Bergische Universität – Gesamthochschule Wuppertal – Fachbereich Mathematik

Analysis 1

Kapitel 2 Stetigkeit

Vorlesungsausarbeitung zum WS 2000/01

von Prof. Dr. Klaus Fritzsche

Inhaltsverzeichnis

§ 1 Metrische Räume

Definition. Es sei X eine beliebige nicht-leere Menge.

Unter einer *Metrik* (oder *Abstandsfunktion*) auf X versteht man eine Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$.
2. $d(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$ (Symmetrie).
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ für $x, y, z \in X$ (Dreiecks-Ungleichung).

Ein *metrischer Raum* ist eine Menge X, zusammen mit einer Metrik d auf X.

Beispiele.

1. Klassisches Beispiel ist die Menge $X = \mathbb{R}$ mit der Abstandsfunktion $d(x, y) := |x - y|$. Die ersten drei Eigenschaften sind offensichtlich erfüllt. Die Dreiecksungleichung zeigt man mit dem üblichen Trick:
$$\begin{aligned} d(x, y) &= |x - y| \\ &= |(x - z) + (z - y)| \\ &\leq |x - z| + |z - y| \\ &= d(z, x) + d(y, z). \end{aligned}$$

2. Sei (X, d_X) ein metrischer Raum und $Y \subset X$. Dann ist auch $(Y, d_X|_Y)$ ein metrischer Raum.

   Insbesondere kann man jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ als einen metrischen Raum auffassen.

3. Sei X die Menge der Einwohner von Hamburg und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$
   Auch dies ergibt einen metrischen Raum.

4. Sei $X = \mathbb{R}^2 := \{x = (x_1, x_2) \,:\, x_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, 2\}$. Das ist das mathematische Modell der Anschauungsebene. Wir setzen
$$d(x, y) := \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|).$$
   Die Eigenschaften einer Metrik sind erfüllt, wie man leicht nachrechnet. Aber es handelt sich natürlich nicht um den anschaulichen Abstandsbegriff. Den behandeln wir im folgenden Beispiel.

5. Als Menge legen wir den Raum

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \,:\, x_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$$

der geordneten n-Tupel reeller Zahlen zugrunde. In der Linearen Algebra lernt man, daß $\mathbb{R}^n$ ein reeller Vektorraum ist, d.h. man kann die Elemente von $\mathbb{R}^n$ addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren:

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) &:= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ \text{und} \qquad r \cdot (x_1, \ldots, x_n) &:= (rx_1, \ldots, rx_n). \end{aligned}$$

Bezüglich der Addition ist $\mathbb{R}^n$ eine kommutative Gruppe, mit dem Nullelement $0 = (0, \ldots, 0)$ und dem Negativen $-(x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, \ldots, -x_n)$. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} (r+s) \cdot x &= r \cdot x + s \cdot x \text{ für } r, s \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^n, \\ r \cdot (x+y) &= r \cdot x + r \cdot y \text{ für } r \in \mathbb{R},\, x, y \in \mathbb{R}^n, \\ r \cdot (s \cdot x) &= (rs) \cdot x \ \text{ für } r, s \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^n \\ \text{und} \qquad 1 \cdot x &= x \text{ für } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Die Einheitsvektoren $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$, d.h. jeder „Vektor“ $x \in \mathbb{R}^n$ besitzt eine eindeutige Darstellung als *Linearkombination* der e_i :

$$x = (x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_n \cdot e_n.$$

Das *Skalarprodukt* zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ wird definiert als

$$x \bullet y := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Es gilt:

(a) $x \bullet y = y \bullet x$. (klar!)

(b) $(x+y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z$.

Beweis:

$$(x+y) \bullet z = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = x \bullet z + y \bullet z.$$

(c) $(r \cdot x) \bullet y = r(x \bullet y)$.

(d) $x \bullet x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Und offensichtlich ist $x \bullet x = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.

Auf die anschauliche Bedeutung des Skalarproduktes können wir an dieser Stelle nicht eingehen, wir betrachten es einfach als eine Rechengröße.

Die Zahl $\|x\| := \sqrt{x \bullet x} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ nennt man die *Norm* von x. Im Falle $n = 1$ ist $\|x\| = |x|$, im Falle $n = 2$ oder $n = 3$ kommt die euklidische Länge des Vektors x heraus, gemäß Pythagoras. Die Norm erfüllt folgende Eigenschaften:

(a) Es ist immer $\|x\| \geq 0$, und es ist $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.

(b) Ist $r \in \mathbb{R}$, so ist $\|r \cdot x\| = |r| \cdot \|x\|$.

(c) Es gilt die „Schwarzsche Ungleichung“:

$$(x \bullet y)^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2.$$

Gleichheit tritt genau dann auf, wenn x und y linear abhängig sind, d.h. wenn x ein Vielfaches von y oder y ein Vielfaches von x ist.

Die Schwarzsche Ungleichung müssen wir beweisen:

Ist $y = 0$, so ergibt sich auf beiden Seiten die Null. Daher können wir voraussetzen, daß $y \neq 0$ ist. Wir benutzen eine beliebige reelle Zahl t und erhalten:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x + t \cdot y\|^2 = (x + t \cdot y) \bullet (x + t \cdot y) \\ &= x \bullet x + t^2 \cdot y \bullet y + 2t \cdot x \bullet y \end{aligned}$$

Setzen wir $t := -\dfrac{x \bullet y}{\|y\|^2}$ ein, so ergibt sich:

$$0 \leq x \bullet x + \frac{(x \bullet y)^2}{\|y\|^2} - 2 \cdot \frac{(x \bullet y)^2}{\|y\|^2} = \|x\|^2 - \frac{(x \bullet y)^2}{\|y\|^2}.$$

Multiplikation mit $\|y\|^2$ liefert die Schwarzsche Ungleichung. Offensichtlich gilt die Gleichheit genau dann, wenn $x + t \cdot y = 0$ ist, also $x = -t \cdot y$.

Behauptung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung).

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y) \bullet (x + y) \\ &= x \bullet x + 2 \cdot x \bullet y + y \bullet y \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \cdot |x \bullet y| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Jetzt können wir endlich den euklidischen Abstandsbegriff einführen:

$$\operatorname{dist}(x,y) := \|y - x\|.$$

Offensichtlich erfüllt dist die ersten drei Eigenschaften einer Metrik. Außerdem ist

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(x,y) &= \|y-x\| = \|(y-z)+(z-x)\| \\ &\le \|y-z\| + \|z-x\| \\ &= \operatorname{dist}(z,y) + \operatorname{dist}(x,z).\end{aligned}$$

Ausführlich geschrieben haben wir

$$\operatorname{dist}(x,y) = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + \cdots + (y_n-x_n)^2}.$$

Das ist eine n-dimensionale Version des Pythagoras.

6. Ein Spezialfall ist die komplexe Ebene $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Ist z eine komplexe Zahl, so nennt man $|z| := \sqrt{z\overline{z}}$ den *Betrag* der komplexen Zahl. Er entspricht der Norm des Vektors z. Durch $d(z,w) := |w-z|$ wird eine Metrik auf $\mathbb{C}$ definiert. Sie stimmt mit der euklidischen Metrik des $\mathbb{R}^2$ überein.

Es sei nun (X,d) irgend ein metrischer Raum.

Definition. Sei x_0 ein Punkt aus X und $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl. Dann heißt

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in X \,:\, d(x,x_0) < \varepsilon\}$$

die *ε-Umgebung* von x_0.

In $\mathbb{R}$ ist $U_\varepsilon(x_0) = (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ ein offenes Intervall. In $\mathbb{R}^2$ (oder $\mathbb{C}$) ist $U_\varepsilon(x_0)$ eine Kreisscheibe, wir schreiben dann auch $D_\varepsilon(x_0)$ („D“ für das englische Wort „disk“). In $\mathbb{R}^3$ ist $U_\varepsilon(x_0)$ eine Kugel, wir schreiben auch $B_\varepsilon(x_0)$ („B“ für „ball“). Der Rand gehört jeweils nicht zu der Menge.

Eine beliebige Teilmenge $M \subset X$ heißt eine *Umgebung* von x_0, falls es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subset M$ gibt. Der Punkt x_0 hat dann einen „Sicherheitsabstand“ zum Rand der Umgebung. M seinerseits kann eine beliebige Gestalt haben.

Jede ε-Umgebung von x_0 ist auch eine allgemeine Umgebung von x_0. Der Durchschnitt von zwei Umgebungen eines Punktes ist wieder eine Umgebung dieses Punktes.

1.1 Hausdorffscher Trennungssatz. *Sind $x, y \in X$ zwei Punkte mit $x \ne y$, so gibt es Umgebungen U von x und V von y, so daß $U \cap V = \varnothing$ ist.*

Beweis: Wegen $x \ne y$ ist $r := d(x,y) > 0$. Nun sei $0 < \varepsilon < r/2$, $U = U_\varepsilon(x)$ und $V = U_\varepsilon(y)$.

Wäre z ein Punkt in $U \cap V$, so wäre

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) < 2\varepsilon < r.$$

Das ist ein Widerspruch. ∎

Definition. Eine Menge $M \subset X$ heißt *offen*, falls es zu jedem $x \in M$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $U_\varepsilon(x) \subset M$ ist.

Eine Menge M ist also genau dann offen, wenn sie für jeden ihrer Punkte eine Umgebung darstellt.

1.2 Satz. *Jede ε-Umgebung ist eine offene Menge.*

Beweis: Sei $y \in U_\varepsilon(x_0)$. Wir suchen eine δ-Umgebung von y, die noch ganz in $U_\varepsilon(x_0)$ enthalten ist. Dazu sei $r := d(y, x_0)$. Dann ist $0 \le r < \varepsilon$. Man kann eine positive reelle Zahl $\delta < \varepsilon - r$ finden. Ist $x \in U_\delta(y)$, also $d(x, y) < \delta$, so ist $d(x, x_0) \le d(x, y) + d(y, x_0) < \delta + r < (\varepsilon - r) + r = \varepsilon$. Das zeigt, daß $U_\delta(y) \subset U_\varepsilon(x_0)$ ist. ∎

1.3 Satz. *Die offenen Mengen in einem metrischen Raum besitzen folgende Eigenschaften:*

1. *X und die leere Menge sind offen.*
2. *Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist wieder offen.*
3. *Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist wieder offen.*

Beweis: 1) Für X und $\varnothing$ ist der Beweis trivial.

2) Seien $M_1, \ldots, M_n$ offen und $M := M_1 \cap \ldots \cap M_n$. Ist $x \in M$, so gibt es Zahlen $\varepsilon_i > 0$ mit $U_{\varepsilon_i}(x) \subset M_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Setzt man $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, so liegt $U_\varepsilon(x)$ in M.

3) Es sei $\mathcal{M} = \{M_\iota : \iota \in I\}$ eine Familie von offenen Mengen, $M = \bigcup_{\iota \in I} M_\iota$ deren Vereinigung, x ein Element von M. Dann gibt es ein ι mit $x \in M_\iota$. Also gibt es auch ein $\varepsilon > 0$, so daß $U_\varepsilon(x) \subset M_\iota$ ist. Aber dann ist erst recht $U_\varepsilon(x) \subset M$. ∎

Definition. Eine Menge $M \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls $X \setminus M$ offen ist.

1.4 Satz. *Die abgeschlossenen Mengen in einem metrischen Raum besitzen folgende Eigenschaften:*

1. *X und die leere Menge sind abgeschlossen.*
2. *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen.*

3. *Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Regeln der Komplement-Bildung.

Definition. Sei $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt ein *Häufungspunkt* der Menge M, falls in jeder Umgebung von x_0 unendlich viele (verschiedene) Punkte von M liegen.

Eine endliche Menge besitzt keine Häufungspunkte. Auch $\mathbb{Z}$ hat keinen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$. Aber jede reelle Zahl ist ein Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$.

Beispiel.

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte Menge, $x_0 := \sup(M)$. Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

Entweder existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $M \cap U_\varepsilon(x_0) = \{x_0\}$ ist, oder für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ kann man ein Element $x_\nu \in M$ mit $x_0 - \frac{1}{\nu} \le x_\nu < x_0$ finden (denn sonst wäre x_0 nicht die kleinste obere Schranke von M). Im ersten Fall muß x_0 zu M gehören, und man nennt x_0 einen *isolierten Punkt* von M. Zugleich ist dann $x_0 = \max(M)$. Im zweiten Fall wollen wir zeigen, daß x_0 ein Häufungspunkt von M ist.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wenn es nur endlich viele x_ν in $M \cap U_\varepsilon(x_0)$ gäbe, so könnten wir darunter ein größtes Element finden, etwa x_{n_0}. Aber da $x_0 - x_{n_0} > 0$ ist, gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $1/n_1 < x_0 - x_{n_0}$. Und dann gibt es ein $x_{n_1} \in M$ mit $x_{n_0} < x_0 - 1/n_1 \le x_{n_1} < x_0$. Das ist ein Widerspruch.

Analoges gilt für das Infimum einer nach unten beschränkten Menge.

1.5 Satz. *Eine Teilmenge M eines metrischen Raumes X ist genau dann abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.*

Beweis: 1) Sei M abgeschlossen und x_0 ein Häufungspunkt von M. Wenn x_0 nicht zu M gehört, dann liegt x_0 in der offenen Menge $X \setminus M$. Also existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß auch noch $U := U_\varepsilon(x_0)$ zu $X \setminus M$ gehört. Das ist ein Widerspruch.

2) Es sei M eine Menge, die alle ihre Häufungspunkte enthält. Wir betrachten einen beliebigen Punkt $x_0 \in X \setminus M$. Da x_0 kein Häufungspunkt von M ist, gibt es eine Umgebung $V = V(x_0) \subset X$, die höchstens endlich viele Punkte $y_1, \ldots, y_m \in M$ enthält. Wegen der Hausdorffschen Trennungs-Eigenschaft gibt es Umgebungen $U_i = U_i(y_i)$ und $V_i = V_i(x_0)$ mit $U_i \cap V_i = \varnothing$, für $i = 1, \ldots, m$. Dann ist $W := V \cap V_1 \cap \ldots \cap V_m$ eine Umgebung von x_0, die keinen Punkt von M enthält.

Weil so etwas mit jedem Punkt $x_0 \in X \setminus M$ geht, ist $X \setminus M$ offen und M selbst abgeschlossen. ∎

Definition. Ist $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge und $H(M)$ die Menge aller Häufungspunkte von M, so nennt man $\overline{M} := M \cup H(M)$ die *abgeschlossene Hülle* oder den *Abschluß* von M.

1.6 Satz. *Sei M eine beliebige Teilmenge eines metrischen Raumes X. Dann gilt:*

1. *$\overline{M}$ ist abgeschlossen.*
2. *M ist genau dann abgeschlossen, wenn $M = \overline{M}$ ist.*

BEWEIS: 1) Ein Punkt $x_0 \in X$ liegt genau dann in $\overline{M}$, wenn $M \cap U_\varepsilon(x_0) \neq \varnothing$ für jedes $\varepsilon > 0$ gilt. Man nennt einen solchen Punkt auch einen *Berührungspunkt* von M.

x_0 ist genau dann **kein** Berührungspunkt von M, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $M \cap U_\varepsilon(x_0) = \varnothing$ ist. Ist $y \in U_\varepsilon(x_0)$, so gibt es ein $\delta > 0$, so daß $U_\delta(y) \subset U_\varepsilon(x_0) \subset X \setminus M$ ist. Aber dann kann y kein Häufungspunkt von M sein. Das bedeutet, daß $X \setminus \overline{M}$ offen ist, also $\overline{M}$ abgeschlossen.

