4 Differentialformen und Stokes'scher Satz

4.1 Derivationen und Vektorfelder

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine ***q-codimensionale (bzw. d-dimensionale) Untermannigfaltigkeit*** von B ist eine (beliebig oft differenzierbare) glatte $d = (n-q)$-dimensionale Fläche $M \subset B$, so dass $B \setminus S$ offen ist.

4.1.1. Satz

Eine Teilmenge $M \subset B$ ist genau dann eine q–codimensionale Untermannigfaltigkeit von B, wenn es zu jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in S$ eine offene Umgebung $U(\mathbf{x}_0) \subset B$ und eine $\mathscr{C}^\infty$-Abbildung $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^n$ gibt, so dass gilt:

$$\mathbf{F}(U \cap M) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{F}(U) \,:\, y_{n-q+1} = \ldots = y_n = 0\}.$$

Wir haben den Satz schon in Kapitel 2 für Hyperflächen bewiesen. Der Beweis für Untermannigfaltigkeiten beliebiger Codimension steht im Anhang dieses Abschnittes.

Eine stetige Funktion $h : M \to \mathbb{R}$ heißt ***(beliebig oft) differenzierbar***, falls $h \circ \boldsymbol{\varphi}$ für jede Parametrisierung $\boldsymbol{\varphi}$ (beliebig oft) differenzierbar ist. Wir verwenden fortan wieder das Wort „differenzierbar“ als Synonym für „beliebig oft differenzierbar“. Mit $\mathscr{C}^\infty(M)$ bezeichnen wir den Raum aller (beliebig oft) differenzierbaren Funktionen auf M.

4.1.2. Lemma

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $M \subset B$ eine Untermannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gibt es zu jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in M$ eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0) \subset B$ und eine differenzierbare Funktion $\widehat{f} : U \to \mathbb{R}$, so dass $\widehat{f}|_{M \cap U} = f|_{M \cap U}$ ist.

Beweis: Es gibt eine offene Umgebung $U(\mathbf{x}_0) \subset B$ und eine umkehrbar differenzierbare Abbildung $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^n$, so dass gilt:

$$\mathbf{F}(U \cap M) = \{\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{F}(U) \,:\, y_{d+1} = \ldots = y_n = 0\}.$$

Wir schreiben $\mathbf{y}' := (y_1, \ldots, y_d)$ und definieren $\mathbf{j} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ durch $\mathbf{j}(\mathbf{y}') := (\mathbf{y}', \mathbf{0})$, sowie $\mathrm{pr} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ durch $\mathrm{pr}(y_1, \ldots, y_n) := (y_1, \ldots, y_d)$. Dann ist

$$\boldsymbol{\varphi} : P := \mathrm{pr}(\mathbf{F}(U \cap M)) \to M \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}') := \mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{j}(\mathbf{y}') = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{y}', \mathbf{0})$$

eine glatte lokale Parametrisierung von M. Also ist $f \circ \boldsymbol{\varphi} : P \to \mathbb{R}$ und damit auch $\widehat{g} := f \circ \boldsymbol{\varphi} \circ \mathrm{pr} : \mathbf{F}(U) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Daraus folgt schließlich, dass $\widehat{f} := \widehat{g} \circ \mathbf{F} : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Ist $\mathbf{x} \in M \cap U$ und $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (\mathbf{y}', \mathbf{0})$, so ist $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}') = \mathbf{x}$ und

$$\widehat{f}(\mathbf{x}) = \widehat{g} \circ \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \widehat{g}(\mathbf{y}', 0) = f \circ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}') = f(\mathbf{x}).$$

Also ist $\widehat{f}$ eine lokale Fortsetzung von f. ∎

Wir werden jetzt eine neue Charakterisierung von Tangentialvektoren herleiten.

Definition

Sei $M \subset B \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, $\mathbf{p} \in M$. Unter einer ***Derivation*** in $\mathbf{p}$ versteht man eine **lineare** Abbildung $D : \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft:

$$D(f \cdot g) := f(\mathbf{p}) \cdot D(g) + g(\mathbf{p}) \cdot D(f).$$

Bemerkung:

Ist D eine Derivation, so ist $D(c) = 0$ für jede konstante Funktion c. Zunächst ist nämlich $D(1) = D(1 \cdot 1) = 1 \cdot D(1) + 1 \cdot D(1) = D(1) + D(1)$, also $D(1) = 0$. Und daraus folgt, dass $D(c) = c \cdot D(1) = 0$ ist, wegen der Linearität. ∎

4.1.3. Satz

Ist D eine Derivation in $\mathbf{p}$, $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ und $f(\mathbf{x}) \equiv 0$ in einer kleinen Umgebung von $\mathbf{p}$, so ist $D(f) = 0$.

Beweis: Ist $V = V(\mathbf{p}) \subset\subset U = U(\mathbf{p})$ und $f(\mathbf{x}) \equiv 0$ auf U, so konstruiere man eine $\mathscr{C}^\infty$-Funktion g auf M, so dass $g(\mathbf{x}) \equiv 0$ auf V und $g(\mathbf{x}) \equiv 1$ außerhalb U ist. Das geht z.B. mit einer „Hut"–Funktion h und $g := 1 - h$. Dann ist $f \cdot g = f$ und $D(f) = D(fg) = f(\mathbf{p}) \cdot D(g) + g(\mathbf{p}) \cdot D(f) = 0$. ∎

4.1.4. Folgerung

Ist D eine Derivation in $\mathbf{p}$ und sind $f_1, f_2 \in \mathscr{C}^\infty(M)$ zwei Funktionen, die in einer kleinen Umgebung von $\mathbf{p}$ übereinstimmen, so ist $D(f_1) = D(f_2)$.

Beweis: Weil $f_1 - f_2$ auf einer Umgebung von $\mathbf{p}$ verschwindet, ist $D(f_1 - f_2) = 0$, also $D(f_1) = D(f_2)$. ∎

Bemerkung: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $V \subset U$ ebenfalls offen. Ist $\overline{V}$ kompakt (also insbesondere beschränkt) und auch in U enthalten, so sagt man, V liegt ***relativ-kompakt*** in U. Man schreibt dafür: $V \subset\subset U$.

Sei weiterhin D eine Derivation in $\mathbf{p}$, f eine $\mathscr{C}^\infty$-Funktion auf einer Umgebung $U = U(\mathbf{p})$. Dann gibt es offene Umgebungen $V \subset\subset W \subset\subset U$ von $\mathbf{p}$ und eine $\mathscr{C}^\infty$-Funktion φ auf M, so dass $\varphi(\mathbf{x}) \equiv 1$ auf V und $\varphi(\mathbf{x}) \equiv 0$ auf $M \setminus W$ ist. Also ist $\varphi f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ und $(\varphi f)|_V = f|_V$. Nun kann man $D(f) := D(\varphi f)$ setzen. Offensichtlich hängt der Wert nicht von der gewählten Funktion φ ab. Also kann man eine Derivation in $\mathbf{p}$ auf Funktionen anwenden, die nur auf einer kleinen Umgebung von $\mathbf{p}$ definiert sind.

4.1.5. Satz

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, $\mathbf{p} \in M$, $\mathbf{v} \in T_\mathbf{p}(M)$ und $\boldsymbol{\alpha} : (-\varepsilon, +\varepsilon) \to M$ ein differenzierbarer Weg mit $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{p}$ und $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{v}$. Dann wird durch

$$D_\mathbf{v}(f) := (f \circ \boldsymbol{\alpha})'(0)$$

eine Derivation $D_\mathbf{v} : \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ definiert .

Beweis: Die Abbildung $D_\mathbf{v}$ ist wohldefiniert. Wählt man $\varepsilon > 0$ klein genug, so gibt es eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{p}) \subset \mathbb{R}^n$ und eine differenzierbare Funktion $\widehat{f} : U \to \mathbb{R}$, so dass $\boldsymbol{\alpha}\big((-\varepsilon, +\varepsilon)\big) \subset U$ und $\widehat{f}|_{U\cap M} = f|_{U \cap M}$ ist. Dann ist $f \circ \boldsymbol{\alpha} = \widehat{f} \circ \boldsymbol{\alpha}$, also $f \circ \boldsymbol{\alpha}$ differenzierbar und

$$(f \circ \boldsymbol{\alpha})'(0) = \nabla \widehat{f}(\mathbf{p}) \bullet \boldsymbol{\alpha}'(0) = \nabla \widehat{f}(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{v}.$$

Sind zwei lokale Fortsetzungen $\widehat{f_1}$ und $\widehat{f_2}$ von f gegeben, so ist $(\widehat{f_1} - \widehat{f_2}) \circ \boldsymbol{\alpha} = 0$. Der Gradient von $\widehat{f_1} - \widehat{f_2}$ steht deshalb auf $T_\mathbf{p}(M)$ senkrecht. Daraus folgt, dass $\nabla \widehat{f_1}(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{v} = \nabla \widehat{f_2}(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{v}$ ist. Der Wert von $D_\mathbf{v}(f)$ hängt also nicht von der gewählten lokalen Fortsetzung von f ab. Er hängt auch nicht von dem Weg $\boldsymbol{\alpha}$ ab, nur vom Tangentialvektor $\mathbf{v}$ selbst.

Ganz leicht folgt nun, dass die Abbildung $f \mapsto D_\mathbf{v}(f)$ linear ist und die Produktregel erfüllt. Also ist $D_\mathbf{v}$ eine Derivation. ■

Die Menge $\mathrm{Der}_\mathbf{p}(\mathscr{C}^\infty(M), \mathbb{R})$ aller Derivationen in $\mathbf{p}$ bildet einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Wir wollen zeigen, dass die (offensichtlich lineare) Abbildung $\mathbf{v} \mapsto D_\mathbf{v}$ ein Isomorphismus ist. Dazu benötigen wir einen Hilfssatz.

4.1.6. Lemma

Sei $P \subset \mathbb{R}^d$ ein konvexes Gebiet, $g : P \to \mathbb{R}$ (beliebig oft) differenzierbar, $\mathbf{u}_0 \in P$. Dann gibt es (beliebig oft) differenzierbare Funktionen h_ν auf P, so dass gilt:

1. $g(\mathbf{u}) = g(\mathbf{u}_0) + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{p} (u_\nu - u_\nu^{(0)}) \cdot h_\nu(\mathbf{u})$ *für alle* $\mathbf{u} \in P$.
2. $h_\nu(\mathbf{u}_0) = g_{u_\nu}(\mathbf{u}_0)$ *für* $\nu = 1, \ldots, p$.

Beweis: Sei $\mathbf{u} \in P$. Setze $\boldsymbol{\alpha}(t) := \mathbf{u}_0 + t(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)$, für $0 \le t \le 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}) - g(\mathbf{u}_0) &= g(\boldsymbol{\alpha}(1)) - g(\boldsymbol{\alpha}(0)) = \int_0^1 (g \circ \boldsymbol{\alpha})'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 \nabla g(\boldsymbol{\alpha}(t)) \bullet (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)\,dt = \sum_{\nu=1}^{p} (u_\nu - u_\nu^{(0)}) h_\nu(\mathbf{u}), \end{aligned}$$

mit $h_\nu(\mathbf{u}) := \displaystyle\int_0^1 g_{u_\nu}\big(\mathbf{u}_0 + t(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)\big)\,dt$. Offensichtlich ist h_ν beliebig oft differenzierbar und $h_\nu(\mathbf{u}_0) = g_{u_\nu}(\mathbf{u}_0)$, für $\nu = 1, \ldots, n$. ∎

4.1.7. Satz

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $\mathbf{p} \in M$. Die Zuordnung $\mathbf{v} \mapsto D_{\mathbf{v}}$ liefert einen Isomorphismus von $T_{\mathbf{p}}(M)$ auf $\mathrm{Der}_{\mathbf{p}}(\mathscr{C}^\infty(M), \mathbb{R})$.

Beweis: Sei $\boldsymbol{\varphi} : P \to M$ eine lokale Parametrisierung, $P \subset \mathbb{R}^p$ ein Parametergebiet, $\mathbf{u}_0 \in P$ und $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{p}$. Dann definiert man

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\Big|_{\mathbf{p}} (f) := D_i(f \circ \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{u}_0), \text{ für } i = 1, \ldots, d.$$

wobei mit D_i die i-te partielle Ableitung bezeichnet wird. Dann ist $\dfrac{\partial}{\partial u_i}\Big|_{\mathbf{p}}$ offensichtlich eine Derivation in $\mathbf{p}$.

Die Abbildung $\mathbf{v} \mapsto D_{\mathbf{v}}$ ist linear, die Vektoren $\boldsymbol{\varphi}_{u_1}(\mathbf{u}_0), \ldots, \boldsymbol{\varphi}_{u_p}(\mathbf{u}_0)$ bilden eine Basis von $T_{\mathbf{p}}(M)$ (weil $\mathrm{rg}\, J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_0) = p$ und $\mathrm{Im}\, D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0) = T_{\mathbf{p}}(M)$ ist), und für $\boldsymbol{\alpha}(t) := \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0 + t\mathbf{e}_i)$ ist $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \boldsymbol{\varphi}_{u_i}(\mathbf{u}_0)$.

Ist $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ und $\widehat{f}$ eine lokale differenzierbare Fortsetzung von f, so ist

$$\begin{aligned} (f \circ \boldsymbol{\alpha})'(0) &= \nabla \widehat{f}(\mathbf{p}) \bullet \boldsymbol{\alpha}'(0) = \nabla \widehat{f}(\mathbf{p}) \bullet \boldsymbol{\varphi}_{u_i}(\mathbf{u}_0) \\ &= \sum_{j=1}^{n} D_j \widehat{f}(\mathbf{p}) \cdot (\varphi_j)_{u_i}(\mathbf{u}_0) = D_i(\widehat{f} \circ \boldsymbol{\varphi})(_0) \\ &= D_i(f \circ \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{u}_0) = \frac{\partial}{\partial u_i}\Big|_{\mathbf{p}} (f). \end{aligned}$$

Also bildet $\mathbf{v} \mapsto D_{\mathbf{v}}$ den Vektor $\boldsymbol{\varphi}_{u_i}(\mathbf{u}_0)$ auf $\dfrac{\partial}{\partial u_i}\Big|_{\mathbf{p}}$ ab.

Es genügt also zu zeigen, dass $\{\dfrac{\partial}{\partial u_1}\Big|_{\mathbf{p}}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial u_n}\Big|_{\mathbf{p}}\}$ eine Basis des Raumes der Derivationen ist.

1) Lineare Unabhängigkeit: Zu Abkürzung sei $\partial_i := \dfrac{\partial}{\partial u_i}\Big|_{\mathbf{p}}$, für $i = 1, \ldots, n$. Ist $\sum_{i=1}^n c_i \partial_i = 0$, so ist $\sum_{i=1}^n c_i \partial_i(f) = 0$ für jede differenzierbare Funktion f. Das gilt

insbesondere für jede Funktion $u_j = \mathrm{pr}_j \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}$, es ist also $0 = \sum_{i=1}^{n} c_i \partial_i(u_j) = c_j$, für alle j.

2) Erzeugendensystem: Sei D eine Derivation in $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0)$, f eine differenzierbare Funktion auf S. Es gibt differenzierbare Funktionen h_ν, so dass gilt:

1. $f \circ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) = f \circ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0) + \sum_{\nu=1}^{p}(u_\nu - u_\nu^{(0)}) h_\nu(\mathbf{u})$,
2. $h_\nu(\mathbf{u}_0) = \dfrac{\partial(f \circ \boldsymbol{\varphi})}{\partial u_\nu}(\mathbf{u}_0) = \dfrac{\partial}{\partial u_\nu}\Big|_{\mathbf{p}} (f)$.

Mit $z_\nu := \mathrm{pr}_\nu \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}$ ist dann $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{p}(z_\nu(\mathbf{x}) - z_\nu(\mathbf{x}_0)) h_\nu \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{x})$ und

$$D(f) = \sum_{\nu=1}^{p} D(z_\nu) h_\nu \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{x}_0) = \sum_{\nu=1}^{p} D(z_\nu) \frac{\partial}{\partial u_\nu}\Big|_{\mathbf{p}} (f).$$

Also ist $D = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{p} D(z_\nu) \frac{\partial}{\partial u_\nu}\Big|_{\mathbf{p}}$. ∎

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine p-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $\mathbf{x}_0 \in S$ und $\boldsymbol{\varphi} : P \to M$ eine lokale Parametrisierung mit $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$. Dann nennt man $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_p)$ mit $z_i := \mathrm{pr}_i \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}$ für $i = 1, \ldots, p$ ein lokales Koordinatensystem für M in $\mathbf{x}_0$. Die z_i sind differenzierbare Funktionen auf M, weil $z_i \circ \boldsymbol{\varphi} = \mathrm{pr}_i$ differenzierbar ist.

Seien nun M_1, M_2 zwei Untermannigfaltigkeiten, $\mathbf{F} : M_1 \to M_2$ eine differenzierbare Abbildung. Ist $f : M_2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so ist auch $f \circ \mathbf{F} : M_1 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Deshalb kann man eine Abbildung $\mathbf{F}_* : T_{\mathbf{p}}(M_1) \to T_{\mathbf{F}(\mathbf{p})}(M_2)$ definieren durch

$$(\mathbf{F}_* D)(f) := D(f \circ \mathbf{F}).$$

Man rechnet leicht nach, dass $\mathbf{F}_*$ linear ist.

Ist $D = D_{\mathbf{v}}$, mit $\mathbf{v} = \boldsymbol{\alpha}'(0)$ und einem Weg $\boldsymbol{\alpha} : (-\varepsilon, +\varepsilon) \to M_1$ mit $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{p}$, so ist

$$\mathbf{F}_* D(f) = D_{\mathbf{v}}(f \circ \mathbf{F}) = \big((f \circ \mathbf{F}) \circ \boldsymbol{\alpha}\big)'(0) = \big(f \circ (\mathbf{F} \circ \boldsymbol{\alpha})\big)'(0) = D_{\mathbf{w}}(f),$$

mit $\mathbf{w} = (\mathbf{F} \circ \boldsymbol{\alpha})'(0)$.

Seien $u_\nu = \mathrm{pr}_\nu \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}$ und $y_\mu = \mathrm{pr}_\mu \circ \boldsymbol{\psi}^{-1}$ lokale Koordinaten in $\mathbf{p}$ bzw. $\mathbf{F}(\mathbf{p})$. Ist

$$D = \sum_{\nu=1}^{d} a_\nu \frac{\partial}{\partial u_\nu} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_* D = \sum_{\mu=1}^{r} b_\mu \frac{\partial}{\partial y_\mu},$$

so ist

$$\begin{aligned} b_\mu &= (\mathbf{F}_* D)(y_\mu) \;=\; D(y_\mu \circ \mathbf{F}) \;=\; \Big(\sum_{\nu=1}^{d} a_\nu \frac{\partial}{\partial u_\nu}\Big)(y_\mu \circ \mathbf{F}) \\ &= \sum_{\nu=1}^{d} a_\nu D_\nu(\boldsymbol{\psi}^{-1} \circ \mathbf{F} \circ \boldsymbol{\varphi})_\mu(\mathbf{u}_0), \end{aligned}$$

also

$$(b_1, \ldots, b_r) = (a_1, \ldots, a_d) \cdot J_{\boldsymbol{\psi}^{-1} \circ \mathbf{F} \circ \boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_0)^\top .$$

Definition

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, so heißt

$$T(M) := \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in M \times \mathbb{R}^n \,:\, \mathbf{v} \in T_\mathbf{x}(M)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

das ***Tangentialbündel*** von M.

