

Analysis 1

Kapitel 1 Zahlen, Folgen und Funktionen

Vorlesungsausarbeitung zum WS 2000/01

von Prof. Dr. Klaus Fritzsche

Inhaltsverzeichnis

§1	Mengen und Abbildungen	2
§2	Algebraische Eigenschaften der reellen Zahlen	10
§3	Natürliche Zahlen und vollständige Induktion	16
§4	Die Vollständigkeit von \mathbb{R}	23
§5	Folgen und Konvergenz	28
§6	Reelle und komplexe Funktionen	36

§ 1 Mengen und Abbildungen

Eine (*mathematische*) *Aussage* ist ein sinnvoller mathematischer Satz, dem man in eindeutiger Weise einen der beiden *Wahrheitswerte* **wahr** oder **falsch** zuordnen kann, z.B.

„28 ist eine gerade Zahl“ (wahr) oder „17 ist größer als 15“ (wahr) oder „30 ist durch 7 teilbar“ (falsch).

Führt man eine oder mehrere Variable ein, so erhält man eine *Aussageform*, z.B. „ x ist eine positive Zahl“ oder „Ist n gerade und m ungerade, so ist $n \cdot m$ gerade“. Aus einer Aussageform wird erst dann eine Aussage, wenn man für die Variablen spezielle Werte einsetzt.

Es gibt Aussageformen, die immer wahre Aussagen ergeben, unabhängig davon, welche Werte man einsetzt, z.B. $x + y = y + x$. Dann schreibt man:

$$\forall x, y : x + y = y + x \quad (\text{„für alle } x, y \text{ gilt } \dots \text{“})$$

Gibt es wenigstens ein Objekt, das man für eine Variable x einsetzen kann, so daß eine wahre Aussage herauskommt, z.B. im Falle $3 \cdot x = 6$, so schreibt man:

$$\exists x : 3 \cdot x = 6 \quad (\text{„Es existiert ein } x, \text{ so daß } \dots \text{“})$$

Mit Hilfe der „Quantoren“ \forall und \exists werden die Variablen gebunden, und aus einer Aussageform wird eine Aussage.

Aussagen (und Aussageformen) lassen sich miteinander verknüpfen. Seien etwa \mathcal{A} und \mathcal{B} zwei beliebige Aussagen (oder Aussageformen).

1. **\mathcal{A} und \mathcal{B}** (in Zeichen: $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$) ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn \mathcal{A} und \mathcal{B} beide gleichzeitig wahr sind.
2. **\mathcal{A} oder \mathcal{B}** (in Zeichen: $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$) ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn mindestens eine der beiden Aussagen \mathcal{A} oder \mathcal{B} wahr ist. Es dürfen auch beide Aussagen wahr sein, es handelt sich um ein nicht-ausschließendes „oder“, im Gegensatz zum umgangssprachlichen „entweder – oder“.
3. **nicht \mathcal{A}** (in Zeichen: $\neg \mathcal{A}$) ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn \mathcal{A} falsch ist. Diese logische Verneinung muß von der umgangssprachlichen „Gegenteil-Bildung“ unterschieden werden.

Die Sprache der modernen Mathematik ist die Mengenlehre.

Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche die *Elemente* von M genannt werden, zu einem Ganzen. (Georg Cantor, 1895)

Ist M eine Menge und a ein Element von M , so schreibt man: $a \in M$. Gehört a nicht zu M , so schreibt man: $a \notin M$.

Zwei Mengen M und N sind genau dann *gleich* (in Zeichen: $M = N$), wenn sie die gleichen Elemente besitzen. Mengen, die nur endlich viele Elemente besitzen, kann man daher durch Aufzählen ihrer Elemente beschreiben, z.B. die Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ der ganzen Zahlen von 1 bis 5. Man beachte, daß z.B. die Mengen $\{1, 2, 2, 3, 3, 3\}$ und $\{1, 2, 3\}$ gleich sind.

Ist die Aussage $x \in M$ für jedes x falsch, so nennt man M die *leere Menge*. Sie wird mit dem Symbol \emptyset bezeichnet. Es gibt nur eine leere Menge.

M und N seien zwei Mengen. Wenn jedes Element von N auch ein Element von M ist, so nennt man N eine *Teilmenge* von M und schreibt: $N \subset M$.

Wir wollen in diesem Zusammenhang als weitere logische Verknüpfung die *Implikation* oder *logische Folgerung* $\mathcal{A} \implies \mathcal{B}$ (gesprochen „aus \mathcal{A} folgt \mathcal{B} “ oder „ \mathcal{A} impliziert \mathcal{B} “) einführen. Die Implikation bedeutet: Wenn \mathcal{A} wahr ist, so muß zwingend auch \mathcal{B} wahr sein. Wenn aber \mathcal{A} falsch ist, so hat \mathcal{A} keinen Einfluß auf \mathcal{B} . Diesen Zusammenhang kann man durch die Aussagenverknüpfung $\mathcal{B} \vee \neg \mathcal{A}$ ausdrücken. So ergibt sich die kuriose Tatsache, daß eine falsche Aussage \mathcal{A} jede beliebige (wahre oder falsche) Aussage \mathcal{B} impliziert.

Die Aussage $N \subset M$ bedeutet nun: $\forall x : x \in N \implies x \in M$. Da $x \in \emptyset$ immer falsch ist, ist die leere Menge Teilmenge jeder beliebigen Menge.

Für später sei noch die *logische Äquivalenz* erwähnt: $\mathcal{A} \iff \mathcal{B}$ ist genau dann wahr, wenn \mathcal{A} und \mathcal{B} den gleichen Wahrheitswert besitzen. Das ist genau dann der Fall, wenn $(\mathcal{A} \implies \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \implies \mathcal{A})$ gilt.

Aus der Schule sind die folgenden unendlichen Mengen bekannt:

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, die Menge der *natürlichen Zahlen*;

laut Kronecker hat der liebe Gott diese Zahlen gemacht, laut Dedekind sind sie Schöpfungen des menschlichen Geistes.

$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, die Menge der natürlichen Zahlen incl. Null,

$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$, die Menge der *ganzen Zahlen*,

$\mathbb{Q} := \left\{ \text{Brüche } \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N} \right\}$, die Menge der *rationalen Zahlen*.

Offensichtlich ist $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Methoden zur Mengenbildung:

Allzu sorgloses Bilden von Mengen kann zu Widersprüchen führen. Deshalb einigen wir uns auf drei zulässige Standardverfahren.

1. Ist M eine Menge und $A(x)$ eine Aussageform, die für Elemente $x \in M$ wahr oder falsch sein kann, so ist $\{x \in M : A(x)\}$ die Menge derjenigen Elemente von M , für die $A(x)$ wahr ist.

2. Sei M eine Menge. Dann nennt man $P(M) := \{N : N \subset M\}$ die *Potenzmenge* von M . Ihre Elemente sind die Teilmengen von M .
3. Sei \mathcal{F} eine Menge, deren Elemente selbst Mengen sind. Man spricht in diesem Fall auch von einer *Familie* von Mengen. Dann kann man die *Vereinigungsmenge* aller Elemente von \mathcal{F} bilden:

$$\bigcup_{M \in \mathcal{F}} M := \{x : \exists M \in \mathcal{F} \text{ mit } x \in M\}.$$

Beispiele.

1. Ist $\mathcal{F} = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$, so ist

$$\bigcup_{M \in \mathcal{F}} M = \{x : \exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } x \in M_i\},$$

und man schreibt an Stelle von $\bigcup_{M \in \mathcal{F}} M$ auch $\bigcup_{i=1}^n M_i$ oder $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$.

Speziell ist $M_1 \cup M_2 = \{x : x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$.

2. Die Menge $M_1 \cap M_2 := \{x \in M_1 : x \in M_2\}$ nennt man den *Durchschnitt* oder die *Schnittmenge* von M_1 und M_2 . Man kann auch den Durchschnitt einer beliebigen Familie \mathcal{F} von Mengen bilden:

$$\bigcap_{M \in \mathcal{F}} M := \{x : \forall M \in \mathcal{F} \text{ gilt: } x \in M\}.$$

3. Die Menge $M_1 \setminus M_2 := \{x \in M_1 : x \notin M_2\}$ heißt *Differenz(menge)* von M_1 und M_2 .

Hat man sich auf eine gewisse Grundmenge X festgelegt und betrachtet Teilmengen von X , so schreibt man statt $X \setminus M$ auch $\mathbb{C}_X(M)$ (oder kurz $\mathbb{C}(M)$) und spricht vom *Komplement* oder der *Komplementärmenge* zu M .

4. Bei der Bildung der Potenzmenge einer Menge M darf man nicht die Elemente \emptyset und M vergessen. So ist z.B.

$$P(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

5. Es seien A, B zwei Mengen, $a \in A$, $b \in B$. Aus ihnen kann man das (*ungeordnete*) *Paar* $\{a, b\}$ bilden. Möchte man daraus durch Auszeichnung eines Elementes ein (*geordnetes*) *Paar* machen, so kann man das etwa in der Form $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ tun. Stattdessen schreibt man ein (*geordnetes*) *Paar* üblicherweise in der Form (a, b) . Die Menge

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \text{ und } b \in B\}$$

aller solcher geordneten Paare nennt man das *kartesische Produkt* oder die *Produktmenge* von A und B .

Faßt man Elemente aus drei oder vier Mengen zusammen, so spricht man von *Tripeln* oder *Quadrupeln*. Sind M_1, \dots, M_n endlich viele Mengen, so kann man das kartesische Produkt

$$M_1 \times \dots \times M_n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in M_i \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

aller (*geordneten*) n -*Tupel* bilden. Ist $M_1 = M_2 = \dots = M_n =: M$, so schreibt man auch M^n an Stelle von $M_1 \times \dots \times M_n$.

Um das kartesische Produkt einer beliebigen Familie \mathcal{F} von Mengen bilden zu können, braucht man das sogenannte **Auswahlaxiom**, das sichert, daß man simultan aus jedem $M \in \mathcal{F}$ je ein Element auswählen kann. Darauf soll hier aber nicht näher eingegangen werden.

Bei der Vereinigungs- oder Durchschnittsbildung kommt es nicht auf die Reihenfolge an. Außerdem gelten folgende „Distributivgesetze“:

$$A \cap \bigcup_{M \in \mathcal{F}} M = \bigcup_{M \in \mathcal{F}} A \cap M \quad \text{und} \quad A \cup \bigcap_{M \in \mathcal{F}} M = \bigcap_{M \in \mathcal{F}} A \cup M.$$

Gegeben seien jetzt zwei nicht-leere Mengen A und B . Es sei **jedem** Element $x \in A$ auf eine bestimmte Weise **genau ein** Element $y \in B$ zugeordnet. Dann nennt man diese Zuordnung eine *Funktion* oder *Abbildung* von A nach B . Die Menge A nennt man den *Definitionsbereich*, die Menge B den *Wertebereich* der Abbildung.

Die Zuordnung selbst wird mit einem Buchstaben, z.B. mit f bezeichnet, und man schreibt sie dann in der Form

$$A \xrightarrow{f} B \quad \text{oder} \quad f : A \longrightarrow B.$$

Wird dem Element $x \in A$ durch f das Element $y \in B$ zugeordnet, so schreibt man:

$$y = f(x) \quad \text{oder} \quad f : x \mapsto y.$$

Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ kann entweder durch ihren *Graphen*

$$G_f := \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}$$

beschrieben werden, oder durch Angabe des Definitionsbereichs, des Wertebereichs und einer Zuordnungsvorschrift. Diese Vorschrift kann verbal gegeben werden, durch ein Pfeildiagramm oder – wie meist üblich – durch eine Funktionsgleichung (z.B. $y = 5x + 2$).

Ist $M \subset A$, so nennt man die Menge

$$f(M) := \{y \in B : \exists x \in M \text{ mit } f(x) = y\} = \{f(x) : x \in M\}$$

das *Bild* von M unter f .

