tau_n|) \leq (b-a) \cdot \|\tau_n\|$ ist, folgt:

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \lim_{n\to\infty} \Sigma(|\tau_n|) \leq (b-a) \cdot \|f\|\,.$$

∎

Das oben eingeführte bestimmte Integral von Regelfunktionen ist also tatsächlich eine stetige lineare Fortsetzung des Integrals für Treppenfunktionen.

Beispiel.

Wir betrachten die Funktion $f(x) = x$, die stetig und damit eine Regelfunktion ist, auf einem beliebigen Intervall $I = [a, b]$.

Wir teilen I in n gleich lange Teile $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, mit

$$x_k := a + \frac{k}{n} \cdot (b-a).$$

Dann wird durch $\tau_n(x) := x_{k-1}$ für $x \in [x_{k-1}, x_k)$ und $\tau_n(b) := b$ eine Treppenfunktion τ_n auf $[a, b]$ definiert.

Für $x \in [x_{k-1}, x_k)$ ist $x = x_{k-1} + h$, mit

$$0 \leq h = x - x_{k-1} < x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n} \cdot (b-a).$$

Also ist

$$|f(x) - \tau_n(x)| = |(x_{k-1} + h) - x_{k-1}| = |h| < \frac{1}{n} \cdot (b - a),$$

unabhängig von k. Das zeigt, daß (τ_n) gleichmäßig gegen f konvergiert.

Außerdem ist

$$\begin{aligned}
\Sigma(\tau_n) &= \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \cdot (x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (a + \frac{k-1}{n} \cdot (b-a)) \cdot \frac{b-a}{n} \\
&= a \cdot (b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k \\
&= a \cdot (b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \frac{n-1}{n}.
\end{aligned}$$

Also konvergiert $\Sigma(\tau_n)$ für $n \to \infty$ gegen

$$\int_a^b x\,dx = \frac{2ab - 2a^2 + b^2 - 2ab + a^2}{2} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Sei $I = [a, b]$, $\mathfrak{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von I und $f : I \to \mathbb{R}$ eine (zunächst beliebige) Funktion. Für jedes i mit $1 \le i \le n$ sei ein *Zwischenpunkt* $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ gegeben. Wir fassen diese Zwischenpunkte zu einem Vektor $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ zusammen. Dann nennt man

$$\Sigma(f, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi}) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

eine *Riemannsche Summe* von f zur Zerlegung $\mathfrak{Z}$.

Definition. f heißt über I *im Riemannschen Sinne integrierbar*, falls es eine reelle Zahl A und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathfrak{Z}_0$ von I gibt, so daß gilt:

Ist $\mathfrak{Z}$ eine Zerlegung von I, die feiner als $\mathfrak{Z}_0$ ist, und ist $\boldsymbol{\xi}$ eine beliebige Wahl von Zwischenpunkten zu $\mathfrak{Z}$, so ist

$$|\Sigma(f, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi}) - A| < \varepsilon\,.$$

2.3 Satz. *Ist f eine Regelfunktion, so ist f im Riemannschen Sinne integrierbar, und die Zahl A ist das Integral von f über I.*

BEWEIS: Wir zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jede Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ mit $x_i - x_{i-1} < \delta$ gilt: Ist $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ für $i = 1, \dots, n$, so ist

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(t)\,dt \right| < \varepsilon.$$

Ist f sogar eine Treppenfunktion, so kann man sich das leicht überlegen: Es sei $\mathfrak{Z}$ eine Zerlegung der „Feinheit“ δ und $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$ die Menge der Punkte von I, in denen die Treppenfunktion f „springt“. Fällt keiner der Zwischenpunkte ξ_i mit einem a_j zusammen, so ist $\Sigma(f, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi}) = \Sigma(f)$ und nichts mehr zu zeigen. Sonst gibt es schlimmstenfalls k Zwischenpunkte ξ_{i_ν}, die jeweils mit einem a_ν zusammenfallen. Also gibt es höchstens k Intervalle der Länge δ, die unterschiedliche Beiträge zu $\Sigma(f, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi})$ bzw. $\Sigma(f)$ liefern. Da die Werte von f durch $\pm\|f\|$ beschränkt sind, gilt:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(t)\,dt \right| \le 2k \cdot \|f\| \cdot \delta.$$

Weil k konstant ist, kann man δ so klein wählen, daß der Ausdruck auf der rechten Seite $< \varepsilon$ wird.