4.1.8. Satz

Das Tangentialbündel einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine $2k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{2n}$.

Beweis: Sei $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) \in T(M)$. Es gibt ein Parametergebiet $P \subset \mathbb{R}^k$, einen Punkt $\mathbf{u}_0 \in P$, eine stetig differenzierbare Abbildung $\boldsymbol{\varphi} : P \to \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$ und eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$, so dass gilt:

1. $U \cap M = \boldsymbol{\varphi}(P)$.
2. $\boldsymbol{\varphi}$ ist injektiv.
3. $\operatorname{rg} J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}) = k$
4. Ist $(\mathbf{u}_\nu)$ eine Folge in P mit $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_\nu) \to \mathbf{x}_0$, so konvergiert auch $(\mathbf{u}_\nu)$ gegen $\mathbf{u}_0$.

Weil $\operatorname{Im} D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0) = T_{\mathbf{x}_0}(M)$ ist, gibt es einen Vektor $\mathbf{w}_0 \in \mathbb{R}^k$, so dass $D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0)(\mathbf{w}_0) = \mathbf{v}_0$ ist. Nun kann man eine Parametrisierung $\boldsymbol{\Phi} : P \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{2n}$ von $T(M)$ definieren durch

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) := \big(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}), D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u})(\mathbf{w})\big).$$

Dabei wird $(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0)$ auf $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$ abgebildet.

Die Menge $\widehat{U} := U \times \mathbb{R}^n$ ist offen im $\mathbb{R}^{2n}$. Ist $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \widehat{U} \cap T(M)$, so liegt $\mathbf{x}$ in $U \cap M$ und $\mathbf{v}$ in $T_\mathbf{x}(M)$. Es gibt dann ein $\mathbf{u} \in P$ mit $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$ und ein $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^k$ mit $D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u})(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$. Also ist $\widehat{U} \cap T(M) = \boldsymbol{\Phi}(P \times \mathbb{R}^k)$.

Zur Injektivität: Sei $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u},\mathbf{w}) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u}',\mathbf{w}')$. Dann ist $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}')$, wegen der Injektivität von $\boldsymbol{\varphi}$ also $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$. Außerdem ist $D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u})(\mathbf{w}) = D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u})(\mathbf{w}')$. Auch $D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u})$ ist injektiv (weil vom Rang k), und daraus folgt, dass $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$ ist.

Wir können die Abbildung $\boldsymbol{\Phi}$ auch folgendermaßen beschreiben:

$$(\mathbf{u},\mathbf{w}) \mapsto \big(\varphi_1(\mathbf{u}),\ldots,\varphi_n(\mathbf{u}); \nabla\varphi_1(\mathbf{u}) \bullet \mathbf{w},\ldots,\nabla\varphi_n(\mathbf{u}) \bullet \mathbf{w}\big).$$

Daher ist

$$J_{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{u},\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}) & 0 \\ \sharp & J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \in M_{2n,2k}(\mathbb{R})$$

und $\operatorname{rg} J_{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{u},\mathbf{w}) = 2k$.

Schließlich sei $(\mathbf{u}_\nu,\mathbf{w}_\nu)$ eine Folge in $P \times \mathbb{R}^k$, so dass $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u}_\nu,\mathbf{w}_\nu)$ gegen $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u}_0,\mathbf{w}_0) = (\mathbf{x}_0,\mathbf{v}_0)$ konvergiert. Dann ist klar, dass $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_\nu)$ gegen $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0)$ konvergiert, also $\mathbf{u}_\nu$ gegen $\mathbf{u}_0$. Die Abbildung $\boldsymbol{\varphi}^{-1} : U \cap M \to P$ ist stetig differenzierbar, denn $\boldsymbol{\varphi}^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi} = \mathrm{id}_P$ ist stetig differenzierbar. Daher gibt es eine Umgebung $V = V(\mathbf{x}_0) \subset U \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\mathbf{F} : V \to \mathbb{R}^k$, so dass $\mathbf{F}|_{V\cap M} = \boldsymbol{\varphi}^{-1}|_{V\cap M}$ ist. O.B.d.A. liegen alle $\mathbf{u}_\nu$ in $W := \boldsymbol{\varphi}^{-1}(V \cap M)$.

Nach Voraussetzung konvergiert $\mathbf{v}_\nu := \mathbf{w}_\nu \cdot J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_\nu)^\top$ gegen $\mathbf{v}_0 := \mathbf{w}_0 \cdot J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_0)^\top$. Und für jedes $\mathbf{u} \in V$ ist

$$J_{\mathbf{F}}\big(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u})\big) \cdot J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}) = J_{\mathbf{F}\circ\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}) = J_{\boldsymbol{\varphi}^{-1}\circ\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}) = E_k.$$

Sei $\mathbf{x}_\nu := \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_\nu)$. Weil $\mathbf{F}$ stetig differenzierbar ist, konvergiert $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_\nu)$ gegen $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)$ und $\mathbf{w}_\nu = \big(\mathbf{w}_\nu \cdot J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_\nu)^\top\big) \cdot J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_\nu)^\top = \mathbf{v}_\nu \cdot J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_\nu)^\top$ gegen $\mathbf{v}_0 \cdot J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)^\top = \mathbf{w}_0$. Damit ist $T(M)$ eine Untermannigfaltigkeit. ∎

Die Abbildung $\pi : T(M) \to M$ mit $\pi(\mathbf{x},\mathbf{v}) := \mathbf{x}$ ist differenzierbar, denn

$$\pi \circ \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u},\mathbf{w}) = \pi(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}), D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u})\mathbf{w}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\varphi} \circ \mathrm{pr}_1(\mathbf{u},\mathbf{w})$$

ist differenzierbar. Man nennt π die ***kanonische Projektion***.

Definition

Ein stetiges (bzw. differenzierbares) ***Vektorfeld*** auf M ist eine stetige (bzw. differenzierbare) Abbildung $\boldsymbol{\xi} : M \to T(M)$, so dass $\pi \circ \boldsymbol{\xi} = \mathrm{id}_M$ ist.

Ist $\boldsymbol{\xi}$ ein Vektorfeld auf M, so gibt es eine Abbildung $\widetilde{\boldsymbol{\xi}} : M \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})) \text{ und } \widetilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}(M) \qquad (\text{für alle } \mathbf{x} \in M).$$

Ist $\mathbf{F} : M_1 \to M_2$ eine stetig differenzierbare Abbildung, so induziert $\mathbf{F}$ eine stetige Abbildung $T\mathbf{F} : T(M_1) \to T(M_2)$ durch

$$T\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{w}) := \big(\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{F}_*(\mathbf{w})\big),$$

denn für jede Parametrisierung $\boldsymbol{\varphi}$ ist

$$T\mathbf{F}\big(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}), D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u})\mathbf{w}\big) = \big(\mathbf{F}\circ\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}), D(\mathbf{F}\circ\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{u})\mathbf{w}\big)$$

stetig in $(\mathbf{u},\mathbf{w})$. Zusammen mit den kanonischen Projektionen erhält man das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} T(M_1) \arrow[r, "T\mathbf{F}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & T(M_2) \arrow[d, "\pi_2"] \\ M_1 \arrow[r, "\mathbf{F}"] & M_2 \end{tikzcd}$$

Ist allerdings $\boldsymbol{\xi} : M_1 \to T(M_1)$ ein Vektorfeld auf M_1, so ist $T\mathbf{F}\circ\boldsymbol{\xi} : M_1 \to T(M_2)$ kein Vektorfeld. Wir können $\boldsymbol{\xi}$ nur dann als Vektorfeld von M_1 nach M_2 transportieren, wenn $\mathbf{F}$ ein Diffeomorphismus ist. Dann kann man nämlich ein Vektorfeld $\mathbf{F}_\sharp\boldsymbol{\xi}$ auf M_2 definieren, durch

$$\mathbf{F}_\sharp\boldsymbol{\xi} := T\mathbf{F}\circ\boldsymbol{\xi}\circ\mathbf{F}^{-1}.$$

Tatsächlich ist $\mathbf{F}_\sharp\boldsymbol{\xi}$ eine Abbildung von M_2 nach $T(M_2)$ und

$$\begin{aligned} \pi_2\circ(\mathbf{F}_\sharp\boldsymbol{\xi}) &= \pi_2\circ T\mathbf{F}\circ\boldsymbol{\xi}\circ\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}\circ\pi_1\circ\boldsymbol{\xi}\circ\mathbf{F}^{-1} \\ &= \mathbf{F}\circ\mathbf{F}^{-1} = \mathrm{id}_{M_2}. \end{aligned}$$

Sei $\boldsymbol{\xi}$ ein differenzierbares Vektorfeld auf der Untermannigfaltigkeit M. Ist f eine differenzierbare Funktion auf M, so wird die Funktion $\boldsymbol{\xi}f$ auf M definiert durch

$$(\boldsymbol{\xi}f)(\mathbf{x}) := \widetilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})(f)$$

Ist $\mathbf{x}_0 \in M$, so gibt es eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $\mathbf{F} : U \to \mathbf{F}(U)$ mit

$$\mathbf{F}(U\cap M) = \{\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbf{F}(U) \,:\, y_{d+1} = \ldots = y_n = 0\}.$$

Dann ist $\boldsymbol{\varphi}(y_1,\ldots,y_d) := \mathbf{F}^{-1}(y_1,\ldots,y_d,0,\ldots,0)$ eine lokale Parametrisierung für M und die Funktionen $u_\nu := \mathrm{pr}_\nu\circ\boldsymbol{\varphi}^{-1} = \mathrm{pr}_\nu\circ\mathbf{F} = F_\nu$ sind lokale Koordinaten.

Schreibt man $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{d} a_\nu(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial u_\nu}\Big|_{\mathbf{x}}$ und ist $\boldsymbol{\alpha} : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ ein differenzierbarer Weg mit $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{x}$ und $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \widetilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})$, so ist

$$a_\nu(\mathbf{x}) = \widetilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})(u_\nu) = (F_\nu\circ\boldsymbol{\alpha})'(0) = \nabla F_\nu(\mathbf{x})\bullet\widetilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}).$$

Ist $\boldsymbol{\xi}$ differenzierbar, so sind auch alle Koeffizienten a_ν differenzierbar. Und daraus folgt, dass $\boldsymbol{\xi}f$ für jede differenzierbare Funktion f wieder eine differenzierbare Funktion ist.

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Definition

Die Menge aller Linearformen auf V, also aller linearen Abbildungen $\lambda : V \to \mathbb{R}$, bezeichnet man mit V^*.

Bemerkung: V^* ist ein Vektorraum, mit

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \lambda_2)(\mathbf{v}) &:= \lambda_1(\mathbf{v}) + \lambda_2(\mathbf{v}), \text{ für } \lambda_1, \lambda_2 \in V^*, \\ \text{und} \quad (r\lambda)(\mathbf{v}) &:= r \cdot \lambda(\mathbf{v}), \text{ für } r \in \mathbb{R},\ \lambda \in V^*. \end{aligned}$$

Man nennt V^* den ***Dualraum*** von V.

Ist $V = \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, so wird durch

$$\lambda_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) := \mathbf{v} \bullet \mathbf{a} = v_1 a_1 + \cdots v_n a_n = \mathbf{v} \bullet \mathbf{a}^\top$$

eine Linearform $\lambda_{\mathbf{a}}$ auf V definiert. Die Zuordnung $\mathbf{a} \mapsto \lambda_{\mathbf{a}}$ liefert einen Isomorphismus von $\mathbb{R}^n$ auf $(\mathbb{R}^n)^* = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Leider lässt sich die Zuordnung $\mathbf{a} \mapsto \lambda_{\mathbf{a}}$ nicht so ohne weiteres auf einen beliebigen endlich-dimensionalen Vektorraum V übertragen. Ist allerdings ein *Skalarprodukt* $\langle \ldots, \ldots \rangle$ (also eine positiv definite symmetrische Bilinearform) auf V gegeben, so können wir jedem Vektor $\mathbf{a} \in V$ genau wie oben eine Linearform $\lambda_{\mathbf{a}}$ zuordnen, durch

$$\lambda_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{a}\,,\, \mathbf{x} \rangle.$$

Wie bekommt man eine Umkehrabbildung zur Zuordnung $\mathbf{a} \mapsto \lambda_{\mathbf{a}}$? Ist $A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ eine ON-Basis von V, so besitzt jeder Vektor $\mathbf{x} \in V$ eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}\,,\, \mathbf{a}_i \rangle \mathbf{a}_i\ .$$

Die Linearformen $\alpha^i := \lambda_{\mathbf{a}_i}$, $i = 1, \ldots, n$, bilden die ***duale Basis*** zur Basis A, mit

$$\alpha^i(\mathbf{a}_j) = \langle \mathbf{a}_i\,,\, \mathbf{a}_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Insbesondere haben V und V^* die gleiche Dimension.

Wenn wir jeder Linearform $\varphi \in V^*$ durch

$$v_A(\varphi) := \sum_{i=1}^{n} \varphi(\mathbf{a}_i) \mathbf{a}_i$$

einen Vektor $v_A(\varphi) \in V$ zuordnen, so erhalten wir eine lineare Abbildung von V^* nach V, die allerdings von der gewählten Basis A abhängt.

Es ist

$$v_A(\lambda_{\mathbf{a}}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}_i)\mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{a}\,,\, \mathbf{a}_i \rangle \mathbf{a}_i = \mathbf{a}.$$

Ist nun $\lambda_{\mathbf{a}} = \lambda_{\mathbf{b}}$, so ist $\mathbf{a} = v_A(\lambda_{\mathbf{a}}) = v_A(\lambda_{\mathbf{b}}) = \mathbf{b}$. Das zeigt, dass die Zuordnung $\mathbf{a} \mapsto \lambda_{\mathbf{a}}$ injektiv ist. Weil V und V^* die gleiche Dimension haben, ist sie sogar ein Isomorphismus und v_A die Umkehrabbildung.

Es seien nun zwei Vektorräume V und W gegeben. Jede lineare Abbildung $\mathbf{f} : V \to W$ induziert eine ***duale Abbildung*** $\mathbf{f}^* : W^* \to V^*$ durch

$$\mathbf{f}^*(\varphi) := \varphi \circ \mathbf{f}.$$

In Vektorräumen mit Skalarprodukt kann man sich die Linearformen und ihre Bilder folgendermaßen vorstellen:

Ist die Linearform $\varphi \in W^*$ nicht die Nullform, so ist $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ und $\mathrm{Ker}(\varphi)$ eine Hyperebene. Ist $\varphi = \lambda_{\mathbf{a}}$ (mit $\mathbf{a} \in W$), so ist

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\mathbf{x} \in W \,:\, \langle \mathbf{a}\,,\, \mathbf{x} \rangle = 0\}$$

das orthogonale Komplement zu der Geraden $\mathbb{R}\mathbf{a}$. Man kann jetzt φ mit der (zu $\mathrm{Ker}(\varphi)$ parallelen) Schar affiner Hyperebenen $H_r = r\mathbf{a} + \mathrm{Ker}(\varphi)$, $r \in \mathbb{R}$, identifizieren. Nun ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f^*(\varphi)) &= \{\mathbf{x} \in V \,:\, \varphi \circ f(\mathbf{x}) = 0\} \\ &= \{\mathbf{x} \in V \,:\, f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Ker}(\varphi)\} \\ &= f^{-1}(\mathrm{Ker}(\varphi)). \end{aligned}$$

Die Linearform $f^*(\varphi)$ wird also durch die zu $f^{-1}(\mathrm{Ker}(\varphi))$ parallele Schar von Hyperebenen veranschaulicht. Das funktioniert übrigens nicht in umgekehrter Richtung, denn das Bild einer Hyperebene unter einer linearen Abbildung ist i.a. keine Hyperebene.

Definition

Unter einer ***Pfaff'schen Form*** auf einer Untermannigfaltigkeit M versteht man eine stetige (bzw. differenzierbare) Funktion $\omega : T(M) \to \mathbb{R}$, die im zweiten Argument linear ist.

Bemerkung: Ist ω Pfaff'sche Form auf M, so wird für jedes $\mathbf{x} \in S$ durch $\omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) := \omega(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ eine Linearform $\omega_{\mathbf{x}}$ auf dem Tangentialraum $T_{\mathbf{x}}(M)$ definiert, also ein Element aus dem Cotangentialraum $T^*_{\mathbf{x}}(M)$.

4.1.9. Beispiele

A. Sei $\boldsymbol{\xi}$ ein differenzierbares Vektorfeld auf M. Dann ist $\omega_{\boldsymbol{\xi}} : T(M) \to \mathbb{R}$ mit

$$\omega_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := \widetilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v}$$

eine Pfaff'sche Form auf M.

Um das Skalarprodukt zu berechnen, müssen wir etwas ausholen. Sei $\boldsymbol{\varphi} : P \to \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung von M, $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$. Die lokalen Koordinaten sind gegeben durch $u_\nu := \mathrm{pr}_\nu \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}$, $\nu = 1, \ldots, d$. Dann ist

$$\boldsymbol{\varphi}_{u_\nu}(\mathbf{u}_0) = \frac{\partial}{\partial u_\nu}\Big|_{\mathbf{x}_0}, \text{ für } \nu = 1, \ldots, d.$$

Sei nun

$$g_{\nu\mu}(\mathbf{u}) := \boldsymbol{\varphi}_{u_\nu}(\mathbf{u}) \bullet \boldsymbol{\varphi}_{u_\mu}(\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial u_\nu}\Big|_{\mathbf{u}} \bullet \frac{\partial}{\partial u_\mu}\Big|_{\mathbf{u}}, \text{ für } \nu, \mu = 1, \ldots, d.$$

Ist $\widetilde{\boldsymbol{\xi}} = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{d} \xi^\nu \frac{\partial}{\partial u_\nu}$ und $\mathbf{v} = \displaystyle\sum_{\mu=1}^{d} v^\mu \frac{\partial}{\partial u_\mu}$, so ist

$$\widetilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v} = \sum_{\nu,\mu} g_{\nu\mu} \xi^\nu v^\mu.$$

Die Koeffizienten ξ^ν nennt man die ***kontravarianten Komponenten*** des Vektorfeldes $\boldsymbol{\xi}$. Man beachte die hochgestellten Indizes!

Im Falle einer 2-dimensionalen Fläche im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet man die Einschränkung des Skalarproduktes auf den Tangentialraum der Fläche traditionell als ***erste Fundamentalform***. Seit Gauß benutzt man folgende Abkürzungen (wenn $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(u, v)$ eine lokale Parametrisierung der Fläche ist):

$$E := \boldsymbol{\varphi}_u \bullet \boldsymbol{\varphi}_u, \quad F := \boldsymbol{\varphi}_u \bullet \boldsymbol{\varphi}_v \quad \text{und} \quad G := \boldsymbol{\varphi}_v \bullet \boldsymbol{\varphi}_v.$$

Dann ist $\|\boldsymbol{\varphi}_u \times \boldsymbol{\varphi}_v\| = \sqrt{EG - F^2}$, denn es ist bekanntlich

$$\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|^2 = \|\mathbf{a}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{a}_2\|^2 - (\mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{a}_2)^2.$$

B. Ist $f : M \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so wird das ***totale Differential*** $df : T(M) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$df(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := D_{\mathbf{v}}(f) = \nabla \widehat{f}(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v},$$

wobei $D_{\mathbf{v}}$ die durch $\mathbf{v}$ bestimmte Derivation in $\mathbf{x}$ und $\widehat{f}$ eine lokale differenzierbare Fortsetzung von f ist.