Ist $N \subset B$, so nennt man die Menge

$$f^{-1}(N) := \{x \in A : f(x) \in N\}$$

das *Urbild* von N unter f .

Definition. Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt *surjektiv*, falls gilt:

$$f(A) = B, \text{ d.h. } \forall y \in B \exists x \in A \text{ mit } f(x) = y.$$

Die Abbildung heißt *injektiv*, falls gilt:

$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ mit } x_1 \neq x_2 \text{ ist auch } f(x_1) \neq f(x_2).$$

f ist genau dann surjektiv, wenn die Gleichung $f(x) = y$ für *jedes* $y \in B$ lösbar ist. Die Lösung braucht dann aber nicht eindeutig bestimmt zu sein.

f ist genau dann injektiv, wenn die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in B$ *höchstens eine* Lösung besitzt. Dabei ist erlaubt, daß es überhaupt keine Lösung gibt.

Eine Implikation $\mathcal{A} \implies \mathcal{B}$ ist nach dem Prinzip der „Kontraposition“ äquivalent zu der Implikation $\neg \mathcal{B} \implies \neg \mathcal{A}$, denn die Aussage

$$\mathcal{B} \text{ oder } \neg \mathcal{A}$$

kann man auch lesen als

$$\neg \mathcal{A} \text{ oder } \neg(\neg \mathcal{B}).$$

Deshalb kann man den Nachweis der Injektivität einer Abbildung auch in folgender Form führen: Ist $f(x_1) = f(x_2)$, so ist $x_1 = x_2$.

Beispiele.

1. Ist $M_2 \neq \emptyset$, so ist die *Projektion* $p : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1$ mit $p(x, y) := x$ surjektiv.

Ist $(x_0, y_0) \in M_1 \times M_2$, so ist

$$p^{-1}(p(\{(x_0, y_0)\})) = \{(x, y) \in M_1 \times M_2 : x = x_0\}.$$

Offensichtlich ist p nicht injektiv.

2. Ist M eine beliebige Menge, so ist die *Diagonalabbildung* $d : M \rightarrow M \times M$ mit $d(x) := (x, x)$ injektiv. Aber d ist nicht surjektiv.

Definition. Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt *bijektiv*, falls sie injektiv und surjektiv ist.

f ist also bijektiv, wenn die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in B$ eindeutig lösbar ist.

Beispiel.

Ist $A \neq \emptyset$, so ist die *identische Abbildung* $\text{id}_A : A \rightarrow A$ mit $\text{id}_A(x) := x$ bijektiv.

Definition. Es seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ zwei Abbildungen. Hintereinander ausgeführt ergeben sie eine neue Abbildung $g \circ f : A \rightarrow C$, die durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad (\text{für } x \in A)$$

definiert wird. Man nennt $g \circ f$ die *Verknüpfung* oder *Verkettung* von g mit f .

1.1 Satz. Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g : B \rightarrow A$ gibt, so daß gilt:

$$g \circ f = \text{id}_A \quad \text{und} \quad f \circ g = \text{id}_B.$$

Die Abbildung g nennt man dann die *Umkehrabbildung* von f .

BEWEIS: 1) Zunächst sei f als bijektiv vorausgesetzt.

Wir müssen zu f eine Umkehr-Abbildung $g : B \rightarrow A$ finden und definieren dazu g wie folgt: Ist $y_0 \in B$, so gibt es wegen der Bijektivität von f genau ein $x_0 \in A$ mit $f(x_0) = y_0$. In diesem Fall sei $g(y_0) := x_0$. Wenn wir für jedes $y \in B$ so verfahren, dann erhalten wir eine Abbildung $g : B \rightarrow A$ mit $g \circ f = \text{id}_A$ und $f \circ g = \text{id}_B$.

2) Es gebe jetzt eine Abbildung g , die das Kriterium erfüllt.

a) Sei $y \in B$ vorgegeben. Dann ist $x := g(y) \in A$ und $f(x) = f(g(y)) = y$. Also ist f surjektiv.

b) Seien $x_1, x_2 \in A$, mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann ist

$$x_1 = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = x_2.$$

Also ist f injektiv. (a) und (b) zusammen ergeben die Bijektivität. ■

Definition. Die Umkehrabbildung von f wird mit f^{-1} bezeichnet.

Man beachte: Ist $f : A \rightarrow B$ eine beliebige Abbildung und $N \subset B$, so ist die Urbildmenge $f^{-1}(N)$ definiert. Ist f sogar *bijektiv*, so ist $f^{-1}(N)$ zugleich auch die Bildmenge von N unter der Umkehrabbildung f^{-1} . Hier besteht zwar Verwechslungsgefahr, aber die Ergebnisse stimmen überein.

1.2 Satz. Sind die Abbildungen $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ beide *bijektiv*, so ist auch $g \circ f : A \rightarrow C$ *bijektiv*, und

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

BEWEIS: Zu f und g existieren Umkehrabbildungen f^{-1} und g^{-1} . Diese können wir zur Abbildung $F := f^{-1} \circ g^{-1} : C \rightarrow A$ verknüpfen. Man rechnet leicht nach, daß $F \circ (g \circ f) = \text{id}_A$ und $(g \circ f) \circ F = \text{id}_C$ ist, z.B. ist

$$F \circ (g \circ f)(x) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \text{id}_B \circ f = f^{-1} \circ f = \text{id}_A.$$

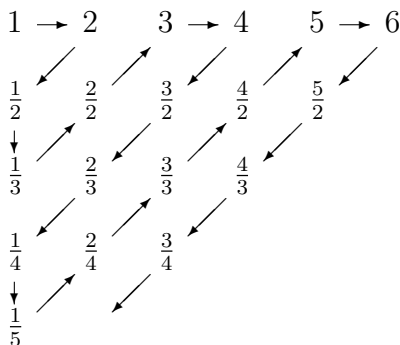
Also ist $g \circ f$ *bijektiv* und F die Umkehrabbildung dazu. ■

Definition. Eine Menge M heißt eine *unendliche Menge*, falls es eine bijektive Abbildung von M auf eine echte Teilmenge von M gibt. Andernfalls nennt man M eine *endliche Menge*.

Eine unendliche Menge M heißt *abzählbar*, falls es eine bijektive Abbildung von \mathbb{N} auf M gibt.

\mathbb{N} ist unendlich, denn die Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow G := \{ \text{gerade Zahlen} \}$ mit $f(n) := 2n$ ist offensichtlich *bijektiv*.

Die Mengen \mathbb{N} , \mathbb{N}_0 und \mathbb{Z} sind natürlich *abzählbar*. Aber auch \mathbb{Q} ist *abzählbar*, wie das *Cantorsche Diagonalverfahren* zeigt:



Wir erinnern uns nun an den

1.3 Satz von der Division mit Rest. Sind a, b zwei natürliche Zahlen mit $1 \leq b < a$, so gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q, r \in \mathbb{N}_0$, so daß gilt:

1. $a = q \cdot b + r.$

2. $0 \leq r < b.$

BEWEIS: $a - b$ ist eine natürliche Zahl. Ist diese Zahl noch $\geq b$, so subtrahiert man b erneut, erhält $a - 2 \cdot b$ und wiederholt das so lange, bis $r := a - q \cdot b \in \mathbb{N}_0$, aber $r < b$ ist.

Zur Eindeutigkeit: Gibt es zwei Darstellungen $a = q_1 \cdot b + r_1 = q_2 \cdot b + r_2$ und ist etwa $b > r_2 > r_1 \geq 0$, so ist $(q_1 - q_2) \cdot b = r_2 - r_1$ eine positive Zahl $< b$. Das ist unmöglich, weil b eine natürliche und $q_1 - q_2$ eine ganze Zahl ist. Also muß $r_1 = r_2$ sein, und damit auch $q_1 = q_2$. ■

Wir betrachten jetzt eine rationale Zahl $x = \frac{p}{q}$ zwischen 0 und 1, mit $0 < p < q$. Dann ist $10 \cdot p < 10 \cdot q$, und wir führen fortgesetzt Divisionen aus:

$$\begin{aligned} 10p &= z_1 \cdot q + r_1 && \text{(mit } 0 \leq z_1 \leq 9 \text{ und } 0 \leq r_1 < q), \\ 10r_1 &= z_2 \cdot q + r_2 && \text{(mit } 0 \leq z_2 \leq 9 \text{ und } 0 \leq r_2 < q) \\ \text{usw.} \end{aligned}$$

So erhalten wir x als unendlichen Dezimalbruch:

$$x = 0. z_1 z_2 z_3 \dots$$

Die Reste bei Division durch q können nur die Werte $0, 1, 2, \dots, q - 1$ annehmen. Deshalb müssen sich die Divisionen spätestens nach q Schritten wiederholen. Der Dezimalbruch ist periodisch!

Beispiel.

Im Falle $x = 1/7$ ergeben sich die Divisionen

$$\begin{aligned} 10 &= 1 \cdot 7 + 3, && \text{also } z_1 = 1, \\ 30 &= 4 \cdot 7 + 2, && \text{also } z_2 = 4, \\ 20 &= 2 \cdot 7 + 6, && \text{also } z_3 = 2, \\ 60 &= 8 \cdot 7 + 4, && \text{also } z_4 = 8, \\ 40 &= 5 \cdot 7 + 5, && \text{also } z_5 = 5, \\ 50 &= 7 \cdot 7 + 1, && \text{also } z_6 = 7, \\ 10 &= 1 \cdot 7 + 3, && \text{also } z_7 = 1, \\ 30 &= 4 \cdot 7 + 2, && \text{also } z_8 = 4, \\ \text{usw.} \end{aligned}$$

Also ist $x = 0. \underline{142857} 142857 \dots$

Aus der Beziehung $10^6 \cdot x - x = 142857$ gewinnt man den Bruch zurück:

$$x = \frac{142857}{999999} = \frac{15873}{111111} = \frac{1443}{10101} = \frac{481}{3367} = \frac{1}{7}.$$

Es gibt jedoch auch nicht-periodische Dezimalbrüche, z.B.

$$x = 0.11010010001000010000010\dots$$

Unter der Menge \mathbb{R} der *reellen Zahlen* verstehen wir die Menge aller unendlichen Dezimalbrüche

$$x = \pm z_{-n}z_{-n+1}\dots z_{-1}z_0 \cdot z_1z_2z_3z_4\dots$$

Diese Darstellung ist nicht eindeutig, weil z.B. $1.2999999\dots$ und $1.3000000\dots$ die gleiche reelle Zahl bezeichnen.

1.4 Theorem. *Die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen ist nicht abzählbar.*

BEWEIS: Wir beschränken uns auf reelle Zahlen zwischen 0 und 1 und führen den Beweis durch Widerspruch. Wäre die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 abzählbar, so könnte man sie als Folge schreiben:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}\dots, \\ x_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}\dots, \\ x_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}\dots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Ziffern a_{ij} nehmen dabei wie üblich Werte zwischen 0 und 9 an.

Nun konstruieren wir eine reelle Zahl $y = 0.c_1c_2c_3\dots$ wie folgt:

$$\text{Es sei } c_i := \begin{cases} 5 & \text{falls } a_{ii} \neq 5 \\ 4 & \text{falls } a_{ii} = 5 \end{cases}$$

Offensichtlich liegt y zwischen 0 und 1 und muß unter den Folgegliedern x_1, x_2, x_3, \dots vorkommen. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $y = x_n$ ist. Dann ist $c_n = a_{nn}$, im Widerspruch zur Definition der c_i . ■

Wir nehmen nun die Existenz von \mathbb{R} als gegeben an, beschreiben diese Menge durch ein System von Axiomen und leiten alles weitere aus den Axiomen ab.

§ 2 Algebraische Eigenschaften der reellen Zahlen

2.1 Axiome der Addition. *Die reellen Zahlen bilden eine Menge \mathbb{R} . Je zwei Elementen $x, y \in \mathbb{R}$ ist eindeutig eine reelle Zahl $x + y$ (ihre Summe) zugeordnet.*

(A-1.) **Assoziativgesetz:** $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ist $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(A-2.) **Kommutativgesetz:** $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ist $x + y = y + x$.

