3 Funktionentheorie

3.1 Komplex differenzierbare Funktionen

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen sei als bekannt vorausgesetzt. Ist $z = x + \mathrm{i}\,y \in \mathbb{C}$, so nennt man x den ***Realteil*** und y den ***Imaginärteil*** von z. Die Zahl $\overline{z} := x - \mathrm{i}\,y$ heißt die zu z ***konjugiert komplexe Zahl***, $|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ der ***Betrag*** von z. Statt der Darstellung in kartesischen Koordinaten benutzt man (für komplexe Zahlen $z \neq 0$) gerne auch die Darstellung in Polarkoordinaten. Ist $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ und $r := |z|$. Dann ist

$$\frac{z}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \mathrm{i}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{und} \quad \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)^2 = 1.$$

Deshalb gibt es genau ein $t \in [0, 2\pi)$, so dass

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos t \quad \text{und} \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin t$$

ist. Daraus folgt die eindeutige Darstellung

$$z = r(\cos t + \mathrm{i}\,\sin t), \text{ mit } r > 0 \text{ und } 0 \leq t < 2\pi.$$

Die (bis auf Addition eines ganzzahligen Vielfachen von 2π) eindeutig bestimmte Zahl $t \in \mathbb{R}$ nennt man das ***Argument*** von z (in Zeichen: $t = \arg(z)$).

Man schreibt nun

$$e^{\mathrm{i}\,t} := \cos t + \mathrm{i}\,\sin t.$$

Behauptung: $e^{\mathrm{i}\,s} \cdot e^{\mathrm{i}\,t} = e^{\mathrm{i}\,(s+t)}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}\,s} \cdot e^{\mathrm{i}\,t} &= (\cos s + \mathrm{i}\,\sin s) \cdot (\cos t + \mathrm{i}\,\sin t) \\ &= (\cos s \cos t - \sin s \sin t) + \mathrm{i}\,(\cos s \sin t + \sin s \sin t) \\ &= \cos(s+t) + \mathrm{i}\,\sin(s+t) \ = e^{\mathrm{i}\,(s+t)}. \end{aligned}$$

Folgerung: $(e^{\mathrm{i}\,t})^n = e^{\mathrm{i}\,tn}$.

Beweis: Ein einfacher Induktionsbeweis.

Ist $z \in \mathbb{C}$ und $z^n = 1$, so ist auch $|z|^n = |z^n| = 1$, also $|z| = 1$. Damit ist $z = e^{\mathrm{i}\,t}$ und $\cos(nt) = 1$, $\sin(nt) = 0$. Das bedeutet, dass $nt = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ist, also $t = 2\pi k/n$. Die komplexen Zahlen

$$\zeta_{k,n} := \cos\Big(\frac{2\pi k}{n}\Big) + \mathrm{i}\,\sin\Big(\frac{2\pi k}{n}\Big), \ k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

sind paarweise verschieden, danach wiederholen sich die Werte. Es handelt sich offensichtlich um die einzigen Lösungen der Gleichung $z^n = 1$.

Definition

Die n Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ nennt man die ***n-ten Einheitswurzeln***.

3.1.1. Satz

Ist $w \neq 0$, so besitzt die Gleichung $z^n = w$ in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen.

Beweis: Sei $w = re^{\mathrm{i}t}$, mit $r = |w|$ und einem geeigneten $t \in [0, 2\pi)$. Ist ζ eine n-te Einheitswurzel $\neq 1$, so setzen wir

$$w_k := \sqrt[n]{r} \cdot e^{\mathrm{i}t/n} \cdot \zeta^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Offensichtlich sind dies n verschiedene komplexe Zahlen w_k mit $w_k^n = w$.

Ist andererseits z irgendeine Lösung der Gleichung $z^n = w$, so ist $z^n = w_0^n$, also $(zw_0^{-1})^n = 1$. Das bedeutet, dass es eine n–te Einheitswurzel ζ gibt, so dass $z = w_0 \cdot \zeta$ ist. ∎

Die Metrik und die Topologie auf $\mathbb{C}$ ist die bekannte Topologie auf dem $\mathbb{R}^2$. Wir interessieren uns hier für Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$, die auf Teilmengen von $\mathbb{C}$ definiert sind. Prominente Beispiele sind die (auf ganz $\mathbb{C}$ definierten) komplexen Polynome

$$p(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

und die (auf ihrem Konvergenzkreis definierten) komplexen Potenzreihen

$$P(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z-a)^\nu.$$

Zur Erinnerung:

Die Konvergenz einer komplexen Zahlenfolge (z_n) gegen eine Zahl z wird wie üblich definiert:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0, \text{ s.d. } \forall n \geq n_0 \text{ gilt: } |z_n - z| < \varepsilon.$$

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergiert, wenn die Folge ihrer Partialsummen $S_N := \sum_{n=1}^{N}$ konvergiert. Die Reihe heißt ***absolut konvergent***, falls die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergiert.