Zur Erinnerung: Ist $\boldsymbol{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ ein Weg mit $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{x}$ und $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{v}$, so ist $D_{\mathbf{v}}(f) = (f \circ \boldsymbol{\alpha})'(0) = (\widehat{f} \circ \boldsymbol{\alpha})'(0) = \nabla \widehat{f}(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v}$.

Einen Spezialfall stellen die Differentiale du_i von lokalen Koordinatenfunktionen u_i dar, für $i = 1, \ldots, d$. Es ist

$$du_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = D_{\mathbf{v}}(u_i) = \sum_{\nu=1}^{d} v^{\nu} \frac{\partial}{\partial u_{\nu}} \Big|_{\mathbf{x}} (u_i) = v^i \, .$$

Man beachte, dass die v^i **nicht** die gewöhnlichen kartesischen Komponenten des Vektors $\mathbf{v} \in M$ sind, sondern die Koeffizienten von $\mathbf{v}$ als Linearkombination der Basisvektoren $\dfrac{\partial}{\partial u_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial u_d}$.

Es ist $du_i\Big(\dfrac{\partial}{\partial u_j}\Big) = \delta_{ij}$, für $i, j = 1, \ldots, d$.

Ist f eine differenzierbare Funktion und ω eine Pfaff'sche Form, so ist das Produkt $f \cdot \omega$ definiert durch

$$(f \cdot \omega)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := f(\mathbf{x}) \cdot \omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \, .$$

Das ist wieder eine Pfaff'sche Form.

4.1.10. Satz

Sei ω eine Pfaff'sche Form auf einer d-dimensionalen Untermannigfaltigkeit M. Sind $u_1, \ldots, u_d$ lokale Koordinaten auf $U \subset M$, so gibt es eindeutig bestimmte differenzierbare Funktionen $\omega_1, \ldots, \omega_d$ auf U, so dass gilt:

$$\omega|_U = \omega_1 du_1 + \cdots + \omega_d du_d.$$

Der BEWEIS wird wie im $\mathbb{R}^n$ geführt, mit $\omega_j(\mathbf{x}) := \omega(\mathbf{x}, \dfrac{\partial}{\partial u_j})$.

Ist $\boldsymbol{\xi}$ ein Vektorfeld, $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = \xi^1(\mathbf{x}) \dfrac{\partial}{\partial u_1} + \cdots + \xi^d(\mathbf{x}) \dfrac{\partial}{\partial u_d}$, so ist

$$\omega_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}, \frac{\partial}{\partial u_j}) = \widetilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \bullet \frac{\partial}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{d} \xi^i(\mathbf{x}) g_{ij}(\mathbf{x}) =: \xi_j(\mathbf{x}),$$

also

$$\omega_{\boldsymbol{\xi}} = \xi_1 \, du_1 + \cdots + \xi_d \, du_d \, , \text{ mit } \xi_j = \sum_i \xi^i g_{ij}.$$

Die Koeffizienten ξ_j nennt man die ***kovarianten Komponenten*** von $\boldsymbol{\xi}$. Im $\mathbb{R}^n$ ist $\xi^j = \xi_j$, auf der Untermannigfaltigkeit aber nicht!

Jede Pfaff'sche Form hat die Gestalt $\omega_{\boldsymbol{\xi}}$ (mit einem Vektorfeld $\boldsymbol{\xi}$).

Sei f eine differenzierbare Funktion auf S und

$$\partial_i f(\mathbf{x}) := \frac{\partial}{\partial u_i}\Big|_{\mathbf{x}}(f) = \frac{\partial(f \circ \boldsymbol{\varphi})}{\partial u_i}(\mathbf{x}), \text{ für } i = 1, \ldots, d.$$

Dann ist $df(\mathbf{x}, \frac{\partial}{\partial u_j}) = \partial_j f(\mathbf{x})$, also

$$df = \partial_1 f\, du_1 + \cdots + \partial_d f\, du_d\,.$$

Es gibt ein Vektorfeld $\boldsymbol{\xi}$, so dass $\omega_{\boldsymbol{\xi}} = df$ ist. Dieses Vektorfeld nennt man den ***Gradienten*** von f, in Zeichen: $\mathbf{grad}\, f$.

Ist $\mathbf{grad}\, f = \sum_{\nu=1}^{d} \xi^i \frac{\partial}{\partial u_i}$, so ist $\sum_i \xi^i g_{ij} = \partial_j f$. Ist $G := \left(g_{ij} \;\middle|\; i,j = 1, \ldots, p\right)$ und bezeichnet man die Elemente von G^{-1} mit g^{ij}, so ist

$$\sum_{j=1}^{d} g_{ij} g^{jk} = \delta_{ik} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{d} g^{ji} \partial_j f = \sum_{j,k} g^{ji} g_{kj} \xi^k = \sum_k \delta_{ki} \xi^k = \xi^i,$$

also

$$\mathbf{grad}\, f = \sum_{i=1}^{d} (\sum_{j=1}^{d} g^{ji} \partial_j f) \frac{\partial}{\partial u_i}.$$

Seien M_1, M_2 zwei Untermannigfaltigkeiten, $\mathbf{F} : M_1 \to M_2$ eine differenzierbare Abbildung. Dann kann man jeder Pfaff'schen Form ω auf M_2 eine Pfaff'sche Form $\mathbf{F}^*\omega$ auf M_1 zuordnen durch

$$(\mathbf{F}^*\omega)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := \omega(\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{F}_*\mathbf{v}).$$

Dann ist klar, dass dadurch für jedes $\mathbf{x} \in M_1$ die zu $\mathbf{F}_*$ duale Abbildung von $T^*_{\mathbf{F}(\mathbf{x})}(M_2)$ nach $T^*_{\mathbf{x}}(M_1)$ induziert wird.

4.1.11. Satz

Ist f differenzierbar auf M_2, so ist $\mathbf{F}^*df = d(f \circ \mathbf{F})$.

Beweis: 1. Version: Sei $\mathbf{x} \in M_1$, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\alpha}'(0) \in T_{\mathbf{x}}(M_1)$. Dann ist

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}^*df)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) &= df(\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{F}_*\mathbf{v}) = df(\mathbf{F}(\mathbf{x}), (\mathbf{F} \circ \boldsymbol{\alpha})'(0)) \\ &= (f \circ \mathbf{F} \circ \boldsymbol{\alpha})'(0) = d(f \circ \mathbf{F})(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

2. Version (mit Derivationen):

$$(\mathbf{F}^*df)(D) = df(\mathbf{F}_*D) = (\mathbf{F}_*D)(f) = D(f \circ \mathbf{F}) = d(f \circ \mathbf{F})(D).$$

∎

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, $\boldsymbol{\alpha} : I := [a,b] \to S$ ein stetig differenzierbarer Weg und ω eine Pfaff'sche Form auf M. Dann setzt man

$$\int_{\boldsymbol{\alpha}} \omega := \int_a^b \omega(\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\alpha}'(t))\, dt.$$

Ist $\omega = \omega_{\boldsymbol{\xi}} = \xi_1\, du_1 + \cdots + \xi_d\, du_d$, so ist $\omega(\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\alpha}'(t)) = \widetilde{\xi}(\boldsymbol{\alpha}(t)) \bullet \boldsymbol{\alpha}'(t)$, also

$$\int_{\boldsymbol{\alpha}} \omega = \int_a^b \widetilde{\xi}(\boldsymbol{\alpha}(t)) \bullet \boldsymbol{\alpha}'(t)\, dt = \int_a^b \sum_{i,j} g_{ij}(\boldsymbol{\alpha}(t)) \xi^i(\boldsymbol{\alpha}(t))(u_j \circ \boldsymbol{\alpha})'(t)\, dt.$$

Anhang (Linearisierung von Untermannigfaltigkeiten)

Den folgenden Satz haben wir in Kapitel 2 schon für Hyperflächen bewiesen:

4.1.12. Satz

Eine Teilmenge $M \subset B$ ist genau dann eine d–codimensionale Untermannigfaltigkeit von B, wenn es zu jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in M$ eine offene Umgebung $U(\mathbf{x}_0) \subset B$ und eine $\mathscr{C}^\infty$-Abbildung $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^n$ gibt, so dass gilt:

$$\mathbf{F}(U \cap M) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{F}(U) \,:\, y_{n-d+1} = \ldots = y_n = 0\}.$$

Beweis:

Sei M eine d–codimensionale Untermannigfaltigkeit von B, $\mathbf{x}_0 \in M$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0) \subset B$ und eine $\mathscr{C}^\infty$-Abbildung $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_d) : U \to \mathbb{R}^d$ mit $M \cap U = \{f_1 = \ldots = f_d = 0\}$ und $\operatorname{rg} J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = d$ in jedem $\mathbf{x} \in M \cap U$. Nach geeigneter Nummerierung der Koordinaten ist $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{**}) \in \mathbb{R}^{n-d} \times \mathbb{R}^d$, und die Funktionalmatrix von $\mathbf{f}$ hat die Gestalt

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^*}(\mathbf{x}) \;\Big|\; \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{**}}(\mathbf{x}) \right),$$

mit $\det\left(\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{**}}(\mathbf{x}_0)\right) \neq 0$.

Wir definieren $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^n$ durch $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{**}) := (\mathbf{x}^*, \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{**}))$. Dann ist

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \left(\begin{array}{c|c} E_{n-d} & \mathbf{O} \\ \hline \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^*}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{**}}(\mathbf{x}) \end{array}\right)$$

und $\det J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Also ist $\mathbf{F}$ in $\mathbf{x}_0$ ein lokaler Diffeomorphismus und

$$\mathbf{F}(M \cap U) = \{(\mathbf{y}^*, \mathbf{y}^{**}) \in \mathbf{F}(U) \,:\, \mathbf{y}^{**} = \mathbf{0}\}.$$

Ist umgekehrt ein Diffeomorphismus $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n) : U \to \mathbb{R}^n$ gegeben, mit

$$\mathbf{F}^{-1}\big(\{\mathbf{y} \,:\, y_{n-d+1} = \ldots = y_n = 0\}\big) = U \cap M,$$

so setzen wir $f_i := F_{n-d+i}$ für $i = 1, \ldots, d$. Dann ist $M = \{f_1 = \ldots = f_d = 0\}$, und da $J_{\mathbf{F}}$ regulär ist, sind die Vektoren $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_d$ linear unabhängig. ∎

4.2 Alternierende Multilinearformen

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $V^* = L(V, \mathbb{R})$ sein Dualraum.

Definition

Eine Abbildung

$$\varphi : (V^*)^p \times V^q \to \mathbb{R},$$

die in jedem Argument linear (insgesamt also $(p+q)$-fach multilinear) ist, heißt ein ***p-fach kontravarianter*** und ***q-fach kovarianter Tensor*** (über V). Die Menge aller dieser Tensoren sei mit $T^p_q(V)$ bezeichnet.

4.2.1. Beispiele

A. Eine Linearform $\varphi \in V^*$ ist ein 1-fach kovarianter Tensor.

Der Vektorraum $T^0_q(V)$ aller q-fach kovarianten Tensoren wird auch mit $L_q(V; \mathbb{R})$ bezeichnet (Menge der q-fachen Multilinearformen über V).

B. Ein 1-fach kontravarianter Tensor ist ein Element des Bidualraumes V^{**}. Nun gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$j : V \to V^{**}, \text{ mit } j(\mathbf{v})(\varphi) := \varphi(\mathbf{v}).$$

Offensichtlich ist j linear, und wenn $j(\mathbf{v}) = 0$ ist, so ist $\varphi(\mathbf{v}) = 0$ für alle Linearformen $\varphi \in V^*$. Schreibt man $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + \cdots + v_n\mathbf{a}_n$, mit einer beliebigen Basis $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ von V, und ist $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ die dazu duale Basis von V^*, so ist $0 = \alpha^i(\mathbf{v}) = v_i$ für alle i, also $\mathbf{v} = 0$. Das zeigt die Injektivität, und aus Dimensionsgründen ist j dann ein Isomorphismus. Also kann man 1-fach kontravariante Tensoren als Vektoren auffassen.

Definition

Sind $f_1, \ldots, f_q$ Linearformen auf V, so wird deren ***Tensorprodukt*** $f_1 \otimes \ldots \otimes f_q \in L_q(V; \mathbb{R})$ definiert durch

$$(f_1 \otimes \ldots \otimes f_q)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) := f_1(\mathbf{v}_1) \cdots f_q(\mathbf{v}_q).$$

4.2.2. Satz

Ist $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ eine Basis von V und $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ die dazu duale Basis, so bilden die Tensorprodukte $\alpha^{i_1} \otimes \ldots \otimes \alpha^{i_q}$ mit $1 \le i_1, \ldots, i_q \le n$ eine Basis des Raumes $L_q(V; \mathbb{R})$. Insbesondere ist $\dim L_q(V; \mathbb{R}) = n^q$.

Beweis: 1) Lineare Unabhängigkeit:

Sei $\sum_{i_1,\dots,i_q} c_{i_1\dots i_q}\alpha^{i_1}\otimes\cdots\otimes\alpha^{i_q} = 0$. Setzt man q-Tupel $(\mathbf{a}_{j_1},\dots,\mathbf{a}_{j_q})$ ein, so erhält man $c_{j_1\dots j_q} = 0$ für alle $j_1,\dots,j_q$.

2) Ist φ eine beliebige q-fache Multilinearform, so setzen wir

$$\psi := \sum_{i_1,\dots,i_q} \varphi(\mathbf{a}_{i_1},\dots,\mathbf{a}_{i_q})\alpha^{i_1}\otimes\cdots\otimes\alpha^{i_q}.$$

Dann ist $(\psi-\varphi)(\mathbf{a}_{j_1},\dots,\mathbf{a}_{j_q}) = 0$ für alle $j_1,\dots,j_q$, also $(\psi-\varphi)(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_q) = 0$ für alle $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_q$, und damit $\varphi=\psi$. ∎

Definition

Eine Multilinearform $\varphi \in L_q(V;\mathbb{R})$ heißt ***alternierend*** oder ***schiefsymmetrisch***, falls für $i = 1,\dots,q-1$ gilt:

$$\varphi(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_{i+1},\dots,\mathbf{x}_q) = -\varphi(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_{i+1},\mathbf{x}_i,\dots,\mathbf{x}_q).$$

Da man beliebige Permutationen aus Vertauschungen zusammensetzen kann, folgt:

4.2.3. Satz

1. $\varphi(\mathbf{x}_{\sigma(1)},\dots,\mathbf{x}_{\sigma(q)}) = \mathrm{sign}(\sigma)\cdot\varphi(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_q)$ *für alle Permutationen* $\sigma\in S_q$.
2. $\varphi(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_q) = 0$, *falls zwei Argumente gleich sind.*

Definition

Es sei $A^q(V)\subset L_q(V;K)$ der Unterraum aller alternierenden q-fachen Multilinearformen auf V.

Speziell ist $A^0(V)=\mathbb{R}$, $A^1(V)=V^*$ und $A^q(V)=0$ für $q>n$.

Definition

Sind $\lambda_1,\dots,\lambda_q\in V^*$ Linearformen, so setzt man

$$\lambda_1\wedge\ldots\wedge\lambda_q = \sum_{\sigma\in S_q}\mathrm{sign}(\sigma)\lambda_{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes\lambda_{\sigma(q)}.$$

4.2.4. Satz

Es ist
$$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_q(v_1, \ldots, v_q) = \det\Big(\lambda_i(v_j) \;\Big|\; i, j = 1, \ldots, q\Big).$$

Die Behauptung folgt sofort aus der Definition der Determinante.

4.2.5. Folgerung

$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_q$ *ist alternierend, und für* $\sigma \in S_q$ *ist*

$$\lambda_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \lambda_{\sigma(q)} = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_q.$$

Beweis: Die Determinante

$$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_q(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) = \det\Big(\lambda_i(\mathbf{v}_j) \;\Big|\; i, j = 1, \ldots, q\Big)$$

ist alternierend in den Zeilen (also den λ_i) und den Spalten (also den $\mathbf{v}_j$). ■

Für $1 \le i_1, \ldots, i_q \le n$ sei $\delta(i_1, \ldots, i_q)$ das (eindeutig bestimmte) Vorzeichen derjenigen Permutation, die $(i_1, \ldots, i_q)$ auf $(j_1, \ldots, j_q)$ mit $1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n$ abbildet.

4.2.6. Hilfssatz 1

Ist $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ *die duale Basis zu* $A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ *und* $1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n$, *so ist*

$$\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q}(\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_q}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \{i_1, \ldots, i_q\} \ne \{j_1, \ldots, j_q\}, \\ \delta(i_1, \ldots, i_q) & \text{falls } \{i_1, \ldots, i_q\} = \{j_1, \ldots, j_q\}. \end{cases}$$

Beweis: Ist $\{i_1, \ldots, i_q\} \ne \{j_1, \ldots, j_q\}$, so ist $\alpha^{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes \alpha^{i_{\sigma(q)}}(\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_q}) = 0$ für jedes $\sigma \in S_q$. Sei daher $\{i_1, \ldots, i_q\} = \{j_1, \ldots, j_q\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_q}(\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_q}) &= \delta(i_1, \ldots, i_q)\alpha^{j_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{j_q}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}) \\ &= \delta(i_1, \ldots, i_q) \sum_{\sigma \in S_q} \operatorname{sign}(\sigma)\alpha^{j_1}(\mathbf{a}_{j_{\sigma(1)}}) \cdots \alpha^{j_q}(\mathbf{a}_{j_{\sigma(q)}}) \\ &= \delta(i_1, \ldots, i_q). \end{aligned}$$

Von der Summe bleibt nur der Summand mit $\sigma = \mathrm{id}$ übrig. ■

4.2.7. Hilfssatz 2

Ist $\varphi \in A^q(V)$, $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ *eine Basis von* V *und*

$$\varphi(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_q}) = 0 \text{ für } 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n,$$

so ist $\varphi = 0$.

Beweis: Ist $\{i_1, \dots, i_q\} = \{j_1, \dots, j_q\}$ mit $1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n$, so ist

$$\varphi(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_q}) = \delta(i_1, \dots, i_q) \cdot \varphi(\mathbf{a}_{j_1}, \dots, \mathbf{a}_{j_q}) = 0.$$

Sind nun $x_j = x_{j1}\mathbf{a}_1 + \dots + x_{jn}\mathbf{a}_n$, $j = 1, \dots, q$, beliebige Vektoren, so ist

$$\varphi(x_1, \dots, x_q) = \sum_{i_1, \dots, i_q} x_{1i_1} \cdots x_{qi_q} \varphi(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_q}) = 0.$$

■

4.2.8. Satz

Die Formen $\alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_q}$ *mit* $1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$ *bilden eine Basis von* $A^q(V)$. *Insbesondere ist* $\dim(A^q(V)) = \binom{n}{q}$.