(A-3.) **Existenz der Null:** *Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$, so daß gilt:*

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ ist } x + 0 = x.$$

(A-4.) **Existenz des Negativen:** $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}$ mit $x + y = 0$.

Die Axiome A-1 bis A-4 sagen aus, daß \mathbb{R} bezüglich der Addition eine *kommutative Gruppe* ist.

2.2 Satz. Für alle reellen Zahlen a, b besitzt die Gleichung

$$a + x = b$$

eine eindeutig bestimmte Lösung.

BEWEIS: 1) Zunächst zeigen wir die Existenz einer Lösung. Mit $-a$ bezeichnen wir eine reelle Zahl, für die $a + (-a) = 0$ ist. Dann setzen wir $x := b + (-a)$. Es folgt:

$$\begin{aligned} a + x &= a + (b + (-a)) && \text{(Einsetzen)} \\ &= a + ((-a) + b) && \text{(A-2)} \\ &= (a + (-a)) + b && \text{(A-1)} \\ &= 0 + b && \text{(A-4)} \\ &= b + 0 = b. && \text{(A-2 und A-3)} \end{aligned}$$

2) Eindeutigkeit:

Es seien x und y zwei Lösungen, also $a + x = b = a + y$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} y &= y + 0 \\ &= y + (a + (-a)) \\ &= (y + a) + (-a) \\ &= (a + y) + (-a) \\ &= (a + x) + (-a) \\ &= (x + a) + (-a) \\ &= x + (a + (-a)) \\ &= x + 0 = x. \end{aligned}$$

■

Definition.

1. Das eindeutig bestimmte Element $y \in \mathbb{R}$ mit $x + y = 0$ nennt man das *Negative von x* und bezeichnet es mit $-x$.
2. Die eindeutig bestimmte Lösung $x := b + (-a)$ der Gleichung $a + x = b$ bezeichnet man auch mit dem Symbol $b - a$ und nennt sie die *Differenz* von a und b .

2.3 Satz. *Es ist $-(-a) = a$ und $-(a + b) = (-a) + (-b)$.*

BEWEIS: Nach A-4 ist

$$\begin{aligned} (-a) + (-(-a)) &= 0 \\ \text{und} \quad (-a) + a &= 0. \end{aligned}$$

Wegen der eindeutigen Lösbarkeit von Gleichungen muß dann $a = -(-a)$ sein.

Die 2. Behauptung beweist man analog. ■

Reelle Zahlen kann man auch *multiplizieren*.

2.4 Axiome der Multiplikation. *Je zwei Elementen $x, y \in \mathbb{R}$ ist eindeutig eine reelle Zahl $x \cdot y$ (ihr Produkt) zugeordnet.*

(M-1.) **Assoziativgesetz:** $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ist $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

(M-2.) **Kommutativgesetz:** $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ist $x \cdot y = y \cdot x$.

(M-3.) **Existenz der Eins:** *Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so daß gilt:*
 $\forall x \in \mathbb{R}$ ist $x \cdot 1 = x$.

(M-4.) **Existenz des Inversen:** $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0 \exists y \in \mathbb{R}$, so daß
 $x \cdot y = 1$ ist.

Man beachte, daß die Aussage $1 \neq 0$ ein Axiom ist! Die Menge $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist bezüglich der Multiplikation eine kommutative Gruppe.

2.5 Satz. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ besitzt die Gleichung

$$a \cdot x = b$$

eine eindeutig bestimmte Lösung.

BEWEIS: Analog zur Addition. ■

Die Lösung der Gleichung $x \cdot y = 1$ für festes $x \neq 0$ wird mit x^{-1} bezeichnet, und man nennt diese Zahl das *Inverse* zu x . Die Lösung der Gleichung $a \cdot x = b$ ist das Element $x = a^{-1} \cdot b$. Sie wird auch in der Form $x = \frac{b}{a}$ geschrieben.

2.6 Satz. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt:

$$(a^{-1})^{-1} = a \quad \text{und} \quad (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}.$$

(Beweis wie bei den analogen Aussagen zur Addition)

2.7 Axiom vom Distributivgesetz.

$$(D.) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} \text{ ist } x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Man beachte, daß es nur ein Distributivgesetz gibt!

2.8 Satz. $\forall x \in \mathbb{R} \text{ ist } x \cdot 0 = 0.$

BEWEIS: Es ist $x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$ und $x \cdot 0 = x \cdot 0 + 0$. Da die Lösung y der Gleichung $x \cdot 0 + y = x \cdot 0$ eindeutig bestimmt ist, muß $x \cdot 0 = 0$ sein. ■

Deshalb ist die Gleichung $x \cdot 0 = 1$ nie lösbar! Durch 0 kann nicht dividiert werden.

Eine Menge mit zwei „Verknüpfungen“ $+$ und \cdot heißt ein *Körper*, falls die Axiome A-1 bis A-4, M-1 bis M-4 und D erfüllt sind. Alles, was wir nur auf Grund der Axiome beweisen, gilt in jedem Körper, z.B. auch im Körper \mathbb{Q} der rationalen Zahlen.

2.9 Satz. *Es ist* $(-1) \cdot (-1) = 1.$

BEWEIS:

$$\begin{aligned} \text{Es ist } (-1) + (-1) \cdot (-1) &= (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \\ &= (-1) \cdot (1 + (-1)) \\ &= (-1) \cdot 0 = 0 \\ \text{und } (-1) + 1 &= 1 + (-1) = 0. \end{aligned}$$

Wegen der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichung $(-1) + x = 0$ folgt der Satz. ■

In ähnlicher Weise zeigt man allgemein: $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$

2.10 Satz. *Es seien* a, b *reelle Zahlen mit* $a \cdot b = 0.$

Dann ist $a = 0$ *oder* $b = 0.$

BEWEIS: Sei $a \cdot b = 0$. Ist $b = 0$, so ist man fertig. Ist $b \neq 0$, so existiert das Inverse b^{-1} , und man erhält:

$$0 = 0 \cdot b^{-1} = (a \cdot b) \cdot b^{-1} = a \cdot 1 = a.$$

■

2.11 Axiome der Anordnung. *In* \mathbb{R} *gibt es eine Teilmenge* P *(die Menge der positiven reellen Zahlen), so daß gilt:*

(P-1.) *Ist* $a \in P$ *und* $b \in P$, *so ist auch* $a + b \in P$ *und* $a \cdot b \in P.$

(P-2.) *Jede reelle Zahl gehört zu genau einer der drei Mengen* P , $\{0\}$ *oder* $-P := \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in P\}.$

Ist $a \in P$, so schreibt man: $a > 0$.

Ein Körper, der auch noch die Axiome P-1 und P-2 erfüllt, heißt ein *angeordneter Körper*. Auch \mathbb{Q} ist ein angeordneter Körper.

Definition. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann sagt man:

$$\begin{aligned} a < b & : \iff b - a > 0 && (a \text{ kleiner als } b). \\ a > b & : \iff b < a && (a \text{ größer als } b). \\ a \leq b & : \iff (a < b) \vee (a = b) && (a \text{ kleiner oder } = b). \\ a \geq b & : \iff (a > b) \vee (a = b) && (a \text{ größer oder } = b). \end{aligned}$$

2.12 Satz. a, b, c seien reelle Zahlen. Dann gilt:

1. Ist $a < b$ und $b < c$, so ist auch $a < c$.
2. Ist $a < b$ und c beliebig, so ist auch $a + c < b + c$.
3. Ist $a < b$ und $c > 0$, so ist $a \cdot c < b \cdot c$.

BEWEIS: 1) Ist $a < b$ und $b < c$, so ist $b - a > 0$ und $c - b > 0$, also auch $c - a = (c - b) + (b - a) > 0$. Damit ist $a < c$.

2) Ist $a < b$, so ist $b - a > 0$. Für ein beliebiges c ist dann $(b + c) - (a + c) = b - a > 0$, also $a + c < b + c$.

3) Nach Voraussetzung ist $b - a > 0$ und $c > 0$, also $b \cdot c - a \cdot c = (b - a) \cdot c > 0$. ■

2.13 Satz. Ist $x \in \mathbb{R}$ beliebig, $x \neq 0$, so ist $x \cdot x > 0$.

Insbesondere ist $1 > 0$.

BEWEIS: Wir führen eine Fallunterscheidung durch:

Ist $x > 0$, so ist $x \cdot x > 0$, nach P-1.

Ist nicht $x > 0$, so folgt aus P-2: entweder ist $x = 0$ (was wir ausgeschlossen haben) oder $-x > 0$. Dann ist aber $x \cdot x = (-x) \cdot (-x) > 0$.

Schließlich ist noch $1 = 1 \cdot 1 > 0$. ■

Definition. Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

der *Betrag* von x .

2.14 Satz. Es seien x, y und c reelle Zahlen, $c > 0$. Dann gilt:

1. Es ist stets $|x| \geq 0$, und es ist genau dann $|x| = 0$, wenn $x = 0$ ist.
2. Es ist $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
3. $|x| < c \iff -c < x < c$.
4. Es gelten die Dreiecksungleichungen:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{und} \quad |x - y| \geq |x| - |y|.$$

BEWEIS: 1) und 2) sind trivial.

3) Es ist

$$\begin{aligned} |x| < c &\iff [(x \geq 0) \wedge (x < c)] \vee [(x < 0) \wedge (-x < c)] \\ &\iff (0 \leq x < c) \vee (-c < x < 0) \\ &\iff -c < x < c. \end{aligned}$$

4) Für eine reelle Zahl a gilt allgemein:

$$a \leq |a| \quad \text{und} \quad -|a| \leq a.$$

Also ist $-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$. Wegen (3) ist dann $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Die zweite Ungleichung erhält man mit einem Trick:

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|.$$

■

Sind $a < b$ zwei reelle Zahlen, so nennt man $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ das *abgeschlossene Intervall* und $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ das *offene Intervall* von a bis b . Die Definition der *halboffenen Intervalle* $[a, b)$ und $(a, b]$ sollte dann klar sein.

Dann ist z.B.

$$\begin{aligned} (a - \varepsilon, a + \varepsilon) &= \{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -\varepsilon < x - a < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck $|x - a|$ gibt den Abstand zwischen x und a an, d.h. $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ist die Menge aller reellen Zahlen x , die von a einen Abstand $< \varepsilon$ haben.

§ 3 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Definition. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *induktiv*, falls gilt:

1. $1 \in M$.
2. $\forall x \in \mathbb{R} : ((x \in M) \implies ((x + 1) \in M))$.

Definition. Ein Element $n \in \mathbb{R}$ heißt *natürliche Zahl*, falls n zu **jeder** induktiven Teilmenge von \mathbb{R} gehört. Die Menge der natürlichen Zahlen in \mathbb{R} wird mit \mathbb{N} bezeichnet.

\mathbb{R} selbst ist die größte induktive Teilmenge von \mathbb{R} , und \mathbb{N} ist der Durchschnitt aller induktiven Mengen in \mathbb{R} : $\mathbb{N} = \bigcap_{M \subset \mathbb{R} \text{ ind.}} M$. \mathbb{N} ist nicht leer, denn die 1 liegt in \mathbb{N} .

3.1 Satz. \mathbb{N} ist induktiv.

BEWEIS:

- 1) Es wurde bereits festgestellt, daß 1 in \mathbb{N} liegt.
- 2) Sei n ein beliebiges Element von \mathbb{N} . Dann gehört n zu jeder induktiven Menge $M \subset \mathbb{R}$. Aber jede induktive Menge $M \subset \mathbb{R}$ muß dann auch $n + 1$ enthalten. Das bedeutet, daß $n + 1$ in \mathbb{N} liegt. ■

Damit enthält \mathbb{N} auch die Zahlen $2 := 1 + 1$, $3 := 2 + 1$, $4 := 3 + 1$, ...

Eine sehr wichtige Folgerung ist das

3.2 Induktionsprinzip. *Es sei $M \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge, und es gelte:*

1. $1 \in M$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} : (n \in M \implies (n + 1) \in M)$.