Wie im Reellen gilt auch hier das **Cauchykriterium**:

> Die Reihe komplexer Zahlen $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\left|\sum_{n=N_0+1}^{N} z_n\right| < \varepsilon$ für alle $N > N_0$ gilt.

Mit Hilfe des Cauchykriteriums zeigt man:

1. *Eine absolut konvergente Reihe konvergiert auch im gewöhnlichen Sinne.*

2. *Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe nicht-negativer reeller Zahlen und (z_n) eine Folge komplexer Zahlen mit $|z_n| \leq a_n$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ absolut (Majorantenkriterium)*

3.1.2. Beispiel

Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Dann konvergiert die ***geometrische Reihe***

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} = \frac{1}{1-z}\,.$$

Der Beweis folgt wie im Reellen.

Sei $M \subset \mathbb{C}$ und (f_ν) eine Folge von stetigen komplexwertigen Funktionen auf M.

1. $\sum_\nu f_\nu$ ***konvergiert punktweise*** gegen eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$, falls für jedes $x \in M$ die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)$ gegen $f(z)$ konvergiert.

2. $\sum_\nu f_\nu$ ***konvergiert normal*** auf M, falls die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \sup_M |f_\nu|$ konvergiert.

3. $\sum_\nu f_\nu$ ***konvergiert auf*** M ***gleichmäßig*** gegen f, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_0, \text{ so dass für alle } \nu \geq \nu_0 \text{ gilt: } \sup_M \Big| \sum_{\nu=0}^{\nu_0} f_\nu(z) - f(z) \Big| < \varepsilon.$$

Aus der normalen Konvergenz folgt die gleichmäßige Konvergenz, und daraus die punktweise Konvergenz. Oft benutzt man das

3.1.3. Weierstraß–Kriterium

Es sei $M \subset \mathbb{C}$, und es seien stetige Funktionen $f_\nu : M \to \mathbb{C}$ gegeben. Weiter gebe es eine konvergente Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ nicht-negativer reeller Zahlen und ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$|f_\nu(z)| \leq a_\nu \quad \textit{für } \nu \geq \nu_0 \textit{ und } \textbf{\textit{alle}}\ z \in M.$$

Dann konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ auf M normal (und damit gleichmäßig) gegen eine stetige Funktion auf M.

Beweis im 1. Semester. Die normale Konvergenz folgt ganz trivial, die Stetigkeit der Grenzfunktion zeigt man mit dem üblichen $\varepsilon/3$-Beweis.

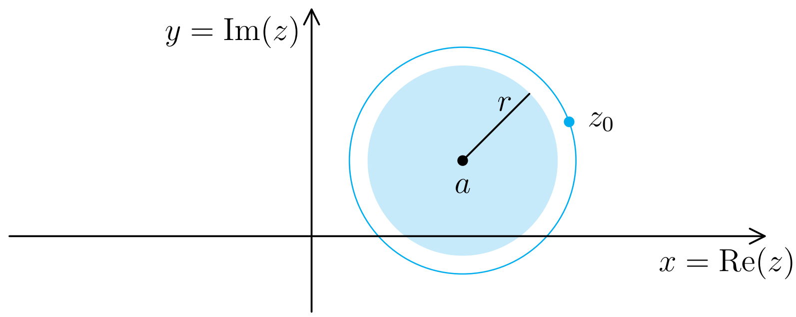
Typische Funktionenreihen sind die Potenzreihen.

3.1.4. Über das Konvergenzverhalten von Potenzreihen

Die Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ konvergiere für ein $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq a$. Ist dann $0 < r < |z_0 - a|$, so konvergiert $P(z)$ und auch die Reihe

$$P'(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n(z-a)^{n-1}$$

auf der Kreisscheibe $D_r(a)$ absolut und gleichmäßig.