Beweis: 1) Lineare Unabhängigkeit: Sei

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} c_{i_1 \dots i_q} \alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_q} = 0.$$

Dann ist

$$0 = \Big(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} c_{i_1 \dots i_q} \alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_q} \Big)(\mathbf{a}_{j_1}, \dots, \mathbf{a}_{j_q}) = c_{j_1 \dots j_q} \text{ für } j_1 < \dots < j_q.$$

2) Erzeugendensystem: Sei $\varphi \in A^q(V)$. Dann definieren wir $\psi \in A^q(V)$ als

$$\psi := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n} \varphi(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_q}) \alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_q}.$$

Dann sieht man sofort: $\psi = \varphi$.

Die Dimension von $A^q(V)$ ist die Anzahl der q-Tupel $(i_1, \dots, i_q)$ mit $1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$. Jedes solche q-Tupel bestimmt genau eine q-elementige Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$, und zu jeder der Mengen gibt es nur eine zulässige Anordnung der Elemente. ■

Setzt man nun das Produkt

$$(\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_p}) \wedge (\alpha^{j_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{j_q}) := \alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{i_p} \wedge \alpha^{j_1} \wedge \ldots \wedge \alpha^{j_q}$$

von Basiselementen bilinear auf die ganzen Räume fort, so erhält man das sogenannte ***Dachprodukt***

$$A^p(V) \times A^q(V) \xrightarrow{\wedge} A^{p+q}(V), \text{ mit } (\varphi, \psi) \mapsto \varphi \wedge \psi.$$

Dieses Produkt hat folgende Eigenschaften:

1. $(\omega \wedge \varphi) \wedge \psi = \omega \wedge (\varphi \wedge \psi)$.
2. $\omega \wedge \varphi = (-1)^{pq} \varphi \wedge \omega$ für $\omega \in A^p(V)$, $\varphi \in A^q(V)$. (Antikommutativgesetz).
3. Für Linearformen $\varphi, \psi \in V^*$ ist $\varphi \wedge \psi = \varphi \otimes \psi - \psi \otimes \varphi$.

Die Eigenschaften (1) und (2) folgen ganz leicht für Basisformen und dann wegen der Bilinearität für beliebige Formen.

4.2.9. Lemma

Sei $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ eine Basis von V, $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ die duale Basis von V^* und $T : V \to V$ ein Endomorphismus. Dann ist

$$\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^n(T\mathbf{a}_1, \ldots, T\mathbf{a}_n) = \det T.$$

BEWEIS: Ist $T\mathbf{a}_i = \sum_j c_{ij}\mathbf{a}_j$, so ist

$$\begin{aligned}
\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^n(T\mathbf{a}_1, \ldots, T\mathbf{a}_n) &= \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^n\Big(\sum_{j_1} c_{1,j_1}\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n} c_{n,j_n}\mathbf{a}_{j_n}\Big) \\
&= \sum_{j_1,\ldots,j_n} c_{1,j_1} \cdots c_{n,j_n}\, \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^n(\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_n}) \\
&= \sum_{j_1,\ldots,j_n} \delta(j_1, \ldots, j_n)\, c_{1,j_1} \cdots c_{n,j_n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, c_{1,\sigma(1)} \cdots c_{n,\sigma(n)} \;=\; \det T.
\end{aligned}$$

∎

Definition

Zwei (geordnete) Basen $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$, $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ eines n-dimensionalen Vektorraumes V heißen ***gleich-orientiert***, falls der durch $T(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ gegebene Automorphismus von V eine positive Determinante besitzt.

Die Menge der geordneten Basen von V wird durch die Relation „gleichorientiert“ in zwei Äquivalenzklassen zerlegt. Basen in zwei verschiedenen Klassen gehen durch einen Automorphismus mit negativer Determinante auseinander hervor. Unter einer ***Orientierung*** von V versteht man die Auswahl einer der beiden Klassen.

Der $\mathbb{R}^n$ hat hier eine Sonderstellung inne. Eine Basis des $\mathbb{R}^n$ heißt ***positiv orientiert***, wenn sie in der gleichen Orientierungsklasse wie die Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ liegt. So ist z.B. $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$ eine positiv orientierte Basis des $\mathbb{R}^3$, während $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ negativ orientiert ist. Ist nämlich σ eine Permutation aus S_n und $T_\sigma \mathbf{e}_i := \mathbf{e}_{\sigma(i)}$ für $i = 1, \ldots, n$, so ist

$$\det T = \varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}) = \operatorname{sign}(\sigma).$$

4.2.10. Satz

Ist V ein n-dimensionaler orientierter Vektorraum mit Skalarprodukt, so gibt es genau eine n-Form Ω_V, so dass

$$\Omega_V(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = 1$$

für jede positiv orientierte ON-Basis $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ von V ist.

Beweis: Wir wählen eine spezielle positiv orientierte ON-Basis $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ und die dazu duale Basis $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$. Dann setzen wir

$$\Omega_V := \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^n.$$

Offensichtlich ist $\Omega_V(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = 1$. Ist $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ eine andere (ebenfalls positiv orientierte) ON-Basis, so geht sie aus $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ durch eine Transformation T mit $\det(T) = 1$ hervor (vgl. Lineare Algebra). Also ist

$$\Omega_V(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n) = \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^n(T\mathbf{a}_1, \ldots, T\mathbf{a}_n) = \det(T) = 1.$$

∎

Definition

Die n-Form Ω_V heißt ***Volumenform*** von V. Speziell wird $\Delta := \Omega_{\mathbb{R}^n} = \varepsilon^1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon^n$ auch als ***Determinantenform*** bezeichnet.

Ist M eine (n,n)-Matrix mit den Zeilenvektoren $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, so ist $\Delta(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \det(M)$.

Es sei weiterhin V ein n-dimensionaler orientierter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt, $A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis und $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ die zugehörige duale Basis. Wir wollen den Raum $A^{n-1}(V)$ untersuchen.

Eine Basis von $A^{n-1}(V)$ bilden die n (n-1)-Formen

$$\omega^i := \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\alpha^i} \wedge \ldots \wedge \alpha^n, \quad i = 1, \ldots, n,$$

wobei das Dach über α^i bedeutet, dass dieser Faktor weggelassen werden soll. Man erhält also die Formen

$$\omega^1 = \alpha^2 \wedge \ldots \wedge \alpha^n, \quad \omega^2 = \alpha^1 \wedge \alpha^3 \wedge \ldots \wedge \alpha^n, \quad \ldots, \quad \omega^n = \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^{n-1}.$$

4.2.11. Satz (Die kanonische $(n-1)$-Form zu einem Vektor)

Es gibt zu jedem Vektor $\mathbf{v} \in V$ *genau eine* $(n-1)$*-Form* $\Lambda_{\mathbf{v}} \in A^{n-1}(V)$*, so dass gilt:*

$$\varphi \wedge \Lambda_{\mathbf{v}} = \varphi(\mathbf{v}) \cdot \Omega_V, \qquad \textit{für alle } \varphi \in V^*.$$

In Koordinaten: Ist $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ *eine positiv orientierte ON-Basis und* $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ *die dazu duale Basis, sowie* $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + \cdots + v_n\mathbf{a}_n$*, so ist*

$$\Lambda_{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{n} v_i(-1)^{i+1}\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\alpha^i} \wedge \ldots \wedge \alpha^n.$$

BEWEIS: Der Eindeutigkeitsbeweis liefert auch gleich die Formel:

Wenn es eine Form $\Lambda_{\mathbf{v}} = \sum_{j=1}^{n} c_j\omega_j$ mit der geforderten Eigenschaft gibt, so muss für $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + \cdots + v_n\mathbf{a}_n$ gelten:

$$\begin{aligned} v_i \cdot \Omega_V &= \alpha^i(v) \cdot \Omega_V \\ &= \alpha^i \wedge \Lambda_v \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha^i \wedge \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\alpha^j} \wedge \ldots \wedge \alpha^n \\ &= c_i \cdot (-1)^{i+1} \cdot \Omega_V. \end{aligned}$$

Also ist dann $\Lambda_v = \sum_{i=1}^{n} v_i(-1)^{i+1}\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\alpha^i} \wedge \ldots \wedge \alpha^n$.

Da jede Linearform φ eine Linearkombination der α^i ist, folgt ganz leicht, daß die so definierte Form Λ_v die gewünschte Eigenschaft hat. ∎

Speziell ist $\lambda_a \wedge \Lambda_v = \langle a\,,\, v\rangle \Omega_V$.

4.2.12. Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^3$. Wir benutzen das euklidische Skalarprodukt und als Orthonormalbasis die Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ der Einheitsvektoren. Ist $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, so ist

$$\lambda_{\mathbf{a}} = a_1\varepsilon^1 + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^2$$

und

$$\Lambda_{\mathbf{a}} = a_1\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 + a_2\varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1 + a_3\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2.$$

Daraus folgt:

$$\Lambda_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = a_1(v_2w_3 - v_3w_2) + a_2(v_3w_1 - v_1w_3) + a_3(v_1w_2 - v_2w_1).$$

Außerdem ist $\lambda_{\mathbf{a}} \wedge \Lambda_{\mathbf{b}} = (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})\Delta$.

4.2.13. Satz

$\lambda_{\mathbf{a}} \wedge \lambda_{\mathbf{b}} = \Lambda_{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}$.

Beweis: Wir rechnen die Formel „zu Fuß“ nach:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\mathbf{a}} \wedge \lambda_{\mathbf{b}} &= \left(\sum_{i=1}^{3} a_i\varepsilon^i\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{3} b_j\varepsilon^j\right) = \sum_{i,j} a_ib_j\varepsilon^i \wedge \varepsilon^j \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 + (a_3b_1 - a_1b_3)\varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1 + (a_1b_2 - a_2b_1)\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \\
&= \Lambda_{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}.
\end{aligned}$$

■

4.3 Differentialformen auf dem $\mathbb{R}^n$

Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine k-mal stetig differenzierbare *Differentialform der Dimension q* (oder kurz: *q-Form*) auf U ist eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung

$$\omega : U \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

so dass für jedes $\mathbf{x} \in U$ die Abbildung $\omega_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) := \omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q)$$

eine alternierende q-fache Multilinearform ist.

Der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller beliebig oft differenzierbaren q-Formen auf U wird mit $\mathcal{A}^q(U)$ bezeichnet.

Bemerkungen:

1. Im Falle $q = 1$ erhält man eine Pfaffsche Form. Insbesondere gibt es die 1-Formen dx_i mit $dx_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = v_i$, also $(dx_i)_{\mathbf{x}} = \varepsilon^i$.

2. Ist φ eine p-Form und ψ eine q-Form auf U, so ist $\varphi \wedge \psi$ mit $(\varphi \wedge \psi)_{\mathbf{x}} = \varphi_{\mathbf{x}} \wedge \psi_{\mathbf{x}}$ eine $(p+q)$-Form auf U.

4.3.1. Satz

Jede q-Form φ auf U kann eindeutig in der Form

$$\varphi = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_q \le n} a_{i_1 \ldots i_q} \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$$

geschrieben werden, mit $\mathcal{C}^k$-Funktionen $a_{i_1 \ldots i_q}$. Dabei ist

$$a_{i_1 \ldots i_q}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_q}).$$

Der Beweis ist offensichtlich.

Definition

Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $F : U \to V$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung, so wird jeder q-Form $\omega \in \mathcal{A}^q(V)$ eine q-Form $F^*\omega \in \mathcal{A}^q(U)$ zugeordnet, durch

$$F^*\omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) := \omega(F(\mathbf{x}), DF(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1), \ldots, DF(\mathbf{x})(\mathbf{v}_q)).$$

4.3.2. Satz

Die „Liftung“ $F^* : \mathcal{A}^q(V) \to \mathcal{A}^q(U)$ hat folgende Eigenschaften:

1. *F^* ist $\mathbb{R}$-linear.*
2. *Ist f eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion auf V und $\omega \in \mathcal{A}^q(V)$, so ist $F^*(f \cdot \omega) = (f \circ F) \cdot F^*(\omega)$.*
3. *Ist f eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion auf V, so ist $F^*(df) = d(f \circ F)$.*
4. *Ist $\varphi \in \mathcal{A}^p(V)$ und $\psi \in \mathcal{A}^q(V)$, so ist $F^*(\varphi \wedge \psi) = (F^*\varphi) \wedge (F^*\psi)$.*

Beweis: Die ersten beiden Eigenschaften folgen sofort aus der Definition, die dritte Eigenschaft haben wir schon früher bewiesen. Insbesondere ist $F^*(dy_i) = dF_i$, wenn $F = (F_1, \ldots, F_m)$ ist.

Sind $\omega_1, \ldots, \omega_q$ Pfaffsche Formen auf V, so ist

$$\begin{aligned}
(F^*\omega_1 \otimes \cdots \otimes F^*\omega_q)(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) &= \\
&= F^*\omega_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1) \cdots F^*\omega_q(\mathbf{x}, \mathbf{v}_q) \\
&= \omega_1(F(\mathbf{x}), DF(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1)) \cdots \omega_q(F(\mathbf{x}), DF(\mathbf{x})(\mathbf{v}_q)) \\
&= (\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_q)(F(\mathbf{x}), DF(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1), \ldots, DF(\mathbf{x})(\mathbf{v}_q)),
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
(F^*\omega_1 \wedge \cdots \wedge F^*\omega_q)(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) &= \\
&= \sum_{\sigma \in S_q} \operatorname{sign}(\sigma)(F^*\omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes F^*\omega_{\sigma(q)})(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q) \\
&= \sum_{\sigma \in S_q} \operatorname{sign}(\sigma)(\omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(q)})(F(\mathbf{x}), DF(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1), \ldots, DF(\mathbf{x})(\mathbf{v}_q)) \\
&= F^*(\omega_1 \wedge \cdots \omega_q)(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q).
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass auch allgemein $F^*(\varphi \wedge \psi) = (F^*\varphi) \wedge (F^*\psi)$ ist. ■

4.3.3. Folgerung 1

Ist $\varphi = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_q \le n} a_{i_1 \ldots i_q}\, dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_q}$, so ist

$$F^*\varphi = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_q \le n} (a_{i_1 \ldots i_q} \circ F)\, dF_{i_1} \wedge \ldots \wedge dF_{i_q}.$$

4.3.4. Folgerung 2

Ist $n = m$, so ist

$$F^*(a\,dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n) = (a \circ F) \cdot \det J_F \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} dF_1 \wedge \ldots \wedge dF_n &= \\ &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_n} (F_1)_{x_{i_1}} \cdots (F_n)_{x_{i_n}}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) (F_1)_{x_{\sigma(1)}} \cdots (F_n)_{x_{\sigma(n)}}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= (\det J_F)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

■

4.3.5. Satz

Zu jeder offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $d = d_U : \mathcal{A}^q(U) \to \mathcal{A}^{q+1}(U)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. *Ist $f \in \mathcal{A}^0(U)$ eine Funktion, so ist df das schon bekannte Differential.*
2. *Ist $\omega \in \mathcal{A}^p(U)$ und $\varphi \in \mathcal{A}^q(U)$, so ist*

$$d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^p \omega \wedge d\varphi.$$

3. *Es ist stets $dd\omega = 0$.*

Beweis: 1) Eindeutigkeit:

Ist $\omega = \sum\limits_{1 \le i_1 < \ldots < i_q \le n} a_{i_1 \ldots i_q}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$, so folgt:

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_q \le n} d\big(a_{i_1 \ldots i_q}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}\big) \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_q \le n} \big(da_{i_1 \ldots i_q} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} + a_{i_1 \ldots i_q}\, d(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q})\big) \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_q \le n} da_{i_1 \ldots i_q} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}, \end{aligned}$$

denn es ist $d(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}) = 0$, wie ein simpler Induktionsbeweis (unter Verwendung der Eigenschaften (1), (2) und (3)) zeigt.

Existenz:

Wir definieren d durch die oben gewonnene Gleichung. Das ist möglich, wegen der eindeutig bestimmten Basisdarstellung der Differentialformen. Es ist klar, dass d dann linear ist, und dass df das Differential von f ist.

Wir benutzen eine abgekürzte Schreibweise: Ist $\omega = a_I\, dx_I$ und $\varphi = b_J\, dx_J$, so ist

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \varphi) &= d(a_I b_J\, dx_I \wedge dx_J) \;=\; d(a_I b_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \big[(da_I)b_J + a_I(db_J)\big] \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (da_I \wedge dx_I) \wedge (b_J dx_J) + db_J \wedge (a_I\, dx_I) \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \varphi + (-1)^p \omega \wedge d\varphi. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} ddf &= d\Big(\sum_i f_{x_i}\, dx_i\Big) \;=\; \sum_i d(f_{x_i}) \wedge dx_i \\ &= \sum_{i,j} f_{x_i x_j}\, dx_j \wedge dx_i \;=\; \sum_{j<i} \big(f_{x_i x_j} - f_{x_j x_i}\big)\, dx_j \wedge dx_i \;=\; 0. \end{aligned}$$

und daher $dd(a_I\, dx_I) = d(da_I \wedge dx_I) = dda_I \wedge dx_I - da_I \wedge d(dx_I) = 0$. ∎

Bemerkung: Ist $V \subset U$ offen, so ergibt sich sofort aus der Definition:

$$d(\omega|_V) = (d\omega)|_V.$$

4.3.6. Satz

Ist $F : U \to V$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung und $\omega \in \mathcal{A}^q(V)$, so ist

$$d(F^*\omega) = F^*(d\omega).$$

Beweis: Sei $\omega = a\, dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_q}$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(F^*\omega) &= d((a \circ F)\, dF_{i_1} \wedge \ldots \wedge dF_{i_q}) \\ &= d(a \circ F) \wedge dF_{i_1} \wedge \ldots \wedge dF_{i_q} + (a \circ F)\, d(dF_{i_1} \wedge \ldots \wedge dF_{i_q}) \\ &= F^*(da) \wedge F^*(dy_{i_1}) \wedge \ldots \wedge F^*(dy_{i_q}) \\ &= F^*(da \wedge dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_q}) \;=\; F^*(d\omega). \end{aligned}$$

∎

4.3.7. Satz

$F : U \to V$ und $G : V \to W$ seien $\mathcal{C}^\infty$-Abbildungen, $\omega \in \mathcal{A}^q(W)$. Dann ist

$$(G \circ F)^*\omega = F^*(G^*\omega).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}(G\circ F)^*\omega(\mathbf{x},\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_q) &= \omega(G\circ F(\mathbf{x}), D(G\circ F)(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1),\ldots)\\ &= G^*\omega(F(\mathbf{x}), DF(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1),\ldots)\\ &= F^*(G^*\omega)(\mathbf{x},\mathbf{v}_1,\ldots).\end{aligned}$$

■

Es sei $\mathcal{V}(U)$ der Raum der $\mathcal{C}^\infty$-Vektorfelder auf U. Dann werden die „musikalischen Isomorphismen“ $\flat : \mathcal{V}(U) \to \mathcal{A}^1(U)$ und $\sharp : \mathcal{A}^1(U) \to \mathcal{V}(U)$ definiert durch $\flat\boldsymbol{\xi} := \lambda_{\boldsymbol{\xi}}$ und $\sharp := \flat^{-1}$. Dann ist

$$\flat\boldsymbol{\xi} = \xi_1\,dx_1 + \cdots + \xi_n\,dx_n,\ \text{für } \boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\ldots,\xi_n).$$

4.3.8. Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gibt es genau einen Isomorphismus

$$* : \mathcal{A}^1(U) \to \mathcal{A}^{n-1}(U),$$

so dass für alle Vektorfelder $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ auf U gilt:

$$\lambda_{\boldsymbol{\xi}} \wedge *\lambda_{\boldsymbol{\eta}} = (\boldsymbol{\xi}\bullet\boldsymbol{\eta})\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n.$$

Beweis: 1) Eindeutigkeit: Wenn es den Isomorphismus $*$ gibt, dann gilt:

$$dx_i \wedge *dx_i = dx_1\wedge\ldots dx_n,\ \text{also}\ *dx_i = (-1)^{i-1}dx_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\ldots\wedge dx_n.$$

Wird umgekehrt $*$ auf diese Weise definiert, so ist

$$\begin{aligned}\lambda_{\boldsymbol{\xi}}\wedge *\lambda_{\boldsymbol{\eta}} &= \sum_{i,j}\xi_i\eta_j(-1)^{j-1}\,dx_i\wedge dx_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_j}\wedge\ldots\wedge dx_n\\ &= \Big(\sum_{i=1}^n \xi_i\eta_i\Big)\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n.\end{aligned}$$

■

Im Falle $n = 3$ ist

$$*dx_1 = dx_2\wedge dx_3,\quad *dx_2 = dx_3\wedge dx_1\quad \text{und}\quad *dx_3 = dx_1\wedge dx_2.$$

Es folgt: $*(\flat\boldsymbol{\xi}) = \Lambda_{\boldsymbol{\xi}} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1}\xi_i\,dx_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\ldots\wedge dx_n$.