2) Es ist $M \subset \overline{M}$. Ist M abgeschlossen, so ist $H(M) \subset M$, also sogar $M = \overline{M}$. Ist umgekehrt diese Gleichheit gegeben, so ist M abgeschlossen, nach (1). ∎

Es ist $\overline{(a,b)} = [a,b]$, und im $\mathbb{R}^n$ ist $\overline{U_\varepsilon(x_0)} = \{x \in X \,:\, d(x,x_0) \leq \varepsilon\}$. In einem beliebigen metrischen Raum gilt i.a. nur „$\subset$“. So ist z.B. im metrischen Raum $\mathbb{Z}$ jede Teilmenge zugleich offen und abgeschlossen, und es ist dort $U_1(0) = \{z \in \mathbb{Z} \,:\, |z| < 1\} = \{0\}$, $\overline{U_1(0)} = \{0\}$ und $\{z \in \mathbb{Z} \,:\, |z| \leq 1\} = \{-1, 0, 1\}$.

Definition. Eine Folge (x_ν) von Punkten in X *konvergiert* gegen einen Punkt x_0, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_0, \text{ so daß } \forall\, \nu \geq \nu_0 \text{ gilt: } d(x_\nu, x_0) < \varepsilon.$$

Man schreibt dann: $\lim\limits_{\nu \to \infty} x_\nu = x_0$.

Man kann auch sagen: (x_ν) konvergiert in X gegen x_0, falls $d(x_\nu, x_0)$ in $\mathbb{R}$ gegen 0 konvergiert.

Im metrischen Raum $\mathbb{R}$ ergibt das den bereits bekannten Konvergenzbegriff. Wie dort folgt auch in beliebigen Räumen, daß der Grenzwert eindeutig bestimmt ist.

Betrachten wir jetzt den $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik. Ist $x_\nu = (x_1^{(\nu)}, \ldots, x_n^{(\nu)})$ eine Punktfolge und $x_0 = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ ein fester Punkt, so ist

$$\operatorname{dist}(x_\nu, x_0) = \|x_\nu - x_0\| = \sqrt{(x_1^{(\nu)} - x_1^{(0)})^2 + \cdots + (x_n^{(\nu)} - x_n^{(0)})^2}.$$

$\mathrm{dist}(x_\nu, x_0)$ konvergiert offensichtlich genau dann gegen 0, wenn $|x_i^{(\nu)} - x_i^{(0)}|$ für jedes i gegen Null konvergiert. Die Folge (x_ν) konvergiert also genau dann, wenn alle Komponenten $(x_i^{(\nu)})$ konvergieren.

1.7 Satz. *Eine Teilmenge M in einem metrischen Raum X ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt:*

Ist (x_ν) eine Folge in M, die in X konvergiert, so liegt der Grenzwert ebenfalls in M.

BEWEIS: 1) Sei M abgeschlossen, (x_ν) eine Folge in M und $x_0 = \lim_{\nu\to\infty} x_\nu$. Ist die Menge der Folgeglieder endlich, so muß x_0 eines dieser Folgeglieder sein und daher in M liegen. Ist sie unendlich, so ist x_0 ein Häufungspunkt von M und es folgt ebenfalls, daß x_0 in M liegt.

2) M erfülle das Kriterium und x_0 sei ein Häufungspunkt von M. Dann liegt in jeder $(1/\nu)$-Umgebung von x_0 ein Punkt $x_\nu \in M$. Offensichtlich konvergiert (x_ν) gegen x_0. Also liegt x_0 schon in M. Wir haben gezeigt, daß M abgeschlossen ist. ∎

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, falls es ein $R > 0$ gibt, so daß M in der Kugel $B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,0) < R\}$ enthalten ist. Eine Folge im $\mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, wenn die Menge der Folgeglieder beschränkt ist. Es gilt folgende Verallgemeinerung des Satzes von **Bolzano-Weierstraß**:

1.8 Satz. *Sei $x_\nu = (x_1^{(\nu)}, \ldots, x_n^{(\nu)})$ eine beschränkte Folge im $\mathbb{R}^n$. Dann besitzt (x_ν) eine konvergente Teilfolge.*

BEWEIS: Es gibt ein $R > 0$, so daß alle x_ν in $B_R(0)$ liegen. Aber dann liegen sie erst recht in $I^n = I \times \ldots \times I$, mit $I := [-R, R]$.

$(x_1^{(\nu)})$ besitzt eine konvergente Teilfolge $(x_1^{(\nu(i_1))})$ mit einem Grenzwert $x_1^{(0)} \in I$.

$(x_2^{(\nu(i_1))})$ besitzt eine konvergente Teilfolge $(x_2^{(\nu(i_2))})$ mit einem Grenzwert $x_2^{(0)} \in I$, usw.

Schließlich erhält man eine konvergente Teilfolge $(x_{\nu(i_n)})$ von (x_ν). ∎

Definition. Eine Folge (x_ν) in einem metrischen Raum X heißt eine *Cauchy-Folge*, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\nu_0,\ \text{so daß}\ \forall\,\nu,\mu \geq \nu_0\ \text{gilt: } d(x_\nu, x_\mu) < \varepsilon.$$

1.9 Satz. *Ist (x_ν) konvergent, so ist (x_ν) eine Cauchyfolge.*

BEWEIS: Sei x_0 der Grenzwert der Folge, $\varepsilon > 0$ vorgegeben und ν_0 so gewählt, daß $d(x_\nu, x_0) < \varepsilon/2$ für $\nu \geq \nu_0$ ist. Dann folgt für $\nu, \mu \geq \nu_0$:

$$d(x_\nu, x_\mu) \le d(x_\nu, x_0) + d(x_0, x_\mu) < \varepsilon.$$

Also ist (x_ν) eine Cauchy-Folge. ∎

Definition. Ein metrischer Raum X heißt *vollständig*, falls jede Cauchyfolge in X einen Grenzwert in X hat.

Beispiele.

1. $\mathbb{R}$ ist vollständig.

   Um das zu zeigen, betrachten wir eine Cauchyfolge (x_ν). Wir müssen einen Grenzwert finden. Zunächst ist (x_ν) beschränkt: ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es ein ν_0, so daß $|x_\nu - x_{\nu_0}| < \varepsilon$ für alle $\nu \ge \nu_0$ ist. Ist außerdem

   $$r := \max(\varepsilon, |x_1 - x_{\nu_0}|, \ldots, |x_{\nu_0 - 1} - x_{\nu_0}|),$$

   so liegen alle Folgeglieder in $[x_{\nu_0} - r, x_{\nu_0} + r]$.

   Wir wissen nun, daß eine Teilfolge (x_{ν_i}) existiert, die gegen eine reelle Zahl x_0 konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt ein ν_0, so daß $|x_\nu - x_\mu| < \varepsilon/2$ für $\nu, \mu \ge \nu_0$ ist. Und es gibt ein i_0 mit $\nu_{i_0} \ge \nu_0$ und $|x_{\nu_{i_0}} - x_0| < \varepsilon/2$. Daraus folgt:

   $$|x_\nu - x_0| \le |x_\nu - x_{\nu_{i_0}}| + |x_{\nu_{i_0}} - x_0| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

   (x_ν) konvergiert selbst gegen x_0.

   Das liefert das „Cauchy-Kriterium“ für die Konvergenz von Zahlenfolgen:

   Eine Folge (x_ν) in $\mathbb{R}$ ist genau dann konvergent, wenn gilt:

   $$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu_0 \text{ s.d. } \forall \nu, \mu \ge \nu_0 \; : \; |x_\nu - x_\mu| < \varepsilon.$$

   Dies ist eine weitere Möglichkeit, die Konvergenz einer Zahlenfolge festzustellen, ohne den Grenzwert zu kennen.

2. Da die Konvergenz von Vektorfolgen auf die Komponenten zurückgeführt werden kann, ergibt sich auch, daß der $\mathbb{R}^n$ (und insbesondere $\mathbb{C}$) vollständig ist.

3. Jede abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raumes ist wieder ein vollständiger Raum.

4. Ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ ist nicht vollständig. Auch die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist nicht vollständig.

Definition. Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes X heißt *kompakt*, falls jede Punktfolge in K eine (in K) konvergente Teilfolge besitzt.

1.10 Satz von Heine-Borel. *Eine Teilmenge K des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

BEWEIS: 1) Sei K kompakt. Ist K nicht beschränkt, so gibt es eine Punktfolge (x_ν) in K mit $\|x_\nu\| > \nu$. Dann ist auch jede Teilfolge von (x_ν) unbeschränkt. Das ist ein Widerspruch.

Sei nun x_0 ein Häufungspunkt von K. Dann gibt es für jedes ν einen Punkt $x_\nu \in K \cap B_{1/\nu}(x_0)$. Die Folge (x_ν) konvergiert gegen x_0, und nach Voraussetzung konvergiert eine Teilfolge gegen ein Element von K. Das muß dann aber x_0 sein. Also ist K abgeschlossen.

2) Sei jetzt K als abgeschlossen und beschränkt vorausgesetzt. Eine Punktfolge in K ist dann ebenfalls beschränkt und eine Teilfolge davon konvergiert gegen ein $x_0 \in X$. Aber weil K abgeschlossen ist, liegt x_0 in K. ■

Bemerkung. Genau wie im $\mathbb{R}^n$ beweist man auch in beliebigen metrischen Räumen: Jede kompakte Teilmenge ist abgeschlossen.

1.11 Satz. *Ein kompakter metrischer Raum ist vollständig.*

BEWEIS: Ist (x_ν) eine Cauchyfolge in einem kompakten Raum X, so besitzt sie eine konvergente Teilfolge. Wie im Beweis der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zeigt man nun, daß bereits die ursprüngliche Folge gegen den Grenzwert der Teilfolge konvergiert. ■

Umgekehrt braucht ein vollständiger metrischer Raum nicht kompakt zu sein, wie man am Beispiel $X = \mathbb{R}$ sieht.

Beispiele.

1. In $\mathbb{R}$ ist jedes abgeschlossene Intervall kompakt. Im $\mathbb{R}^n$ ist jede *abgeschlossene Kugel*
$$\overline{B_r(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \|x - x_0\| \le r\}$$
kompakt. **Vorsicht!** In einem beliebigen metrischen Raum braucht eine solche abgeschlossene „Kugel" nicht kompakt zu sein! Auch dann nicht, wenn oben die Gleichheit gilt.

2. Jede endliche Teilmenge eines metrischen Raumes ist kompakt.

3. Sei (x_ν) eine konvergente Punktfolge in einem metrischen Raum X, mit Grenzwert x_0. Dann ist $M := \{x_0\} \cup \{x_\nu \,:\, \nu \in \mathbb{N}\}$ kompakt. Man sieht das so: Jede Folge in M ist eine Teilfolge von (x_ν), oder die Folgeglieder nehmen nur endlich viele Werte an. In beiden Fällen gibt es eine Teilfolge, die in M konvergiert.

4. Ist X ein kompakter metrischer Raum und $M \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge, so ist auch M kompakt. Der Beweis ist trivial.

§ 2 Stetige Abbildungen

Definition. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. f heißt *stetig* in $x_0 \in X$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ s.d. } \forall x \in X \text{ mit } d_X(x, x_0) < \delta \text{ gilt: } d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

f heißt stetig, falls f in jedem Punkt von X stetig ist.

Ist $M \subset \mathbb{R}$, so ist eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ stetig in x_0, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ s.d. gilt: Ist } |x - x_0| < \delta, \text{ so ist } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Anschaulich bedeutet dies: Man kann eine beliebig kleine Schranke ε vorgeben. Wenn x nur nahe genug bei x_0 ist, so sind die Bildpunkte $f(x)$ und $f(x_0)$ um weniger als ε voneinander entfernt.

2.1 Satz. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *f ist stetig in x_0.*
2. *Zu jeder Umgebung $V = V(f(x_0))$ gibt es eine Umgebung $U = U(x_0)$ mit $f(U) \subset V$.*
3. *Für jede Folge (x_ν) in X mit $\lim_{\nu \to \infty} x_\nu = x_0$ gilt auch $\lim_{\nu \to \infty} f(x_\nu) = f(x_0)$.*

BEWEIS: (1) $\Longrightarrow$ (2):

Ist V eine Umgebung von $f(x_0)$, so enthält V eine ε-Umgebung von $f(x_0)$. Nach Definition der Stetigkeit gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0))$. Wir setzen $U := U_\delta(x_0)$.

(2) $\Longrightarrow$ (3):

Sei (x_ν) eine Folge in X, die gegen x_0 konvergiert. Außerdem sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt eine Umgebung $U = U(x_0)$ mit $f(U) \subset U_\varepsilon(f(x_0))$. Für ein geeignetes ν_0 liegen alle Folgeglieder x_ν mit $\nu \geq \nu_0$ in U. Dann ist $d_Y(f(x_\nu), f(x_0)) < \varepsilon$ für $\nu \geq \nu_0$. Das bedeutet, daß $(f(x_\nu))$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.

(3) $\Longrightarrow$ (1):

Es sei das Folgenkriterium erfüllt. Wir nehmen an, f sei nicht stetig in x_0. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß zu jedem $\nu \in \mathbb{N}$ ein x_ν mit $d_X(x_\nu, x_0) < 1/\nu$ und $d_Y(f(x_\nu), f(x_0)) \geq \varepsilon$ existiert. Aber das kann nicht sein. ∎

Auch für die globale Stetigkeit haben wir äquivalente Formulierungen.

2.2 Satz. *Folgende Aussagen über $f : X \to Y$ sind äquivalent:*

1. *f ist stetig.*

2. *Ist $M \subset Y$ offen, so ist auch $f^{-1}(M) \subset X$ offen.*

3. *Ist $A \subset Y$ abgeschlossen, so ist auch $f^{-1}(A) \subset X$ abgeschlossen.*

BEWEIS: (1) $\Longrightarrow$ (3):

Sei f stetig, $A \subset Y$ abgeschlossen und (x_ν) eine Punktfolge in $f^{-1}(A)$, die gegen ein $x_0 \in X$ konvergiert. Dann liegen die Punkte $y_\nu := f(x_\nu)$ in A, und die Folge (y_ν) konvergiert gegen $f(x_0)$. Weil A abgeschlossen ist, gehört $f(x_0)$ auch zu A, also x_0 zu $f^{-1}(A)$. Das bedeutet, daß $f^{-1}(A)$ abgeschlossen ist.

(3) $\Longrightarrow$ (2):

Trivial, weil $X \setminus f^{-1}(M) = f^{-1}(Y \setminus M)$ ist.

(2) $\Longrightarrow$ (1):

Sei $x_0 \in X$ und $y_0 := f(x_0)$. Sei außerdem ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Voraussetzung ist $f^{-1}(U_\varepsilon(y_0))$ eine offene Menge, die den Punkt x_0 enthält. Also gibt es ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(y_0))$, also $f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0))$. Das ergibt die Stetigkeit in x_0 und damit in jedem beliebigen Punkt von X. ∎

2.3 Satz. *Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen zwischen metrischen Räumen. Ist f stetig in $x_0 \in X$ und g stetig in $y_0 := f(x_0) \in Y$, so ist auch $g \circ f : X \to Z$ stetig in x_0.*

BEWEIS: Sei $z_0 := g(y_0) = (g \circ f)(x_0)$ und $W = W(z_0) \subset Z$ eine Umgebung. Dann gibt es eine Umgebung $V = V(y_0) \subset Y$ mit $g(V) \subset W$, sowie eine Umgebung $U = U(x_0) \subset X$ mit $f(U) \subset V$. Es folgt, daß $(g \circ f)(U) \subset W$ ist, also $g \circ f$ stetig in x_0. ∎

Beispiele.