BEWEIS: 1) Da $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0-a)^n$ nach Voraussetzung konvergiert, gibt es eine Konstante $M > 0$, so dass $|c_n(z_0-a)^n| \leq M$ für alle n ist. Ist $0 < r < |z_0 - a|$, so ist $q := r/|z_0 - a| < 1$. Für alle z mit $|z-a| \leq r$ gilt dann:

$$|c_n(z-a)^n| = |c_n(z_0-a)^n| \cdot \left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n \leq M \cdot q^n.$$

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} M\, q^n$ konvergiert. Mit dem Majorantenkriterium folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ für jedes $z \in D_r(a)$ absolut konvergiert, und mit dem Weierstraß–Kriterium folgt sogar, dass die Reihe auf $D_r(a)$ gleichmäßig konvergiert.

2) Sei $\widetilde{M} := M/r$. Nach (1) ist $|n \cdot c_n(z-a)^{n-1}| \leq n \cdot \widetilde{M} \cdot q^{n-1}$, und die Quotienten

$$\frac{(n+1) \cdot \widetilde{M} \cdot q^n}{n \cdot \widetilde{M} \cdot q^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \cdot q$$

konvergieren gegen $q < 1$.

Aus dem Quotientenkriterium folgt jetzt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \widetilde{M} \cdot q^{n-1}$ konvergiert, und wie oben kann man daraus schließen, dass $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot c_n(z-a)^{n-1}$ auf $D_r(a)$ gleichmäßig konvergiert. ∎

Die Zahl

$$R := \sup\{r \geq 0 \;:\; \exists\, z_0 \in \mathbb{C} \text{ mit } r = |z_0 - a|, \text{ so dass } P(z_0) \text{ konvergiert}\}$$

heißt ***Konvergenzradius*** der Potenzreihe. Die Fälle $R = 0$ und $R = +\infty$ sind dabei auch zugelassen. Der Kreis um a mit Radius R heißt der ***Konvergenzkreis*** der Reihe. Es gilt:

1. Für $0 < r < R$ konvergiert $P(z)$ auf $\overline{D_r(a)}$ normal (und damit insbesondere absolut und gleichmäßig).

2. Ist $|z_0 - a| > R$, so divergiert $P(z_0)$.

3. Die Grenzfunktion $P(z)$ ist im Innern des Konvergenzkreises $D_R(a) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-a| < R\}$ stetig.

Für den Konvergenzradius einer Potenzreihe gibt es verschiedene Berechnungsmethoden:

3.1.5. Lemma von Abel

Sei $R > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Dann ist

$$R = \sup\{r \geq 0 \,:\, (|c_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt }\}.$$

Beweis: Sei r_0 der Wert auf der rechten Seite der Gleichung.

Wenn eine Reihe nicht-negativer reeller Zahlen konvergiert, dann bilden ihre Glieder eine Nullfolge, sind also insbesondere beschränkt. Ist also $r < R$ und $|z-a| = r$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n < \infty$ und damit $(|c_n|r^n)$ beschränkt, d.h., $r \leq r_0$. Das bedeutet, dass $R \leq r_0$ ist.

Da $R > 0$ vorausgesetzt wurde, muss auch $r_0 > 0$ sein. Ist nun $0 < r < r_0$, so kann man noch ein r' mit $r < r' < r_0$ finden, so dass $(|c_n|(r')^n)$ beschränkt ist, etwa durch eine Konstante M. Wir setzen $q := \dfrac{r}{r'}$ und erhalten:

1. $0 < q < 1$.

2. $|c_n|r^n = |c_n|(r'q)^n \leq M \cdot q^n$.

Mit dem Majorantenkriterium folgt die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$, also $r \leq R$.

Weil das für alle $r < r_0$ gilt, ist auch $r_0 \leq R$. ∎

3.1.6. Folgerung

Die komplexe Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ und die reelle Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|x^n$ haben den gleichen Konvergenzradius.

Ist (a_n) eine Folge reeller Zahlen, so versteht man unter dem ***Limes Superior*** $\overline{\lim}\, a_n$ das Supremum über die Menge aller Häufungspunkte der Folge (a_n). Ist (a_n) konvergent gegen a, so ist a der einzige Häufungspunkt der Folge und $\overline{\lim}\, a_n = a$. Besitzt (a_n) mehrere, aber nur endlich viele Häufungspunkte, so ist $\overline{\lim}\, a_n$ der Größte dieser Häufungspunkte.

3.1.7. Formel von Cauchy-Hadamard

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *eine Potenzreihe und* $\gamma := \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|c_n|}$*, also das Supremum über die Menge aller Häufungspunkte der Folge* $\sqrt[n]{|c_n|}$.