Im Falle $n = 3$ können wir jetzt die Operatoren der klassischen Vektoranalysis einführen. Dabei sei $dV := dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$ das sogenannte ***Volumenelement***.

Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, f eine differenzierbare Funktion auf U und $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ Vektorfelder auf U. Dann werden die Vektorfelder $\mathbf{grad}\, f$, $\mathbf{rot}\,\mathbf{A}$ und die Funktion $\operatorname{div}\mathbf{B}$ gegeben durch

$$df = \lambda_{\mathbf{grad}\, f}, \quad d(\lambda_{\mathbf{A}}) = \Lambda_{\mathbf{rot}\,\mathbf{A}} \quad \text{und} \quad d(\Lambda_{\mathbf{B}}) = (\operatorname{div}\mathbf{B})dV.$$

4.3.9. Satz

Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}\, f &= (f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}),\\
\mathbf{rot}\,\mathbf{A} &= (\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}),\\
\operatorname{div}\mathbf{B} &= \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3}.
\end{aligned}$$

Beweis: Die erste Formel ist trivial, offensichtlich ist

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3 = \lambda_{\mathbf{grad}\, f}.$$

Ist $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ und $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$, so gilt:

$$\begin{aligned}
d(\lambda_{\mathbf{A}}) &= d(A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3)\\
&= dA_1 \wedge dx_1 + dA_2 \wedge dx_2 + dA_3 \wedge dx_3\\
&= \frac{\partial A_1}{\partial x_2}dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x_3}dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x_1}dx_1 \wedge dx_2\\
&\quad + \frac{\partial A_2}{\partial x_3}dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial A_3}{\partial x_1}dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial A_3}{\partial x_2}dx_2 \wedge dx_3\\
&= (\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3})dx_2 \wedge dx_3 + (\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1})dx_3 \wedge dx_1 + (\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2})dx_1 \wedge dx_2\\
&= \Lambda_{\mathbf{rot}\,\mathbf{A}}.
\end{aligned}$$

Und weiter ist

$$\begin{aligned}
d(\Lambda_{\mathbf{B}}) &= d(B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2)\\
&= dB_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + dB_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + dB_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2\\
&= (\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3})dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \;=\; (\operatorname{div}\mathbf{B})\, dV.
\end{aligned}$$

∎

4.3.10. Satz

Sei f eine differenzierbare Funktion und $\mathbf{A}$ ein Vektorfeld. Dann gilt:

1. $\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\, f = (0,0,0)$.
2. $\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\mathbf{A} = 0$.

Beweis:

1) $0 = ddf = d(\lambda_{\mathbf{grad}\, f}) = \Lambda_{\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\, f}$, also $\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\, f = (0,0,0)$.

2) $0 = dd\lambda_{\mathbf{A}} = d(\Lambda_{\mathbf{rot}\,\mathbf{A}}) = (\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\mathbf{A})\, dV$, also $\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\mathbf{A} = 0$. ∎

Im $\mathbb{R}^3$ ist

$$\lambda_{\mathbf{F}}(\mathbf{A}) := \mathbf{F} \bullet \mathbf{A} \quad \text{und} \quad \Lambda_{\mathbf{F}}(\mathbf{A},\mathbf{B}) := \mathbf{F} \bullet (\mathbf{A} \times \mathbf{B}),$$

und wir haben das folgende „kommutative Diagramm“ :

$$\begin{array}{ccccccc}
\{0\text{-Formen}\} & \xrightarrow{d} & \{1\text{-Formen}\} & \xrightarrow{d} & \{2\text{-Formen}\} & \xrightarrow{d} & \{3\text{-Formen}\} \\
\| & & \uparrow \flat & & \uparrow *\flat & & \uparrow \cdot dV \\
\{\text{Funktionen}\} & \xrightarrow{\mathbf{grad}} & \{\text{Vektorfelder}\} & \xrightarrow{\mathbf{rot}} & \{\text{Vektorfelder}\} & \xrightarrow{\operatorname{div}} & \{\text{Funktionen}\}
\end{array}$$

Die „Kommutativität“ bedeutet:

$$\flat(\nabla f) = df, \quad *\flat(\mathbf{rot}\,\mathbf{A}) = d(\flat\mathbf{A}), \quad \text{und} \quad \operatorname{div}(\mathbf{B})\, dV = d(*\flat\mathbf{B}).$$

Beweis: 1) $\flat(\nabla f) = \lambda_{\nabla f} = df$.

2) $*\flat(\mathbf{rot}\,\mathbf{A}) = \Lambda_{\mathbf{rot}\,\mathbf{A}} = d(\lambda_{\mathbf{A}}) = d(\flat\mathbf{A})$.

3) $\operatorname{div}(\mathbf{B})\, dV = d(\Lambda_{\mathbf{B}}) = d(*\lambda_{\mathbf{B}}) = d(*\flat\mathbf{B})$. ∎

Die einfachen Rechenregeln für die Poincaré-Ableitung d und das obige kommutative Diagramm liefern uns einfache Beweise für viele Formeln der Vektoranalysis.

4.3.11. Formeln der klassischen Vektoranalysis

Sei f eine differenzierbare Funktion, $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ Vektorfelder. Dann gilt:

1. $\mathbf{rot}(f \cdot \mathbf{A}) = f \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{A}) + \mathbf{grad}\, f \times \mathbf{A}$.
2. $\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{rot}\,\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} - \mathbf{A} \bullet \mathbf{rot}\,\mathbf{B}$.
3. $\operatorname{div}(f \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{grad}\, f \bullet \mathbf{A} + f \cdot \operatorname{div}\mathbf{A}$.

Beweis: 1) Es ist

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\mathbf{rot}(f\cdot\mathbf{A})} &= d(\lambda_{f\cdot\mathbf{A}}) = d(f\cdot\lambda_{\mathbf{A}}) \\
&= df\wedge\lambda_{\mathbf{A}} + f\cdot d\lambda_{\mathbf{A}} \\
&= \lambda_{\mathbf{grad}\,f}\wedge\lambda_{\mathbf{A}} + f\cdot\Lambda_{\mathbf{rot}\,\mathbf{A}} \\
&= \Lambda_{\mathbf{grad}\,f\times\mathbf{A}} + \Lambda_{f\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{A}} \\
&= \Lambda_{\mathbf{grad}\,f\times\mathbf{A}+f\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{A}}.
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}))dV &= d(\Lambda_{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}) \\
&= d(\lambda_{\mathbf{A}}\wedge\lambda_{\mathbf{B}}) \\
&= d\lambda_{\mathbf{A}}\wedge\lambda_{\mathbf{B}} - \lambda_{\mathbf{A}}\wedge d\lambda_{\mathbf{B}} \\
&= \Lambda_{\mathbf{rot}\,\mathbf{A}}\wedge\lambda_{\mathbf{B}} - \lambda_{\mathbf{A}}\wedge\Lambda_{\mathbf{rot}\,\mathbf{B}} \\
&= (\mathbf{rot}\,\mathbf{A}\bullet\mathbf{B} - \mathbf{A}\bullet\mathbf{rot}\,\mathbf{B})dV.
\end{aligned}$$

3) Schließlich gilt:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}(f\cdot\mathbf{A}))dV &= d(\Lambda_{f\cdot\mathbf{A}}) = d(f\cdot\Lambda_{\mathbf{A}}) \\
&= df\wedge\Lambda_{\mathbf{A}} + f\cdot d\Lambda_{\mathbf{A}} \\
&= \lambda_{\mathbf{grad}\,f}\wedge\Lambda_{\mathbf{A}} + f\cdot(\mathrm{div}\,\mathbf{A})dV \\
&= (\mathbf{grad}\,f\bullet\mathbf{A} + f\cdot\mathrm{div}\,\mathbf{A})\,dV.
\end{aligned}$$

∎

4.4 Poincaré'sches Lemma

4.4.1. Lemma von Poincaré

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig bezüglich $\mathbf{0}$. Ist $\omega \in \mathcal{A}^q(U)$ und $d\omega = 0$, so gibt es eine Differentialform $\varphi \in \mathcal{A}^{q-1}(U)$ mit $d\varphi = \omega$.

Beweis: Wir benutzen folgende Idee: Es gibt eine Abbildung

$$I : \mathcal{A}^q(U) \to \mathcal{A}^{q-1}(U) \quad \text{mit} \quad \omega = I(d\omega) + d(I\omega).$$

Ist dann $d\omega = 0$, so ist $\omega = d(I\omega)$.

Es reicht, Formen vom Typ $\omega = a\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$ zu betrachten. Dann setzen wir

$$I\omega := \Big(\int_0^1 t^{q-1} a(t\mathbf{x})\, dt\Big) P_{i_1 \ldots i_q}(\mathbf{x}),$$

mit

$$P_{i_1 \ldots i_q}(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j-1} x_{i_j}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}.$$

Es ist $d(P_{i_1 \ldots i_q}(\mathbf{x})) = q\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$ und

$$\frac{\partial}{\partial x_j} a(t\mathbf{x}) = \sum_{\nu=1}^{n} D_\nu a(t\mathbf{x}) \cdot D_j(tx_\nu) = t \cdot D_j a(t\mathbf{x}).$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
d(I\omega) &= d\Big(\int_0^1 t^{q-1} a(t\mathbf{x})\, dt\Big) \wedge P_{i_1 \ldots i_q}(\mathbf{x}) \\
&\quad + \Big(\int_0^1 t^{q-1} a(t\mathbf{x})\, dt\Big) \cdot dP_{i_1 \ldots i_q}(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^{q-1} \frac{\partial}{\partial x_j} a(t\mathbf{x})\, dt\Big)\, dx_j \wedge P_{i_1 \ldots i_q}(\mathbf{x}) \\
&\quad + \Big(\int_0^1 q t^{q-1} a(t\mathbf{x})\, dt\Big) \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^{q} D_j a(t\mathbf{x})\, dt\Big)\, dx_j \wedge P_{i_1 \ldots i_q}(\mathbf{x}) \\
&\quad + \Big(\int_0^1 q t^{q-1} a(t\mathbf{x})\, dt\Big) \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}.
\end{aligned}$$

Weiter ist

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} (D_j a)\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}.$$

Ist $\{j, i_1, \ldots, i_q\} = \{k_1, \ldots, k_{q+1}\}$ mit $1 \le k_1 < \ldots < k_{q+1} \le n$, so ist

$$dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} = \delta(j, i_1, \ldots, i_q)\, dx_{k_1} \wedge \ldots \wedge dx_{k_{q+1}},$$

also

$$\begin{aligned} P_{k_1 \ldots k_{q+1}}(\mathbf{x}) &= x_j\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{q} (-1)^\nu x_{i_\nu}\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\nu}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} I(d\omega) &= \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^q (D_j a)(t\mathbf{x})\, dt \Big) x_j\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{q} (-1)^\nu \Big(\int_0^1 t^q (D_j a)(t\mathbf{x})\, dt \Big) x_{i_\nu}\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_\nu}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \\ &= \int_0^1 \Big(t^q \cdot \sum_{j=1}^{n} (D_j a)(t\mathbf{x}) x_j \Big)\, dt \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^q (D_j a)(t\mathbf{x})\, dt \Big)\, dx_j \wedge P_{i_1 \ldots i_q}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Zusammen erhält man:

$$\begin{aligned} d(I\omega) + I(d\omega) &= \\ &= \int_0^1 \Big(q t^{q-1} a(t\mathbf{x}) + t^q \cdot \sum_{j=1}^{n} (D_j a)(t\mathbf{x}) x_j \Big)\, dt \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^q D_j a(t\mathbf{x})\, dt \Big)\, dx_j \wedge P_{i_1 \ldots i_q}(\mathbf{x}) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^q (D_j a)(t\mathbf{x})\, dt \Big)\, dx_j \wedge P_{i_1 \ldots i_q}(\mathbf{x}) \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \Big(t^q a(t\mathbf{x}) \Big)\, dt \cdot dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \;=\; \omega. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Definition

Eine Differentialform ω vom Grad p heißt *geschlossen*, wenn $d\omega = 0$ ist. Sie heißt *exakt*, wenn es eine Differentialform φ vom Grad $p - 1$ mit $d\varphi = \omega$ gibt.

Offensichtlich ist jede exakte Differentialform geschlossen, das folgt aus der Formel $dd\omega = 0$. Auf einer sternförmigen Menge ist auch jede geschlossene Differentialform exakt.

Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so hat man folgende Sequenz von linearen Abbildungen:

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{A}^0(U) \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1(U) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \mathcal{A}^n(U) \longrightarrow 0.$$

Weil $d \circ d = 0$ ist, ist $\mathrm{Im}(d : \mathcal{A}^{q-1}(U) \to \mathcal{A}^q(U)) \subset \mathrm{Ker}(d : \mathcal{A}^q(U) \to \mathcal{A}^{q+1}(U))$. Der Vektorraum

$$H^q(U) := \mathrm{Ker}(d : \mathcal{A}^q(U) \to \mathcal{A}^{q+1}(U)) / \mathrm{Im}(d : \mathcal{A}^{q-1}(U) \to \mathcal{A}^q(U))$$

heißt *q-te de Rham Gruppe* von U (für $q \geq 1$).

Ist U sternförmig, so verschwinden alle de Rham Gruppen. Im allgemeinen hängt $H^q(U)$ nur von der topologischen Struktur von U ab.

4.5 Integration von Differentialformen

Definition

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine n-Form $\omega := a\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ auf B heißt ***integrierbar***, falls a über B (Lebesgue-)integrierbar ist. Dann setzt man

$$\int_B \omega := \int_B a\, d\mu_n.$$

Ist a stetig mit kompaktem Träger, so ist ω auf jeden Fall integrierbar.

4.5.1. Satz

Sei $\mathbf{F} : B_1 \to B_2$ ein orientierungstreuer Diffeomorphismus (also $\det J_{\mathbf{F}} > 0$), ω eine integrierbare n-Form auf B_2. Dann ist $\mathbf{F}^*\omega$ eine integrierbare n-Form auf B_1, und es gilt:

$$\int_{B_1} \mathbf{F}^*\omega = \int_{B_2} \omega.$$

BEWEIS: Sei $\omega := a\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} \mathbf{F}^*\omega &= \int_{B_1} (a \circ \mathbf{F}) \det J_{\mathbf{F}}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \text{ (Definition des Integrals)} \\
&= \int_{B_1} (a \circ \mathbf{F}) |\det J_{\mathbf{F}}|\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \text{ (weil } \mathbf{F} \text{ orientierungstreu ist)} \\
&= \int_{B_1} (a \circ \mathbf{F}) |\det J_{\mathbf{F}}|\, d\mu_n \text{ (Definition des Integrals)} \\
&= \int_{B_2} a\, d\mu_n \text{ (Transformationsformel).}
\end{aligned}$$

Die Integrierbarkeit von $\mathbf{F}^*\omega$ folgt ebenfalls aus der Transformationsformel. ■

Definition

Sei $\boldsymbol{\varphi} : P \to B \subset \mathbb{R}^n$ ein p-dimensionales parametrisiertes glattes Flächenstück. Eine p-Form ω auf B heißt ***integrierbar bezüglich $\boldsymbol{\varphi}$***, falls $\boldsymbol{\varphi}^*\omega$ integrierbar auf P ist. Dann setzt man

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}} \omega := \int_P \boldsymbol{\varphi}^*\omega.$$

Sind $\boldsymbol{\varphi}_1 : P_1 \to \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{\varphi}_2 : P_2 \to \mathbb{R}^n$ zwei glatte Parametrisierungen mit gleicher Spur S, so ist $\boldsymbol{\varphi}_2^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}_1 : P_1 \to P_2$ ein Diffeomorphismus. Man nennt $\boldsymbol{\varphi}_1$ und $\boldsymbol{\varphi}_2$

gleichorientiert, falls sie auf S die gleiche Orientierung induzieren. In diesem Falle ist $\boldsymbol{\varphi}_2^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}_1$ orientierungstreu und daher

$$\int_{P_1} \boldsymbol{\varphi}_1^* \omega = \int_{P_1} (\boldsymbol{\varphi}_2 \circ \boldsymbol{\varphi}_2^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}_1)^* \omega = \int_{P_1} (\boldsymbol{\varphi}_2^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}_1)^* \boldsymbol{\varphi}_2^* \omega = \int_{P_2} \boldsymbol{\varphi}_2^* \omega$$

Also hängt die Definition nicht von der Parametrisierung ab, sofern man nur zwischen gleichorientierten Parametrisierungen wechselt.

Sei nun $M \subset \mathbb{R}^n$ eine p-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Um eine p-Form über M zu integrieren, benutzen wir eine Teilung der Eins. Damit das funktioniert, muss es möglich sein, M so durch Parametrisierungen zu überdecken, dass diese – wenn sie sich überlappen – gleichorientiert sind.

Ein System von Parametrisierungen $\boldsymbol{\varphi}_\alpha : P_\alpha \to S_\alpha := \boldsymbol{\varphi}_\alpha(P_\alpha)$ heißt ein ***Atlas*** für M, falls die Mengen S_α ganz M überdecken.

Definition

Eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt ***orientierbar***, falls es einen Atlas für M gibt, so dass je zwei Parametrisierungen aus dem Atlas gleichorientiert sind.

Jede Wahl eines solchen Atlas von gleichorientierten Parametrisierungen nennt man eine ***Orientierung*** auf M.

Bemerkung: Ist M eine **zusammenhängende** orientierbare Untermannigfaltigkeit, so gibt es genau zwei Orientierungen auf M. Den Beweis dafür werden wir später führen.