Sei nun f eine beliebige Regelfunktion, und (τ_n) eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann ist

$$|\Sigma(f, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi}) - \Sigma(\tau_n, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi})| \le (b - a) \cdot \|f - \tau_n\|.$$

Weil $\|f - \tau_n\|$ gegen Null konvergiert, $\Sigma(\tau_n)$ von $\Sigma(\tau_n, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi})$ und $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ von $\Sigma(\tau_n)$ approximiert wird, wird auch das Integral von f über $[a, b]$ von den Riemannschen Summen $\Sigma(f, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi})$ approximiert. ∎

2.4 Satz. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und $a < c < b$. Dann ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Der BEWEIS ist trivial.

Der Vollständigkeit halber definiert man:

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0 \quad \text{und} \quad \int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx, \text{ für } a < b.$$

Aus der Monotonie-Eigenschaft des Integrals folgt: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und $m \le f(x) \le M$ für alle $x \in [a, b]$, so ist

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot (b-a).$$

2.5 Mittelwertsatz der Integralrechnung.
*Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **stetig** und $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine nirgends negative Regelfunktion, so gibt es ein $c \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(c) \cdot \int_a^b p(x)\,dx\,.$$

BEWEIS: Es sei m das globale Minimum und M das globale Maximum von f auf $[a,b]$. Dann ist $m \cdot p(x) \leq f(x)p(x) \leq M \cdot p(x)$ auf $[a,b]$, und wegen der Monotonie des Integrals ist dann auch

$$m \cdot \int_a^b p(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)p(x)\,dx \leq M \cdot \int_a^b p(x)\,dx\,.$$

Durch $F(x) := f(x) \cdot \int_a^b p(t)\,dt$ wird nun eine stetige Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert, die die Werte $m \cdot \int_a^b p(t)\,dt$ und $M \cdot \int_a^b p(t)\,dt$ in $[a,b]$ annimmt. Nach dem Zwischenwertsatz muß F in einem geeigneten Punkt $c \in [a,b]$ den Wert $\int_a^b f(x)p(x)\,dx$ annehmen. Also ist

$$f(c) \cdot \int_a^b p(t)\,dt = \int_a^b f(x)p(x)\,dx\,.$$

■

Mit $p(x) \equiv 1$ erhält man daraus:

$$\exists\, c \in [a,b] \text{ mit } \int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a).$$

2.6 Satz. *Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von Regelfunktionen, die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt \;=\; \int_a^b f(t)\,dt.$$

BEWEIS: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein n_0, so daß für $n \geq n_0$ und alle $x \in [a,b]$ gilt:

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\,.$$

Also ist

$$\begin{aligned} |\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b f_n(t)\,dt| &= |\int_a^b (f(t) - f_n(t))\,dt| \\ &\leq \int_a^b |f(t) - f_n(t)|\,dt \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Das ergibt die gewünschte Formel. ∎

2.7 Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $a \in I$ ein fester Punkt und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Wir betrachten die Funktion*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt.$$

Es gilt:

1. *F ist eine Stammfunktion von f.*
2. *Ist G irgend eine Stammfunktion von f, so gilt für jeden Punkt $b \in I$ die Beziehung*

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a).$$

BEWEIS: Da f als Regelfunktion beschränkt ist, und

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right| \leq |x - x_0| \cdot \|f\|,$$

folgt zunächst, daß F stetig ist.

Wir zeigen, daß F rechtsseitig differenzierbar ist. Dazu setzen wir

$$\Delta_+(x) := \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,dt, \quad \text{für } x > x_0.$$

Weil $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$ ist, haben wir die Darstellung

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0) \cdot \Delta_+(x), \quad \text{für } x > x_0.$$

Es bleibt noch die Stetigkeit von $\Delta_+(x)$ bei x_0 zu zeigen.