Dann gilt für den Konvergenzradius R *der Potenzreihe:*

1. *Wenn* γ *eine endliche Zahl* > 0 *ist, dann ist* $R = 1/\gamma$.
2. *Wenn* $\gamma = \infty$ *ist, dann ist* $R = 0$.
3. *Wenn* $\gamma = 0$ *ist, dann ist* $R = \infty$.

Beweis: Sei $z \in \mathbb{C}$, $z \neq a$. Setzt man $\alpha := \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|}$, so erhält man die Gleichung $\alpha = |z-a|\,\gamma$.

1) Sei $0 < \gamma < +\infty$. Ist $|z-a| < 1/\gamma$, so ist $\alpha < 1$ und es gibt ein q mit $\alpha < q < 1$ und ein n_0, so dass $\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} < q$ und damit $|c_n(z-a)^n| < q^n$ für $n \geq n_0$ ist. Dann folgt aus dem Majorantenkriterium, dass die Potenzreihe in z (absolut) konvergiert.

Ist $|z-a| > 1/\gamma$, so ist $\alpha > 1$. Das bedeutet, dass unendlich viele Terme $|c_n(z-a)^n|$ ebenfalls > 1 sind. Dann divergiert die Potenzreihe.

2) Sei $\gamma = 0$. Dann ist auch $\alpha = 0$, und die Folge $\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|}$ konvergiert gegen Null. Ist $0 < q < 1$, so gibt es ein n_0, so dass $|c_n(z-a)^n| < q^n$ für $n \geq n_0$ gilt. Die Reihe konvergiert.

3) Sei $\gamma = +\infty$. Dann sind die Glieder der Potenzreihe unbeschränkt und die Reihe divergiert. ■

Ein ***Gebiet*** in $\mathbb{C}$ ist eine offene Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$, innerhalb der sich je zwei Punkte durch einen stetigen Weg miteinander verbinden lassen. Man kann zeigen, dass das dann sogar mit Hilfe eines Streckenzuges bewerkstelligt werden kann. Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $U \subset G$ eine nicht-leere Teilmenge, die zugleich offen und (relativ) abgeschlossen[1] ist, so ist $U = G$.

Wie kann man sich eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ anschaulich vorstellen? Wir untersuchen das im Falle der Funktion $f(z) = z^2$.

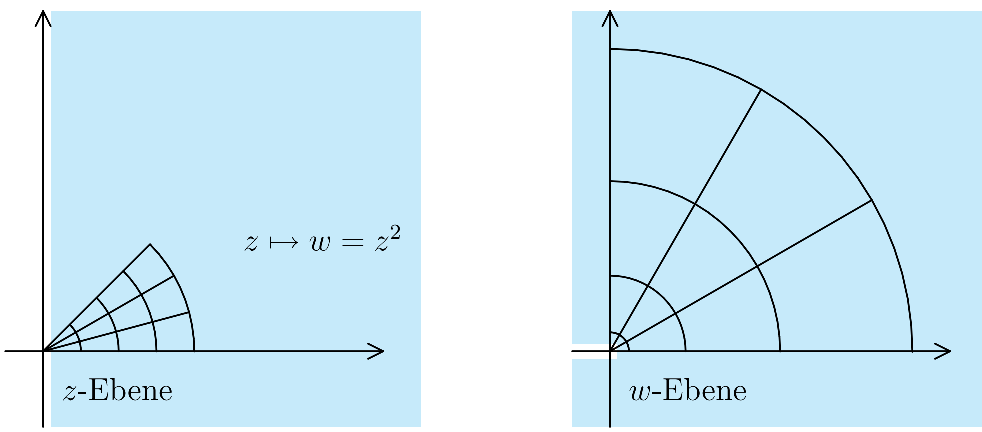
[1] d.h. $G \setminus U$ offen

1. Im Reellen versuchen wir, eine Funktion durch ihren Graphen darzustellen. Das geht hier schlecht, denn der Graph einer komplexen Funktion ist eine reell 2-dimensionale Fläche im $\mathbb{R}^4$.

2. Beschränkt man sich auf die reellwertige Funktion $z = x + \mathrm{i}\,y \mapsto |f(z)| = |z|^2 = x^2 + y^2$, so kann man deren Graph darstellen, verliert aber zu viele Informationen.