Dann ist bereits $M = \mathbb{N}$.

BEWEIS: Nach Voraussetzung ist M eine induktive Teilmenge von \mathbb{N} . Weil aber \mathbb{N} schon die kleinste induktive Menge ist, muß sogar $M = \mathbb{N}$ gelten. ■

Das Induktionsprinzip ist die Grundlage für die *Beweismethode der vollständigen Induktion*:

Sei $A(n)$ eine Aussageform über natürliche Zahlen und $M := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n)\}$. Es soll die Aussage „ $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ “ bewiesen werden, die äquivalent zu der Aussage „ $M = \mathbb{N}$ “ ist. Der Beweis der gewünschten Aussage kann deshalb in 2 Schritten geführt werden:

- 1) **Induktionsanfang:** Man zeigt, daß $A(1)$ wahr ist.

2) **Induktionsschritt:** Man beweist die Implikation $A(n) \implies A(n+1)$ (d.h., aus der Voraussetzung $A(n)$ leitet man die Aussage $A(n+1)$ her).

Der Induktionsanfang liefert $1 \in M$, und der Induktionsschritt liefert: Wenn n in M liegt, so liegt auch $n+1$ in M . Mit dem Induktionsprinzip folgt daraus, daß $M = \mathbb{N}$ ist.

Hier ist ein Beispiel für einen „klassischen“ Induktionsbeweis:

3.3 Satz.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

BEWEIS: Wir führen Induktion nach n .

Im Falle $n = 1$ ergeben beide Seiten der Gleichung die 1.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig und die Formel schon für dieses n bewiesen. Es folgt:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}. \end{aligned}$$

■

Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) löste diese Aufgabe für $n = 100$ als Schüler von 9 Jahren, indem er rechnete:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (50 + 51) = 50 \cdot 101 = 5050.$$

Das zeigt, daß das Induktionsprinzip an solch einfachen Sätzen oftmals überstrapaziert wird.

Wir untersuchen jetzt weitere Eigenschaften von \mathbb{N} .

3.4 Satz.

1. $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1$.
2. Ist $x \in \mathbb{R}$ und $1 < x < 2$, so ist x keine natürliche Zahl.

BEWEIS:

1) Für $n = 1$ ist die Aussage trivial. Ist $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$, so ist $n+1 \geq 1+1 > 1$.

2) Sei $M := \{1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$. Dann ist M eine induktive Menge, also $\mathbb{N} \subset M$. Ist $1 < x < 2$, so ist $x \notin M$ und daher $x \notin \mathbb{N}$. ■

Es sei $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$.

3.5 Satz. Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $n - 1 \in \mathbb{N}_0$.

BEWEIS: Die Menge $M := \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n - 1 \in \mathbb{N}\}$ ist induktiv. Wieder folgt, daß $\mathbb{N} \subset M$ ist. Das ergibt die Behauptung. ■

Bemerkung. Ist $n \in \mathbb{N}$, so heißt $n + 1$ auch der *Nachfolger* von n . Wir haben gezeigt, daß jede natürliche Zahl $n \neq 1$ einen *Vorgänger* in \mathbb{N} hat, nämlich die Zahl $n - 1$. Mit anderen Worten: jede natürliche Zahl $n > 1$ ist Nachfolger einer natürlichen Zahl. Also ist die Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}$ mit $\varphi(n) := n + 1$ bijektiv. Das ist noch einmal ein Beweis dafür, daß \mathbb{N} eine unendliche Menge ist.

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge. Ein Element $a \in M$ heißt *kleinstes Element* oder *Minimum* (bzw. *größtes Element* oder *Maximum*) von M , falls gilt:

$$\forall x \in M : a \leq x \quad (\text{bzw. } a \geq x \text{ für alle } x \in M).$$

3.6 Wohlordnungs-Satz.

Jede nicht-leere Menge M von natürlichen Zahlen besitzt ein kleinstes Element.

BEWEIS: Um Induktion benutzen zu können, führen wir künstlich eine Variable ein. Wir beweisen die folgende Aussage $A(n)$:

Jede Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$, die die Zahl n enthält, besitzt ein kleinstes Element.

Haben wir die Aussage $A(n)$ durch vollständige Induktion für jedes $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, so haben wir auch den Satz bewiesen.

A(1): Ist $1 \in M$, so ist natürlich 1 das kleinste Element.

A(n) \implies A(n+1): Es sei $M \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge, die die Zahl $n + 1$ enthält. Die Aussage $A(n)$ sei schon bewiesen. Wir machen eine Fallunterscheidung:

a) Ist $n \in M$, so hat M nach Induktionsvoraussetzung ein kleinstes Element, und wir sind fertig.

b) Ist $n \notin M$, so setzen wir $H := M \cup \{n\}$. Offensichtlich ist $H \subset \mathbb{N}$ und $n \in H$. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt H ein kleinstes Element a , und es muß dann $a \leq n$ sein.

Ist $a < n$, so muß a schon in M liegen und dort erst recht das kleinste Element sein. Ist $a = n$, so kommt a in M nicht vor. Weil $a < m$ für alle $m \in M$ ist, muß $n + 1 = a + 1 \leq m$ für alle $m \in M$ sein. Das bedeutet, daß $n + 1$ das kleinste Element von M ist. ■

3.7 Satz. Die Menge \mathbb{N} besitzt kein größtes Element.

BEWEIS: Wäre $a \in \mathbb{N}$ ein größtes Element von \mathbb{N} , so wäre $n \leq a$, für jede natürliche Zahl n . Aber mit a liegt auch $a + 1$ in \mathbb{N} , und es ist $a + 1 > a$. Das kann nicht sein, wenn a das größte Element von \mathbb{N} ist. ■

Der Wohlordnungssatz liefert eine Variante des Induktionsprinzips:

3.8 Zweites Induktionsprinzip. Es sei $A(n)$ eine Aussage über natürliche Zahlen, und es gelte:

1. $A(1)$ ist wahr.
2. Ist $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ und $A(k)$ wahr für jedes $k < n$, so ist $A(n)$ wahr.

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

BEWEIS: Es sei $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n)\}$. Dann ist auf jeden Fall $1 \in M$. Wäre $M \neq \mathbb{N}$, so wäre die Menge $T := \mathbb{N} \setminus M$ nicht leer und besäße ein kleinstes Element n_0 . Dieses müßte größer als 1 sein. Alle Zahlen $k < n_0$ würden in M liegen, und wegen Bedingung (2) dann auch n_0 . Aber das ist ein Widerspruch! ■

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$ heißt Menge der *ganzen Zahlen*,

$\mathbb{Q} = \{pq^{-1} : p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N}\}$ Menge der *rationalen Zahlen*.

Definition. Es sei $n \in \mathbb{N}$, und für jede natürliche Zahl i mit $1 \leq i \leq n$ sei eine reelle Zahl a_i gegeben. Dann beschreiben wir die Summe $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ durch das Symbol $\sum_{i=1}^n a_i$ und das Produkt $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ durch das Symbol $\prod_{i=1}^n a_i$.

Man kann übrigens das *Summenzeichen* (und analog das *Produktzeichen*) auch induktiv erklären, durch

$$\sum_{i=1}^1 a_i := a_1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n+1} a_i := \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) + a_{n+1}.$$

Sind $k, l \in \mathbb{Z}$, so definiert man

$$\sum_{i=k}^l a_i := \begin{cases} 0 & \text{falls } k > l, \\ a_k + a_{k+1} + \dots + a_l & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$\prod_{i=k}^l a_i := \begin{cases} 1 & \text{falls } k > l, \\ a_k \cdot a_{k+1} \cdot \dots \cdot a_l & \text{sonst.} \end{cases}$$

Regeln zum Umgang mit dem Summenzeichen:

1) **Aufteilung einer Summe:** Ist $k \leq m \leq l$, so ist

$$\sum_{i=k}^l a_i = \sum_{i=k}^m a_i + \sum_{i=m+1}^l a_i.$$

2) **Multiplikation mit einer Konstanten:** Ist $c \in \mathbb{R}$, so ist

$$c \cdot \sum_{i=k}^l a_i = \sum_{i=k}^l (c \cdot a_i).$$

3) **Summe von Summen:** Ist zu jedem i auch noch eine reelle Zahl b_i gegeben, so gilt:

$$\sum_{i=k}^l a_i + \sum_{i=k}^l b_i = \sum_{i=k}^l (a_i + b_i).$$

4) **Umnummerierung der Indizes:** Ist $m \leq n$, so gilt:

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{j=1}^{n-m+1} a_{m-1+j}.$$

Auf der linken Seite stehen $n - m + 1$ Summanden. Will man über einen neuen Laufindex j von 1 bis $n - m + 1$ summieren, so erhält der Summationsterm einen Index der Form $k + j$, wobei k so zu wählen ist, daß $k + 1 = m$ ist, also $k = m - 1$.

Beim Gebrauch des Produktzeichens gelten analoge Regeln.

Definition. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $n! := \prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ (*n-Fakultät*).

Ist $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$, so ist die *Potenz* x^n definiert durch $x^n := \prod_{i=1}^n x = \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{n\text{-mal}}$.

Insbesondere ist $x^0 = 1$.

Schließlich wird für $0 \leq k \leq n$ der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ definiert durch

$$\binom{n}{k} := \prod_{i=1}^k \frac{n-i+1}{i} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Bemerkung. $n!$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, n Objekte anzuordnen.

$\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge.

3.9 Satz.

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n}{1} = n$ und $\binom{n}{0} = 1$.
3. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

BEWEIS: Die Aussagen (1) und (2) sind trivial. Die Aussage (3) muß man nachrechnen:

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\ &= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

■

Daraus ergibt sich das *Pascalsche Dreieck*:

$$\begin{array}{cccccccc} n=0 & & & & & & & & 1 \\ & 1 & & & & & & & & 1 \\ & & 2 & & & & & & & & 1 \\ & & & 3 & & & & & & & & 1 \\ & & & & 4 & & & & & & & & 1 \\ & & & & & 5 & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & 10 & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \dots & & & & & & & & 1 \end{array}$$

3.10 Die Binomische Formel. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n.$$

BEWEIS: Wir führen Induktion nach n .

Der Fall $n = 1$ ist trivial, auf beiden Seiten erhält man den Ausdruck $a + b$.

Die Formel sei nun für $n \geq 1$ schon bewiesen. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \cdot (a+b) \\
&\quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&\quad \text{(distributiv ausmultipliziert)} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
&\quad \text{(Umnummerierung in der 2. Summe, Zusammenfassung)} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
&\quad \text{(Additionsformel für Binomialkoeffizienten)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.
\end{aligned}$$

■

Im Falle $n = 2$ und $n = 3$ erhält man speziell

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{und} \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

3.11 Folgerung.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

BEWEIS: Setze $a = b = 1$, bzw. $a = 1$ und $b = -1$.

■

3.12 Bernoullische Ungleichung. Ist $x \geq -1$ eine reelle Zahl $\neq 0$ und $n > 1$ eine natürliche Zahl, so ist $(x+1)^n > 1 + nx$.

BEWEIS: Für $x = -1$ ist die Aussage trivial, für $x \neq 0$ ist

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 > 1 + 2x.$$

Sei nun $x > -1$, $x \neq 0$ und $n \geq 2$. Ist die Aussage für n bewiesen, so folgt:

$$(x+1)^{n+1} > (1+nx)(x+1) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

■

3.13 Satz. Sind $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a \neq b$, so ist

$$\sum_{i=0}^n a^i b^{n-i} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

BEWEIS: Es wird ein kleiner Trick verwendet.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } \left(\sum_{i=0}^n a^i b^{n-i} \right) \cdot (a - b) &= \sum_{i=0}^n a^{i+1} b^{n-i} - \sum_{i=0}^n a^i b^{n-i+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} a^i b^{n-i+1} - \sum_{i=0}^n a^i b^{n-i+1} \\ &= a^{n+1} - b^{n+1}. \end{aligned}$$

Da $a \neq b$ vorausgesetzt wurde, darf man durch $(a - b)$ dividieren. ■

Als Folgerung erhält man:

3.14 Geometrische Summenformel. Ist $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$\sum_{i=0}^n a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

§ 4 Die Vollständigkeit von \mathbb{R}

Bemerkung. Sind a, b zwei reelle Zahlen mit $a < b$, so gibt es eine reelle Zahl d mit $a < d < b$. Man setze etwa $d := \frac{a+b}{2}$. Wie man sieht, gilt sogar: sind $a, b \in \mathbb{Q}$, so kann man auch d in \mathbb{Q} wählen.