Es sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(x_0+)| < \varepsilon, \qquad \text{für } x_0 < x < x_0 + \delta.$$

Für solche x folgt:

$$\begin{aligned} |\Delta_+(x) - f(x_0+)| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0+))\, dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \cdot |x - x_0| \cdot \sup_{x_0 < x < x_0 + \delta} |f(x) - f(x_0+)| \; < \; \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist F bei x_0 rechtsseitig differenzierbar, und $F'_+(x_0) = f(x_0+)$. Der Beweis für die linksseitige Ableitung verläuft analog. In den Punkten, wo f stetig ist, ist F nun automatisch differenzierbar und $F' = f$. Damit ist F eine Stammfunktion von f.

Ist G irgend eine Stammfunktion von f, so ist $G = F + c$, und daher

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

■

In seiner „klassischen Form“ besagt der Fundamentalsatz:

2.8 Folgerung. *Ist $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$ auf I differenzierbar und $F' = f$.*

Ist G irgend eine differenzierbare Funktion auf I und $G' = f$, so ist $G - F$ konstant und $\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a)$.

Beispiele.

1. Da $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ eine Stammfunktion von x^n ist, folgt:

$$\int_a^b x^n\, dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}).$$

2. Sei $f(x) := |x - 1|$. Eine Stammfunktion ist

$$F(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + 1 & \text{falls } x \geq 1 \\ x - \frac{1}{2}x^2 & \text{falls } x < 1. \end{cases}$$

Man beachte, daß durch Addition einer Konstanten dafür gesorgt wurde, daß F in $x = 1$ stetig ist!

Nun ist z.B.

$$\int_{-2}^{2} |x-1|\,dx = F(2) - F(-2) = 1 - (-4) = 5.$$

Zum gleichen Ergebnis kommt man durch Aufspaltung des Integrals:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} |x-1|\,dx &= \int_{-2}^{1} (1-x)\,dx + \int_{1}^{2} (x-1)\,dx \\ &= (x - \frac{1}{2}x^2)\Big|_{-2}^{1} + (\frac{1}{2}x^2 - x)\Big|_{1}^{2} \\ &= (\frac{1}{2} - (-4)) + (0 - (-\frac{1}{2})) \;=\; 5.\end{aligned}$$

Welchen Weg man wählt, ist Geschmacksache.

3. Da $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ ist, und $\arctan(0) = 0$, folgt:

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt\,.$$

In der Literatur werden die Winkelfunktionen manchmal auf diese Weise eingeführt.

Da $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ ist, ergibt sich speziell:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

Das liefert eine Definition der Zahl π, die von den Winkelfunktionen unabhängig ist.

In der Praxis kommen häufig Funktionen $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ vor, die außerhalb einer endlichen Menge $E = \{x_1, \ldots, x_N\} \subset (a,b)$ stetig differenzierbar sind, und deren Ableitung $f = F'$ in jedem Punkt $x \in E$ einen rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwert besitzen. Solche Funktionen nennt man *stückweise stetig differenzierbar*. Sie sind natürlich Regelfunktionen. Sind sie zusätzlich stetig, so sind sie auch Stammfunktionen von Regelfunktionen.

Gelegentlich ist folgende Feststellung nützlich:

2.9 Satz. *Sind $f_1, f_2 : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen und gibt es eine (höchstens) abzählbare Teilmenge $Q \subset I$, so daß f_1 und f_2 auf $I \setminus Q$ übereinstimmen, so ist*

$$\int_a^b f_1(t)\,dt = \int_a^b f_2(t)\,dt.$$

BEWEIS: Seien F_1, F_2 Stammfunktionen für f_1, f_2. Außerhalb einer abzählbaren Menge $Q^* \subset I$ ist $F := F_1 - F_2$ differenzierbar und $F' = 0$. Also ist F konstant, und $F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a)$. ∎

§ 3 Uneigentliche Integrale

Wir beginnen mit einem Beispiel:

Sei $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Dann ist $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$, also f nicht zu einer Regelfunktion auf $[0,1]$ fortsetzbar.