1. Besteht Y nur aus einem einzigen Punkt y_0, so ist jede Abbildung $f : X \to Y$ stetig, denn es ist $f^{-1}(Y) = X$ und Y die einzige offene Umgebung von y_0.

   Insbesondere ist jede konstante Funktion auf $\mathbb{R}$ stetig.

2. Ist X ein metrischer Raum, so ist die identische Abbildung $\mathrm{id}_X : X \to X$ stetig, denn $\mathrm{id}_X^{-1}(M) = M$ für jede (und insbesondere jede offene) Teilmenge von X.

   Speziell ist die Funktion $f(x) = x$ auf $\mathbb{R}$ stetig.

3. Ist $f : X \to Y$ stetig (in x_0) und $M \subset X$ eine Teilmenge (mit $x_0 \in M$), so ist auch $f|_M : M \to Y$ stetig (in x_0).

Es seien nun eine Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ und zwei Funktionen $f_1 : (-\infty, x_0] \to \mathbb{R}$ und $f_2 : [x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben. Sind f_1, f_2 beide stetig und $f_1(x_0) = f_2(x_0)$, so ist auch

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & \text{für } x \leq x_0, \\ f_2(x) & \text{für } x > x_0 \end{cases}$$

stetig auf $\mathbb{R}$. Dazu brauchen wir nur das Verhalten bei x_0 zu untersuchen. Sei $y_0 := f(x_0) = f_1(x_0) = f_2(x_0)$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt Zahlen $\delta_1, \delta_2 > 0$, so daß $|f_1(x) - y_0| < \varepsilon$ für $x \leq x_0$ und $|x - x_0| < \delta_1$ ist, sowie $|f_2(x) - y_0| < \varepsilon$ für $x > x_0$ und $|x - x_0| < \delta_2$. Setzen wir $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$, so ist $|f(x) - y_0| < \varepsilon$ für $|x - x_0| < \delta$.

4. Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt *linear*, falls gilt:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y), \text{ für } x, y \in \mathbb{R}^n, \\ \text{und} \qquad f(\lambda x) &= \lambda \cdot f(x) \text{ für } \lambda \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^n$ mit $e_1, \ldots, e_n$, so erhalten wir für $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &= \|\sum_{i=1}^n x_i \cdot f(e_i)\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|f(e_i)\| \\ &\leq C \cdot \max_i |x_i| \\ &\leq C \cdot \|x\|, \end{aligned}$$

wobei $C = \sum_{i=1}^n \|f(e_i)\|$ eine nur von f abhängige Konstante ist.

Aus der gewonnenen Ungleichung leitet man sofort ab, daß f im Nullpunkt stetig ist. Es ist jetzt aber auch

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| \leq C \cdot \|x - y\|.$$

Daraus folgt, daß f überall stetig ist.

Insbesondere ist jede Funktion $f(x) := ax$ (mit $a \neq 0$) stetig. Zusammen mit dem vorigen Beispiel ergibt das auch die Stetigkeit der Funktion $f(x) := |x|$.

5. Es sei X ein metrischer Raum, und es seien stetige Abbildungen $f, g : X \to \mathbb{R}^m$ gegeben. Dann sind auch die Abbildungen $f + g : X \to \mathbb{R}^m$ und $f \bullet g : X \to \mathbb{R}$ (mit $(f \bullet g)(x) := f(x) \bullet g(x)$) stetig.

Beweis: Man braucht nur die Stetigkeit in einem Punkt zu untersuchen und benutzt am besten das Folgenkriterium und die Konvergenzsätze, z.B.:

Aus $x_\nu \to x_0$ folgt: $f(x_\nu) \to f(x_0)$ und $g(x_\nu) \to g(x_0)$, und dann

$$(f+g)(x_\nu) = f(x_\nu) + g(x_\nu) \to f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0).$$

Daraus folgt z.B., daß alle reellen Polynome stetig sind.

6. Eine Abbildung $f = (f_1, \ldots, f_m) : X \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig, wenn alle Komponenten-Funktionen $f_i : X \to \mathbb{R}$ stetig sind. Eine komplexe Funktion f ist deshalb genau dann stetig, wenn Realteil und Imaginärteil stetig sind, und dann folgt, daß auch $\overline{f}$ stetig ist. Mit ähnlichen Argumenten wie oben folgt, daß auch alle komplexen Polynome stetig sind.

2.4 Satz. *Sei X ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist die Menge $M := \{x \in X : f(x) > 0\}$ offen.*

BEWEIS: Sei $x_0 \in M$, $r_0 := f(x_0)$. Ist $0 < \varepsilon < r_0$, so gibt es ein $\delta > 0$, so daß $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $x \in U_\delta(x_0)$ ist. Für jedes $x \in U_\delta(x_0)$ ist dann $0 < r_0 - \varepsilon = f(x_0) - \varepsilon < f(x)$, also $x \in M$. Daraus folgt, daß M offen ist. ∎

2.5 Folgerung 1. *$f, g : X \to \mathbb{R}$ seien stetig. Dann gilt:*

1. *$\{x \in X : f(x) < g(x)\}$ ist offen.*
2. *$\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ und $\{x \in X : f(x) \le g(x)\}$ sind abgeschlossen.*

BEWEIS: 1) $\{f < g\} = \{g - f > 0\}$ ist offen, wegen des Satzes.

2) Da auch $\{f > g\}$ offen ist, muß $\{f \ne g\}$ offen sein, also $\{f = g\}$ abgeschlossen. Schließlich ist $\{f \le g\}$ das Komplement von $\{f > g\}$, also ebenfalls abgeschlossen. ∎

2.6 Folgerung 2. *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in X$ und $f(x_0) \ne 0$. Dann gibt es eine Umgebung $U = U(x_0) \subset X$, so daß $f(x) \ne 0$ für $x \in U$ ist. Die auf U definierte Funktion $\dfrac{1}{f}$ ist stetig in x_0.*

BEWEIS: Der erste Teil der Aussage folgt sofort aus den obigen Resultaten. Die Stetigkeit von $1/f$ ergibt sich aus dem Folgenkriterium und den Konvergenzsätzen. ∎

2.7 Folgerung 3. *Sind f und g reelle Polynome, so ist die „rationale Funktion“ f/g stetig auf der Menge $\{x \in \mathbb{R} : g(x) \ne 0\}$.*

2.8 Satz. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Ist $K \subset X$ kompakt, so ist auch $f(K)$ kompakt.*

BEWEIS: Sei (y_ν) eine Folge von Punkten in $f(K)$. Dann gibt es zu jedem ν einen Punkt $x_\nu \in K$ mit $f(x_\nu) = y_\nu$. Weil K kompakt ist, besitzt die Folge (x_ν) eine konvergente Teilfolge (x_{ν_i}), ihr Grenzwert in K sei mit x_0 bezeichnet. Wegen der Stetigkeit von f konvergiert (y_{ν_i}) gegen $f(x_0)$, und dieser Punkt liegt in $f(K)$. ■

2.9 Folgerung. *Sei X ein kompakter metrischer Raum. Dann nimmt jede Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ auf X ihr Maximum und ihr Minimum an.*

Beweis: $f(X) \subset \mathbb{R}$ ist kompakt, also abgeschlossen und beschränkt. Demnach existieren $y_- := \inf f(X)$ und $y_+ := \sup f(X)$, und sie sind in $f(X)$ enthalten. Also gibt es Punkte x_- und x_+ in X mit $f(x_-) = y_-$ und $f(x_+) = y_+$. ■

Insbesondere nimmt eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (auf einem abgeschlossenen Intervall) Maximum und Minimum an und ist demnach beschränkt. Zwischen dem minimalen und dem maximalen Wert gibt es keine Lücken, wie die folgenden Sätze zeigen.

2.10 Satz von Bolzano. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = 0$.*

Beweis: Die Menge $N := \{x \in [a, b] \, : \, f(x) < 0\}$ ist nicht leer und nach oben beschränkt, also existiert $x_0 := \sup(N)$, und es ist $a \leq x_0 \leq b$. Weil N offen in $[a, b]$ ist, muß $x_0 > a$ sein. Daher gibt es eine Folge (x_ν) in N mit $a < x_\nu < x_0$ und $\lim\limits_{\nu \to \infty} x_\nu = x_0$. Weil $f(x_\nu) < 0$ für alle ν ist, muß auch $f(x_0) \leq 0$ sein. Insbesondere ist $x_0 < b$.

Wäre $f(x_0) < 0$, so wäre $x_0 \in N$. Aus der Offenheit von N folgt dann, daß x_0 keine obere Schranke von N sein kann. Das ist ein Widerspruch. Es muß $f(x_0) = 0$ sein. ■

2.11 Zwischenwertsatz. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < c < f(b)$. Dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$.*

Beweis: Sei $F(x) := f(x) - c$. Dann ist $F(a) < 0$ und $F(b) > 0$, und nach dem Satz von Bolzano existiert ein $x \in [a, b]$ mit $F(x) = 0$. Also ist $f(x) = c$. ■

Insbesondere folgt, daß das stetige Bild eines abgeschlossenen Intervalls wieder ein abgeschlossenes Intervall ist.

Definition. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt ein *Homöomorphismus* oder eine *topologische Abbildung*, falls gilt:

1. f ist stetig,
2. f ist bijektiv,
3. f^{-1} ist ebenfalls stetig.

2.12 Satz. *Sei X kompakt und $f : X \to Y$ stetig und bijektiv. Dann ist f ein Homöomorphismus.*

BEWEIS: Da f bijektiv ist, existiert $f^{-1} : Y \to X$. Zu zeigen bleibt, daß diese Abbildung stetig ist. Dazu sei $A \subset X$ abgeschlossen. Dann ist A sogar kompakt, und auch $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ ist kompakt und insbesondere abgeschlossen. ∎

Unter einem *Intervall* in $\mathbb{R}$ verstehen wir hier eine Menge der Gestalt $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$, $[a, \infty)$, (a, ∞) oder $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *monoton* (bzw. *streng monoton*) *wachsend*, falls für beliebige Elemente $x_1, x_2 \in I$ gilt:

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \le f(x_2) \quad (\text{bzw. } f(x_1) < f(x_2)).$$

Analog heißt f *monoton* (bzw. *streng monoton*) *fallend*, falls gilt:

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \ge f(x_2) \quad (\text{bzw. } f(x_1) > f(x_2)).$$

In beiden Fällen sagen wir, f ist monoton (bzw. streng monoton).

2.13 Satz. *Die folgenden Aussagen über eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind äquivalent:*

1. *f ist streng monoton.*
2. *f ist injektiv.*
3. *$f : [a, b] \to f([a, b])$ ist ein Homöomorphismus.*

BEWEIS: (1) $\Longrightarrow$ (2) ist trivial.

(2) $\Longrightarrow$ (3): $f : [a, b] \to f([a, b])$ ist nach Voraussetzung stetig und bijektiv. Weil $[a, b]$ kompakt ist, ist f sogar ein Homöomorphismus.

(3) $\Longrightarrow$ (1): Aus der Voraussetzung folgt insbesondere, daß f injektiv ist. Also ist $f(a) \ne f(b)$, und wir können annehmen, daß $f(a) < f(b)$ ist. Nun betrachten wir zwei beliebige Zahlen x_1, x_2 mit $a \le x_1 < x_2 \le b$ und bilden die Funktion

$$g(t) := f(a + t(x_1 - a)) - f(b - t(b - x_2)), \qquad \text{für } 0 \le t \le 1.$$

g ist als Zusammensetzung stetiger Funktionen selbst wieder stetig. Es ist $g(0) = f(a) - f(b) < 0$ und $g(1) = f(x_1) - f(x_2)$. Wäre $g(1) > 0$, so müßte nach Bolzano $g(t) = 0$ für ein $t \in [0, 1]$ gelten, also $f(a + t(x_1 - a)) = f(b - t(b - x_2))$. Da $a \le a + t(x_1 - a) \le x_1 < x_2 \le b - t(b - x_2) \le b$ ist, ergäbe sich ein Widerspruch zur Injektivität von f.

Da auch $g(1) = 0$ unmöglich ist, muß $g(1) < 0$ sein, also $f(x_1) < f(x_2)$. f ist streng monoton wachsend. Wären wir von der Ungleichung $f(a) > f(b)$ ausgegangen, so hätten wir herausbekommen, daß f streng monoton fällt. ∎

Wir haben gezeigt, daß eine streng monotone stetige Funktion umkehrbar ist und daß die Umkehrfunktion wieder stetig und streng monoton ist.

Da $f(x) := x^n$ für $x \geq 0$ streng monoton wachsend ist, ist $\sqrt[n]{x}$ ebenfalls stetig und streng monoton. Als Anwendung erhält man z.B., daß $z \mapsto |z|$ stetig auf $\mathbb{C}$ und $x \mapsto \|x\|$ stetig auf dem $\mathbb{R}^n$ ist.

Bemerkung. Eine monotone Funktion braucht nicht stetig zu sein. Allerdings hat sie keine zu schlimmen Unstetigkeitsstellen, wie wir weiter unten sehen werden.

Definition. Sei X ein metrischer Raum, $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge, $x_0 \in X$ ein Häufungspunkt von M (der zu M gehören kann, aber nicht muß) und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Wir sagen, *der Grenzwert von $f(x)$ für x gegen x_0* existiert, falls es eine reelle Zahl c gibt, so daß die Funktion $\widehat{f} : M \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$\widehat{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq x_0 \\ c & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

stetig in x_0 ist.

Wir schreiben dann: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$.

Der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$ existiert genau dann, wenn es ein c gibt, so daß für **alle** Folgen (x_ν) in M mit $x_\nu \neq x_0$ und $\lim\limits_{\nu \to \infty} x_\nu = x_0$ gilt: $\lim\limits_{\nu \to \infty} f(x_\nu) = c$.

Bei Funktionen, die auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ definiert sind, kann man zusätzlich zwischen Annäherung von links und von rechts unterscheiden. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $U = U(x_0) \subset \mathbb{R}$ eine Umgebung und $f : U \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so daß für alle Folgen (x_ν) in U mit $x_\nu < x_0$ und $x_\nu \to x_0$ der Grenzwert $\lim\limits_{\nu \to \infty} f(x_\nu)$ existiert und $= c$ ist, so sagt man, daß der *linksseitige Grenzwert*

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) =: f(x_0-)$$

existiert (und $= c$ ist). Analog definiert man den rechtsseitigen Grenzwert $f(x_0+) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$. Wenn beide Grenzwerte existieren und übereinstimmen, so ist f stetig in x_0 (den sehr einfachen Beweis dafür möge sich jeder selbst überlegen). Wenn die Grenzwerte existieren, aber verschieden sind, dann sprechen wir von einer *Sprungstelle* (der Höhe $|f(x_0+) - f(x_0-)|$).

Ist nun f eine monoton wachsende Funktion auf einem Intervall I und $x_0 \in I$ kein Randpunkt des Intervalls, so folgt schon, daß der linksseitige und der rechtsseitige Limes von $f(x)$ in x_0 existiert, und es ist $f(x_0-) \leq f(x_0) \leq f(x_0+)$.