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann setzen wir

$$T^q(M) := \{(\mathbf{x}; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q) \in M \times (\underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{q\text{-mal}}) \,:\, \mathbf{v}_i \in T_{\mathbf{x}}(M) \text{ für } i = 1, \dots, q\}.$$

Im Falle $q = 1$ erhält man das schon bekannte Tangentialbündel. Genau wie dabei kann man zeigen, dass $T^q(M)$ eine $(q+1)k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{(q+1)n}$.

Eine q-Form (q-dimensionale Differentialform) auf M ist eine (beliebig oft) differenzierbare Abbildung $\omega : T^q(M) \to \mathbb{R}$, so dass für jedes $\mathbf{x} \in M$ die Abbildung $\omega_{\mathbf{x}} : T_{\mathbf{x}}(M) \times \dots \times T_{\mathbf{x}}(M) \to \mathbb{R}$ eine alternierende q-fache Multilinearform auf $T_{\mathbf{x}}(M)$.

Differenzierbare Funktionen auf M sind 0-Formen auf M. Pfaff'sche Formen auf M sind 1-Formen auf M. Ist $U = U(M) \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung und ω eine q-Form auf U, so ist die „Einbettung“ $j : M \hookrightarrow U$ eine differenzierbare Abbildung und $j^*\omega$ eine q-Form auf M, die „Einschränkung“ von ω auf M. Man schreibt auch $\omega|_M$ dafür.

Man beachte: Ist $k = \dim(M) < q$, so ist $j^*\omega = 0$, auch wenn $\omega \neq 0$ ist.

4.5.2. Beispiel

Sei $M = S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Durch $\alpha(t) := (\cos t, \sin t)$ wird eine Parametrisierung von M in der Nähe von $\alpha(0) = (1, 0)$ definiert. Dann hat (lokal) jede 1-Form auf M die Gestalt $a\,dt$. Ist $j : M \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ die natürliche Einbettung, so ist

$$j^*(dx) = d(x \circ j) = \frac{\partial}{\partial t}(\cos t)\,dt = -\sin t\,dt \quad \text{und} \quad j^*(dy) = \cos t\,dt,$$

sowie $j^*(dx \wedge dy) = j^*(dx) \wedge j^*(dy) = -\sin t \cos t\,dt \wedge dt = 0$. So soll es auch sein, denn auf einer k-dimensionalen Mannigfaltigkeit kann es keine q-Formen mit $q > k$ geben.

Für eine Funktion f auf M haben wir das Differential df schon definiert. Aber dann kann wie im $\mathbb{R}^n$ jeder q-Form ω auf M eine $(q+1)$-Form $d\omega$ auf M zugeordnet werden. Es ist $d(j^*\omega) = j^*(d\omega)$.

4.5.3. Satz

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $M \subset G$ eine k-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *M ist orientierbar.*
2. *Es gibt eine nirgends verschwindende stetige k-Form auf M.*

Beweis: 1) Sei M orientierbar und $\boldsymbol{\varphi}_\alpha : P_\alpha \to S_\alpha \subset M$ ein endlicher Atlas von gleichorientierten Parametrisierungen. Ist $\boldsymbol{\varphi}_\alpha^{-1} = (u_1, \ldots, u_k)$, so setzen wir $\omega_\alpha := du_1 \wedge \ldots \wedge du_k$. Ist (e_α) eine Teilung der Eins zur Überdeckung (S_α), so sei $\omega := \sum_\alpha e_\alpha \omega_\alpha$. Dann ist ω eine k-Form auf M.

Auf $S_\alpha \cap S_\beta$ ist $\omega_\alpha = d_{\alpha\beta}\omega_\beta$ mit $d_{\alpha\beta} > 0$ (wegen der Gleichorientierung). Sei $\mathbf{x} \in M$ und $A := \{\alpha : \mathbf{x} \in \mathrm{Tr}(e_\alpha)\}$. Wählt man ein festes $\alpha_0 \in A$, so ist

$$\omega_{\mathbf{x}} = \sum_{\alpha \in A} e_\alpha(\mathbf{x})(\omega_\alpha)_{\mathbf{x}} = \Big(\sum_{\alpha \in A} e_\alpha(\mathbf{x}) d_{\alpha\alpha_0}(\mathbf{x})\Big)(\omega_{\alpha_0})_{\mathbf{x}}.$$

Daraus folgt, dass $\omega_{\mathbf{x}} \neq 0$ ist.

2) Es gebe eine nirgends verschwindende k-Form auf M. Wieder suchen wir einen endlichen Atlas $\boldsymbol{\varphi}_\alpha : P_\alpha \to S_\alpha \subset M$ von Parametrisierungen. Natürlich wissen wir noch nicht, ob die Parametrisierungen gleichorientiert gewählt werden können. Es gibt aber stetige Funktionen g_α, so dass jeweils $\omega|_{S_\alpha} = g_\alpha \omega_\alpha$ ist. Durch Umorientierung kann man erreichen, dass $g_\alpha > 0$ ist. Auf $S_\alpha \cap S_\beta$ ist $\omega_\alpha = d_{\alpha\beta}\omega_\beta$, also $g_\alpha d_{\alpha\beta} = g_\beta$. Damit ist $d_{\alpha\beta} = g_\beta / g_\alpha > 0$ für alle α, β und M orientierbar. ∎

4.5.4. Satz

Eine zusammenhängende orientierbare k-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ besitzt genau zwei Orientierungen. Ist ω eine nirgends verschwindende k-Form auf M, so definieren ω und $-\omega$ diese beiden Orientierungen.

BEWEIS: Jede Orientierung ist durch eine nirgends verschwindende k-Form auf M bestimmt. Sind ω_1, ω_2 zwei solche k-Formen, so gibt es eine nirgends verschwindende Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, so dass $(\omega_1)_{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \cdot (\omega_2)_{\mathbf{x}}$ ist.

Ist $\boldsymbol{\varphi} : P \to M$ eine Parametrisierung, so ist $\boldsymbol{\varphi}^*\omega_i = a_i \, du_1 \wedge \ldots \wedge du_k$, also $a_1 = (f \circ \boldsymbol{\varphi}) \cdot a_2$. Daraus folgt, dass f stetig ist. Weil M zusammenhängend ist, muss f entweder immer > 0 oder immer < 0 sein. Im ersten Fall definieren ω_1 und ω_2 die gleiche Orientierung, im zweiten Fall entgegengesetzte Orientierungen. ∎

Wir stellen den Zusammenhang zu den Überlegungen aus Kapitel 2 her.

4.5.5. Satz

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende glatte Hyperfläche, $n \geq 2$. M ist genau dann orientierbar, wenn es auf M ein stetiges Einheitsnormalenfeld gibt.

BEWEIS: 1) Sei M orientierbar und eine Orientierung auf M fest gewählt. Ist $\mathbf{a} \in M$, so enthält $T_{\mathbf{a}}^{\perp}(M)$ genau 2 Einheitsvektoren $\mathbf{w}$ und $-\mathbf{w}$. Ist $\mathbf{w}$ einer dieser beiden Einheitsvektoren und $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}$ eine positiv orientierte Basis von $T_{\mathbf{a}}(M)$, so kann man $\varepsilon(\mathbf{w}) := \operatorname{sign}\det(\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}$ setzen, sowie $\mathbf{N}(\mathbf{a}) := \varepsilon(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}$.

Ist h eine lokale definierende Funktion für M, also $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U : h(\mathbf{x}) = 0\}$, so ist

$$\widetilde{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) := \frac{\nabla h(\mathbf{x})}{\|\nabla h(\mathbf{x})\|}$$

ein stetiges Einheitsnormalenfeld auf U. Sei außerdem $\boldsymbol{\varphi}$ eine positiv orientierte lokale Parametrisierung von M. Weil $\det(\widetilde{\mathbf{N}}, \boldsymbol{\varphi}_{u_1}, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_{u_{n-1}})$ stetig ist, behält es in der Nähe von $\mathbf{a}$ sein Vorzeichen. Ist dieses positiv, so ist $\mathbf{N} = \widetilde{\mathbf{N}}$, andernfalls $\mathbf{N} = -\widetilde{\mathbf{N}}$. Auf jeden Fall ist $\mathbf{N}$ stetig.

2) Sei umgekehrt $\mathbf{N}$ ein stetiges Einheitsnormalenfeld. Für jede Parametrisierung $\boldsymbol{\varphi} : P \to M$ hat

$$\Delta_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}) := \det\bigl(\mathbf{N}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u})), \boldsymbol{\varphi}_{u_1}(\mathbf{u}), \ldots, \boldsymbol{\varphi}_{u_{n-1}}(\mathbf{u})\bigr)$$

in jedem $\mathbf{u} \in P$ das gleiche Vorzeichen (denn diese Größe ist immer $\neq 0$ und P ein Gebiet). Indem man notfalls mit einer orientierungsumkehrenden Parametertransformation verknüpft, kann man erreichen, dass $\Delta_{\boldsymbol{\varphi}} > 0$ auf P ist.

Nun überdecke man ganz M durch solche Parametrisierungen. Sind $\boldsymbol{\varphi} : P \to U$ und $\boldsymbol{\psi} : Q \to V$ zwei davon, so gilt (mit $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\psi}^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}$):

$$\boldsymbol{\varphi}_{u_j} = \sum_i a_{ij} \boldsymbol{\psi}_{v_j}, \qquad \text{mit } (a_{ij}) = J_{\boldsymbol{\Phi}}.$$

Dann ist $\Delta_{\boldsymbol{\varphi}} > 0$ und $\Delta_{\boldsymbol{\psi}} > 0$, sowie $\Delta_{\boldsymbol{\varphi}} = \det J_{\boldsymbol{\Phi}} \cdot \Delta_{\boldsymbol{\varphi}}$, also $\det J_{\boldsymbol{\Phi}} > 0$. Damit sind die Parametrisierungen gleichorientiert, und das bedeutet, dass M orientierbar ist.
∎

Sei nun $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte k-dimensionale orientierbare Untermannigfaltigkeit und ω eine k-Form auf M.

1. Fall: Es gebe eine (positiv orientierte) Parametrisierung $\boldsymbol{\varphi} : P \to M$, so dass $\mathrm{Tr}(\omega) \subset U := \boldsymbol{\varphi}(P)$ ist. Ist ω bezüglich $\boldsymbol{\varphi}$ integrierbar, so setzt man

$$\int_M \omega := \int_{\boldsymbol{\varphi}} \omega|_U = \int_P \boldsymbol{\varphi}^*(\omega|_U).$$

2. Fall: Sei ω beliebig, $(\boldsymbol{\varphi}_\alpha)$ ein Atlas aus positiv orientierten Parametrisierungen, (e_α) eine passende Teilung der Eins. Ist $e_{\boldsymbol{\alpha}}\omega$ für jedes α integrierbar, so setzt man

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_M e_\alpha \cdot \omega.$$

Der Beweis dafür, dass diese Definition nicht von der gewählten Teilung der Eins und den Parametrisierungen abhängt, wird wie in Kapitel 2 beim Oberflächenintegral geführt.

4.5.6. Satz

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit. Die Tangentialräume von M seien mit dem vom $\mathbb{R}^n$ induzierten Skalarprodukt versehen. Dann gibt es genau eine k-Form Ω_M auf M, so dass $\Omega_M(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) = 1$ für jedes $\mathbf{x} \in M$ und jede positiv-orientierte ON-Basis von $T_{\mathbf{x}}(M)$ ist.

Beweis: Für festes $\mathbf{x} \in M$ ist $(\Omega_M)_{\mathbf{x}}$ die eindeutig bestimmte Volumenform auf $T_{\mathbf{x}}(M)$. Ist $\boldsymbol{\varphi} : P \to M$ eine positiv orientierte Parametrisierung, so ist

$$\boldsymbol{\varphi}^*\Omega_M(\mathbf{u}; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k) = \Omega_M\big(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}); \boldsymbol{\varphi}_{u_1}(\mathbf{u}), \ldots, \boldsymbol{\varphi}_{u_k}(\mathbf{u})\big).$$

Ist $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) \in M$ und $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ eine positiv orientierte ON-Basis von $T_{\mathbf{x}}(M)$, so ist $\boldsymbol{\varphi}_{u_j}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^k a_{ij}\mathbf{v}_i$, für $j = 1, \ldots, k$, mit einer invertierbaren Matrix $A = (a_{ij})$.

Dann ist

$$g_{ij} := \boldsymbol{\varphi}_{u_i} \bullet \boldsymbol{\varphi}_{u_j} = \sum_{\nu,\mu} a_{\nu i} a_{\mu j} \mathbf{v}_\nu \bullet \mathbf{v}_\mu = \sum_\nu a_{\nu i} a_{\nu j} = (A^\top \cdot A)_{ij}.$$

Schreibt man $\Omega_M = f\,du_1 \wedge \ldots \wedge du_k$, so ist

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u})) &= \boldsymbol{\varphi}^*\Omega_M(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k) \\ &= \det(A) \cdot \Omega_M(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k) = \det(A). \end{aligned}$$

Da A differenzierbar ist, gilt das auch für $f = \sqrt{\det(g_{ij})}$. ∎

4.5.7. Satz

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Hyperfläche und $\mathbf{N} = (N_1, \ldots, N_n)$ ein stetiges Einheitsnormalenfeld auf M (wodurch eine Orientierung von M festgelegt wird). Dann ist

$$\Omega_M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} N_i\,dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \text{ (auf } M)$$

und

$$N_i \cdot \Omega_M = (-1)^{i+1}\,dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Beweis: Sei $\Omega_0 = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ die Volumenform des $\mathbb{R}^n$.

Sei $\mathbf{x} \in M$. Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ bilden genau dann eine positiv orientierte ON-Basis von $T_{\mathbf{x}}(M)$, wenn $\{\mathbf{N}(\mathbf{x}), \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}$ eine positiv orientierte ON-Basis des $\mathbb{R}^n$ ist.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \Omega_M(\mathbf{x}; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}) &= \Omega_0(\mathbf{x}; \mathbf{N}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}) = \det(\mathbf{N}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} N_i \det(\mathbf{e}_i, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} N_i (-1)^{i+1} \det(A_i), \end{aligned}$$

wobei A_i die Matrix ist, die aus $A = (\mathbf{v}_1^\top, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}^\top)$ entsteht, indem man die i-te Zeile streicht.

Auf der anderen Seite ist

$$\begin{aligned} & dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}) = \\ &\quad = \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \operatorname{sign}(\sigma) dx_1(\mathbf{v}_{\sigma(1)}) \cdots dx_{i-1}(\mathbf{v}_{\sigma(i-1)}) dx_{i+1}(\mathbf{v}_{\sigma(i)}) \cdots dx_n(\mathbf{v}_{\sigma(n-1)}) \\ &\quad = \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \operatorname{sign}(\sigma) v_{\sigma(1)}^{(1)} \cdots v_{\sigma(i-1)}^{(i-1)} v_{\sigma(i)}^{i+1} \cdots v_{\sigma(n-1)}^{(n)} = \det(A_i). \end{aligned}$$

Das ergibt die erste Gleichung.

Die zweite Gleichung erhält man folgendermaßen: Der Einheitsvektor $\mathbf{e}_i$ ist Linearkombination von $\mathbf{N}$ und $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$,

$$\mathbf{e}_i = \alpha_i \mathbf{N} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \beta_{i\nu} \mathbf{v}_\nu, \text{ mit } \alpha_i = \mathbf{e}_i \bullet \mathbf{N} = N_i.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
&(-1)^{i+1}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}) \;=\\
&= \;(-1)^{i+1} \det A_i \;=\; \det(\mathbf{e}_i, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})\\
&= \;\det\Big(\alpha_i \mathbf{N} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \beta_{i\nu} \mathbf{v}_\nu, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\Big) \;=\; \det\Big(\alpha_i \mathbf{N}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\Big)\\
&= \;N_i \cdot \det\big(\mathbf{N}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\big) \;=\; N_i \cdot \Omega_M(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}).
\end{aligned}$$

■

Bemerkung: Sei $P \subset \mathbb{R}^k$ ein Parametergebiet mit Koordinaten $u_1, \ldots, u_k$, $\boldsymbol{\varphi} : P \to M \subset \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung und Ω_M die Volumenform auf M. Ist $g_{ij} = \boldsymbol{\varphi}_{u_i} \bullet \boldsymbol{\varphi}_{u_j}$ und $g_{\boldsymbol{\varphi}} := \det(g_{ij})$, so ist

$$\boldsymbol{\varphi}^* \Omega_M = \sqrt{g_{\boldsymbol{\varphi}}}\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_k.$$

4.5.8. Beispiele

A. Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve. Das Volumenelement bezeichnet man mit ds („Bogenelement"). Ist $\boldsymbol{\alpha} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung, so ist

$$\int_{\boldsymbol{\alpha}} ds = \int_a^b \boldsymbol{\alpha}^* ds = \int_a^b \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\, dt = L(\boldsymbol{\alpha}),$$

denn $\sqrt{g_{\boldsymbol{\alpha}}} = \sqrt{\boldsymbol{\alpha}' \bullet \boldsymbol{\alpha}'} = \|\boldsymbol{\alpha}'\|$.

B. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Fläche mit Einheitsnormalenfeld $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3)$. Das Volumenelement nennt man in diesem Fall „Oberflächenelement" und bezeichnet es mit do. Es ist

$$do = N_1\, dy \wedge dz + N_2\, dz \wedge dx + N_3\, dx \wedge dy,$$

sowie

$$N_1\, do = dy \wedge dz, \quad N_2\, do = dz \wedge dx \quad \text{und} \quad N_3\, do = dx \wedge dy.$$

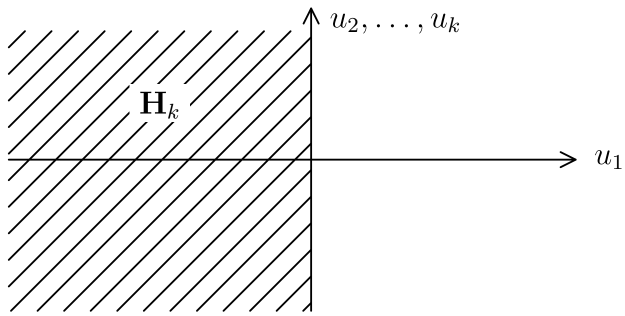
Dann ist $\displaystyle\int_P \boldsymbol{\varphi}^* do = \int_P \sqrt{g_{\boldsymbol{\varphi}}}\, du \wedge dv = A(M)$ der Flächeninhalt.

C. Ist $M = S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, so ist $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ das Einheitsnormalenfeld auf M. Das ergibt das Oberflächenelement

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} x_i (-1)^{i+1}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

4.6 Der Satz von Stokes

Es sei $\mathbf{H}_k := \{\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k \,:\, u_1 \le 0\}$ der „linke“ ***Halbraum***.



Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Eine zusammenhängende kompakte Teilmenge $A \subset M$ heißt ein ***Kompaktum mit glattem Rand*** in M, falls es zu jedem $\mathbf{a} \in A$ eine Parametrisierung $\boldsymbol{\varphi} : P \to M$ gibt, so dass gilt:

1. $\mathbf{a} \in \boldsymbol{\varphi}(P)$.
2. $\boldsymbol{\varphi}(P \cap \mathbf{H}_k) = \boldsymbol{\varphi}(P) \cap A$.