Andererseits ist $F(x) := 2\sqrt{x}$ eine Stammfunktion von $f(x)$, und daher

$$\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx = F(1) - F(\varepsilon) = 2(1-\sqrt{\varepsilon}).$$

Nun lassen wir ε gegen Null gehen und erhalten:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 f(x)\,dx = 2.$$

Da dieser Grenzwert existiert, wollen wir ihn gerne als Integral von f über $[0,1]$ auffassen. Damit das möglich ist, müssen wir den Integralbegriff erweitern. Das geschieht in Gestalt der „uneigentlichen Integrale“.

Definition. Sei $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Der Grenzwert

$$\int_a^b f(t)\,dt := \lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)\,dt$$

wird als *uneigentliches Integral* bezeichnet. Falls er existiert, nennt man das uneigentliche Integral *konvergent*, andernfalls *divergent*.

Analog erklärt man das uneigentliche Integral einer Regelfunktion $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ durch den rechtsseitigen Limes, wie im obigen Beispiel.

Man kann zeigen, daß dieser Begriff nichts Neues bringt, wenn f schon eine Regelfunktion auf $[a,b]$ ist.

Ist f eine Regelfunktion auf einem offenen Intervall (a,b), so bildet man das uneigentliche Integral über $[a,b]$, indem man einen Punkt $c \in (a,b)$ wählt und die uneigentlichen Integrale von f über $[a,c]$ und über $[c,b]$ bildet und dann addiert. Das Ergebnis hängt nicht von der Wahl des Punktes c ab. Wichtig ist nur, daß man beide Grenzübergänge unabhängig voneinander durchführt!

Beispiel.

Wir betrachten $f(x) := \dfrac{1}{x^\alpha}$ auf $(0,b]$ für verschiedene α.

a) Ist $\alpha = 1$, so ist $F(x) := \ln(x)$ eine Stammfunktion für $f(x)$, und daher

$$\int_\varepsilon^b \frac{1}{x}\,dx = \ln(b) - \ln(\varepsilon) \longrightarrow +\infty \text{ für } \varepsilon \to 0.$$

Das uneigentliche Integral divergiert!

b) Ist $\alpha \neq 1$, so ist $F(x) := -\dfrac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$ Stammfunktion für f.

Wir betrachten zunächst den Fall $\boxed{\alpha < 1}$: dann ist

$$\int_\varepsilon^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - \varepsilon^{1-\alpha}\right).$$

Da $1-\alpha > 0$ ist, existiert $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{(1-\alpha)b^{\alpha-1}}$.

Speziell ist $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}$, also etwa $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$.

c) Ist $\boxed{\alpha > 1}$, so ist $\alpha - 1 > 0$, und $\varepsilon^{1-\alpha}$ strebt gegen $+\infty$ für $\varepsilon \to 0$. In diesem Fall divergiert das uneigentliche Integral.

Das trifft z.B. auf $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ zu.

Bisher haben wir nur über beschränkte Intervalle integriert. Manchmal möchte man jedoch die Integration auf ganz $\mathbb{R}$ oder zumindest auf eine Halbachse ausdehnen. Dann behilft man sich mit einer anderen Sorte von uneigentlichen Integralen:

Definition. Sei $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann wird der Grenzwert

$$\int_a^\infty f(t)\,dt := \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\,dt$$

als *uneigentliches Integral* bezeichnet. Konvergenz und Divergenz erklärt man wie oben.

Analog definiert man das uneigentliche Integral über $(-\infty, b]$.

Beispiel.

Wir betrachten noch einmal $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ für verschiedene α.

a) $\alpha = 1$: $\displaystyle\int_a^x \frac{1}{t}\,dt = \ln(x) - \ln(a)$ strebt für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$.

Das uneigentliche Integral divergiert also auch hier.

b) Ist $\boxed{\alpha < 1}$, so ist $\displaystyle\int_a^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left(x^{1-\alpha} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right)$, wobei $x^{1-\alpha}$ gegen $+\infty$ strebt, für $x \to \infty$. Auch dieses Integral divergiert.

c) Ist $\boxed{\alpha > 1}$, so konvergiert das uneigentliche Integral.