Zum Beweis betrachte man die Menge $M := \{f(x) \,:\, x \in I \text{ und } x < x_0\}$. Offensichtlich ist M nicht leer und durch $f(x_0)$ nach oben beschränkt. Also existiert $y_0^- := \sup(M) \leq f(x_0)$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es ein $x_0^* < x_0$ mit

$f(x_0^*) > y_0^- - \varepsilon$. Sei (x_ν) eine Folge, die von unten gegen x_0 konvergiert. Dann gibt es ein ν_0, so daß $x_0^* < x_\nu < x_0$ für $\nu \geq \nu_0$ ist. Aber dann folgt:

$$y_0^- - \varepsilon < f(x_0^*) \leq f(x_\nu) \leq y_0^- < y_0^- + \varepsilon,$$

also $|f(x_\nu) - y_0^-| < \varepsilon$. Es ist $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = y_0^-$. Genauso funktioniert es auf der rechten Seite von x_0.

Für monoton fallende Funktionen gelten entsprechende Aussagen. Allgemein hat eine monotone Funktion also höchstens Sprungstellen als Unstetigkeitsstellen.

2.14 Satz. *f, g seien reelle Polynome, $x_0 \in \mathbb{R}$ eine gemeinsame Nullstelle. Ist die Ordnung der Nullstelle von f größer oder gleich der Ordnung der Nullstelle von g, so existiert der Limes von $f(x)/g(x)$ für $x \to x_0$.*

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es Zerlegungen $f(x) = (x - x_0)^k \cdot u(x)$ und $g(x) = (x - x_0)^l \cdot v(x)$, mit $k \geq l$, $u(x_0) \neq 0$ und $v(x_0) \neq 0$.

Für $x \neq x_0$ ist dann
$$\frac{f(x)}{g(x)} = (x - x_0)^{k-l} \cdot \frac{u(x)}{v(x)},$$
und die rechte Seite ist stetig in x_0. ∎

Man sagt dann, f/g hat in x_0 eine hebbare Definitionslücke.

Definition. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt *gleichmäßig stetig*, falls f folgende Eigenschaft besitzt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0, \text{ s.d. } \forall x, y \in X \text{ mit } d_X(x, y) < \delta \text{ gilt: } d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Beispiel.

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, so gibt es eine Konstante $C > 0$, so daß

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C \cdot \|x - y\|$$

ist, für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ist nun ein $\varepsilon > 0$ gegeben, so wähle man $\delta < \dfrac{\varepsilon}{C}$. Ist $\|x - y\| < \delta$, so ist $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. Also ist f gleichmäßig stetig.

Trivialerweise gilt: Ist f gleichmäßig stetig, so ist f auch stetig. Die Umkehrung ist i.a. falsch, wie das Beispiel der Funktion $f(x) := x^2$ zeigt: für festes $h > 0$ strebt $(x + h)^2 - x^2 = 2xh + h^2$ für $x \to \infty$ gegen Unendlich. Zu festem ε braucht man mit wachsendem x ein immer kleineres δ. f ist also nicht gleichmäßig stetig.

Allerdings gilt:

2.15 Satz. *Ist X kompakt und $f : X \to Y$ stetig, so ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis: Wir nehmen an, f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $\nu \in \mathbb{N}$ Punkte $x_\nu, y_\nu \in X$ existieren, so daß gilt:

$$d(x_\nu, y_\nu) < \frac{1}{\nu} \quad \text{und} \quad d(f(x_\nu), f(y_\nu)) \geq \varepsilon.$$

Da X kompakt ist, gibt es eine Teilfolge (x_{ν_i}) von (x_ν), die gegen einen Punkt $x_0 \in X$ konvergiert. Dann ist

$$d(y_{\nu_i}, x_0) \leq d(y_{\nu_i}, x_{\nu_i}) + d(x_{\nu_i}, x_0),$$

und die rechte Seite strebt gegen Null. Das bedeutet, daß auch (y_{ν_i}) gegen x_0 konvergiert.

Weil f stetig ist, konvergieren nun $f(x_{\nu_i})$ und $f(y_{\nu_i})$ beide gegen $f(x_0)$. Das ist ein Widerspruch. ■

§ 3 Unendliche Reihen

Definition. Sei (a_n) eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen. Mit $S_N := \sum_{n=0}^{N} a_n$ bezeichnet man die *N-te Partialsumme* der a_n. Die Folge (S_N) der Partialsummen nennt man eine *unendliche Reihe* und bezeichnet sie mit dem Symbol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Die Reihe heißt *konvergent* (bzw. *divergent*), falls die Folge (S_N) konvergent (bzw. divergent) ist. Der *Grenzwert der Reihe* wird – wenn er existiert – ebenfalls mit dem Symbol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

Aus den Regeln für die Konvergenz von Folgen ergeben sich analoge Regeln für Reihen:

1. Konvergieren die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ gegen a bzw. b, so konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$, und zwar gegen $a + b$.

2. Ist c eine feste Zahl, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}(c \cdot a_n)$ gegen $c \cdot a$.

Beispiele.

1. Sei $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$. Dann ist $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{q^{N+1}-1}{q-1}$, und die Folge $S_N = \dfrac{q^{N+1}-1}{q-1}$ konvergiert gegen $\dfrac{1}{1-q}$. Das bedeutet, daß die sogenannte *geometrische Reihe* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ gegen $\dfrac{1}{1-q}$ konvergiert.

   Im Falle $q = 1/2$ erhält man z.B.:

   $$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2, \qquad \text{also } \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots = 1.$$

   Eine Anwendung ist die Behandlung periodischer Dezimalbrüche, z.B.

   $$\begin{aligned} 0.3333\ldots &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{10^n} \\ &= 3\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n \\ &= 3\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}-1\right) \\ &= 3\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2. Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ wird als *harmonische Reihe* bezeichnet. Für die Partialsummen S_N mit $N = 2^k$ gilt folgende Abschätzung:

   $$\begin{aligned} S_{2^k} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right) \\ &> 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\cdots+\frac{2^{k-1}}{2^k} = 1+k\cdot\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

   und dieser Ausdruck wächst über alle Grenzen. Die harmonische Reihe divergiert.

Ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz einer Reihe ist schnell gefunden:

3.1 Satz. *Ist* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergent, so ist* (a_n) *eine Nullfolge.*

Beweis: Die Folgen S_N und $T_N := S_{N-1}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert, eine Zahl a. Aber dann konvergiert $a_N := S_N - T_N$ gegen $a - a = 0$. ■

Daß dieses Kriterium nicht hinreicht, zeigt das Beispiel der harmonischen Reihe.

In einem besonderen Spezialfall kommt man fast mit dem notwendigen Kriterium aus:

3.2 Leibniz-Kriterium. *Es sei* (a_n) *eine* ***monoton fallende Nullfolge*** *reeller Zahlen. Dann ist die „alternierende Reihe“* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ *konvergent.*

Beweis: Wir betrachten die Folgen $u_N := S_{2N-1}$ und $v_N := S_{2N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} u_{N+1} &= S_{2N+1} \\ &= S_{2N-1} + a_{2N} - a_{2N+1} \\ &\geq S_{2N-1} \quad = \quad u_N . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{N+1} &= S_{2N+2} \\ &= S_{2N} - a_{2N+1} + a_{2N+2} \\ &\leq S_{2N} \quad = \quad v_N . \end{aligned}$$

Weiter ist $v_N = S_{2N} = S_{2N-1} + a_{2N} \geq u_N$, denn die a_n müssen alle ≥ 0 sein. Zusammen ergibt das die folgende Ungleichungskette:

$$\ldots \leq u_N \leq u_{N+1} \leq \ldots \leq v_{N+1} \leq v_N \leq \ldots$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz strebt also u_N gegen eine Zahl u und v_N gegen eine Zahl v. Da außerdem $v_N - u_N = a_{2N}$ gegen Null konvergiert, muß $u = v$ sein. Es ist klar, daß dann auch S_N gegen diese Zahl konvergiert. ∎

Beispiel.

Die *alternierende harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ konvergiert! Über den Grenzwert können wir allerdings im Augenblick noch nichts aussagen.

Eine besonders wichtige Rolle spielt bei den Reihen das Cauchy-Kriterium:

3.3 Satz (Cauchy-Kriterium für Reihen). *Die Reihe (reeller oder komplexer Zahlen)* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert genau dann, wenn gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0, \text{ so daß } \forall N > N_0 \text{ gilt: } \quad \Big|\sum_{n=N_0+1}^{N} a_n\Big| < \varepsilon .$$

BEWEIS: Da $\sum_{n=N_0+1}^{N} a_n = S_N - S_{N_0}$ ist, folgt das Cauchy-Kriterium für Reihen unmittelbar aus dem für Folgen. ■

Der Vorteil des Cauchy-Kriteriums besteht darin, daß man es mit endlichen Summen zu tun hat!

Definition. Eine Reihe (reeller oder komplexer Zahlen) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

3.4 Satz. *Eine absolut konvergente Reihe konvergiert auch im gewöhnlichen Sinne.*

Zum BEWEIS verwendet man das Cauchy–Kriterium. Es ist

$$|\sum_{n=N_0+1}^{N} a_n| \leq \sum_{n=N_0+1}^{N} |a_n|\,.$$

Konvergiert die Reihe der Absolutbeträge, so wird die rechte Seite bei großem N_0 beliebig klein, und das gilt dann erst recht für die linke Seite. ■

Die Umkehrung dieses Satzes ist falsch, wie das Beispiel der alternierenden Leibnizreihe zeigt.

Man beachte: Unter dem Grenzwert einer absolut konvergenten Reihe versteht man immer den Grenzwert der Reihe im Sinne der gewöhnlichen Konvergenz. Wir werden aber später sehen, daß es bei einer absolut konvergenten Reihe nicht auf die Reihenfolge der Summation ankommt.

Besonders häufig wird das folgende Vergleichskriterium benutzt:

3.5 Satz (Majoranten–Kriterium). *Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe nicht-negativer reeller Zahlen, und ist (c_n) eine Folge reeller oder komplexer Zahlen, so daß $|c_n| \leq a_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut!*

BEWEIS: Wir können annehmen, daß $|c_n| \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist

$$\sum_{n=N_0+1}^{N} |c_n| \leq \sum_{n=N_0+1}^{N} a_n, \text{ für } N > N_0.$$

Für genügend großes N_0 wird die rechte Seite nach dem Cauchy–Kriterium beliebig klein, also auch die linke Seite. ■

Bemerkung. Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent und $|c_n| \geq a_n$ für alle n, so kann $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ zwar noch im gewöhnlichen Sinne, aber nicht mehr absolut konvergieren.

Wenn nun eine Reihe nicht zufällig das Leibniz–Kriterium erfüllt, so wird man i.a. versuchen, die Konvergenz mit Hilfe des Majoranten–Kriteriums auf die absolute Konvergenz einer Vergleichsreihe zurückzuführen. Zur Feststellung der absoluten Konvergenz gibt es zahlreiche Untersuchungsmethoden, wir beginnen mit einer der populärsten.

3.6 Satz (Quotienten–Kriterium). *Es sei (a_n) eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen $\neq 0$. Außerdem gebe es eine reelle Zahl q mit $0 < q < 1$, so daß*

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q \quad \textit{für fast alle } n \textit{ gilt.}$$

Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

BEWEIS: „Für fast alle n gilt ...“ bedeutet hier: „Es gibt ein n_0, so daß für $n \geq n_0$ gilt: ...“. Nach Voraussetzung haben wir also:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so daß für } n \geq n_0 \text{ gilt:} \quad |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q < 1.$$

Dann ist

$$|a_{n_0+k}| \leq q \cdot |a_{n_0+k-1}| \leq \ldots \leq q^k \cdot |a_{n_0}|\,.$$

Also ist $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cdot |a_{n_0}|$ eine Majorante der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n_0+n}$. Die erstere konvergiert, es handelt sich ja um eine geometrische Reihe. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert dann die zweite Reihe absolut, und damit auch die Ausgangsreihe, die lediglich ein paar Anfangsterme mehr besitzt. ∎

Bemerkung. In der Praxis kommt man oft schon mit folgendem Kriterium aus:

$$\textit{Ist } a_n \neq 0 \textit{ für fast alle } n \textit{ und } \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1, \textit{ so konvergiert } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \textit{ absolut.}$$

Das ist aus folgendem Grund richtig: Wenn die Quotienten $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ gegen ein $q^* < 1$ konvergieren, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß gilt:

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q^* + \varepsilon < 1 \text{ für } n \geq n_0.$$

Setzt man nun $q := q^* + \varepsilon$, so ist das Quotientenkriterium mit diesem q erfüllt.

Es gilt auch folgendes:

Ist $a_n \neq 0$ *und* $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$ *für fast alle* n*, so divergiert die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Das ist klar, denn die Glieder a_n bilden keine Nullfolge.

Achtung! Ist $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1$, so kann man – zumindest mit dem Quotientenkriterium – keine Aussage machen!

Beispiel.

Sei $z \neq 0$ eine beliebige komplexe Zahl und $c_n := \frac{z^n}{n!}$. Dann ist

$$|\frac{c_{n+1}}{c_n}| = \frac{|z|^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot |z|^n} = \frac{|z|}{n+1}.$$

Dieser Ausdruck konvergiert gegen Null. Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut (für $z \neq 0$ nach dem Quotientenkriterium und für $z = 0$ trivialerweise).

Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ nennt man die *(komplexe) Exponentialfunktion.*

Speziell muß $\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ eine reelle Zahl sein. Diesen Wert wollen wir jetzt ermitteln.

Wir wissen, daß die Folge $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ monoton wachsend gegen die Eulersche Zahl e konvergiert. Nach der binomischen Formel ist außerdem

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{(n-k+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} \\
&< \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \exp(1).
\end{aligned}$$

Also ist $e = \lim_{n\to\infty} a_n \leq \exp(1)$.

Nun wenden wir einen kleinen Trick an! Ist $m \geq 2$ irgend eine **feste** natürliche Zahl und $n > m$, so gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} \\ &\geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite strebt (bei festem m) für $n \to \infty$ gegen $\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$. Also ist auch $e \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$, für jedes $m \geq 2$. Nun lassen wir m gegen Unendlich gehen und erhalten die Ungleichung $e \geq \exp(1)$. Zusammen mit der weiter oben gewonnenen Abschätzung ergibt das die Beziehung

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \exp(1).$$

Manchmal ist auch das folgende Kriterium nützlich:

3.7 Satz (Wurzelkriterium). *Es sei (a_n) eine Folge von positiven reellen Zahlen und $\alpha := \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}$.*

Ist $\alpha < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Ist $\alpha > 1$, so divergiert sie.

Beweis: Ist $\alpha < 1$, so gibt es ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$, so daß $\sqrt[n]{a_n} < q$ für fast alle n ist. Dann ist die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ eine Majorante von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, und auch diese Reihe konvergiert.

Ist $\alpha > 1$, so gibt es unendlich viele n mit $a_n > 1$, und die Reihe kann nicht konvergieren. ∎

Beispiele.

1. Sei $a_n := \begin{cases} 2^{-k} & \text{für } n = 2k-1 \\ 3^{-k} & \text{für } n = 2k, \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

   Wir untersuchen die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Für $n = 2k$ gilt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{-(k+1)}}{3^{-k}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^k \to \infty.$$

Also ist das Quotientenkriterium nicht anwendbar.

Wir versuchen es mit dem Wurzelkriterium. Es ist

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} (\sqrt{2})^{-\frac{n+1}{n}} \to (\sqrt{2})^{-1} & \text{für ungerades } n, \\ (\sqrt{3})^{-1} & \text{für gerades } n. \end{cases}$$

Also ist $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = (\sqrt{2})^{-1} < 1$, und die Reihe konvergiert.

2. Wir betrachten die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Der Quotient

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

konvergiert gegen 1, also sagt das Quotientenkriterium nichts aus.