Definition. Unter einem *Dedekindschen Schnitt* in \mathbb{R} versteht man ein Paar (A, B) nicht-leerer Teilmengen von \mathbb{R} , so daß gilt:

1. $A \cup B = \mathbb{R}$ und $A \cap B = \emptyset$.
2. Für $a \in A$ und $b \in B$ ist stets $a < b$.

Ist x_0 eine feste reelle Zahl, so bilden z.B. die Mengen

$$A := \{x \in \mathbb{R} : x \leq x_0\} \quad \text{und} \quad B := \{x \in \mathbb{R} : x > x_0\}$$

einen Dedekindschen Schnitt. Die Zahl x_0 hat die Eigenschaft, daß $a \leq x_0 \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt.

Stellt man sich die reellen Zahlen als Punkte auf einer Geraden vor, so zerschneidet ein Dedekindscher Schnitt diese Gerade in zwei Teile. Das Vollständigkeitsaxiom soll nun sichern, daß dabei immer eine reelle Zahl getroffen wird.

4.1 Vollständigkeitsaxiom.

(V.) Es sei (A, B) ein Dedekindscher Schnitt in \mathbb{R} . Dann gibt es ein $s \in \mathbb{R}$, so daß $a \leq s \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ ist.

Die Zahl s nennt man die *Schnittzahl* des Dedekindschen Schnittes.

4.2 Satz. Ist (A, B) ein Dedekindscher Schnitt in \mathbb{R} , so ist dessen Schnittzahl s eindeutig bestimmt, und es gilt:

Entweder ist s das größte Element von A oder das kleinste Element von B .

BEWEIS: Zur Eindeutigkeit: Es gebe zwei Schnittzahlen s_1, s_2 mit $s_1 \neq s_2$. Dann können wir o.B.d.A. annehmen, daß $s_1 < s_2$ und damit $a \leq s_1 < s_2 \leq b$ für $a \in A$ und $b \in B$ ist. Ist d eine reelle Zahl mit $s_1 < d < s_2$, so kann d weder zu A noch zu B gehören, im Widerspruch zur Bedingung $A \cup B = \mathbb{R}$.

Sei s die (eindeutig bestimmte) Schnittzahl. Ist s nicht das größte Element von A , so kann s nicht in A liegen. Wegen $A \cup B = \mathbb{R}$ muß s dann in B liegen und ist automatisch das kleinste Element von B . ■

In der Literatur findet man viele verschiedene Versionen des Vollständigkeitsaxioms. Die meisten davon sind zu der vorliegenden Formulierung von Dedekind äquivalent, einige erfordern aber noch ein zusätzliches Axiom (von Archimedes), das in unserem Fall überflüssig ist.

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}$. Ein Element $a \in \mathbb{R}$ heißt *obere Schranke* (bzw. *untere Schranke*) von M , falls $a \geq x$ (bzw. $a \leq x$) für alle $x \in M$ ist.

M heißt *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*, falls M eine obere Schranke (bzw. eine untere Schranke) besitzt.

M heißt *beschränkt*, falls M nach oben und nach unten beschränkt ist.

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte Menge. Falls die Menge aller oberen Schranken von M ein kleinstes Element a besitzt, so nennt man a das *Supremum* von M (in Zeichen: $a = \sup(M)$).

Die größte untere Schranke einer nach unten beschränkten Menge M nennt man – wenn sie existiert – das *Infimum* von M (in Zeichen: $\inf(M)$).

4.3 Satz. Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nicht-leere nach oben beschränkte Menge. Dann besitzt M ein Supremum.

BEWEIS: Wir konstruieren einen Dedekindschen Schnitt in \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \text{Es sei } A &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in M \text{ mit } x < y\} \\ \text{und } B &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq y \text{ für alle } y \in M\}. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist B die Menge der oberen Schranken von M und nach Voraussetzung nicht leer. Da $M \neq \emptyset$ ist, kann auch A nicht leer sein.

Nach Konstruktion ist $a < b$ für $a \in A$ und $b \in B$, sowie $A \cup B = \mathbb{R}$ und $A \cap B = \emptyset$. Also ist (A, B) ein Dedekindscher Schnitt.

Sei s die eindeutig bestimmte Schnitzzahl von (A, B) , d.h. $a \leq s \leq b$ für $a \in A$ und $b \in B$. Liegt s in B , so ist s das gesuchte Supremum von M . Würde s aber in A liegen, so gäbe es ein $y \in M$ mit $s < y$. Dann wäre auch jede Zahl a mit $s < a < y$ ein Element von A . Das kann nicht sein. ■

In gleicher Weise kann man zeigen, daß jede nicht-leere nach unten beschränkte Menge ein Infimum besitzt.

Beispiel.

Es seien $a < b$ zwei reelle Zahlen. Dann besitzt das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ ein kleinstes Element (nämlich a) und ein größtes Element (nämlich b). Zugleich handelt es sich dabei um das Infimum und das Supremum von $[a, b]$.

Das offene Intervall (a, b) besitzt kein kleinstes und kein größtes Element, hat aber ebenfalls a als Infimum und b als Supremum.

4.4 Der Satz von Archimedes.

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad n > x.$$

BEWEIS: Angenommen, es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}$, so daß $x_0 \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist \mathbb{N} nach oben beschränkt.

Also existiert $a := \sup(\mathbb{N})$, die kleinste obere Schranke von \mathbb{N} . Dies ist eine reelle Zahl, und $a-1$ ist keine obere Schranke mehr. Also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a-1 < n_0$. Dann ist $n_0 + 1 > a$. Da $n_0 + 1$ eine natürliche Zahl ist, widerspricht das der Supremums-Eigenschaft von a . ■

4.5 Folgerung.

Sei $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

BEWEIS:

Zu der reellen Zahl $\frac{1}{\varepsilon}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Da $\varepsilon > 0$ ist, ist $\frac{1}{n} < \varepsilon$. ■

4.6 Satz (Existenz der n -ten Wurzel). Sei $a > 0$ eine reelle Zahl und $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Dann gibt es genau eine reelle Zahl $y > 0$ mit $y^n = a$.

BEWEIS: Wir nehmen zunächst an, daß $a > 1$ ist, und betrachten die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ und } x^n < a\}.$$

Die Menge M ist nicht leer (denn $1 \in M$), und sie ist nach oben beschränkt (etwa durch a , denn $a^{n-1} > 1$ und damit $a^n > a$).

Sei $y := \sup(M)$. Offensichtlich muß $y \geq 1$ sein. Ist $y^n = a$, so ist nichts mehr zu zeigen. Andernfalls gibt es 2 Möglichkeiten:

1. Fall: $y^n < a$, also $a - y^n > 0$.

Wir wollen zeigen, daß es ein $h > 0$ gibt, so daß auch noch $(y + h)^n < a$ ist. Dazu benutzen wir die Beziehung

$$(y + h)^n - y^n = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (y + h)^{n-1-i} y^i < h \cdot n(y + h)^{n-1}.$$

Wählt man h zwischen 0 und 1 so klein, daß $h < \frac{a - y^n}{n(y + 1)^{n-1}}$ ist, so folgt:

$$(y + h)^n - y^n < \left(\frac{y + h}{y + 1}\right)^{n-1} \cdot (a - y^n) < a - y^n, \quad \text{also } (y + h)^n < a.$$

Das ist ein Widerspruch zur Supremumseigenschaft von y .

2. Fall: $y^n > a$, also $y^n - a > 0$.

Diesmal benutzen wir die Beziehung

$$y^n - (y - h)^n = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y^{n-1-i} (y - h)^i < h \cdot n y^{n-1}.$$

Wählt man h zwischen 0 und 1 so klein, daß $h < \frac{y^n - a}{n \cdot y^{n-1}}$ ist, so folgt:

$$y^n - (y - h)^n < y^n - a, \quad \text{also } (y - h)^n > a.$$

Auch das kann nicht sein.

Ist $0 < a < 1$, so löst man zunächst die Gleichung $y^n = \frac{1}{a}$ und bildet dann den Kehrwert.

Nun fehlt bloß noch die Eindeutigkeit: Ist $y_1^n = y_2^n = a$, so ist

$$0 = y_1^n - y_2^n = (y_1 - y_2) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_1^{n-1-i} y_2^i, \quad \text{also } y_1 = y_2.$$

■

Definition. Sei $a \geq 0$ eine reelle Zahl. Die eindeutig bestimmte reelle Zahl $y \geq 0$ mit $y^n = a$ nennt man die n -te Wurzel von a , in Zeichen $y = \sqrt[n]{a}$. Im Falle $n = 2$ schreibt man einfach $y = \sqrt{a}$.

Das Quadrat einer reellen Zahl ist niemals negativ. Ist also $a < 0$ und $n \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl, so existiert die n -te Wurzel aus a nicht. Ist dagegen n ungerade, so ist $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$ die eindeutig bestimmte Zahl, deren n -te Potenz gerade a ergibt.

Insbesondere ist

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ x & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Definition. a, b seien natürliche Zahlen. Man sagt, a teilt b (in Zeichen: $a \mid b$), falls es ein $q \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $b = q \cdot a$ ist. a heißt dann auch *Teiler* von b .

Die Zahlen 1 und b heißen *triviale Teiler* von b , alle anderen Teiler nennt man *echte Teiler*.

Eine natürliche Zahl $p > 1$ heißt *Primzahl*, falls p keine echten Teiler besitzt.

Man kann beweisen, daß jede natürliche Zahl eindeutig (bis auf die Reihenfolge) in ein Produkt von Primzahlen zerlegt werden kann. Daraus ergibt sich:

$$\forall p \text{ prim} : p \mid (a \cdot b) \implies (p \mid a) \vee (p \mid b).$$

Außerdem besitzen zwei natürliche Zahlen immer einen größten gemeinsamen Teiler. Ist dieser = 1, so nennt man die beiden Zahlen *teilerfremd*.

4.7 Satz. Sei p eine Primzahl und $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Dann gibt es keine rationale Zahl x mit $x^n = p$.

BEWEIS: Wir nehmen an, es gebe eine rationale Zahl $x = u/v$ mit $x^n = p$. Da wir mit dem größten gemeinsamen Teiler von u und v kürzen können, nehmen wir zusätzlich an, daß u und v teilerfremd sind.

Wegen $x^n = p$ ist $u^n = p \cdot v^n$. Es folgt: $p \mid u^n$, und (weil p Primzahl ist) auch $p \mid u$. Wir schreiben $u = r \cdot p$. Dann ist $r^n \cdot p^{n-1} = v^n$. Wegen $n \geq 2$ hat das zur Folge, daß $p \mid v$. Das ist ein Widerspruch, denn u und v sollten teilerfremd sein. ■

Alle Zahlen $\sqrt[n]{p}$, $n \geq 2$ und p prim, sind demnach irrational. Andererseits sind die rationalen Zahlen aber „dicht“ in \mathbb{R} :

4.8 Satz. Sei $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Dann gibt es eine Zahl $q \in \mathbb{Q}$, so daß $|q - a| < \varepsilon$ ist.

BEWEIS: Ist a selbst rational, so ist die Aussage trivial. Außerdem können wir uns auf den Fall $a > 0$ beschränken.

Zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ kann man dann ein $n \in \mathbb{N}$ finden, so daß $1/n < \varepsilon$ ist. Weiter kann man nach Archimedes ein $m \in \mathbb{N}$ finden, so daß $m > n \cdot a$ ist, und da jede Teilmenge von \mathbb{N} ein kleinstes Element besitzt, können wir m minimal wählen. Dann ist $m - 1 \leq n \cdot a < m$, und es folgt:

$$\frac{m}{n} - \varepsilon < \frac{m}{n} - \frac{1}{n} \leq a < \frac{m}{n} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < \frac{m}{n} + \varepsilon,$$

für $q := m/n$ also $|a - q| < \varepsilon$. ■

Unbeschränkte Mengen besitzen definitionsgemäß kein Supremum oder kein Infimum. Diesen Mangel kann man aber künstlich beheben:

\mathbb{R} wird um zwei weitere Elemente $-\infty$ und $+\infty$ ergänzt, die neue Menge

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

bezeichnet man als *abgeschlossene Zahlengerade*. Die hinzugekommenen Elemente nennt man die *unendlich fernen Punkte*. Das Rechnen mit $-\infty$ und $+\infty$ ist nicht möglich, aber es gelten folgende Beziehungen:

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ ist } -\infty < x < +\infty, \quad \text{außerdem ist } -\infty < +\infty.$$

Ist nun $M \subset \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt, so setzt man $\sup(M) := +\infty$; ist M nicht nach unten beschränkt, so setzt man $\inf(M) := -\infty$.

Mit dieser Notation gilt jetzt:

$$M \subset \mathbb{R} \text{ beschränkt} \iff \sup(M) < +\infty \text{ und } \inf(M) > -\infty.$$

§ 5 Folgen und Konvergenz

Mit (a_ν) bezeichnen wir eine unendliche *Folge* a_1, a_2, a_3, \dots von Elementen aus \mathbb{R} . Die Zahlen a_ν nennt man die *Glieder* der Folge. Man kann eine Folge auch als Abbildung $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ auffassen, mit $a_\nu := a(\nu)$. Diese Abbildung braucht nicht injektiv zu sein, d.h. es kann durchaus $a_\nu = a_\mu$ für verschiedene Indizes ν, μ sein.

Ist $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung mit $\nu(i+1) > \nu(i)$ für alle i , so wird durch $a \circ \nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine neue Folge definiert, die man eine *Teilfolge* der ursprünglichen Folge a nennt. Man schreibt diese Teilfolge in der Form $(a_{\nu(i)})$ oder (a_{ν_i}) , und sie entsteht aus (a_ν) durch Fortlassen von Gliedern unter Beibehaltung der Reihenfolge.

Definition. Eine Folge (a_ν) heißt *konvergent gegen eine Zahl* $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu_0, \text{ so da\ss } \forall \nu \geq \nu_0 \text{ gilt: } |a_\nu - a| < \varepsilon.$$

Wenn es kein solches a gibt, hei\ss t die Folge *divergent*.

Wenn (a_ν) gegen a konvergiert, so nennt man a den *Grenzwert* oder *Limes* der Folge, und man schreibt:

$$a = \lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu.$$

5.1 Satz. *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*

BEWEIS: Wir nehmen an, es gibt zwei Zahlen a und a' , die beide die Bedingungen der Definition erf\u00fcllen. Es sei dann ein $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.

Es gibt Zahlen ν_1 und ν_2 , so da\ss $|a_\nu - a| < \varepsilon$ f\u00fcr $\nu \geq \nu_1$ und $|a_\nu - a'| < \varepsilon$ f\u00fcr $\nu \geq \nu_2$ ist. Wir setzen $\nu_0 := \max(\nu_1, \nu_2)$. F\u00fcr $\nu \geq \nu_0$ ist

$$|a - a'| = |(a_\nu - a') - (a_\nu - a)| \leq |a_\nu - a'| + |a_\nu - a| < 2\varepsilon.$$

Aber eine nicht-negative Zahl wie $|a - a'|$, die kleiner als jede positive Zahl der Gestalt 2ε ist, kann nur $= 0$ sein. Also ist $a = a'$. ■

Beispiel.

Wir zeigen, da\ss die Folge (a_n) mit $a_n := \frac{1}{n}$ gegen Null konvergiert.

Dazu sei ein $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Nach Archimedes gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. F\u00fcr $n \geq n_0$ folgt daraus:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Das zeigt die Konvergenz.

Man mu\ss sorgf\u00e4ltig zwischen einer Folge (a_ν) und der Menge $\{a_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$ unterscheiden. Letztere braucht keineswegs unendlich zu sein. Durch $a_\nu := (-1)^\nu$ wird z.B. eine unendliche Folge (a_ν) gegeben, deren Glieder die Zahlen

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$$

sind. Die Menge der Folgeglieder ist die Menge $\{1, -1\}$, die nur aus zwei Elementen besteht.

Definition. Eine Folge (a_ν) heißt *beschränkt* (bzw. *nach oben* oder *nach unten beschränkt*), falls das auf die Menge der Folgenglieder zutrifft.

5.2 Satz. Ist (a_ν) konvergent, so ist (a_ν) beschränkt.

BEWEIS: Sei a der Grenzwert der Folge. Dann gibt es ein ν_0 , so daß $|a_\nu - a| < 1$ für $\nu \geq \nu_0$ ist, also

$$a - 1 < a_\nu < a + 1 \quad \text{für } \nu \geq \nu_0.$$

Da auch die endlich vielen Folgenglieder a_1, \dots, a_{ν_0} eine beschränkte Menge bilden, ist (a_ν) insgesamt beschränkt. ■

Beispiel.

Sei $q \in \mathbb{R}_+$. Wir untersuchen die Folge (a_n) mit $a_n := q^n$.

a) Sei $q > 1$. Dann ist $q = 1 + h$ mit $h > 0$, und $q^n \geq 1 + n \cdot h$. Also ist (q^n) unbeschränkt und damit nicht konvergent.

b) Ist $q = 1$, so konvergiert die konstante Folge $q^n = 1$ natürlich gegen 1.

c) Ist $0 < q < 1$, so ist $1/q > 1$ und daher $(1/q)^n$ unbeschränkt. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ können wir also ein n_0 finden, so daß $(1/q)^{n_0} > 1/\varepsilon$ ist. Für $n \geq n_0$ ist dann $q^n \leq q^{n_0} < \varepsilon$. Das bedeutet, daß (q^n) gegen Null konvergiert.

Definition. Eine Folge (a_ν) heißt *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*), falls stets $a_\nu \leq a_{\nu+1}$ ist (bzw. $a_\nu \geq a_{\nu+1}$).

5.3 Satz von der monotonen Konvergenz. Ist (a_ν) monoton wachsend und nach oben beschränkt, so ist (a_ν) konvergent.

BEWEIS: Die Menge $M := \{a_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$ ist nicht leer und nach oben beschränkt. Also ist $a := \sup(M)$ eine reelle Zahl. Sie ist unser Kandidat für den Grenzwert.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke mehr, und es gibt ein ν_0 mit $a - \varepsilon < a_{\nu_0}$. Nun benutzen wir die Monotonie. Für $\nu \geq \nu_0$ ist $a_{\nu_0} \leq a_\nu \leq a$, also

$$0 \leq a - a_\nu \leq a - a_{\nu_0} < \varepsilon.$$

Das bedeutet, daß (a_ν) gegen a konvergiert. ■

Genauso zeigt man, daß eine monoton fallende nach unten beschränkte Folge konvergiert. Außerdem reicht es, wenn die Monotonie erst ab einem gewissen ν_0 gilt. Wenn die Glieder einer Folge eine Eigenschaft erst ab einer gewissen Nummer besitzen, so sagt man auch, daß *fast alle* Glieder diese Eigenschaft besitzen. „Fast alle“ bedeutet also in diesem Zusammenhang „alle, bis auf endlich viele Ausnahmen“.

Das Interessante am Satz von der monotonen Konvergenz ist, daß man die Konvergenz einer Folge zeigen kann, ohne den Grenzwert kennen zu müssen.

Bevor wir weitere Beispiele behandeln können, müssen wir noch einen sehr hilfreichen Satz beweisen:

5.4 Satz. (a_ν) und (b_ν) seien konvergente Folgen mit Grenzwerten a und b . Dann gilt:

1. $(a_\nu + b_\nu)$ konvergiert gegen $a + b$.
2. $(a_\nu \cdot b_\nu)$ konvergiert gegen $a \cdot b$.
3. Ist $a > 0$, so ist $a_\nu > a/2$ für fast alle ν .
4. Ist $b_\nu \neq 0$ für alle ν und $b \neq 0$, so konvergiert $(\frac{1}{b_\nu})$ gegen $\frac{1}{b}$.
5. Ist $a_\nu \leq b_\nu$ für fast alle ν , so ist auch $a \leq b$.

BEWEIS: 1) ($\varepsilon/2$ -Methode):

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gilt für fast alle ν : $|a_\nu - a| < \varepsilon/2$ und $|b_\nu - b| < \varepsilon/2$, also

$$|(a_\nu + b_\nu) - (a + b)| \leq |a_\nu - a| + |b_\nu - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hätten wir mit $\dots < \varepsilon$ begonnen, so hätten wir am Ende $\dots < 2\varepsilon$ erhalten. Das wird auch beliebig klein und ist deshalb genauso gut. Bei den nächsten Schritten setzen wir gleich $|a_\nu - a| < \varepsilon$ und $|b_\nu - b| < \varepsilon$ voraus und verzichten auf besondere Eleganz.

2) Weil (a_ν) konvergiert, ist $|a_\nu|$ durch eine positive Konstante c beschränkt. Für fast alle ν ist dann

$$|a_\nu b_\nu - ab| = |(a_\nu(b_\nu - b) + (a_\nu - a)b| \leq c \cdot \varepsilon + |b|\varepsilon.$$

3) Ist $a > 0$, so ist $|a_\nu - a| < a/2$ für fast alle ν , also

$$-\frac{a}{2} < a_\nu - a < \frac{a}{2},$$

und damit $a/2 < a_\nu < 3a/2$ für fast alle ν .

4) Weil $b \neq 0$ ist, ist $|b_\nu| > |b|/2$ für fast alle ν , und daher

$$\left| \frac{1}{b_\nu} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_\nu|}{|bb_\nu|} < \frac{2}{|b|^2} \cdot \varepsilon.$$

5) Es ist $a_\nu - b_\nu \leq 0$ für fast alle ν . Wäre der Grenzwert $a - b > 0$, so müßte $a_\nu - b_\nu > (a - b)/2$ für fast alle ν gelten. Also ist $a \leq b$. ■

Beispiele.

1. Sei $a_n := \frac{2n^2 + n}{3n(n-1)}$. Dann ist

$$a_n = \frac{n^2(2 + 1/n)}{3n^2(1 - 1/n)} = \frac{2 + 1/n}{3(1 - 1/n)},$$

und eine sukzessive Anwendung des obigen Satzes ergibt, daß (a_n) gegen $2/3$ konvergiert.

2. Sei $a > 0$. Wir definieren rekursiv eine Folge (x_n) . Die Zahl $x_0 > 0$ kann beliebig gewählt werden, und dann sei

$$x_{n+1} := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

Wir wollen mit Hilfe des Satzes von der monotonen Konvergenz zeigen, daß (x_n) konvergiert, und anschließend wollen wir den Grenzwert bestimmen.

Offensichtlich ist $x_n > 0$ für alle n , also (x_n) nach unten beschränkt. Außerdem ist

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - a &= \frac{1}{4} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)^2 - a \\ &= \frac{1}{4} \left(x_n^2 + 2a + \frac{a^2}{x_n^2} - 4a \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(x_n - \frac{a}{x_n} \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \\ &= \frac{2x_n^2 - x_n^2 - a}{2x_n} \\ &= \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \geq 0, \end{aligned}$$

also (x_n) monoton fallend und damit konvergent gegen eine reelle Zahl c .