Das bedeutet, daß insbesondere das Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$ konvergiert, während $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ divergiert.

Wir haben damit auch gesehen, daß $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ für **kein** α erklärt werden kann!

Wie bei offenen Intervallen müssen uneigentliche Integrale über ganz $\mathbb{R}$ durch zwei voneinander unabhängige Grenzprozesse berechnet werden:

Definition. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Das *uneigentliche Integral* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ konvergiert genau dann, wenn die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt \text{ und } \int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt$$

konvergieren. Der Wert des Integrals über ganz $\mathbb{R}$ ist gleich der Summe der Werte der Teilintegrale, d.h. es ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(t)\,dt.$$

Man beachte, daß in der letzten Formel a und b unabhängig voneinander gegen die Grenzen streben. Manchmal findet man auch noch den folgenden Grenzwert:

$$HW \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt := \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{+r} f(t)\,dt.$$

Man spricht dann vom *Cauchy'schen Hauptwert*. Es kann passieren, daß dieser Hauptwert existiert, obwohl das uneigentliche Integral von f über $\mathbb{R}$ divergiert.

Wenn keine explizite Stammfunktion gegeben ist, wird es schwierig mit dem Nachweis von Konvergenz oder Divergenz eines uneigentlichen Integrals. Für den Fall gibt es aber gewisse Konvergenzkriterien.

3.1 Satz (Cauchykriterium für uneig. Integrale). *Sei $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergiert genau dann, wenn gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists C = C(\varepsilon) \geq a, \text{ s.d. } \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \text{ für } C < x_1 < x_2 \text{ ist.}$$

BEWEIS: Wir betrachten die (stetige) Funktion $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$. Das uneigentliche Integral konvergiert genau dann, wenn $A := \lim_{x\to\infty} F(x)$ eine reelle Zahl ist.

„$\Longrightarrow$“: Das uneigentliche Integral konvergiere gegen $A \in \mathbb{R}$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es ein $C \geq a$, so daß

$$|F(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } x \geq C \text{ ist.}$$

Für $C < x_1 < x_2$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right| &= |F(x_2) - F(x_1)| \\ &= |(F(x_2) - A) - (F(x_1) - A)| \\ &\leq |F(x_2) - A| + |F(x_1) - A| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

„$\Longleftarrow$“: Nun sei das Kriterium erfüllt.

Wir setzen $A_n := F(a+n) = \int_a^{a+n} f(t)\,dt$. Wir wollen zeigen, daß die Folge (A_n) gegen eine reelle Zahl A konvergiert, und daß A gerade der Grenzwert des uneigentlichen Integrals ist.

a) Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen $C = C(\varepsilon)$ im Sinne des Cauchy-Kriteriums und eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $a + n \geq C$ für $n \geq n_0$ ist. Für solche n gilt:

$$|A_n - A_{n_0}| = |F(a+n) - F(a+n_0)| < \varepsilon.$$

Daraus folgt, daß (A_n) eine Cauchyfolge ist, die dementsprechend gegen ein $A \in \mathbb{R}$ konvergieren muß.

b) Noch einmal sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, daß $|A_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|F(x) - F(a+n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_0$ und $x > a+n$ ist. Für $x > a + n_0$ und $n_0 \leq n < x - a$ ist dann

$$\begin{aligned} |F(x) - A| &= |(F(x) - A_n) - (A - A_n)| \\ &\leq |F(x) - F(a+n)| + |A - A_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. ∎

Der Nutzen des Cauchykriteriums wird sich gleich zeigen. Zuvor brauchen wir jedoch noch einen weiteren Begriff:

Definition. Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *konvergiert absolut*, falls $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ konvergiert.

Für andere Typen von uneigentlichen Integralen definiert man die absolute Konvergenz entsprechend.