Wir versuchen es mit dem Wurzelkriterium. Offensichtlich ist

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Also versagt auch das Wurzelkriterium.

Man kann aber wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} &\leq 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{N} \leq 2. \end{aligned}$$

Die Folge der Partialsummen ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Den Grenzwert können wir hier leider noch nicht bestimmen.

Eine andere Möglichkeit, die Konvergenz zu beweisen, sieht so aus:

$$\begin{aligned} S_{2^k-1} &= 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{49}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{(2^{k-1})^2} + \cdots + \frac{1}{(2^k-1)^2}\right) \\ &< 1 + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{16} + \cdots + 2^{k-1}\cdot\frac{1}{(2^{k-1})^2} \\ &= \sum_{n=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n \le \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2. \end{aligned}$$

Auch hier kommt man mit dem Satz von der monotonen Konvergenz zum Ziel. Man kann übrigens mit der gleichen Abschätzung beweisen, daß jede Reihe der Gestalt $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^q}$ mit einer rationalen Zahl $q > 1$ konvergiert.

Absolut konvergente Reihen verhalten sich sehr gutartig, was die Reihenfolge der Summation betrifft.

3.8 Umordnungssatz. *Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, etwa gegen A, so konvergiert auch jede Umordnung der Reihe gegen A.*

Beweis: Die Summation möge bei 1 beginnen. Eine Umordnung der Reihe erreicht man mit Hilfe einer bijektiven Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Die umgeordnete Reihe ist dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der absoluten Konvergenz der Ausgangsreihe können wir ein $n_0 > 1$ finden, so daß $\sum_{n=n_0}^{\infty}|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|\sum_{n=1}^{n_0-1} a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Wählt man nun N so groß, daß

$$\{1, 2, \ldots, n_0 - 1\} \subset \{\tau(1), \ldots, \tau(N)\}$$

ist, so gilt für $M \ge N$:

$$\begin{aligned} |\sum_{n=1}^{M} a_{\tau(n)} - A| &\le |\sum_{n=1}^{M} a_{\tau(n)} - \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n| + |\sum_{n=1}^{n_0-1} a_n - A| \\ &\le \sum_{n=n_0}^{max(\tau(1),\ldots,\tau(M))} |a_n| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\le \sum_{n=n_0}^{\infty}|a_n| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Das zeigt, daß die umgeordnete Reihe gegen A konvergiert ∎

Bemerkung. Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, aber **nicht** absolut konvergent, so gibt es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ eine Umordnung der Reihe, die gegen x konvergiert. Wir verzichten hier auf einen Beweis dieser merkwürdigen Tatsache.

3.9 Produktsatz für Reihen. *Die Reihen* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *seien absolut konvergent gegen* a *bzw.* b*. Für* $n \in \mathbb{N}_0$ *sei*

$$c_n := \sum_{i+j=n} a_i b_j = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0.$$

Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *absolut konvergent gegen* $a \cdot b$*.*

BEWEIS:

Es konvergiert $A_N := \sum_{n=0}^{N} a_n$ gegen a und $B_N := \sum_{n=0}^{N} b_n$ gegen b. Wir setzen noch $C_N := \sum_{n=0}^{N} c_n$ und $a^* := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ (< ∞ wegen der absoluten Konvergenz).

Setzen wir $\beta_N := B_N - b$, so ist $B_N = b + \beta_N$, und es gilt:

$$\begin{aligned} C_N &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_N + \cdots + a_N b_0) \\ &= a_0 B_N + a_1 B_{N-1} + \cdots + a_N B_0 \\ &= a_0 (b + \beta_N) + \cdots + a_N (b + \beta_0) \\ &= A_N \cdot b + (a_0 \beta_N + \cdots + a_N \beta_0). \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, daß (C_N) gegen $a \cdot b$ konvergiert. Das ist sicher der Fall, wenn

$$\gamma_N := a_0 \beta_N + \cdots + a_N \beta_0$$

gegen Null konvergiert. Letzteres können wir tatsächlich beweisen:
Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen ein δ mit $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{2a^*}$. Es gibt dann ein N_0, so daß $|\beta_N| \le \delta$ für $N \ge N_0$ ist (denn $\beta_N = B_N - b$ konvergiert ja gegen 0). Dieses N_0 halten wir fest. Außerdem wählen wir ein $C > 0$, so daß $|\beta_N| \le C$ für alle N ist. Dann gilt für $N \ge N_0$:

$$\begin{aligned} |\gamma_N| &\le |\beta_0 a_N + \cdots + \beta_{N_0} a_{N-N_0}| + |\beta_{N_0+1} a_{N-N_0-1} + \cdots + \beta_N a_0| \\ &\le C \cdot (|a_N| + \cdots + |a_{N-N_0}|) + \delta \cdot a^* \\ &< C \cdot (|a_N| + \cdots + |a_{N-N_0}|) + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Der linke Summand wird bei festem N_0 und wachsendem N beliebig klein (Cauchy-Kriterium für die absolute Konvergenz der Reihe über die a_n). Also ist $|\gamma_N|$ bei hinreichend großem N kleiner als ε. Das war zu zeigen.

Für die absolute Konvergenz der Produktreihe benutzt man die Abschätzung

$$\sum_{n=0}^{N}|c_n| \leq \sum_{n=0}^{N}\sum_{i+j=n}|a_i|\cdot|b_j| \leq \left(\sum_{i=0}^{N}|a_i|\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{N}|b_j|\right).$$

Die rechte Seite ist durch das Produkt der absoluten Reihen beschränkt. ∎

Bemerkung. Die Konvergenz würde natürlich auch schon aus dem kurzen Schlußteil des Beweises folgen. Der komplizierte Konvergenzbeweis am Anfang dient dazu, den genauen Grenzwert zu bestimmen.

3.10 Folgerung. *Die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften:*

1. $\exp(0) = 1$ *und* $\exp(1) = e$.
2. $\exp(z + w) = \exp(z)\cdot\exp(w)$ *für alle* $z, w \in \mathbb{C}$.
3. *Es ist* $\exp(z) \neq 0$ *und* $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.
4. *Es ist* $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ *für* $z \in \mathbb{C}$.

Beweis: 1) wurde schon gezeigt.

2) Wir benutzen die absolute Konvergenz der Exponentialreihe und den Produktsatz für Reihen. Danach ist

$$\exp(z)\cdot\exp(w) = \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{z^i}{i!}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{w^j}{j!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n}\frac{z^i\cdot w^j}{i!j!}.$$

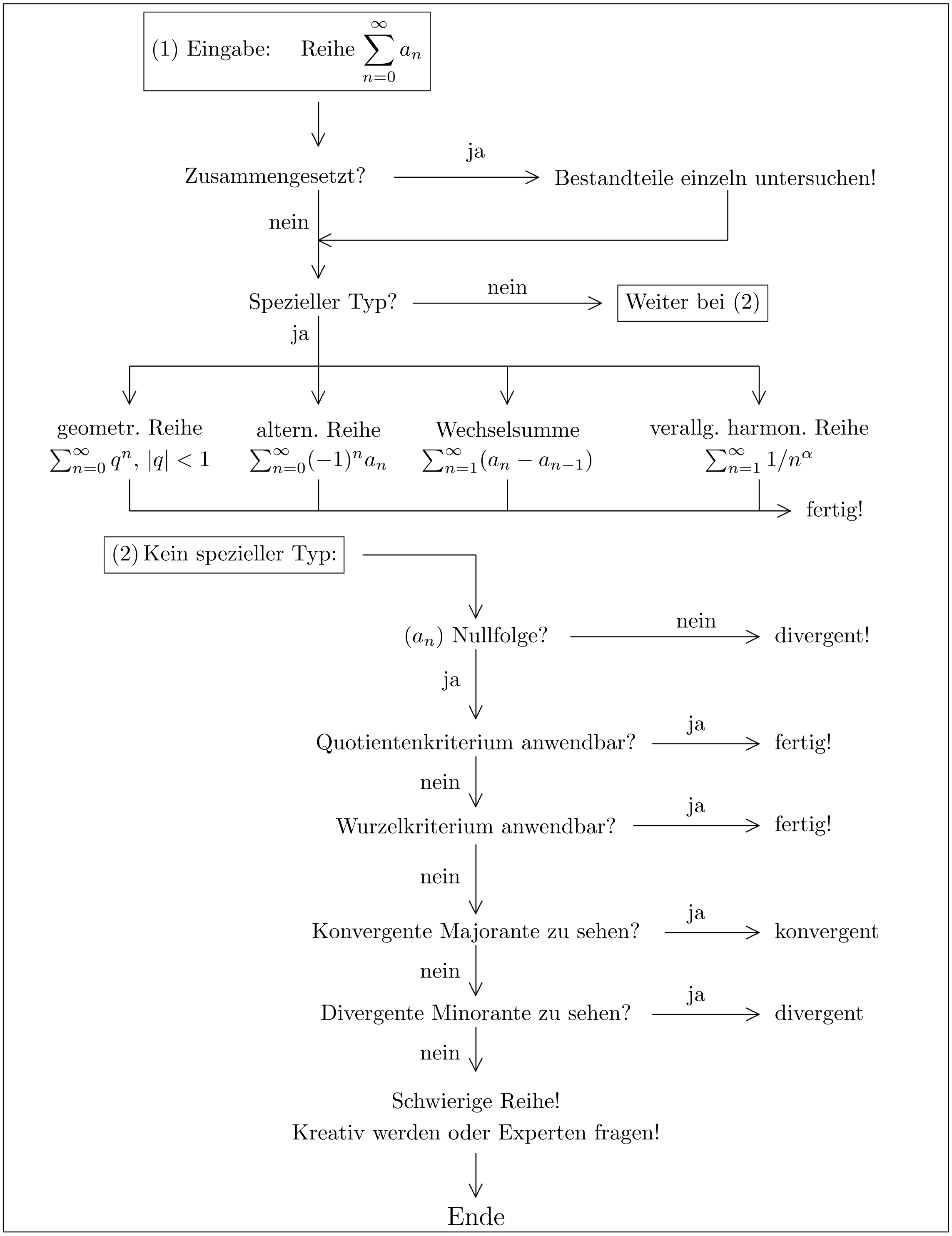
Andererseits ist
$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\cdot(z+w)^n &= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}z^i w^{n-i}\\ &= \sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{n!i!(n-i)!}z^i w^{n-i}\\ &= \sum_{i+j=n}\frac{1}{i!j!}z^i w^j.\end{aligned}$$

Somit ist $\exp(z)\cdot\exp(w) = \exp(z+w)$.

3) Es ist $1 = \exp(0) = \exp(z + (-z)) = \exp(z)\cdot\exp(-z)$. Damit ist $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$.

4) Ist $S_N(z)$ die N-te Partialsumme der Exponentialreihe, so ist offensichtlich $S_N(\overline{z}) = \overline{S_N(z)}$. Diese Beziehung bleibt erhalten, wenn man N gegen Unendlich gehen läßt. ■

Zum Schluß: **Die Reihen-Maschine:**



§ 4 Folgen und Reihen von Funktionen

Es sei X ein metrischer Raum und (f_n) eine Folge von (reell– oder komplexwertigen) Funktionen auf X.

Definition. Die Funktionenfolge (f_n) *konvergiert* auf X *punktweise* gegen eine Funktion f, falls gilt:

$$\forall\, x \in X : \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,.$$

Das Konvergenzverhalten wird also für jeden einzelnen Punkt $x \in X$ gesondert behandelt. Das globale Verhalten der beteiligten Funktionen spielt dabei keine Rolle.

Beispiel.

Sei $I := [0,1] \subset \mathbb{R}$ und $f_n : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := x^n$. Dann konvergiert diese Funktionenfolge punktweise gegen die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x < 1\,, \\ 1 & \text{für } x = 1\,. \end{cases}$$

Obwohl alle Funktionen f_n stetig sind, ist die Grenzfunktion f nicht stetig. Das ist ein wenig wünschenswertes Verhalten.

Wir brauchen also einen besseren Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen!

Wechseln wir den Standpunkt! Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Die Menge $\mathcal{F}(X,K)$ der K-wertigen Funktionen auf X bildet einen K-Vektorraum. Jedem f in diesem Raum ordnen wir die *(Supremums-)Norm* zu:

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \,:\, x \in X\}.$$

Dann ist $0 \le \|f\| \le +\infty$, und wir nennen f *beschränkt*, falls $\|f\| < \infty$ ist. Die Menge

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(X,K) := \{ f : X \to K \,:\, f \text{ beschränkt } \}$$

bildet einen K-Untervektorraum von $\mathcal{F}(X,K)$.

Für $f \in \mathcal{B}(X,K)$ ist $\|f\|$ eine reelle Zahl ≥ 0, und es gilt:

1. $\|f\| = 0 \iff f = 0$,
2. $\|r \cdot f\| = |r| \cdot \|f\|$ für $r \in K$ und $f \in \mathcal{B}$,
3. $\|f + g\| \le \|f\| + \|g\|$ für $f, g \in \mathcal{B}$.

Die Eigenschaften leiten sich direkt aus den entsprechenden Eigenschaften der Betragsfunktion auf K her.

Durch $d(f, g) = \|f - g\|$ können wir jetzt aus $\mathcal{B}$ einen metrischen Raum machen. Dann steht uns ein zweiter Konvergenzbegriff für Funktionen zur Verfügung. Eine Folge (f_n) von Elementen aus $\mathcal{B}$ konvergiert gegen ein $f \in \mathcal{B}$, wenn in jeder ε–Umgebung von f fast alle Folgeglieder f_n liegen:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so daß } \forall n \geq n_0 \text{ gilt: } \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Tatsächlich wird hierbei nicht einmal die Beschränktheit von f und f_n benötigt. Nur die Differenzen $f_n - f$ müssen beschränkt sein.

Wie kann man sich eine ε–Umgebung einer Funktion vorstellen? Wir beschränken uns auf den Fall (beschränkter) reeller Funktionen auf einem Intervall I und betrachten die zugehörigen Graphen. Wir definieren einen ε–Schlauch um G_f:

$$S_\varepsilon(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \text{ und } f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\}.$$

Die ε–Kugel um f besteht nun aus allen (beschränkten) Funktionen $g : I \to \mathbb{R}$, deren Graph ganz in $S_\varepsilon(f)$ liegt:

$$\begin{aligned}
B_\varepsilon(f) &= \{g \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R}) : \|g - f\| < \varepsilon\} \\
&= \{g \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R}) : \forall x \in I \text{ ist } |g(x) - f(x)| < \varepsilon\} \\
&= \{g \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R}) : \forall x \in I \text{ ist } f(x) - \varepsilon < g(x) < f(x) + \varepsilon\} \\
&= \{g \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R}) : \forall x \in I \text{ ist } (x, g(x)) \in S_\varepsilon(f)\} \\
&= \{g \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R}) : G_g \subset S_\varepsilon(f)\}.
\end{aligned}$$

Definition. Eine Folge (f_n) von (nicht notwendig beschränkten) Funktionen *konvergiert gleichmäßig auf* X gegen eine Funktion f (auf X), wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \text{ so daß für } n \geq n_0 \text{ und } \textbf{alle } x \in X \text{ gilt: } \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Die Folge (f_n) konvergiert also genau dann gleichmäßig gegen f, wenn in jedem ε–Schlauch um f fast alle f_n liegen. Es ist klar, daß (f_n) dann auch punktweise konvergiert.

Daß wir den richtigen Konvergenzbegriff gefunden haben, zeigt der folgende Satz:

4.1 Satz. *(f_n) konvergiere auf X gleichmäßig gegen f, alle f_n seien stetig. Dann ist auch die Grenzfunktion f auf X stetig.*

BEWEIS: Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft, die nur in der Nähe eines (beliebigen) Punktes $x_0 \in X$ gezeigt werden muß.