Offensichtlich muß $c \geq 0$ sein. Wäre $c = 0$, so würde auch (x_n^2) gegen Null konvergieren. Das ist aber nicht möglich, da stets $x_n^2 \geq a > 0$ ist. Also ist $c > 0$. Da auch (x_{n+1}) gegen c konvergiert, folgt die Gleichung

$$c = \frac{1}{2}\left(c + \frac{a}{c}\right).$$

Es ergibt sich $2c^2 = c^2 + a$, also $c^2 = a$ und damit $c = \sqrt{a}$.

3. Etwas direkter kann man bei der Folge $a_n := \sqrt[n]{n}$ vorgehen. Allerdings sind ein paar Tricks nötig.

Da $c_n := \sqrt{a_n} > 1$ ist, kann man schreiben: $c_n = 1 + h_n$, mit $h_n > 0$. Dann ist $c_n = \sqrt{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n]{\sqrt{n}}$, also

$$\sqrt{n} = (c_n)^n = (1 + h_n)^n \geq 1 + n \cdot h_n \quad (\text{Bernoulli}).$$

Es folgt:

$$0 < h_n \leq \frac{\sqrt{n} - 1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

und das wird beliebig klein. Also konvergiert (h_n) gegen 0, (c_n) gegen 1 und (a_n) ebenfalls gegen 1.

4. Wir untersuchen die Folge $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Zunächst ist

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &> \left(1 - n \cdot \frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{n}{n-1} \quad (\text{Bernoullische Ungl.}) \\ &= 1, \end{aligned}$$

also (a_n) monoton wachsend.

Unter Benutzung der binomischen Formel und der Abschätzung

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{k} < \frac{1}{2^{k-1}}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n} \\
&< 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\
&= 1 + \frac{(1/2)^n - 1}{(1/2) - 1} < 3.
\end{aligned}$$

Damit ist (a_n) nach oben beschränkt, also konvergent. Der Grenzwert

$$e = 2.718281\dots$$

wird als *Eulersche Zahl* bezeichnet.

Definition. Eine Zahl a heißt *Häufungspunkt* der Folge (a_ν) , falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder a_ν mit $|a_\nu - a| < \varepsilon$ gibt.

(Das ist äquivalent zu: $\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists \nu \geq N$ mit $|a_\nu - a| < \varepsilon$.)

Beispiel.

Die Folge $a_n := (-1)^n \frac{n}{n+1}$ hat zwei Häufungspunkte, nämlich 1 und -1 .

5.5 Satz. a ist genau dann Häufungspunkt der Folge (a_ν) , wenn es eine Teilfolge $(a_{\nu(i)})$ gibt, die gegen a konvergiert.

BEWEIS: Sei a ein Häufungspunkt. Es gibt ein $\nu(1)$, so daß $|a_{\nu(1)} - a| < 1$ ist. Nun konstruieren wir sukzessive (etwa mit Hilfe eines kleinen Induktionsbeweises) Zahlen $\nu(k)$, so daß gilt:

1. $\nu(k+1) > \nu(k)$,
2. $|a_{\nu(k)} - a| < \frac{1}{k}$.

Ist jetzt ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es nach Archimedes ein k_0 mit $1/k_0 < \varepsilon$. Für $k \geq k_0$ folgt daraus:

$$|a_{\nu(k)} - a| < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k_0} < \varepsilon.$$

Das bedeutet, daß $(a_{\nu(k)})$ gegen a konvergiert.

Gibt es umgekehrt schon eine Teilfolge $(a_{\nu(i)})$, die gegen a konvergiert, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein i_0 , so daß $|a_{\nu(i)} - a| < \varepsilon$ für $i \geq i_0$ ist, also $|a_\nu - a| < \varepsilon$ für die unendlich vielen $\nu = \nu(i)$ mit $i \geq i_0$. Damit ist a ein Häufungspunkt von (a_ν) . ■

5.6 Satz von Bolzano-Weierstraß. *Jede beschränkte Folge (a_ν) besitzt wenigstens einen Häufungspunkt.*

BEWEIS: Es sei $c_n := \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$. Dann ist (c_n) eine monoton wachsende nach oben beschränkte Folge, also konvergent gegen eine Zahl c . Ist ein $\varepsilon > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ vorgegeben, so gibt es ein $m \geq N$ mit $|c_m - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ (weil (c_n) gegen c konvergiert).

Weiter gibt es ein $k \geq m$ mit $|a_k - c_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ (weil $c_m = \inf\{a_m, a_{m+1}, \dots\}$ ist). Dann ist $k \geq N$ und

$$|a_k - c| \leq |a_k - c_m| + |c_m - c| < \varepsilon.$$

Das bedeutet, daß c ein Häufungspunkt von (a_ν) ist. ■

5.7 Folgerung. *Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt besitzt. Im allgemeinen braucht eine Folge überhaupt keinen Häufungspunkt zu besitzen (z.B. $a_\nu := \nu$), und andererseits kann selbst eine beschränkte Folge mehrere Häufungspunkte haben (z.B. $a_\nu = (-1)^\nu$).

Definition. Sei (a_ν) eine Folge von reellen Zahlen und $H(a_\nu)$ die Menge aller Häufungspunkte der Folge.

Ist (a_ν) nach oben beschränkt und $H(a_\nu) \neq \emptyset$, so heißt $\overline{\lim} a_\nu := \sup H(a_\nu)$ der *Limes superior* der Folge.

Ist (a_ν) nach unten beschränkt und $H(a_\nu) \neq \emptyset$, so heißt $\underline{\lim} a_\nu := \inf H(a_\nu)$ der *Limes inferior* der Folge (a_ν) .

Ist (a_ν) eine beschränkte Folge, so existieren $\overline{\lim} a_\nu$ und $\underline{\lim} a_\nu$. In diesem Falle ist (a_ν) genau dann konvergent, wenn $\overline{\lim} a_\nu = \underline{\lim} a_\nu$ ist. Der gemeinsame Wert ist dann auch der Limes der Folge.

Auch wenn $H(a_\nu) = \emptyset$ ist, kann man $\overline{\lim} a_\nu$ und $\underline{\lim} a_\nu$ definieren. Allerdings sind die Konventionen in der Literatur sehr uneinheitlich. Wir erweitern hier unsere Definition wie folgt: Ist (a_ν) nach oben beschränkt und $H(a_\nu) = \emptyset$, so ist $\overline{\lim} a_\nu = -\infty$. Ist (a_ν) nicht nach oben beschränkt, so existiert $\overline{\lim} a_\nu$ nicht. Analoges legt man für $\underline{\lim} a_\nu$ fest.

Man kann dann sagen: (a_ν) konvergiert genau dann gegen a , wenn $\overline{\lim} a_\nu$ und $\underline{\lim} a_\nu$ existieren und beide gleich a sind.

§ 6 Reelle und komplexe Funktionen

Sei M eine beliebige Menge. Eine Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *reelle Funktion* auf M . Ist $N \subset M$, so wird die eingeschränkte Funktion $f|_N : N \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $(f|_N)(x) := f(x)$ für $x \in N$.

Liegt M in \mathbb{R} , so spricht man von einer reellen Funktion von einer (reellen) Variablen. In günstigen Fällen kann man $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ durch den Graphen $G_f = \{(x, y) \in M \times \mathbb{R} : y = f(x)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ veranschaulichen.

Ist M beliebig, so bezeichnen wir mit $\mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ die Menge aller reellen Funktionen auf M . Man kann mit solchen Funktionen fast wie mit reellen Zahlen rechnen.

1. Je zwei Elementen $f, g \in \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ kann ein Element $f + g \in \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ zugeordnet werden, mit

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad \text{für } x \in M.$$

Es gilt das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz. Außerdem gibt es eine Nullfunktion 0_M (mit $0_M(x) := 0$ für alle $x \in M$), so daß $f + 0_M = f$ für alle $f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ gilt.

Zu jeder Funktion f gibt es eine negative Funktion $-f$ (definiert durch $(-f)(x) := -f(x)$), so daß $f + (-f) = 0_M$ ist.

2. Je zwei Elementen $f, g \in \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ kann ein Element $f \cdot g \in \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ zugeordnet werden, mit

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \quad \text{für } x \in M.$$

Es gilt das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz. Außerdem gibt es eine Einsfunktion 1_M (mit $1_M(x) := 1$ für alle $x \in M$), so daß $f \cdot 1_M = f$ für alle $f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ gilt.

Offensichtlich ist $1_M \neq 0_M$. Man kann aber i.a. nicht zu jedem $f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ mit $f \neq 0_M$ ein Inverses f' mit $f \cdot f' = 1_M$ finden. Ist etwa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x + 2$, so ist $(f \cdot g)(-2) = f(-2) \cdot g(-2) = 0$, für jede Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

3. Es gilt das Distributivgesetz:

$$\text{Für alle } f, g, h \in \mathcal{F}(M, \mathbb{R}) \text{ ist } f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h.$$

Die Menge $\mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ bildet also i.a. keinen Körper. Eine Menge mit den obigen Eigenschaften nennt man einen *Ring*.

Ein Element $x_0 \in M$ heißt *Nullstelle* von $f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$, falls $f(x_0) = 0$ ist. Wenn f keine Nullstelle besitzt, dann existiert das multiplikative Inverse zu f .

Beispiele.

1. Ist $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall, so entspricht die Addition von reellen Funktionen auf I der sogenannten *Superposition* (Überlagerung) von Funktionen, wie man sie von der Fourier-Synthese von Schwingungen kennt, oder von der Überlagerung von Tönen in der Akustik.
2. Die Menge $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ist nichts anderes als die Menge aller reellen Zahlenfolgen. Wir haben schon an früherer Stelle (bei den Grenzwertsätzen) die Summe und das Produkt zweier Folgen $(a_\nu), (b_\nu)$ betrachtet.
3. Eine Funktion $f : \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist durch die zwei Werte $f(1)$ und $f(2)$ festgelegt. Man kann sie deshalb auch als Zahlenpaar $(f(1), f(2)) \in \mathbb{R}^2$ auffassen. Solche Zahlenpaare werden nach den Gesetzen der Vektorrechnung addiert:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

Auch die Multiplikation wird komponentenweise durchgeführt. Das hat i.a. keine Entsprechung in der Vektorrechnung. Allerdings ist

$$(c, c) \cdot (x_1, x_2) = (c \cdot x_1, c \cdot x_2)$$

das gleiche wie die Skalierung des Vektors (x_1, x_2) um den Faktor c . Genauso führt oben in $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ die Multiplikation mit einer konstanten Funktion zu einer Skalierung.

Definition. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Polynom(funktion)*, falls es reelle Zahlen a_0, a_1, \dots, a_n gibt, so daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

Wir sagen, die Zahlen a_i bilden ein *Koeffizienten-System* der *Länge* n für das Polynom.

Im Augenblick wissen wir noch nicht, ob das Koeffizientensystem eindeutig bestimmt ist!

Da man $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$ wählen kann, ist die Nullfunktion ein Polynom. Natürlich reicht dafür $a_0 = 0$ als Koeffizientensystem aus. Ist f nicht das Nullpolynom, so besitzt f ein Koeffizientensystem (a_0, \dots, a_n) minimaler Länge. Dann muß $a_n \neq 0$ sein, und die Länge n bezeichnet man als den *Grad* von f . Offensichtlich ist $\text{grad}(f) = 0$ genau dann, wenn f eine konstante Funktion $\neq 0$ ist.

6.1 Satz. Sei $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$, und x_0 eine Nullstelle von f . Dann gibt es ein Polynom $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{n-1}x^{n-1}$ mit $b_{n-1} = a_n$ und

$$f(x) = (x - x_0) \cdot g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Ist $f \neq 0$, so ist auch $g \neq 0$ und $\text{grad}(g) = \text{grad}(f) - 1$.