3.2 Satz. *Konvergiert ein uneigentliches Integral über f absolut, so auch im gewöhnlichen Sinne.*

BEWEIS: Es ist

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx.$$

Wenn also $|f(x)|$ das Cauchykriterium erfüllt, so erst recht $f(x)$ selbst. Daraus folgt die Behauptung. ∎

Die Umkehrung des Satzes ist falsch!

Nun haben wir ein Mittel an der Hand, die Konvergenz von Integralen durch den Vergleich mit bekannteren Integralen zu beweisen:

3.3 Satz (Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale). *Es seien f und g zwei Regelfunktionen über einem Intervall I, mit $|f| \leq g$. Konvergiert das uneigentliche Integral über g, so konvergiert das uneigentliche Integral über f absolut.*

BEWEIS: Man verwende das Cauchykriterium und die Monotonie des Integrals. ∎

Beispiele.

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ konvergiert, weil $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergiert.

2. Es ist

$$\int_1^x e^{-t}\,dt = -\int_1^x (e^{-t})'\,dt = -(e^{-x} - e^{-1}),$$

und dieser Ausdruck konvergiert gegen $\dfrac{1}{e}$ für $x \to \infty$.

Also konvergiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty e^{-t}\,dt$.

Analog ist

$$\int_{-\infty}^{-1} e^t\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_{-x}^{-1} (e^t)'\,dt = \lim_{x\to\infty} (e^{-1} - e^{-x}) = e^{-1}.$$

Für $x \geq 1$ ist $x^2 \geq x$, also $e^{-x^2} \leq e^{-x}$.

Für $x \leq -1$ ist $x^2 = |x|^2 \geq |x| = -x$, also $-x^2 \leq x$. Damit ist dort $e^{-x^2} \leq e^x$, und es folgt die Konvergenz des „Fehlerintegrals" $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

3. Die Funktion $f(x) := \dfrac{\sin(x)}{x}$ ist überall stetig, und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_s^t \frac{\sin x}{x}\,dx &= -\int_s^t \frac{\cos' x}{x}\,dx \\ &= -\frac{\cos x}{x}\Big|_s^t - \int_s^t \frac{\cos x}{x^2}\,dx, \end{aligned}$$

also

$$\Big| \int_s^t \frac{\sin x}{x}\,dx \Big| \leq \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \int_s^t \frac{1}{x^2}\,dx.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite strebt für $0 < s < t$ und $s \to \infty$ gegen Null. Mit dem Cauchykriterium folgt nun, daß

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

konvergiert.

Man kann jedoch zeigen, daß $\displaystyle\int_0^\infty \Big| \frac{\sin x}{x} \Big|\,dx$ divergiert!

4. Die Funktion $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt.$$

Dabei ist $t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t}$.

Wir untersuchen zunächst die Konvergenz des uneigentlichen Integrals bei $t = 0$. Ist $x \geq 1$, so handelt es sich gar nicht um ein uneigentliches Integral, und es ist nichts zu zeigen. Ist $0 < x < 1$, so beachten wir, daß $1 < e^t \leq e$ für $0 < t \leq 1$ ist, also $|e^{-t}t^{x-1}| < t^{x-1}$. Aber das uneigentliche Integral über t^{x-1} von 0 bis 1 konvergiert.

Nun zeigen wir die Konvergenz des Integrals für $t \to \infty$. Da die Exponentialfunktion stärker als jede Potenz wächst, strebt $e^{-t}t^{x+1}$ für $t \to \infty$ gegen Null. Also gibt es eine Zahl $C > 0$, so daß $e^{-t}t^{x+1} \leq C$ für alle t ist. Daraus folgt:

$$|e^{-t}t^{x-1}| \leq C \cdot \frac{1}{t^2} \text{ für } t \geq 1.$$

Mit dem Majorantenkriterium ergibt sich die Konvergenz des Integrals.

Die so eingeführte Funktion nennt man die *Gamma-Funktion*.

3.4 Satz.

(a) $\Gamma(1) = 1$.

(b) $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$.