Sei $x_k \in X$ eine Folge von Punkten mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$. Wir müssen zeigen, daß dann auch $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$ ist.

Sei $\varepsilon > 0$. Da (f_n) gleichmäßig auf X gegen f konvergiert, gibt es ein n_0, so daß

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für } n \geq n_0 \text{ und alle } x \in X$$

ist. Wir wählen **ein** solches $n \geq n_0$. Da f_n stetig ist, gibt es ein k_0, so daß

$$|f_n(x_k) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für } k \geq k_0$$

ist. Für solche k gilt dann:

$$\begin{aligned} |f(x_k) - f(x_0)| &\leq |f(x_k) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Das zeigt, daß $(f(x_k))$ gegen $f(x_0)$ konvergiert. ■

Beispiel.

Die Folge $f_n(x) := x^n$ kann auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig konvergent sein, weil die Grenzfunktion nicht stetig ist. Aber wie steht es mit der Konvergenz auf $I_r := [0,r]$, mit $0 < r < 1$?

Die Folge r^n konvergiert gegen Null, und für $0 \leq x \leq r$ ist $0 \leq x^n \leq r^n$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein n_0, so daß für $n \geq n_0$ gilt:

$$|f_n(x) - 0| = x^n \leq r^n \leq r^{n_0} < \varepsilon.$$

Also konvergiert (f_n) auf dem kleineren Intervall $[0,r]$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

4.2 Satz. *Wenn (f_n) auf X gleichmäßig gegen f und (g_n) auf X gleichmäßig gegen g konvergiert, dann konvergiert auch $f_n \pm g_n$ gleichmäßig auf X gegen $f \pm g$ und $(c \cdot f_n)$ gleichmäßig auf X gegen $c \cdot f$.*

Auf den Beweis verzichten wir hier.

4.3 Satz. *Der Raum $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X,K)$ der beschränkten Funktionen auf X ist vollständig, d.h. jede Cauchyfolge in $\mathcal{B}$ konvergiert.*

BEWEIS: Sei (f_n) eine Cauchyfolge in $\mathcal{B}$. Sei $x \in X$ irgend ein Punkt. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0, so daß für $n, m \geq n_0$ gilt:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\| = d(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

Also ist $(f_n(x))$ eine Cauchyfolge, die wegen der Vollständigkeit von K gegen eine Zahl $f(x) \in K$ konvergiert. So erhalten wir eine Grenzfunktion $x \mapsto f(x)$. Wir müssen nun zeigen, daß (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen ein n_0, so daß $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ für $n, m \ge n_0$ ist. Sei $n \ge n_0$ festgehalten. Für $x \in X$ lassen wir m in $|f_n(x) - f_m(x)|$ gegen Unendlich gehen. Dann ist auch $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$. Weil das für jedes x gilt, ist $\|f_n - f\| \le \varepsilon$.

Es ist dann $f_n(x) - \varepsilon \le f(x) \le f_n(x) + \varepsilon$ für alle $x \in X$. Weil f_n beschränkt ist, muß auch f beschränkt sein, also in $\mathcal{B}$ liegen. ∎

Ist X ein kompakter metrischer Raum, so ist $\mathcal{C}^0(X, K) := \{f : X \to K \,:\, f \text{ stetig }\}$ ein K-Untervektorraum von $\mathcal{B}(X, K)$.

4.4 Folgerung. *Ist X kompakt, so ist der Raum $\mathcal{C}^0(X, K)$ der stetigen Funktionen auf X vollständig.*

BEWEIS: Wenn eine Folge (f_n) von stetigen (und damit beschränkten) Funktionen gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion f konvergiert, dann muß f auch wieder stetig sein. Also ist $\mathcal{C}^0(X, K)$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{B}(X, K)$, und damit vollständig. ∎

Ist (f_n) eine Folge von K-wertigen Funktionen auf X, so kann man auch die Folge der Partialsummen $F_N := \sum_{n=0}^{N} f_n$ betrachten. Diese Folge nennt man eine *Reihe von Funktionen* und schreibt dafür: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

Wie bei den Funktionenfolgen unterscheidet man auch bei den Funktionenreihen zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz. Außerdem gibt es die (punktweise) absolute Konvergenz.

Definition. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ von beschränkten Funktionen auf X heißt *normal konvergent*, falls $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|$ konvergiert.

4.5 Satz. *Eine normal konvergente Reihe von Funktionen auf X ist absolut und gleichmäßig konvergent.*

BEWEIS: Für jedes $x \in X$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|$ eine Majorante der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$. Das ergibt die absolute und damit punktweise Konvergenz.

Sei $F_N(x) := \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$ die N–te Partialsumme. Dann gilt für $M > N$

$$\begin{aligned} d(F_N, F_M) &= \|F_M - F_N\| \\ &= \|\sum_{n=N+1}^{M} f_n\| \\ &\le \sum_{n=N+1}^{M} \|f_n\|. \end{aligned}$$

Aus der normalen Konvergenz folgt – über das Cauchy-Kriterium für Reihen von Zahlen – , daß (F_N) eine Cauchyfolge in dem metrischen Raum $\mathcal{B}$ ist. Aber dann konvergiert (F_N) gegen ein $F \in \mathcal{B}$, und das bedeutet die gleichmäßige Konvergenz der Reihe. ∎

Üblicherweise formuliert man dieses Ergebnis in folgender Form:

4.6 Satz (Weierstraß–Kriterium).
Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *eine konvergente Reihe nicht-negativer reeller Zahlen und* (f_n) *eine Folge von beschränkten Funktionen auf einem metrischen Raum* X*, so daß gilt:*

$$|f_n(x)| \le a_n \quad \textit{für fast alle } n \in \mathbb{N} \textit{ und } \textbf{\textit{alle}}\ x \in X.$$

Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *absolut und gleichmäßig auf* X*.*

Beispiele werden in den kommenden Paragraphen behandelt.

§ 5 Potenzreihen

Die ε-Umgebungen eines Punktes z_0 in der komplexen Ebene sind die Kreisscheiben

$$D_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Wir untersuchen jetzt eine spezielle Klasse von Funktionenreihen auf $\mathbb{C}$, die (komplexen) Potenzreihen. Läßt man überall statt komplexer Zahlen nur reelle Zahlen zu, so erhält man die Theorie der reellen Potenzreihen, ohne daß irgend welche Änderungen nötig wären.

Sei (c_n) eine Folge komplexer Zahlen, $a \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

eine *Potenzreihe* mit *Entwicklungspunkt* a. Die Zahlen c_n heißen die *Koeffizienten* der Potenzreihe.

Ist $a \in \mathbb{R}$ und sind alle Koeffizienten c_n reell, so spricht man von einer *reellen Potenzreihe* und schreibt die Variable auch reell:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n.$$

5.1 Satz.

Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *konvergiere für ein* $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq a$. *Es sei* $0 < \varrho < |z_1 - a|$. *Dann konvergiert* $f(z)$ *auf der abgeschlossenen Kreisscheibe* $\overline{D_\varrho(a)}$ *absolut und gleichmäßig, und die Reihe*

$$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n (z-a)^{n-1}$$

konvergiert ebenfalls absolut und gleichmäßig auf $\overline{D_\varrho(a)}$.

BEWEIS: 1) Da $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_1 - a)^n$ nach Voraussetzung konvergiert, gibt es eine Konstante $M > 0$, so daß $|c_n (z_1 - a)^n| \leq M$ für alle n ist. Und da $\varrho < |z_1 - a|$ sein soll, ist $q := \dfrac{\varrho}{|z_1 - a|} < 1$.

Für alle z mit $|z - a| \leq \varrho$ gilt dann:

$$\begin{aligned} |c_n (z-a)^n| &= |c_n (z_1 - a)^n| \cdot \left|\frac{z-a}{z_1 - a}\right|^n \\ &\leq M \cdot q^n. \end{aligned}$$

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} M\, q^n$ konvergiert. Mit dem Weierstraßkriterium folgt, daß $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ absolut und gleichmäßig auf $\overline{D_\varrho(a)}$ konvergiert.

2) Nach (1) ist $|n \cdot c_n (z-a)^{n-1}| \leq n \cdot M \cdot q^{n-1}$, und

$$\frac{(n+1) \cdot M \cdot q^n}{n \cdot M \cdot q^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \cdot q$$

konvergiert gegen $q < 1$. Aus dem Quotientenkriterium folgt, daß $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot M \cdot q^{n-1}$ konvergiert, und wie oben kann man daraus schließen, daß $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot c_n (z-a)^{n-1}$ auf $\overline{D_\varrho(a)}$ absolut und gleichmäßig konvergiert. ∎

Der vorliegende Satz hat weitreichende Konsequenzen für das Konvergenzverhalten von Potenzreihen.

Definition. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe. Die Zahl

$$R := \sup\{r \geq 0 \mid \exists\, z_1 \in \mathbb{C} \text{ mit } r = |z_1 - a|, \text{ so daß } f(z) \text{ in } z_1 \text{ konvergiert}\}$$

heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe. Die Fälle $R = 0$ und $R = +\infty$ sind dabei auch zugelassen!

Der Kreis um a mit Radius R heißt der *Konvergenzkreis* der Reihe. Ist $a \in \mathbb{R}$, so heißt $(a-R, a+R)$ das *Konvergenzintervall.*

5.2 Satz. *R sei der Konvergenzradius der Potenzreihe $f(z)$. Dann gilt:*

1. *Für $0 < r < R$ konvergiert $f(z)$ auf $\overline{D_r(a)}$ absolut und gleichmäßig.*
2. *Ist $|z_1 - a| > R$, so divergiert $f(z)$ in z_1.*

Beweis: 1) ist klar, wegen des obigen Satzes.

2) Nach Definition von R kann $f(z)$ in einem Punkt z_1 mit $|z_1 - a| > R$ nicht mehr konvergieren. ∎

5.3 Satz. *Hat $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ den Konvergenzradius R, so ist $f(z)$ im Innern des Konvergenzkreises $D_R(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\}$ stetig.*

Beweis: Jedes komplexe Polynom ist auf ganz $\mathbb{C}$ stetig. Die Folge der Partialsummen der gegebenen Potenzreihe ist eine Folge von komplexen Polynomen, und sie konvergiert auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D_\varrho(a)}$, $0 \leq \varrho < R$, gleichmäßig. Deshalb ist auch die Grenzfunktion f dort stetig. ∎

Es ist offensichtlich wichtig, den Konvergenzradius einer Potenzreihe bestimmen zu können. In vielen Fällen gibt es dafür ein einfaches Kriterium:

5.4 Satz. *Sei (c_n) eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen, $c_n \neq 0$ für fast alle n.*

Wenn die Folge $|\frac{c_n}{c_{n+1}}|$ konvergiert, dann ist $R := \lim_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}}|$

der Konvergenzradius der Reihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

Man beachte, daß der Entwicklungspunkt a dabei keine Rolle spielt!

BEWEIS: Wir verwenden das Quotientenkriterium: Es ist

$$|\frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n}| = |\frac{c_{n+1}}{c_n}| \cdot |z-a|,$$

und dieser Ausdruck konvergiert (für festes z) gegen $\dfrac{1}{R} \cdot |z-a|$.

Ist $|z-a| < R$, also $\dfrac{1}{R} \cdot |z-a| < 1$, so konvergiert die Reihe. Ist $|z-a| > R$, so divergiert sie. Also muß R der Konvergenzradius sein!

Wir haben uns dabei übrigens nicht um gleichmäßige Konvergenz kümmern müssen.
∎

Beispiele.

1. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Dann ist $a = 0$ und $c_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das ergibt den Konvergenzradius $R = 1$.

   Für $|z| < 1$ konvergiert die Reihe gegen $\dfrac{1}{1-z}$. Da alle Koeffizienten reell sind, kann man die Reihe auch reell auffassen. Tatsächlich nimmt die Grenzfunktion dann auf dem Konvergenzintervall $(-1, 1)$ nur reelle Werte an. An den Randpunkten $x = -1$ und $x = +1$ divergiert die Reihe.

2. Sei $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$. Hier ist $a = 0$ und $c_n = \frac{1}{n}$.

   Da $\dfrac{c_n}{c_{n+1}} = \dfrac{n+1}{n}$ gegen 1 konvergiert, ist $R = 1$. An den Rändern des Konvergenzintervalls ist das Verhalten diesmal unterschiedlich:

   Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ divergiert, die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n}$ konvergiert.

3. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$. Wieder ist $a = 0$. Wir wissen schon, daß die Reihe für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Nun folgt, daß $\exp(z)$ auf $\mathbb{C}$ stetig ist.

Das Quotientenkriterium führt nicht immer zum Ziel. Eine allgemeine Formel für den Konvergenzradius liefert der folgende

5.5 Satz (Formel von Hadamard). *Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R, und $\gamma := \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}$.*

1. *Ist γ eine positive reelle Zahl, so ist $R = {}^1\!/\gamma$.*
2. *Ist $\gamma = 0$, so ist $R = +\infty$.*
3. *Ist $\gamma = +\infty$, so ist $R = 0$.*

BEWEIS: Es sei $z \in \mathbb{C}$ ein fester Punkt $\neq a$. Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe mit Hilfe des Wurzelkriteriums. Dazu sei $a_n := c_n(z-a)^n$ und $\alpha := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dann ist $\alpha = |z-a| \cdot \gamma$.

Sei zunächst $0 < \gamma < +\infty$. Die Reihe konvergiert genau dann in z, wenn $\alpha < 1$ ist, also $|z-a| < {}^1\!/\gamma$. In diesem Fall ist $R = {}^1\!/\gamma$.

Ist $\gamma = 0$, so muß auch $\alpha = 0$ sein, und die Reihe konvergiert auf jeden Fall. Ist $\gamma = +\infty$, so ist auch $\alpha = +\infty$, und die Reihe divergiert auf jeden Fall. ∎

Beispiel.

Weil der Konvergenzradius der Exponentialreihe $= +\infty$ ist, folgt:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0.$$

Diese Tatsache können wir an anderer Stelle gut verwenden:

Sei $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$. In diesem Falle ist **nicht** etwa $c_n = (-1)^n/(2n)!$, sondern es ist

$$c_0 = 1,\ c_1 = 0,\ c_2 = -{}^1\!/2,\ c_3 = 0,\ c_4 = {}^1\!/24,\ c_5 = 0,\ \ldots$$

Die Reihe hat Lücken! Es ist

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \begin{cases} 0 & \text{für ungerades } n, \\ \sqrt[n]{(n!)^{-1}} & \text{für gerades } n. \end{cases}$$

Daraus folgt $\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$, und der Konvergenzradius ist $R = +\infty$.

Manchmal kommt man bei Potenzreihen mit Lücken auch mit einem einfacheren Kriterium aus:

5.6 Satz (über Potenzreihen mit Lücken).

In der Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ sei $c_{2k} = 0$ und $c_{2k+1} \neq 0$ für fast alle k, und es existiere

$$c := \lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{2k+1}}{c_{2k+3}}\right|.$$

Dann ist $R := \sqrt{c}$ der Konvergenzradius.

Wenn $c_{2k+1} = 0$ und $c_{2k} \neq 0$ für fast alle k ist und der Grenzwert

$$c := \lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{2k}}{c_{2k+2}}\right|$$

existiert, so ist ebenfalls $R := \sqrt{c}$ der Konvergenzradius.