BEWEIS: Weil $f(x_0) = 0$ ist, gilt für beliebiges $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(x) - f(x_0) = \sum_{i=0}^n a_i x^i - \sum_{i=0}^n a_i x_0^i \\
 &= \sum_{i=1}^n a_i (x^i - x_0^i) \quad (\text{die Terme mit } i = 0 \text{ heben sich weg!}) \\
 &= (x - x_0) \cdot \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{j=0}^{i-1} x^j x_0^{i-j-1} \\
 &= (x - x_0) \cdot (a_1 + a_2(x_0 + x) + \cdots + a_n(x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x + \cdots + x^{n-1})) \\
 &= (x - x_0) \cdot g(x),
 \end{aligned}$$

wobei $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}$ ein Polynom mit $b_{n-1} = a_n$ ist. Ist $f \neq 0$, so gibt es ein $x_1 \neq x_0$ mit $f(x_1) \neq 0$. Dann ist auch $g(x_1) \neq 0$ und g nicht das Nullpolynom. Wir können in diesem Fall das Koeffizientensystem von f gleich von Anfang an minimal wählen. Dann ist $\text{grad}(f) = n$ und $\text{grad}(g) \leq n-1$. Aber wegen der Zerlegung $f(x) = (x-x_0) \cdot g(x)$ ist auch $\text{grad}(f) \leq \text{grad}(g) + 1 \leq (n-1) + 1 = n$, also $\text{grad}(g) = n-1$. ■

6.2 Folgerung. Ist $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$, mit $a_n \neq 0$, so hat f höchstens n verschiedene Nullstellen.

BEWEIS: Wir führen Induktion nach n .

Im Falle $n = 0$ besitzt $f(x) = a_0$ (mit $a_0 \neq 0$) überhaupt keine Nullstelle.

Sei nun $n \geq 1$, und die Behauptung für $n-1$ schon bewiesen. Hat f keine Nullstelle, so ist nichts zu zeigen. Es sei also $f(x_0) = 0$. Es gibt ein Polynom $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}$ mit $b_{n-1} = a_n$, so daß $f(x) = (x-x_0) \cdot g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Jede Nullstelle $x_1 \neq x_0$ von f ist auch Nullstelle von g . Nach Induktionsvoraussetzung besitzt g aber höchstens $n-1$ Nullstellen. Also hat f höchstens n Nullstellen. ■

6.3 Folgerung (Identitätssatz für Polynome). Besitzt ein Polynom $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ mehr als n Nullstellen, so muß $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$ sein.

Hieraus ergibt sich unmittelbar, daß die Koeffizienten eines Polynoms eindeutig bestimmt sind. Ist nämlich $f = g$, so ist $f - g$ das Nullpolynom, und alle Koeffizienten von $f - g$ verschwinden. Das geht nur, wenn f und g die gleichen Koeffizienten haben.

Bemerkung. In der Algebra lernt man, daß es einen Körper K mit nur zwei Elementen 0 und 1 gibt. In K ist dann $1 + 1 = 0$. Das Polynom $f(x) = x + x^2$ hat

jedes Element $x \in K$ als Nullstelle, obwohl nicht alle Koeffizienten $= 0$ sind. Bei Polynomen über \mathbb{R} oder \mathbb{Q} kann so etwas nicht passieren.

Dem Nullpolynom geben wir noch den Grad $-\infty$.

Die Summe zweier Polynome f, g ist wieder ein Polynom, und es gilt:

$$\text{grad}(f + g) \leq \max(\text{grad}(f), \text{grad}(g)).$$

Das Produkt zweier Polynome f, g ist ein Polynom mit

$$\text{grad}(f \cdot g) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g).$$

Assoziativgesetze, Kommutativgesetze und das Distributivgesetz gelten natürlich auch für Polynome. Wir haben das Nullpolynom, für jedes Polynom f ist auch $-f$ ein Polynom, und schließlich ist die konstante Funktion $1_{\mathbb{R}}$ ein Polynom vom Grad 0. Daher bildet die Menge $\mathbb{R}[x]$ aller Polynome einen Ring, und zwar einen Unterring des Ringes $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Da es schon zu dem Polynom $f(x) = x$ kein multiplikatives Inverses gibt, ist $\mathbb{R}[x]$ kein Körper.

6.4 Division mit Rest für Polynome. Sei $g \neq 0$ ein Polynom. Dann gibt es zu jedem Polynom f eindeutig bestimmte Polynome q und r , so daß gilt:

1. $f = q \cdot g + r$.
2. $r = 0$ oder $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$.

BEWEIS: Ist $\text{grad}(f) < \text{grad}(g)$, so setzen wir $q := 0$ und $r := f$.

Ist $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ und $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ mit $b_m \neq 0$, $a_n \neq 0$ und $m \leq n$, so setzen wir $q_1(x) := a_nb_m^{-1}x^{n-m}$. Dann ist

$$f(x) - q_1(x) \cdot g(x) = (a_nx^n + \cdots + a_0) - (a_nx^n + \text{Terme von kleinerem Grad})$$

ein Polynom von einem Grad $< n$. Diesen Vorgang wiederholt man so oft, bis $r := f - q \cdot g$ das Nullpolynom oder ein Polynom vom Grad $< m$ ist.

Zur Eindeutigkeit: Sind zwei Darstellungen $f = q_1g + r_1 = q_2g + r_2$ gegeben, so ist

$$(q_1 - q_2) \cdot g = r_2 - r_1.$$

Ist $r_1 = r_2$, so muß auch $q_1 = q_2$ sein. Anderfalls ist $q_1 - q_2$ nicht das Nullpolynom und

$$\text{grad}((q_1 - q_2) \cdot g) = \text{grad}(r_2 - r_1) < m,$$

aber $\text{grad}((q_1 - q_2) \cdot g) = \text{grad}(q_1 - q_2) + \text{grad}(g) \geq m$. Das ist unmöglich. ■

Besitzt f eine Nullstelle x_0 , so benutzt man den Divisionsalgorithmus, um den Linearfaktor $x - x_0$ abzuspalten.

Beispiel.

Wir betrachten ein quadratisches Polynom $f(x) = ax^2 + bx + c$, mit $a \neq 0$. Ist x eine Nullstelle von f , so ist $ax^2 + bx + c = 0$, also

$$a \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

und damit

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{4a^2}(b^2 - 4ac).$$

Die Größe $\Delta_f := b^2 - 4ac$ heißt die *Diskriminante* des quadratischen Polynoms. f kann nur dann eine Nullstelle besitzen, wenn $\Delta_f \geq 0$ ist. Ist sogar $\Delta_f > 0$, so erhält man die beiden Lösungskandidaten

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta_f}}{2a} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta_f}}{2a}.$$

Offensichtlich ist $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ und $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ (Gleichungen von Vieta). Daraus folgt:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + bx + c.$$

x_1 und x_2 sind tatsächlich Nullstellen.

Ist $\Delta_f = 0$ und x_0 eine Lösung, so muß $x_0 = -b/2a$ sein. Tatsächlich ist in diesem Fall

$$a(x - x_0)^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{4ac}{4a^2}\right) = ax^2 + bx + c.$$

Definition. Sei f ein Polynom. Gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$, ein $k \in \mathbb{N}$ und ein Polynom g mit $g(x_0) \neq 0$, so daß $f(x) = (x - x_0)^k \cdot g(x)$ ist, so nennt man x_0 eine *Nullstelle der Ordnung* (oder *Vielfachheit*) k .

Ist f ein quadratisches Polynom und $\Delta_f = 0$, so besitzt f eine Nullstelle der Ordnung 2. Zählt man also Nullstellen mit ihren Vielfachheiten, so scheint die Anzahl der Nullstellen mit dem Grad übereinzustimmen. Das wird falsch, wenn $\Delta_f < 0$ ist, denn dann haben wir überhaupt keine Nullstelle mehr.

Dieses Manko ist einer der Gründe, warum man den Bereich der reellen Zahlen noch einmal erweitert. Wie soll eine solche Erweiterung durchgeführt werden? Anschaulich entsprechen die reellen Zahlen den Punkten auf einer Geraden, und das Vollständigkeitsaxiom besagt, daß es keine Lücke dazwischen gibt. Wir haben also gar keinen Platz für eine Erweiterung. Was bleibt, ist der Ausweg in die Ebene.

Wenn jedes quadratische Polynom eine Nullstelle besitzen soll, dann insbesondere das Polynom $f(x) = x^2 + 1$. Eine Nullstelle von f wäre eine Zahl i (die *imaginäre Einheit*), so daß $i^2 = -1$ ist. Es ist klar, daß keine reelle Zahl dies leisten kann. Nehmen wir trotzdem für den Augenblick an, daß es eine solche Zahl gibt, und betrachten wir Ausdrücke der Form $a + bi$, mit reellen Koeffizienten a und b . Wenn man mit solchen Ausdrücken wie mit Zahlen rechnen könnte, dann wäre

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

und $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ (wegen $i^2 = -1$).

Das motiviert die folgende

Definition. Unter einer *komplexen Zahl* versteht man ein Paar (a, b) von reellen Zahlen. Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen wird erklärt durch

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

und $(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$.

Die komplexe Zahl $1 := (1, 0)$ wird als *Eins*, die komplexe Zahl $i := (0, 1)$ als *imaginäre Einheit* bezeichnet. Jede reelle Zahl r wird als komplexe Zahl $(r, 0)$ aufgefaßt. Dann hat jede komplexe Zahl z eine eindeutige Darstellung $z = a + bi$, mit $a, b \in \mathbb{R}$. Man nennt a den *Realteil* und b den *Imaginärteil* von z .

Die Menge aller komplexen Zahlen wird mit \mathbb{C} bezeichnet. In der Algebra wird nachgerechnet, daß \mathbb{C} ein Ring ist, mit der Null $0 = (0, 0)$.

Definition. Ist $z = a + bi$ eine komplexe Zahl, so nennt man $\bar{z} := a - bi$ die (zu z) *konjugiert komplexe Zahl*.

Anschaulich erhält man \bar{z} durch Spiegelung an der reellen Achse. Es gilt:

1. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$,
2. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$,
3. $\overline{\bar{z}} = z$,
4. z ist genau dann reell, wenn $\bar{z} = z$ ist.

Ist $z = a + bi$, so ist $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ eine reelle Zahl ≥ 0 . Sie ist genau dann > 0 , wenn $z \neq 0$ ist.

Für jede komplexe Zahl $z \neq 0$ ist demnach auch $w := \frac{1}{z\bar{z}} \cdot \bar{z}$ eine komplexe Zahl, und es gilt offensichtlich $z \cdot w = 1$. Das zeigt, daß \mathbb{C} sogar ein Körper ist.

Wir können jetzt zu einer beliebigen Menge M den Ring $\mathcal{F}(M, \mathbb{C})$ der komplexen Funktionen auf M betrachten, und speziell den Ring $\mathbb{C}[z]$ der komplexen Polynome

$$p(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \cdots + c_nz^n,$$

mit $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ und $c_n \neq 0$.

Wie im Reellen werden Grad und Nullstellen definiert, der Divisionsalgorithmus überträgt sich wörtlich auf komplexe Polynome, und wie im Reellen besteht auch im Komplexen der Zusammenhang zwischen Nullstellen und Linearfaktoren.

Im Augenblick interessieren uns besonders die komplexen Nullstellen reeller Polynome.

6.5 Satz. *Sei $p(x)$ ein Polynom vom Grad n mit **reellen** Koeffizienten.*

1. *Ist $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p , so ist auch $\bar{\alpha}$ eine Nullstelle.*
2. *Die Anzahl der nicht-reellen Nullstellen von p ist gerade.*
3. *Ist $\text{grad}(p) = 2$, so besitzt p genau zwei Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt).*

BEWEIS: 1) Sei $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. Ist $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p , so ist

$$p(\alpha) = 0, \text{ und damit } 0 = \overline{p(\alpha)} = p(\bar{\alpha}).$$

2) folgt trivial aus (1).

3) Sei $p(x) = ax^2 + bx + c$, mit $a \neq 0$, und $\Delta_p = b^2 - 4ac$ die Diskriminante. Ist $\Delta_p \geq 0$, so ist nichts mehr zu zeigen. Ist $\Delta_p < 0$, so erhält man die beiden Lösungen

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta_p}}{2a} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta_p}}{2a}.$$

■