Man nennt dann $\boldsymbol{\varphi}$ eine ***angepasste Parametrisierung***.

Sei $A \subset M$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $\mathbf{a}_0 \in A$.

1. Fall: Es gibt eine Parametrisierung $\boldsymbol{\varphi} : P \to M$ mit $P \subset \mathring{\mathbf{H}}_k$ und $\mathbf{a}_0 \in \boldsymbol{\varphi}(P)$. Dann ist $P = P \cap \mathbf{H}_k$, also $\boldsymbol{\varphi}(P) = \boldsymbol{\varphi}(P) \cap A$, d.h. $\boldsymbol{\varphi}(P) \subset A$. In diesem Fall ist $\mathbf{a}_0$ innerer Punkt von A (in der Relativtopologie von M).

2. Fall: Es gibt **keine** Parametrisierung $\boldsymbol{\varphi} : P \to M$ mit $P \subset \mathring{\mathbf{H}}_k$ und $\mathbf{a}_0 \in \boldsymbol{\varphi}(P)$. Sei $\boldsymbol{\varphi}_0 : P_0 \to M$ eine angepasste Parametrisierung mit $\boldsymbol{\varphi}_0(\mathbf{u}_0) = \mathbf{a}_0$. Dann muss $\mathbf{u}_0$ in $P_0 \cap \mathbf{H}_k$ liegen, also $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_0 := \{\mathbf{u} \,:\, u_1 = 0\}$. Es folgt, dass jede Umgebung von $\mathbf{a}_0$ in M sowohl Punkte von A als auch Punkte von $M \setminus A$ enthält. Also liegt $\mathbf{a}_0$ bezüglich der Relativtopologie auf dem Rand von A.

Die Menge der inneren Punkte von A bezeichnen wir mit $\overset{\bullet}{A}$, die Randpunkte mit bA (um diese Menge vom topologischen Rand von A in der Topologie des $\mathbb{R}^n$ abzugrenzen). Schränkt man die angepassten Parametrisierungen $\boldsymbol{\varphi} : P \to M$ auf $P \cap \mathbf{H}_0$ ein, so erhält man einen Atlas für bA. So sieht man, dass bA eine $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit

In Kapitel 2 wurde festgelegt, wie sich bei einem glatt berandeten Gebiet die innere und die transversale Orientierung des Randes entsprechen. Im Falle $\mathbf{H}_k$ bedeutet das: Die transversale Orientierung von $\partial \mathbf{H}_k$ im Nullpunkt wird durch den äußeren Normalenvektor $\mathbf{e}_1$ festgelegt, die innere Orientierung durch die Wahl einer Basis $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}\}$ von $T_{\mathbf{0}}(\partial \mathbf{H}_k) \cong \{0\} \times \mathbb{R}^{k-1}$, so dass $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}\}$ eine positiv orientierte Basis des $\mathbb{R}^n$, also $\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}) > 0$ ist. Im vorliegenden Fall kann man $\{\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ (mit dieser Anordnung) als Basis von $T_{\mathbf{0}}(\partial \mathbf{H}_k)$ benutzen.

Die so festgelegte Orientierung von $\partial \mathbf{H}_k$ induziert eine Orientierung auf dem Rand bA eines Kompaktums A mit glattem Rand. Ist $\boldsymbol{\varphi} : P \to M$ eine angepasste Karte mit $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0}) = \mathbf{a} \in bA$ und $\boldsymbol{\varphi}(P \cap \mathbf{H}_k) = \boldsymbol{\varphi}(P) \cap A$, so bezeichnen wir $\mathbf{v} := D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0})(\mathbf{e}_1)$ als einen in $\mathbf{a}$ ***nach außen gerichteten Vektor***. Er braucht nicht auf dem Tangentialraum $T_{\mathbf{a}}(bA)$ senkrecht zu stehen.

Sei $\boldsymbol{\psi} : Q \to M$ eine weitere angepasste Karte mit $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{0}) = \mathbf{a}$, sowie $\boldsymbol{\Phi} := \boldsymbol{\psi}^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi} : P \to Q$. Dann ist $\boldsymbol{\Phi}(0, \mathbf{0}'') = (0, \mathbf{0})$,

$$\boldsymbol{\Phi}(P \cap \mathbf{H}_k) \subset Q \cap \mathbf{H}_k \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Phi}(P \cap \partial \mathbf{H}_k) \subset Q \cap \partial \mathbf{H}_k.$$

Es gibt also eine Abbildung $\boldsymbol{\Psi}$, so dass $\boldsymbol{\Phi}(0, \mathbf{u}'') = (0, \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{u}''))$ ist. Dann ist

$$J_{\boldsymbol{\Phi}}(0, \mathbf{0}'') = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1}(0, \mathbf{0}'') & \sharp \\ \mathbf{0} & J_{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{0}'') \end{pmatrix}.$$

Ist $u_1 < 0$, so ist auch $\Phi_1(u_1, \mathbf{0}'') < 0$; ist $u_1 > 0$, so ist $\Phi_1(u_1, \mathbf{u}'') > 0$. Daraus folgt:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1}(0, \mathbf{0}'') = \lim_{h \to 0} \frac{\Phi_1(h, \mathbf{0}'') - \Phi_1(0, \mathbf{0}'')}{h} > 0.$$

Sind $w_1, \dots, w_k$ die Koordinaten bezüglich $\boldsymbol{\psi}$, so ist $\mathbf{v} = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{k} c_\nu \frac{\partial}{\partial w_\nu}$, mit $c_1 = \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial u_1}(0, \mathbf{0}'') > 0$.

Sei umgekehrt ein solcher Tangentialvektor $\mathbf{v}$ gegeben, $\mathbf{L} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ definiert durch

$$\mathbf{L}(w_1, \dots, w_k) := \Big(\frac{w_1}{c_1}, -\frac{c_2}{c_1} w_1 + w_2, \dots, -\frac{c_k}{c_1} w_1 + w_k\Big).$$

Dann ist $\mathbf{L}(c_1, \dots, c_k) = (1, 0, \dots, 0)$ und $\mathbf{L}(0, w_2, \dots, w_k) = (0, w_2, \dots, w_k)$. Sei A die zugehörige Matrix. $\boldsymbol{\varphi} := \boldsymbol{\psi} \circ \mathbf{L}^{-1}$ ist eine angepasste Karte und

$$\mathbf{v} = J_{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{c}^\top = J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{0}) \cdot A \cdot \mathbf{c}^\top = J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{e}_1^\top.$$

Also ist $\mathbf{v}$ ein in $\mathbf{a}$ nach außen gerichteter Vektor.

Ist $\mathbf{v}$ ein in $\mathbf{a}$ nach außen gerichteter Vektor, so ist eine Basis $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{k-1}\}$ von $T_{\mathbf{a}}(bA)$ genau dann positiv orientiert, wenn $\{\mathbf{v}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{k-1}\}$ eine positiv orientierte Basis von $T_{\mathbf{a}}(M)$ ist.

4.6.1. Der Satz von Stokes

Sei M eine k-dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit, $A \subset M$ ein Kompaktum mit glattem Rand und ω eine $(k-1)$-Form auf einer Umgebung U von A. Dann ist

$$\int_{bA} \omega = \int_A d\omega\,.$$

Ist M kompakt, so ist

$$\int_M d\omega = 0.$$

Beweis: Es seien Parametrisierungen $\boldsymbol{\varphi}_i : P_i \to U_i \subset M$ gewählt, die A überdecken und Teil eines positiv orientierten Atlas von M sind, so dass $P_i \cap \mathbf{H}_k$ jeweils zusammenhängend und $\boldsymbol{\varphi}_i(P_i \cap \mathbf{H}_k) = U_i \cap A$ ist. Weiter sei (f_i) eine dazu passende Teilung der Eins. Dann ist

$$\int_{bA} \omega = \sum_i \int_{bA} f_i \omega$$

und

$$\int_A d\omega = \sum_i \int_A d(f_i\omega),$$

weil $d\omega = d\big(\sum_i f_i\omega\big) = \sum_i d(f_i\omega)$ ist. Es genügt also, die Formel

$$\int_{bA} \omega = \int_A d\omega$$

für eine $(k-1)$-Form ω zu beweisen, deren Träger ganz im Bild U einer Parametrisierung $\boldsymbol{\varphi} : P \to U \subset M$ liegt.

1. Fall: $U \cap bA = \varnothing$. Dann ist $\displaystyle\int_{bA} \omega = 0.$

Außerdem ist

$$\boldsymbol{\varphi}^*\omega = \sum_{j=1}^{k} g_j\, du_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{du_j} \wedge \ldots \wedge du_k,$$

wobei alle $\mathrm{Tr}(g_j)$ in einer kompakten Teilmenge von $P \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k : u_1 < 0\}$ enthalten sind. Dann ist

$$\boldsymbol{\varphi}^*(d\omega) = d(\boldsymbol{\varphi}^*\omega) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \frac{\partial g_j}{\partial u_j}\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_k,$$

also

$$
\begin{aligned}
\int_A d\omega \;=\; \int_P \boldsymbol{\varphi}^*(d\omega) \;&=\; \sum_{j=1}^{k} \int_P (-1)^{j-1} \frac{\partial g_j}{\partial u_j}\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_k \\
&=\; \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \int_{\mathbb{R}^k} \frac{\partial g_j}{\partial u_j}\, du_1 \ldots du_k \;=\; 0\,,
\end{aligned}
$$

denn wegen des kompakten Trägers von g_j ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g_j}{\partial u_j}\, du_j = 0$.

2. Fall: $U \cap bA \neq \varnothing$, $\boldsymbol{\varphi}(P \cap \mathbf{H}_k) = U \cap A$.

Die Menge $P_0 := \{\mathbf{u}'' : (0, \mathbf{u}'') \in P \cap \partial\mathbf{H}_k\}$ ist ein Gebiet und $\boldsymbol{\varphi}_0 : P_0 \to bA$ mit $\boldsymbol{\varphi}_0(\mathbf{u}'') := \boldsymbol{\varphi}(0, \mathbf{u}'')$ eine Parametrisierung von $bA \cap U$. Der Vektor $\mathbf{e}_1$ ist Normalenvektor zu $\partial\mathbf{H}_k$. Zusammen mit der Standardbasis von $\{0\} \times \mathbb{R}^{k-1}$ erhält man die positiv orientierte Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ des $\mathbb{R}^k$. Daraus folgt, dass $\boldsymbol{\varphi}_0$ eine (im Sinne der auf bA induzierten Orientierung) positiv orientierte Parametrisierung ist.

Dann ist $\displaystyle\int_{bA} \omega = \int_{P_0} \boldsymbol{\varphi}_0^* \omega = \int_{P_0} (\boldsymbol{\varphi} \circ j)^* \omega = \int_{P_0} j^* \boldsymbol{\varphi}^* \omega$, mit $j(\mathbf{u}'') := (0, \mathbf{u}'')$. Dabei ist

$$
j^* du_i = \begin{cases} 0 & \text{für } i = 1, \\ du_i & \text{für } i = 2, \ldots, k. \end{cases}\,,
$$

also $j^*\big(g_j\, du_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{du_j} \wedge \ldots \wedge du_k\big) = 0$ für $j \neq 1$, und

$$
j^* \boldsymbol{\varphi}^* \omega = g_1(0, \mathbf{u}'')\, du_2 \wedge \ldots \wedge du_k.
$$

Daraus folgt die Beziehung

$$
\int_{bA} \omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} g_1(0, u_2, \ldots, u_k)\, du_2 \ldots du_k.
$$

Andererseits ist $\displaystyle\int_A d\omega = \int_{P \cap \mathbf{H}_k} \boldsymbol{\varphi}^* \omega = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \int_{\mathbf{H}_k} \frac{\partial g_j}{\partial u_j}\, du_1 \ldots du_k$.

Für $j \neq 1$ ist $\displaystyle\int_{\mathbf{H}_k} \frac{\partial g_j}{\partial u_j}\, du_1 \ldots du_k = 0$, mit der gleichen Begründung wie im ersten Fall.

Der Fall $j = 1$ sieht etwas anders aus, es ist

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{H}_k} \frac{\partial g_1}{\partial u_1}\, du_1 \ldots du_k \;&=\; \int_{(-\infty,0] \times \mathbb{R}^{k-1}} \frac{\partial g_1}{\partial u_1}\, du_1 \ldots du_k \\
&=\; \int_{\mathbb{R}^{k-1}} g_1(0, u_2, \ldots, u_k)\, du_2 \ldots du_k.
\end{aligned}
$$

Damit ist alles gezeigt.

Ist M kompakt und $A = M$, so tritt bei der Berechnung des Integrals nur der erste Fall auf. ∎

4.6.2. Beispiele

A. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Sind f, g differenzierbare Funktionen auf einer Umgebung von $\overline{G}$, so gilt der **Greensche Satz**:

$$\int_{\partial G} f\,dx + g\,dy = \int_G d(f\,dx + g\,dy) = \int_G \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

B. Sei jetzt $G \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ein differenzierbares Vektorfeld auf einer Umgebung von $\overline{G}$ und

$$\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3)$$

das äußere Normalenfeld auf ∂G. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{N})\,do &= \int_{\partial\Omega} \big(F_1 \cdot (N_1\,do) + F_2 \cdot (N_2\,do) + F_3 \cdot (N_3\,do)\big) \\
&= \int_{\partial\Omega} F_1\,dx_2 \wedge dx_3 + F_2\,dx_3 \wedge dx_1 + F_3\,dx_1 \wedge dx_2 \\
&= \int_{\Omega} d\big(F_1\,dx_2 \wedge dx_3 + F_2\,dx_3 \wedge dx_1 + F_3\,dx_1 \wedge dx_2\big) \\
&= \int_{\Omega} \big((F_1)_x + (F_2)_y + (F_3)_z\big)\,dx \wedge dy \wedge dz \;=\; \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F}\,dV,
\end{aligned}$$

wenn man für das Volumenelement $dx \wedge dy \wedge dz$ das Symbol dV benutzt. Das ist der **Gauß'sche Integralsatz**.

Bei glatt berandeten Gebieten in Untermannigfaltigkeiten ist die Lage ein wenig komplizierter. Sei also $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Wir erinnern uns: Zu jedem Vektorfeld $\boldsymbol{\xi}$ auf M gibt es eine eindeutig bestimmte Pfaff'sche Form $\omega_{\boldsymbol{\xi}}$ mit $\omega_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\eta}) = \langle \boldsymbol{\xi}\,,\,\boldsymbol{\eta} \rangle$, wobei $\langle \ldots\,,\,\ldots \rangle$ das vom euklidischen Skalarprodukt des $\mathbb{R}^n$ auf den Tangentialräumen von M induzierte Skalarprodukt bezeichnet.

Wie im $\mathbb{R}^n$ gibt es auch auf M zu jedem Vektorfeld $\boldsymbol{\xi}$ auf M eine eindeutig bestimmte $(n-1)$-Form $\Lambda_{\boldsymbol{\xi}}$ auf M mit

$$\omega_{\boldsymbol{\eta}} \wedge \Lambda_{\boldsymbol{\xi}} = \langle \boldsymbol{\eta}\,,\,\boldsymbol{\xi} \rangle \cdot \Omega_M.$$

Ist $\boldsymbol{\varphi}$ eine lokale Parametrisierung und sind $u_1, \ldots, u_k$ die zugehörigen lokalen Koordinaten, so kann man schreiben: $\boldsymbol{\xi} = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{k} \xi^\nu \frac{\partial}{\partial u_\nu}$ und $\boldsymbol{\eta} = \displaystyle\sum_{\mu=1}^{k} \eta^\mu \frac{\partial}{\partial u_\mu}$. Setzt man

$g_{\nu\mu} := \boldsymbol{\varphi}_{u_\nu} \bullet \boldsymbol{\varphi}_{u_\mu}$, so ist $\langle \boldsymbol{\xi}\,,\,\boldsymbol{\eta}\rangle = \sum_{\nu,\mu} g_{\nu\mu}\xi^\nu\eta^\mu = \sum_\mu \xi_\mu\eta^\mu$, wobei hier die kontravarianten Koeffizienten mit hochgestelltem Index und die kovarianten Koeffizienten mit tiefgestelltem Index geschrieben werden.

Weil $\omega_{\partial/\partial u_\nu}\big(\dfrac{\partial}{\partial u_\mu}\big) = \langle \dfrac{\partial}{\partial u_\nu}\,,\,\dfrac{\partial}{\partial u_\mu}\rangle = g_{\nu\mu}$ ist, ist $\omega_{\partial/\partial u_\nu} = \sum_{\mu=1}^k g_{\nu\mu}\,du_\mu$. Außerdem ist $\Omega_M = \sqrt{g}\,du_1\wedge\ldots\wedge du_k$, mit $g := \det\big(g_{ij}\big)$.

Ist $\Lambda_{\boldsymbol{\xi}} = \sum_{i=1}^k a_i\,du_1\wedge\ldots\wedge\widehat{du_i}\wedge\ldots\wedge du_k$, so folgt:

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{\mu=1}^k \xi^\mu g_{\nu\mu}\Big)\,\Omega_M &= \langle\frac{\partial}{\partial u_\nu}\,,\,\boldsymbol{\xi}\rangle\cdot\Omega_M \;=\; \omega_{\partial/\partial u_\nu}\wedge\Lambda_{\boldsymbol{\xi}}\\
&= \Big(\sum_{\mu=1}^k g_{\nu\mu}\,du_\mu\Big)\wedge\sum_{i=1}^k a_i\,du_1\wedge\ldots\wedge\widehat{du_i}\wedge\ldots\wedge du_k\\
&= \sum_{\mu,i} g_{\nu\mu}a_i(-1)^{i+1}\delta_{\mu i}\,du_1\wedge\ldots\wedge du_k\\
&= \sum_{i=1}^k g_{\nu i}a_i(-1)^{i+1}\,du_1\wedge\ldots\wedge du_k\\
&= \Big(\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^k g_{\nu i}a_i(-1)^{i+1}\Big)\,\Omega_M.
\end{aligned}$$

Also ist $\sum_{\mu=1}^k \xi^\mu g_{\nu\mu} = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^k g_{\nu i}a_i(-1)^{i+1}$. Berücksichtigt man noch die Gleichung $\sum_\nu g^{j\nu}g_{\nu i} = \delta_{ji}$ (wenn $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ ist), so erhält man

$$\sum_{\nu,\mu} g^{j\nu}\xi^\mu g_{\nu\mu} = \sum_\mu \xi^\mu\delta_{j\mu} = \xi^j$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{\nu,i} g^{j\nu}g_{\nu i}a_i(-1)^{i+1} = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_i \delta_{ji}a_i(-1)^{i+1} = \frac{1}{\sqrt{g}}a_j(-1)^{j+1},$$

also $a_j = \sqrt{g}(-1)^{j+1}\xi^j$. Daraus folgt:

$$(\Lambda_{\boldsymbol{\xi}}) = \sqrt{g}\cdot\sum_{i=1}^k \xi^i(-1)^{i+1}\,du_1\wedge\ldots\wedge\widehat{du_i}\wedge\ldots\wedge du_k.$$

Den Gradienten einer Funktion als Vektorfeld auf M haben wir schon früher betrachtet. Nun erklären wir die Divergenz und die Rotation auf einer Untermannigfaltigkeit.