Beweis: a) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -(e^{-t})\Big|_0^\infty = 1\,.$

b) Es ist $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^x\,dt$. Mit partieller Integration erhält man:

$$\int_\varepsilon^r e^{-t}t^x\,dt = -e^{-t}t^x\Big|_\varepsilon^r + x\int_\varepsilon^r e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

Der erste Summand strebt (für $\varepsilon \to 0$ und $r \to \infty$) gegen 0, der zweite gegen $x \cdot \Gamma(x)$. ∎

Insbesondere folgt nun:

$$\begin{array}{rrcl} & \Gamma(2) & = & \Gamma(1+1) \;=\; 1\cdot\Gamma(1) \;=\; 1, \\ & \Gamma(3) & = & \Gamma(2+1) \;=\; 2\cdot\Gamma(2) \;=\; 2 \\ & \Gamma(4) & = & \Gamma(3+1) \;=\; 3\cdot\Gamma(3) \;=\; 2\cdot 3 \\ \text{und allgemein} & \Gamma(n+1) & = & n\cdot\Gamma(n) \;=\; n! \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Zum Schluß wollen wir noch den engen Zusammenhang zwischen Reihen und uneigentlichen Integralen hervorheben:

3.5 Vergleichssatz. *Sei $m \in \mathbb{N}$ und $f : [m, \infty) \to \mathbb{R}$ positiv und monoton fallend. Dann haben*

die Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ *und das uneigentliche Integral* $\int_m^\infty f(x)\,dx$

das gleiche Konvergenzverhalten.

Beweis: Als monotone Funktion ist f eine Regelfunktion. Auf dem Intervall $[k, k+1]$ ist

$$f(k) \ge f(x) \ge f(k+1),$$

also auch

$$f(k) \ge \int_k^{k+1} f(x)\,dx \ge f(k+1)$$

und damit

$$\sum_{k=m}^{N} f(k) \ge \int_m^{N+1} f(x)\,dx \ge \sum_{k=m+1}^{N+1} f(k).$$

Daraus folgt die Behauptung. ∎

Beispiel.

Aus dem Vergleichssatz und unseren Kenntnissen über uneigentliche Integrale folgt sofort:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergiert genau dann, wenn } \alpha > 1 \text{ ist.}$$

So ist etwa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.5}}$ konvergent.

Literatur-Verzeichnis zu Analysis 1

Bücher, die bei der Vorlesungsvorbereitung benutzt wurden:

S. Lang: *Undergraduate Analysis*, Springer, 2nd ed. 1997, DM 78,–

W. Rudin: *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 3rd ed. 1985
(gibt es auch auf Deutsch: *Analysis*, ich weiß aber den Verlag nicht)

J. Dieudonné: *Grundzüge der modernen Analysis, Band 1*, Vieweg 1975
(Original: *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press 1969)

K. Königsberger: *Analysis 1*, Springer, 4. Aufl. 1999

M. Barner / F. Flohr: *Analysis I*, Walter de Gruyter 1991

Th. Bröcker: *Analysis I*, Spektrum-Verlag, 2. Aufl. 1995

H. Grauert / I. Lieb: *Differential- und Integralrechnung I*, Springer 1967

K. Endl / W. Luh: *Analysis I, eine integrierte Darstellung*, Aula-Verlag 1986

Preiswerte Alternative:

O. Forster: *Analysis 1*, Vieweg, Neuauflage 1999, DM 29,80

Weitere Bücher zum Thema:

W. Walter: *Analysis I*, Springer, 5. Aufl. 1999, DM 49,90

H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, Teubner 1984
(anscheinend neue Auflage bei Vieweg, 1998, DM 58,–)

H. S. Holdgrün: *Analysis, Band 1*, Leins Verlag Göttingen, 1998

U. Storch / H. Wiebe: *Lehrbuch der Mathematik, Band I, Analysis einer Veränderlichen*, BI 1989 (inzwischen: Spektrum-Verlag)

Eine sehr elementare Einführung in die Grundlagen (Logik, Mengen, Abbildungen, Zahlen, Konvergenz, Differential- und Integralrechnung) findet sich in:

K. Fritzsche: *Mathematik für Einsteiger*, Spektrum-Verlag, korr. Nachdruck 1999
(2. überarbeitete Auflage: Herbst 2001)