Der BEWEIS geht ähnlich wie bei der früher bewiesenen Formel. Wir betrachten nur den Fall $c_{2k+1} = 0$:

$$\left|\frac{c_{2k+2}z^{2k+2}}{c_{2k}z^{2k}}\right| = \left|\frac{c_{2k+2}}{c_{2k}}\right| \cdot |z|^2$$

konvergiert gegen $\frac{1}{c}|z|^2$, und dieser Ausdruck muß < 1 sein, damit die Reihe (nach Quotientenkriterium) konvergiert. Also muß $|z| < \sqrt{c}$ sein. ∎

Beispiel.

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$. Dann ist $c_{2n} = (-1)^n$ und $c_{2n+1} = 0$. Weil $|c_{2n}/c_{2n+2}|$ gegen 1 konvergiert, hat die Reihe den Konvergenzradius 1. Für $|x| < 1$ konvergiert sie gegen $1/(1+x^2)$. Obwohl diese Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und stetig ist, divergiert die Reihe für $|x| > 1$.

Im Innern des Konvergenzkreises ist der Grenzwert einer Potenzreihe eine stetige Funktion. Auf dem Rand des Konvergenzkreises kann man keine allgemeine Aussage machen. Es gibt allerdings eine ganz kleine Ausnahme.

5.7 Abelscher Grenzwertsatz. *Es sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten und dem Konvergenzradius $R = 1$. Dann gilt:*

$$\textit{Ist } c := \sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty, \textit{ so ist } \lim_{x\to 1} f(x) = c.$$

BEWEIS: Sei $s_{-1} := 0$ und $s_n := \sum_{i=0}^{n} c_i$, für $n \geq 0$. Dann kann man schreiben:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} c_n x^n &= \sum_{n=0}^{N}(s_n - s_{n-1})x^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} s_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} s_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} s_n(1-x)x^n + s_N x^N.\end{aligned}$$

Ist $|x| < 1$, so konvergiert die Potenzreihe in x absolut, und man kann beliebige Umformungen vornehmen. Daher folgt aus der gerade bewiesenen Gleichung für $N \to \infty$ die Beziehung

$$f(x) = (1-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \quad (\text{denn: } s_N \to c \text{ und } x^N \to 0).$$

Für $|x| < 1$ ist außerdem $(1-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1$.

Nun sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir haben zu zeigen: Es gibt ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - c| < \varepsilon \quad \text{für } 1 - \delta < x < 1.$$

Zunächst wählen wir ein n_0, so daß für $n > n_0$ gilt:

$$|s_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}|f(x) - c| &= |(1-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - (1-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c x^n| \\ &= (1-x) \cdot |\sum_{n=0}^{\infty}(s_n - c)x^n| \\ &\le (1-x) \cdot \sum_{n=0}^{n_0}|s_n - c| \cdot |x|^n + (1-x) \cdot \sum_{n=n_0+1}^{\infty}|s_n - c| \cdot |x|^n \\ &\le (1-x) \cdot \sum_{n=0}^{n_0}|s_n - c| \cdot |x|^n + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,\end{aligned}$$

wenn nur $0 < x < 1$ ist, und der erste Summand $< \varepsilon/2$. Aber das ist sicher der Fall, wenn $1 - \delta < x < 1$ ist, für genügend kleines $\delta > 0$. Das ergibt die Behauptung. ∎

Bemerkung. Man kann allgemeiner zeigen:

Hat $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ den Konvergenzradius R, mit $0 < R < \infty$, und ist $f(b)$ konvergent für ein $b \in \mathbb{C}$ mit $|b - a| = R$, so existiert

$$\lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} f(a+t(b-a)) = f(b).$$

Beispiel.

Wir betrachten die Reihe $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Hier ist $c_{2k} = 0$ und $c_{2k+1} = (-1)^k/(2k+1)$. Weil

$$\left|\frac{c_{2k+1}}{c_{2k+3}}\right| = \frac{2n+3}{2n+1} = \frac{2+3/n}{2+1/n}$$

gegen 1 konvergiert, hat $f(x)$ den Konvergenzradius $R = 1$. Insbesondere ist dann $f(x)$ eine stetige Funktion auf $(-1,1)$. Wir werden diese Funktion später noch genauer kennenlernen.

Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium (den Grenzwert können wir jetzt noch nicht bestimmen). Das bedeutet:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

§ 6 Elementare Funktionen

Vorweg wollen wir den Begriff des Grenzwertes einer Funktion noch etwas verallgemeinern. Ist f eine reelle Funktion auf $(x_0-\varepsilon, x_0)$, so sagen wir:

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = +\infty$, falls gilt:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\ \delta > 0 \text{ s.d. } f(x) > n \text{ für } |x-x_0| < \delta.$$

Ist f auf (x_0,∞) definiert, so sagen wir:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c$, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ m \in \mathbb{N}, \text{ s.d. } |f(x)-c| < \varepsilon \text{ für } x > m.$$

Und schließlich:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, falls gilt:

$$\forall\, n > 0\ \exists\ m \in \mathbb{N},\ \text{s.d. } f(x) > n \text{ für } x > m.$$

Wir untersuchen nun die (komplexe) Exponentialfunktion

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Da alle Koeffizienten der Reihe reell sind, definiert sie auch eine Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

6.1 Satz. *Die reelle Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften:*

1. *Es ist* $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$*.*
2. *Für* $x > 0$ *ist* $\exp(x) > 1$ *und* $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$*.*
3. *Für* $x < 0$ *ist* $0 < \exp(x) < 1$ *und* $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$*.*
4. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *ist streng monoton wachsend.*
5. *Für* $n \in \mathbb{N}$ *ist* $\exp(n) = e^n$ *und* $\exp(1/n) = \sqrt[n]{e}$*.*

Beweis: 1) Da exp stetig, $\exp(0) = 1 > 0$ und $\exp(x) \neq 0$ für alle x ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, daß $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

2) Ist $x > 0$, so ist $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + \cdots > 1 + x$. Also ist $\exp(x) > 1$, und für $x \to +\infty$ wächst $\exp(x)$ über alle Grenzen.

3) Ist $x < 0$, so ist $-x > 0$ und $\exp(-x) > 1$, also $\exp(x) < 1$. Wegen (2) ist klar, daß $\exp(x)$ für $x \to -\infty$ gegen Null konvergiert.

4) Ist $x_1 < x_2$, so ist $x_2 = x_1 + h$, mit $h > 0$, und es folgt:

$$\exp(x_2) = \exp(x_1) \cdot \exp(h) > \exp(x_1), \text{ weil } \exp(h) > 1 \text{ ist.}$$

Das ergibt die strenge Monotonie.

5) Es ist $\exp(n) = \exp(1 + 1 + \cdots + 1) = \exp(1)^n = e^n$, und

$$e = \exp(1) = \exp(n \cdot \frac{1}{n}) = \exp(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}) = \exp(\frac{1}{n})^n,$$

also $\exp(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{e}$. ∎

Wir schreiben dann auch e^x an Stelle von $\exp(x)$.

6.2 Folgerung. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *ist bijektiv.*

Beweis: Wegen der strengen Monotonie ist exp injektiv, und aus dem Zwischenwertsatz folgt die Surjektivität. ∎

Definition. Die auf $\mathbb{R}_+$ definierte Umkehrfunktion der Exponentialfunktion heißt *(natürlicher) Logarithmus* und wird mit $\ln(x)$ bezeichnet.

6.3 Satz. *Für die Logarithmusfunktion gilt:*

1. $\ln(1) = 0$
2. *Für* $x, y > 0$ *ist* $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$.
3. $\ln(x) > 0$ *für* $x > 1$, *und* $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.
4. $\ln(x) < 0$ *für* $0 < x < 1$, *und* $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

BEWEIS: 1) Klar!

2) Es ist $\exp(\ln(x)+\ln(y)) = \exp(\ln(x)) \cdot \exp(\ln(y)) = x \cdot y = \exp(\ln(x \cdot y))$. Daraus folgt die Behauptung.

3) und 4) können ebenfalls aus den entsprechenden Eigenschaften der Exponentialfunktion hergeleitet werden. ∎

Definition. Sei $a > 0$. Die *Exponentialfunktion zur Basis* a ist die Funktion $\exp_a(x) := \exp(x \cdot \ln(a))$.

Auch $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine stetige Funktion, mit $\exp_a(0) = 1$, $\exp_a(1) = a$ und $\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$.

Genau wie oben folgt: $\exp_a(n) = a^n$ und $\exp_a(1/n) = \sqrt[n]{a}$. Deshalb schreiben wir auch a^x an Stelle von $\exp_a(x)$. Für eine rationale Zahl $x = p/q$ ist $a^x = \sqrt[q]{a^p}$.

Für das Rechnen mit allgemeinen Potenzen a^x (für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$) gilt:

1. $a^0 = 1$ und $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.
2. $(a^x)^y = a^{xy}$.

Zum BEWEIS von (2): Es ist $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$, also

$$\begin{aligned} (a^x)^y &= \exp[y \cdot \ln(a^x)] \\ &= \exp(xy \cdot \ln(a)) \;=\; a^{xy}. \end{aligned}$$

Sei $x > 0$. Ist $a > 1$, so ist $a^x > 1$. Ist $0 < a < 1$, so ist $a^x < 1$. Daraus folgt:

Im Falle $a > 1$ ist die Potenzfunktion $x \mapsto a^x$ streng monoton wachsend, im Falle $a < 1$ streng monoton fallend.

BEWEIS: Sei $h > 0$. Dann ist $a^{x+h} = a^x \cdot a^h$. Der rechte Faktor ist > 1, wenn $a > 1$ ist, und < 1, wenn $a < 1$ ist. ∎

In beiden Fällen ist $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ bijektiv.

Definition. Unter dem *Logarithmus zur Basis* a versteht man die Umkehrfunktion $\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ zur Exponentialfunktion zur Basis a.

$\log_a$ hat analoge Eigenschaften wie $\ln = \log_e$. Für Rechenzwecke benutzte man früher die Briggsschen Logarithmen $\lg = \log_{10}$. Dazu wurde eine beliebige reelle Zahl x in der Form $x = x_0 \cdot 10^k$ geschrieben, mit $1 \le x_0 < 10$. Dann ist $\lg(x) = k + \lg(x_0)$. Die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 wurden tabelliert.

Wir kommen jetzt zur komplexen Exponentialfunktion. Ist $z = a + \mathrm{i}\, b$, so ist $\exp(z) = e^a \cdot \exp(\mathrm{i}b)$. Es reicht also, die Funktion $t \mapsto \exp(\mathrm{i}t)$ zu untersuchen.

Der Schlüssel zu allem ist die folgende Feststellung:

$$|\exp(\mathrm{i}t)|^2 = \exp(\mathrm{i}t) \cdot \exp(-\mathrm{i}t) = \exp(\mathrm{i}t - \mathrm{i}t) = \exp(0) = 1.$$

Die komplexen Zahlen $\exp(\mathrm{i}t)$ liegen also alle auf dem Rand des Einheitskreises.

Definition. Die Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (*Sinus* und *Cosinus*) werden definiert durch

$$\exp(\mathrm{i}t) = \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t).$$

Man nennt dies die *Eulersche Formel*.

Man beachte, daß wir hier Cosinus und Sinus als Realteil und Imaginärteil von $\exp(\mathrm{i}\,t)$ definiert haben. In der Literatur werden sie oftmals auf anderem Wege eingeführt (z.B. durch ihre Reihendarstellungen), und dann kann die Eulersche Formel als Satz bewiesen werden.

Aus der Eulerschen Formel und der Beziehung $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \cos(t) &= \frac{1}{2}(\exp(\mathrm{i}t) + \exp(-\mathrm{i}t)) \\ \text{und} \quad \sin(t) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\exp(\mathrm{i}t) - \exp(-\mathrm{i}t)). \end{aligned}$$

Beide Funktionen sind stetig, und es ist $\cos(-t) = \cos(t)$, $\sin(-t) = -\sin(t)$, $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$. Außerdem gilt:

6.4 Satz.

1. $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$,
2. $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$,
3. $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$.

Die letzten beiden Aussagen nennt man die *Additionstheoreme*.

BEWEIS: 1) folgt aus der Beziehung $|a + \mathrm{i}b|^2 = a^2 + b^2$ und der Gleichung $|\exp(\mathrm{i}t)|^2 = 1$.

2) und 3) ergeben sich aus dem Additionstheorem der Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) + \mathrm{i}\sin(x+y) &= \exp(\mathrm{i}(x+y)) = \exp(\mathrm{i}x + \mathrm{i}y) \\
&= \exp(\mathrm{i}x) \cdot \exp(\mathrm{i}y) \\
&= (\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)) \cdot (\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)) \\
&= (\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)) \\
&\quad + \mathrm{i}(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)).
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert die gewünschten Formeln. ∎

6.5 Folgerung. *Es ist* $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$.

BEWEIS: Sei $u := (x+y)/2$ und $v := (x-y)/2$. Dann ist $u + v = x$ und $u - v = y$. Die Anwendung des Additionstheorems für den Cosinus ergibt die Gleichung $\cos(u+v) - \cos(u-v) = -2\sin u \sin v$, und damit die Behauptung. ∎

Um mehr über sin und cos herauszubekommen, benötigen wir die Reihenentwicklungen:

$$\begin{aligned}
\sin(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} \pm \dots \\
\text{und} \quad \cos(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} \pm \dots .
\end{aligned}$$

Das ergibt sich aus der Exponentialreihe und deren absoluter Konvergenz, unter Berücksichtigung der Gleichungen $\mathrm{i}^{2k} = (-1)^k$ und $\mathrm{i}^{2k+1} = \mathrm{i} \cdot (-1)^k$. Nun folgt:

6.6 Satz. *Für* $0 < x \le 2$ *ist*

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin(x) < x \quad \textit{und} \quad 1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Insbesondere ist $\sin(x) > 0$ *in diesem Bereich.*

BEWEIS: Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$D_n(x) := \frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} = \frac{x^n}{n!}\left(1 - \frac{x^2}{(n+1)(n+2)}\right).$$

Weil $\dfrac{x^2}{(n+1)(n+2)} \le \dfrac{4}{2\cdot 3} = \dfrac{2}{3} < 1$ für $n \ge 1$ und $0 < x \le 2$ ist, ist in diesem Bereich $D_n(x) > 0$.

1) Aus der Beziehung

$$\sin(x) = x - \sum_{k=1}^{\infty} D_{4k-1}(x) = (x - \frac{x^3}{6}) + \sum_{k=1}^{\infty} D_{4k+1}(x)$$

folgt die Behauptung für den Sinus.

2) Aus der Beziehung

$$\cos(x) = (1 - \frac{x^2}{2}) + \sum_{k=1}^{\infty} D_{4k}(x) = (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}) - \sum_{k=1}^{\infty} D_{4k+2}(x)$$

folgt die Behauptung für den Cosinus.

3) Schließlich ist $x - \frac{x^3}{6} = x(1 - \frac{x^2}{6}) \geq x(1 - \frac{2}{3}) = \frac{x}{3} > 0$ für $0 < x \leq 2$. ∎

6.7 Folgerung. *Für* $0 \leq x \leq 2$ *ist* $\cos(x)$ *streng monoton fallend, und es ist* $\cos(2) < 0$.

Beweis: Sei $0 < x_1 < x_2 \leq 2$. Dann ist $0 \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \leq 2$ und $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leq 1$, also

$$\sin(\frac{x_1 + x_2}{2}) > 0 \qquad \sin(\frac{x_2 - x_1}{2}) > 0.$$

Daraus folgt: $\cos(x_2) - \cos(x_1) = -2\sin(\frac{x_1 + x_2}{2})\sin(\frac{x_2 - x_1}{2}) < 0$, also $\cos(x_2) < \cos(x_1)$.