Definition

Ist $\boldsymbol{\xi}$ ein Vektorfeld auf M, so nennt man die eindeutig bestimmte Funktion $\operatorname{div}\boldsymbol{\xi}$ mit

$$d(\Lambda_{\boldsymbol{\xi}}) = (\operatorname{div}\boldsymbol{\xi})\,\Omega_M$$

die ***Divergenz*** von $\boldsymbol{\xi}$.

4.6.3. Satz

Die Divergenz von $\boldsymbol{\xi}$ hat in lokalen Koordinaten die Gestalt

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial(\sqrt{g}\,\xi^i)}{\partial u_i}\ .$$

Beweis: Es ist

$$d(\Lambda_{\boldsymbol{\xi}}) = \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial(\sqrt{g}\,\xi^i)}{\partial u_i}\,du_1\wedge\ldots\wedge du_k = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial(\sqrt{g}\,\xi^i)}{\partial u_i}\,\Omega_M.$$

∎

Bemerkung: Im $\mathbb{R}^n$ ist $g = 1$ und es kommen die bekannten Formeln heraus.

Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\boldsymbol{\varphi} : G \to \widetilde{G} \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus, so kann man $\widetilde{G}$ als parametrisierte Mannigfaltigkeit auffassen. Als Beispiel seien die ebenen Polarkoordinaten genannt:

$$\boldsymbol{\varphi}(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta)) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Dann erzeugen die Vektoren

$$\mathbf{X}_r = \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial r} = (\cos\theta,\sin\theta) \quad \text{und} \quad \mathbf{X}_\theta = \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta)$$

den Tangentialraum von $\widetilde{G}$, und die Vektoren $\mathbf{E}_r = \mathbf{X}_r$ und $\mathbf{E}_\theta = \frac{1}{r}\mathbf{X}_\theta$ bilden ein ON-System. Es ist

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_r \bullet \mathbf{X}_r & \mathbf{X}_r \bullet \mathbf{X}_\theta \\ \mathbf{X}_\theta \bullet \mathbf{X}_r & \mathbf{X}_\theta \bullet \mathbf{X}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix}$$

und $\sqrt{g} = \sqrt{\det(g_{ij})} = r$.

Allgemein ist $\nabla f = \displaystyle\sum_{j=1}^{k}\Big(\sum_{i=1}^{k} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial u_i}\Big)\frac{\partial}{\partial u_j}$, in ebenen Polarkoordinaten also

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{X}_r + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{X}_\theta = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{E}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{E}_\theta.$$

Ingenieure sprechen vom „Rechnen in krummlinigen Koordinaten“, beziehen sich dabei aber meist auf eine ON-Basis. Ist z.B.

$$\boldsymbol{\xi} = \widetilde{\xi}^r\mathbf{E}_r + \widetilde{\xi}^\theta\mathbf{E}_\theta = \widetilde{\xi}^r\mathbf{X}_r + \frac{1}{r}\widetilde{\xi}^\theta\mathbf{X}_\theta = \xi^r\mathbf{X}_r + \xi^\theta\mathbf{X}_\theta,$$

so ist

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot\xi^r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r\cdot\xi^\theta)\right] = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot\widetilde{\xi}^r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\widetilde{\xi}^\theta)\right]$$

Wir können jetzt auch die klassischen Sätze von Gauß und Stokes formulieren.

4.6.4. Der Integralsatz von Gauß-Ostrogradski

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $A \subset M$ ein glatt berandetes Kompaktum, $\boldsymbol{\xi}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer Umgebung von A und $\mathbf{N}$ das äußere Einheitsnormalenfeld auf bA. Dann ist

$$\int_A (\operatorname{div}\boldsymbol{\xi})\, dV_M = \int_{bA} \langle \boldsymbol{\xi}\,,\, \mathbf{N}\rangle\, do.$$

Dabei ist $dV_M := \Omega_M$ das Volumenelement von M und do das Volumenelement auf bA. Das Skalarprodukt $\langle \boldsymbol{\xi}\,,\, \mathbf{N}\rangle$ ist das vom $\mathbb{R}^n$ induzierte Skalarprodukt.

Beweis: Da $\|\boldsymbol{\xi}\|$ auf ganz bA stetig und somit beschränkt ist, ist $\langle \boldsymbol{\xi}\,,\, \mathbf{N}\rangle$ bezüglich do auf bA integrierbar.

Es ist $\displaystyle\int_A (\operatorname{div}\boldsymbol{\xi})\Omega_M = \int_A d(\Lambda_{\boldsymbol{\xi}}) = \int_{bA} \Lambda_{\boldsymbol{\xi}}.$

Ist $\mathbf{x} \in bA$ und $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}\}$ eine positiv orientierte ON-Basis von $T_{\mathbf{x}}(bA)$, so ist

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})\,,\, \mathbf{N}(\mathbf{x})\rangle \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}) + \sum_{\nu=1}^{k-1} \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})\,,\, \mathbf{a}_\nu\rangle\, \mathbf{a}_\nu\,. \qquad (*)$$

Also ist $(\Lambda_{\boldsymbol{\xi}})(\mathbf{x}; \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}) =$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{g}\sum_{i=1}^{k} \xi^i(-1)^{i+1}\, du_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{du_i} \wedge \ldots \wedge du_k(\mathbf{x}; \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}) \\
&= \sqrt{g}\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}), \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}) \qquad \text{(Laplace)} \\
&= \Omega_M(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}), \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}) \;=\; \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})\,,\, \mathbf{N}(\mathbf{x})\rangle
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus $(*)$ und der Tatsache, dass $\Omega_M(\mathbf{N}(\mathbf{x}), \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}) = 1$ ist. Andererseits ist auch $\langle \boldsymbol{\xi}\,,\, \mathbf{N}\rangle \cdot do(\mathbf{x}; \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}) = \langle \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})\,,\, \mathbf{N}(\mathbf{x})\rangle$. Daraus folgt:

$$\Lambda_{\boldsymbol{\xi}}|_{bA} = \langle \boldsymbol{\xi}\,,\, \mathbf{N}\rangle \cdot do\,.$$

■

Ist $\boldsymbol{\alpha} : I \to M$ ein glatter, injektiver, stetig differenzierbarer Weg, $t_0 \in I$, $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\alpha}(t_0)$ und $(u_1, \ldots, u_k)$ ein lokales Koordinatensystem für M in $\mathbf{x}_0$, so setzen wir $\alpha_i := u_i \circ \boldsymbol{\alpha}$ (Vorsicht, nicht mit den kartesischen Komponenten von $\boldsymbol{\alpha}$ verwechseln!). Dann ist der Tangentialvektor an $\boldsymbol{\alpha}$ gegeben durch

$$\boldsymbol{\alpha}'(t_0) := \boldsymbol{\alpha}_*\big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t_0}\big) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i'(t_0)\frac{\partial}{\partial u_i}\,.$$

Der Vektor

$$\mathbf{T} := \frac{\boldsymbol{\alpha}'(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|}$$

heißt ***Tangenteneinheitsvektor*** an $C := \boldsymbol{\alpha}(I)$ in $\boldsymbol{\alpha}(t)$. Er hängt nicht von der Parametrisierung $\boldsymbol{\alpha}$ (und damit auch nicht direkt von t) ab, nur von dem Punkt $\boldsymbol{\alpha}(t)$ und der Orientierung der Kurve C.

Das Volumenelement auf C, das ***Linienelement*** ds, wird durch $ds = \sqrt{g}\,dt = \|\boldsymbol{\alpha}'\|\,dt$ gegeben. Ist $\boldsymbol{\xi}$ ein Vektorfeld auf M, so ist

$$\omega_{\boldsymbol{\xi}} = \sum_{i=1}^{k} \xi_i\,du_i = \sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{j=1}^{k} g_{ji}\xi^j\Big)\,du_i,$$

mit

$$\xi_i = \omega_{\boldsymbol{\xi}}\big(\frac{\partial}{\partial u_i}\big) = \langle \boldsymbol{\xi}\,,\,\frac{\partial}{\partial u_i}\rangle = \langle \sum_j \xi^j \frac{\partial}{\partial u_j}\,,\,\frac{\partial}{\partial u_i}\rangle = \sum_j \xi^j g_{ji}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}^*(\omega_{\boldsymbol{\xi}}) &= \sum_i\Big(\sum_j (g_{ji}\circ\alpha)\cdot(\xi^j\circ\alpha)\Big)\,\alpha_i'\,dt \;=\; \Big(\sum_{i,j}(g_{ji}\circ\alpha)\,(\xi^j\circ\alpha)\,\alpha_i'\Big)\,dt\\ &= \langle \boldsymbol{\xi}\circ\boldsymbol{\alpha}\,,\,\boldsymbol{\alpha}'\rangle\,dt \;=\; \boldsymbol{\alpha}^*\big(\langle\boldsymbol{\xi}\,,\,\mathbf{T}\rangle\,ds\big).\end{aligned}$$

Bemerkung: Eine 1-Form kann mühelos auf eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit eingeschränkt werden. Bei einem Vektorfeld ist das zunächst nicht möglich, da es i.a. ja nicht tangential zu der Untermannigfaltigkeit verläuft. Das Skalarprodukt $\langle\boldsymbol{\xi}\,,\,\mathbf{T}\rangle$ liefert den ***tangentialen Anteil*** von $\boldsymbol{\xi}$.

Wir erinnern uns: Zu jedem Vektorfeld $\boldsymbol{\xi}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$ gibt es genau ein Vektorfeld $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\xi}$ auf U mit

$$\Lambda_{\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\xi}} = d(\omega_{\boldsymbol{\xi}}).$$

Die ***Rotation*** eines Vektorfeldes ($\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\xi}$) kann nur im Falle $n = 3$ definiert werden, denn nur dann ist die 2-Form $d(\omega_{\boldsymbol{\xi}})$ zugleich eine $(n-1)$-Form. Außerdem hängt die Zuordnung zwischen $\boldsymbol{\xi}$ und $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\xi}$ von der Metrik und der Orientierung ab, ist also nicht invariant unter orientierungsumkehrenden Transformationen (wie z.B. Spiegelungen).

4.6.5. Stokes'scher Integralsatz

Es sei A ein glatt berandetes Kompaktum in einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\xi}$ ein differenzierbares Vektorfeld in einer Umgebung von A im $\mathbb{R}^3$. Dann ist

$$\int_A \langle \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\xi}\,,\,\mathbf{N}\rangle\,do = \int_{bA} \langle \boldsymbol{\xi}\,,\,\mathbf{T}\rangle\,ds.$$

Dabei ist $\mathbf{N}$ ein Einheitsnormalenfeld auf M, das die transversale Orientierung von M (und A) festlegt, und $\mathbf{T}$ das Tangenteneinheitsvektorfeld auf bA, das den Rand in der richtigen Weise orientiert.

Beweis: Die Integrierbarkeit ist bei diesem Satz kein Problem. Es gilt:

$$\begin{aligned}\int_A \langle \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\xi}\,,\,\mathbf{N}\rangle\,do &= \int_A \Lambda_{\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\xi}} = \int_A d(\omega_{\boldsymbol{\xi}}) \\ &= \int_{bA} \omega_{\boldsymbol{\xi}} = \int_{[a,b]} \boldsymbol{\alpha}^*(\omega_{\boldsymbol{\xi}}) \\ &= \int_a^b \langle \boldsymbol{\xi}\circ\boldsymbol{\alpha}\,,\,\boldsymbol{\alpha}'\rangle\,dt = \int_{bA} \langle \boldsymbol{\xi}\,,\,\mathbf{T}\rangle\,ds.\end{aligned}$$

∎

4.6.6. Satz

*Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $M \subset G$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $A \subset M$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann gibt es **keine** $\mathscr{C}^1$-Abbildung $\mathbf{r} : A \to bA$ mit $\mathbf{r}|_{bA} = \mathrm{id}_{bA}$.*

Beweis: bA ist eine $(k-1)$-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit. Ist ω die Volumenform auf bA, so ist $\int_{bA}\omega \neq 0$. Für die Inklusionsabbildung $i : bA \hookrightarrow M$ gelte $\mathbf{r}\circ i = \mathrm{id}_{bA}$. Dann ist $\mathbf{r}^*\omega$ eine $(k-1)$-Form auf A und

$$\int_{bA}\omega = \int_{bA}(\mathbf{r}\circ i)^*\omega = \int_{bA} i^*(\mathbf{r}^*\omega) = \int_A d(\mathbf{r}^*\omega) = \int_A \mathbf{r}^*(d\omega) = 0,$$

denn auf bA ist $d\omega = 0$ (aus Dimensionsgründen). Das ist ein Widerspruch! ∎

4.6.7. Brouwer'scher Fixpunktsatz

Sei $K := \overline{B_1(\mathbf{0})}$ die abgeschlossene Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : K \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung mit $\mathbf{f}(K) \subset K$. Dann besitzt $\mathbf{f}$ einen Fixpunkt.

Beweis: 1) Sei zunächst $n = 1$. Dann betrachten wir die Funktion $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := x - f(x)$. Ist $f(-1) = -1$ oder $f(1) = 1$, so sind wir fertig. Weil auf jeden Fall $f(-1) \geq -1$ und $f(1) \leq 1$ ist, ist $g(1) = 1 - f(1) \geq 0$ und $g(-1) \leq 0$. Wir brauchen nur noch den Fall $g(-1) < 0$ und $g(1) > 0$ zu betrachten. Aber dann besagt der Zwischenwertsatz, dass ein $x_0 \in [-1, 1]$ mit $g(x_0) = 0$ existiert, also $f(x_0) = x_0$.

2) Sei nun $n \geq 2$. Wir nehmen an, dass $\mathbf{f}$ keinen Fixpunkt besitzt. Dann wird durch

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x} - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{f}(\mathbf{x}\|}$$

eine stetig differenzierbare Abbildung $\mathbf{u} : K \to S^{n-1}$ definiert, und man kann eine Abbildung $t : K \to \mathbb{R}$ mit $t(\mathbf{x}) \geq 0$ finden, so dass $\|\mathbf{x} + t(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})\| = 1$ ist. Anschaulich erhält man $\mathbf{g}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + t(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})$, indem man die Strecke von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ nach $\mathbf{x}$ über $\mathbf{x}$ hinaus so weit verlängert, dass sie die Sphäre trifft.

Man rechnet aus, dass $t(\mathbf{x}) = -\mathbf{x} \bullet \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|^2 + (\mathbf{x} \bullet \mathbf{u}(\mathbf{x}))^2}$ ist (durch Auflösen der quadratischen Gleichung $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 1$ nach t).

Da stets $\|\mathbf{x}\|^2 \leq 1$ und $\big(\mathbf{x} \bullet \mathbf{u}(\mathbf{x})\big)^2 > 0$ ist (denn sonst wäre $\mathbf{x} \perp \mathbf{u}(\mathbf{x})$), ist der Radikand positiv. Also ist t (und damit auch $\mathbf{g}$) eine $\mathscr{C}^1$-Abbildung. Für $\mathbf{x} \in S^{n-1}$ ist $t(\mathbf{x}) = 0$, also $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Das ist ein Widerspruch zur Aussage des vorangehenden Satzes. ∎

Definition

Sei $I := [0, 1]$. Zwei differenzierbare Abbildungen $\mathbf{f}, \mathbf{g} : M \to N$ zwischen Mannigfaltigkeiten heißen ***homotop***, falls eine differenzierbare Abbildung $\mathbf{F} : I \times M \to N$ mit $\mathbf{F}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{F}(1, \mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ existiert. Die Abbildung $\mathbf{F}$ nennt man eine ***Homotopie***.

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, orientierte Untermannigfaltigkeit, so ist $\mathbb{R} \times M$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ und $I \times M$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Der Rand $b(I \times M)$ ist Vereinigung der Untermannigfaltigkeiten $M_0 := \{0\} \times M$ und $M_1 := \{1\} \times M$ (wenn die erste mit der Orientierung von M versehen wird, die zweite aber mit der entgegengesetzten Orientierung).

4.6.8. Satz

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, k-dimensionale, orientierte Untermannigfaltigkeit. Sind $\mathbf{f}, \mathbf{g} : M \to N$ zwei homotope differenzierbare Abbildungen in eine weitere Mannigfaltigkeit N, so gilt für jede k-Form ω auf N mit $d\omega = 0$:

$$\int_M \mathbf{f}^*\omega = \int_M \mathbf{g}^*\omega.$$

Beweis: Sei $\mathbf{F} : I \times M \to N$ die Homotopie zwischen $\mathbf{f}$ und $\mathbf{g}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_M \mathbf{f}^*\omega - \int_M \mathbf{g}^*\omega &= \int_{M_0} \mathbf{F}^*\omega - \int_{M_1} \mathbf{F}^*\omega \\ &= \int_{\partial(I\times M)} \mathbf{F}^*\omega \;=\; \int_{I\times M} d(\mathbf{F}^*\omega) \\ &= \int_{I\times M} \mathbf{F}^*(d\omega) \;=\; 0.\end{aligned}$$

■

Eine nette Folgerung ist der

4.6.9. Satz vom Igel

Auf der Sphäre S^{n-1} gibt es genau dann ein stetig differenzierbares Vektorfeld ohne Nullstellen, wenn n gerade ist.

Insbesondere hat jedes stetig differenzierbare Vektorfeld auf S^2 eine Nullstelle („Jeder glatt gekämmte Igel hat wenigstens einen Glatzpunkt").

Beweis: 1) Ist $n = 2m$, so wird durch

$$\boldsymbol{\xi}(x_1, \ldots, x_m; x_{m+1}, \ldots, x_{2m}) := (-x_{m+1}, \ldots, -x_{2m}; x_1, \ldots, x_m)$$

ein nirgends verschwindendes (stetig differenzierbares) Vektorfeld auf S^{n-1} gegeben.

2) Sei $n = 2m+1$ und $\boldsymbol{\tau} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ die „Antipodenabbildung" mit $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) := -\mathbf{x}$. Wir nehmen an, es gibt ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\boldsymbol{\xi}$ ohne Nullstellen auf S^{n-1}. Man kann annehmen, dass $\|\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})\| \equiv 1$ ist. Damit ist $\boldsymbol{\xi}$ eine stetig differenzierbare Abbildung von S^{n-1} auf sich. Definiert man $\mathbf{F} : I \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ durch

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) := (\cos \pi t)\mathbf{x} + (\sin \pi t)\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}),$$

so ist $\mathbf{F}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ und $\mathbf{F}(1, \mathbf{x}) = -\mathbf{x}$, also $\mathbf{F}$ eine Homotopie zwischen id und $\boldsymbol{\tau}$.

Die Volumenform σ auf S^{n-1} ist gegeben durch

$$\sigma = \sum_{i=1}^n x_i(-1)^{i+1}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Dann ist

$$\tau^*\sigma = \sum_{i=1}^n (-x_i)(-1)^{i+1}\, d(-x_1) \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge d(-x_n) = (-1)^n\sigma,$$

also

$$0 \neq \int_{S^{n-1}} \sigma = \int_{S^{n-1}} \boldsymbol{\tau}^*\sigma = (-1)^n \int_{S^{n-1}} \sigma = -\int_{S^{n-1}} \sigma.$$

Das ist ein Widerspruch. ■