Weiter ist $\cos(2) < 1 - 2(1 - {}^1\!/3) = 1 - {}^4\!/3 = -{}^1\!/3 < 0$. ∎

Da $\cos(0) > 0$ und $\cos(2) < 0$ ist, muß es nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle des Cosinus zwischen 0 und 2 geben. Wegen der strengen Monotonie ist diese Nullstelle eindeutig bestimmt.

Definition. Die Zahl π wird dadurch charakterisiert, daß ${}^\pi\!/2$ die eindeutig bestimmte Nullstelle von $\cos(x)$ ist.

Tatsächlich ist $\pi = 3.141592653\ldots$

Wir haben nun $\cos({}^\pi\!/2) = 0$ und $\sin({}^\pi\!/2) = 1$. Schreiben wir $e^{\mathrm{i}t}$ an Stelle von $\exp(\mathrm{i}t)$, so folgt:

6.8 Satz.

$$e^{\mathrm{i}\,\pi/2} = \mathrm{i}, \quad e^{\mathrm{i}\,\pi} = -1, \quad e^{\mathrm{i}\,(3\pi)/2} = -\mathrm{i} \textit{ und } e^{2\pi\mathrm{i}} = 1.$$

Beweis: Die erste Aussage ergibt sich aus den Werten für sin und cos bei $\pi/2$. Die weiteren Aussagen ergeben sich aus $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$ und $\mathrm{i}^4 = 1$. ∎

6.9 Folgerung 1. *Die Funktionen* sin *und* cos *sind periodisch mit Periode* 2π, *und es ist* $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$.

Beweis: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *periodisch* mit Periode p, falls $f(x+p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Wegen $e^{2\pi i} = 1$ ist $\cos(2\pi) = 1 = \cos(0)$ und $\sin(2\pi) = 0 = \sin(0)$. Die Periodizität von sin und cos folgt nun aus den Additionstheoremen, z.B. ist

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)\cos(2\pi) - \sin(x)\sin(2\pi) = \cos(x).$$

Auch die zusätzliche Formel ergibt sich aus dem Additionstheorem für sin. ∎

6.10 Folgerung 2. *Es ist*

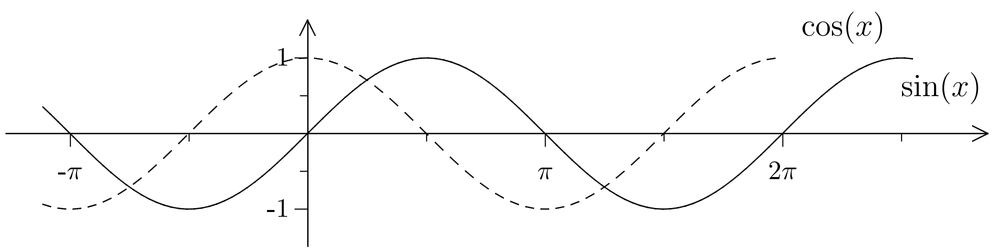
$$\begin{aligned} \sin(x) = 0 &\iff x = k \cdot \pi \textit{ für } k \in \mathbb{Z}, \\ \cos(x) = 0 &\iff x = (k + \frac{1}{2}) \cdot \pi \textit{ für } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

BEWEIS: Es ist $\sin(\pi) = \sin(2\pi) = 0$, also auch $\sin(k \cdot \pi) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Für $0 < x < \pi/2$ ist $\sin(x) > 0$ und $\cos(x) > 0$. Für $\pi/2 < x < \pi$ ist $\sin(x) = \sin(\pi/2 - (\pi/2 - x)) = \cos(\pi/2 - x) = \cos(x - \pi/2) > 0$. Schließlich ist $\sin(\pi/2) = 1$. Also gibt es keine Nullstellen für $0 < x < \pi$. Aus dem Additionstheorem folgt, daß $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ ist. Also gibt es auch keine Nullstelle für $\pi < x < 2\pi$.

Die Nullstellen des Cosinus ergeben sich aus $\cos(x) = \sin(\pi/2 - x)$. ∎

6.11 Folgerung 3. 2π *ist die **kleinste** positive Periode von* sin *und* cos.

BEWEIS: Sei $p > 0$ die kleinste Periode des Sinus. Dann ist $\sin(p) = \sin(0) = 0$, also $p = k \cdot \pi$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Weil $\sin(\pi/2) = 1$ und $\sin(\pi/2 + \pi) = -\sin(\pi/2) = -1$ ist, muß $p = 2\pi$ sein. ∎



Definition.

1. Für $x \neq (k + \frac{1}{2})\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sei $\tan(x) := \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ (*Tangens*).

2. Für $x \neq k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sei $\cot(x) := \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ (*Cotangens*).

6.12 Satz. *Es gilt:*

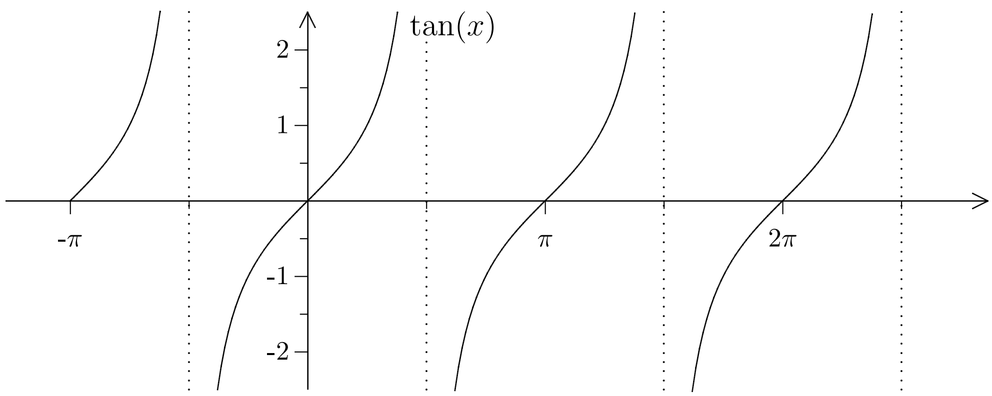
1. $\tan(0) = 0$ *und* $\tan(x) > 0$ *für* $0 < x < \pi/2$.

2. $\tan(x) \to +\infty$ *für* $x \to \pi/2$, $x < \pi/2$.

3. $\tan(-x) = -\tan(x)$ *für* $0 < x < \pi/2$.

4. tan *ist periodisch, mit Periode* π.

BEWEIS: 1), 2) und 3) folgen sofort aus den Eigenschaften von sin und cos. Zu 4): Es ist $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ und $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$. ■



§ 7 Der Fundamentalsatz der Algebra

Die Eulersche Gleichung $e^{\mathrm{i}t} = \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)$ hilft uns beim Verständnis der komplexen Poynome.

7.1 Satz. *Die Abbildung* $t \mapsto e^{\mathrm{i}t}$ *bildet das Intervall* $[0, 2\pi)$ *bijektiv auf die Kreislinie* $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *ab.*

BEWEIS: 1) Injektivität: Annahme, es gibt $0 \le s < t < 2\pi$ mit $e^{\mathrm{i}s} = e^{\mathrm{i}t}$. Dann ist $0 < t - s < 2\pi$ und $e^{\mathrm{i}(t-s)} = 1$, also $\cos(t-s) = 1$ und $\sin(t-s) = 0$. In $(0, 2\pi)$ hat sin nur die Nullstelle π. Es ist aber $\cos(\pi) = -1$. Das ist ein Widerspruch.

2) Surjektivität: Sei $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ mit $a^2 + b^2 = |z|^2 = 1$ gegeben. Dann ist $|a| \le 1$. Weil cos stetig ist, $\cos(0) = 1$ und $\cos(\pi) = -1$, folgt aus dem Zwischenwertsatz, daß es ein $t \in [0, \pi]$ mit $\cos(t) = a$ gibt. Dann ist $\sin(t) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(t)} = \pm\sqrt{b^2} = \pm b$. Ist $\sin(t) = b$, so ist $e^{\mathrm{i}t} = z$. Ist $\sin(t) = -b$, so ist $\cos(2\pi - t) = \cos(t) = a$ und $\sin(2\pi - t) = -\sin(t) = b$, also $e^{\mathrm{i}(2\pi - t)} = z$. ■

Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\zeta_n := \exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

7.2 Satz. *Für jede natürliche Zahl* n *hat die Gleichung* $z^n = 1$ *in* $\mathbb{C}$ *genau* n *Lösungen, nämlich*

$$(\zeta_n)^0 = 1,\ (\zeta_n)^1 = \zeta_n,\ (\zeta_n)^2,\ (\zeta_n)^3,\ \ldots,\ (\zeta_n)^{n-1}.$$

BEWEIS: Offensichtlich ist $((\zeta_n)^k)^n = (\zeta_n)^{n\cdot k} = \exp(k\cdot 2\pi\mathrm{i}) = 1$ für $k = 0, \ldots, n-1$. Wegen der Injektivität von $t \mapsto e^{\mathrm{i}t}$ sind die n Zahlen $(\zeta_n)^k$ paarweise verschieden.

Ist umgekehrt w irgend eine Lösung der Gleichung $z^n = 1$, so ist auch $|w|^n = 1$, also $|w| = 1$. Das bedeutet, daß es ein $t \in [0, 2\pi)$ mit $e^{\mathrm{i}t} = w$ gibt. Und es ist $e^{\mathrm{i}nt} = 1$, also $\cos(nt) = 1$ und $\sin(nt) = 0$. Dann muß $nt = k \cdot 2\pi$ sein, mit $k \in \mathbb{Z}$. Wegen $0 \le t < 2\pi$ ist $0 \le nt < n \cdot 2\pi$. Also kommen für k nur die Werte $0, 1, 2, \ldots, n-1$ in Frage. Damit ist alles bewiesen. ∎

Definition. Die Zahlen $1, \zeta_n, (\zeta_n)^2, \ldots, (\zeta_n)^{n-1}$ nennt man die *n-ten Einheitswurzeln.*

7.3 Satz. *In $\mathbb{C}$ besitzt jede Zahl $z \neq 0$ genau n n–te Wurzeln.*

BEWEIS: Sei $z = re^{\mathrm{i}t}$, mit $r = |z|$ und einem geeigneten $t \in [0, 2\pi)$. Dann setzen wir

$$z_k := \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\mathrm{i}t}{n}} \cdot \zeta_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Offensichtlich sind dies n verschiedene komplexe Zahlen z_k mit $z_k^n = z$.

Ist andererseits w irgendeine Lösung der Gleichung $w^n = z$, so ist $w^n = z_0^n$, also $(wz_0^{-1})^n = 1$. Das bedeutet, daß es eine n–te Einheitswurzel ζ_k gibt, so daß $w = z_0 \cdot \zeta_k$ ist. ∎

Der Satz zeigt, daß man in $\mathbb{C}$ nie von *der* n–ten Wurzel einer Zahl z sprechen kann, es gibt stets n verschiedene. Das gilt auch im Falle $n = 2$. Das Symbol $\sqrt{z}$ ist also zweideutig, und es fällt schwer, eine der beiden Wurzeln auszuzeichnen. Zum Beispiel sind $\frac{1}{2}(1 - \mathrm{i})$ und $\frac{1}{2}(\mathrm{i} - 1)$ die beiden Wurzeln von $-\frac{\mathrm{i}}{2}$. Welche davon sollte man bevorzugen?

In $\mathbb{R}$ ist das ja ganz anders. Dort gibt es entweder überhaupt keine oder eine positive und eine negative Lösung der Gleichung $x^2 = a$, und wir haben die positive Lösung als *die* Wurzel aus a definiert. Das läßt sich nicht übertragen, weil wir in $\mathbb{C}$ keine Anordnung haben und daher auch nicht zwischen positiven und negativen Zahlen unterscheiden können.

7.4 Fundamentalsatz der Algebra. *Jedes nicht konstante komplexe Polynom hat in $\mathbb{C}$ wenigstens eine Nullstelle.*

BEWEIS: Wir können uns auf den folgenden Fall beschränken:

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \ \text{ mit } n \ge 2.$$

Es sei $\mu := \inf_{\mathbb{C}} |p|$.

Behauptung: $|p|$ nimmt auf $\mathbb{C}$ sein Minimum an, d.h. es gibt ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|p(z_0)| = \mu$.

Zum Beweis untersuchen wir $|p(z)|$ auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$. Dort ist

$$\begin{aligned} |p(z)| &= |z|^n \cdot |1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}| \\ &\geq R^n \cdot (1 - |a_{n-1}|\frac{1}{R} - \ldots - |a_0|\frac{1}{R^n}) \\ &\to \infty, \quad \text{für } R \to \infty. \end{aligned}$$

Also gibt es ein R_0, so daß $|p(z)| > \mu$ für $|z| > R_0$ ist.

Da die stetige Funktion $|p|$ auf der kompakten Menge $\overline{D_{R_0}(0)}$ ein Minimum annimmt, finden wir dort das gesuchte z_0.

Behauptung: $p(z_0) = 0$.

Wir nehmen an, es sei $p(z_0) \neq 0$. Dann ist

$$q(z) := \frac{p(z + z_0)}{p(z_0)}$$

ein Polynom vom Grad n mit $q(0) = 1$ und $|q(z)| \geq 1$ für $z \in \mathbb{C}$. Wir werden einen Widerspruch herbeiführen, indem wir zeigen, daß $|q|$ auf dem Rand eines kleinen Kreises um 0 auch Werte < 1 annimmt.

Dazu schreiben wir

$$q(z) = 1 + b_k z^k + \cdots + b_n z^n, \quad \text{mit } b_k \neq 0.$$

Die Idee ist, z so zu wählen, daß $b_k z^k$ eine negative reelle Zahl ist, deren Betrag den der übrigen Terme überwiegt.

Es gibt ein $t \in [0, 2\pi)$ mit $b_k = -|b_k| e^{-\mathrm{i}t}$. Wir setzen $\theta := t/k$ und wählen $r > 0$ so klein, daß $r^k \cdot |b_k| < 1$ ist. Dann ist $e^{\mathrm{i}k\theta} \cdot b_k = -|b_k|$ und

$$|1 + b_k \cdot (r \cdot e^{\mathrm{i}\theta})^k| = |1 - r^k |b_k|| = 1 - r^k |b_k|,$$

also

$$\begin{aligned} |q(r \cdot e^{\mathrm{i}\theta})| &= |1 + b_k \cdot (r \cdot e^{\mathrm{i}\theta})^k + r^k (r \cdot b_{k+1} e^{\mathrm{i}(k+1)\theta} + \cdots + r^{n-k} \cdot b_n e^{\mathrm{i}n\theta})| \\ &\leq (1 - r^k |b_k|) + r^k (|b_{k+1}| r + \cdots + |b_n| r^{n-k}) \\ &= 1 - r^k (|b_k| - r|b_{k+1}| - \ldots - r^{n-k} |b_n|). \end{aligned}$$

Wählt man r sehr klein, so wird der Klammerausdruck positiv,

$$\text{und damit} \quad |q(re^{\mathrm{i}\theta})| < 1.$$

Das ist der gewünschte Widerspruch. ■

Der „Fundamentalsatz der Algebra“ wurde von Gauß in seiner Dissertation (1799) zum ersten Mal streng bewiesen. Später lieferte er noch drei andere Beweis-Versionen. Der hier vorliegende Beweis geht auf eine 1814 von R.Argand veröffentlichte Methode zurück, die 1820 in vervollständigter Form von Cauchy erneut vorgestellt wurde.