3. Eine weitere (und vielleicht auch die beste) Möglichkeit besteht darin, mit zwei Ebenen zu arbeiten. Ist $w = z^2$, so ist

$$|w| = |z|^2 \quad \text{und} \quad \arg(w) = 2 \cdot \arg(z).$$



Soweit funktioniert das ganz gut. Jetzt suchen wir nach der Umkehrabbildung. Wenn wir f auf die rechte Halbebene beschränken, dann erhalten wir als Wertemenge die ganze w-Ebene. Auf dem Rand gibt es allerdings ein Problem. Es ist $f(\mathrm{i}\,t) = f(-\mathrm{i}\,t) = -t^2$. Damit f injektiv bleibt, dürfen wir in der z-Ebene nur die Menge aller z mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ betrachten. Als Bildmenge erhalten wir dann die längs der negativen reellen Achse aufgeschlitzte w-Ebene.

Sei $g_1 : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ definiert durch

$$g_1\big(r(\cos\varphi + \mathrm{i}\ \sin\varphi)\big) := \sqrt{r}\,\big(\cos(\varphi/2) + \mathrm{i}\ \sin(\varphi/2)\big).$$

Dann ist g_1 eine Umkehrung von $f|_{\{z\in\mathbb{C}\,:\,\mathrm{Re}(z)>0\}}$.

Definieren wir $g_2 : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0\}$ durch

$$g_2(w) := -g_1(w),$$

so ist g_2 eine Umkehrung von $f|_{\{z\in\mathbb{C}\,:\,\mathrm{Re}(z)<0\}}$.

Um also eine globale Umkehrfunktion $g(w) = \sqrt{w}$ von $f(z) = z^2$ zu definieren, brauchen wir als Definitionsbereich zwei Exemplare der geschlitzten

Ebene. Dabei ist folgendes zu beachten: Nähert man sich in der w-Ebene von oben dem Schlitz bei $w = -r$, so nähert sich der Wert von g_1 der Zahl $z = \mathsf{i}\sqrt{r}$. Bei Annäherung von unten ergibt sich als Wert die Zahl $z = -\mathsf{i}\sqrt{r}$. Dagegen ist es bei g_2 gerade umgekehrt. Um nun $\sqrt{z}$ **stetig** zu definieren, muss man die Oberkante der ersten Ebene mit der Unterkante der zweiten Ebene zusammenkleben, und die Unterkante der ersten Ebene mit der Oberkante der zweiten Ebene. Es entsteht eine Fläche R, die in zwei Blättern über $\mathbb{C}^*$ liegt. Der Nullpunkt fehlt dabei.

Die Fläche R nennt man die *Riemannsche Fläche* von $\sqrt{w}$. Man kann sie auch folgendermaßen gewinnen:

$$R = \{(z, w) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \,:\, w = z^2\}.$$

Die Projektion $\pi := \mathrm{pr}_2|_R : R \to \mathbb{C}^*$ hat die Eigenschaft, dass $\pi^{-1}(w) = \{g_1(w), g_2(w)\}$ genau die beiden Wurzeln aus w enthält. Andererseits ist R aber auch der Graph von $f(z) = z^2$.

Der wichtigste Begriff in der Analysis ist die „Differenzierbarkeit“. Sieht man einmal von der anschaulichen Bedeutung der Ableitung ab, so liefert der Differential-Kalkül vor allem einen handlichen algebraischen Apparat zur Untersuchung von Funktionen. Um z.B. die Ableitung von $f(x) = x^n$ zu berechnen, braucht man keine Grenzwertuntersuchungen. Als Euler seinerzeit recht sorglos begann, mit komplexen Zahlen, Funktionen und Reihen zu rechnen, benutzte er die üblichen Regeln:

$$(z^n)' = n \cdot z^{n-1},\ (e^z)' = e^z \qquad \text{usw.}$$

Diese Regeln gewinnt man aus folgender Definition:

Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in G$ ein Punkt. f heißt in z_0 ***komplex differenzierbar***, falls der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. Die komplexe Zahl $f'(z_0)$ nennt man dann die ***Ableitung*** von f in z_0.

f heißt auf G komplex differenzierbar, falls f in jedem Punkt von G komplex differenzierbar ist.

Wie im Reellen kann man zeigen: f ist genau dann in z_0 komplex differenzierbar, wenn es eine in z_0 stetige Funktion $\Delta : G \to \mathbb{C}$ gibt, so dass gilt:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot \Delta(z).$$

Dann ist natürlich $\Delta(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{falls } z \neq z_0, \\ f'(z_0) & \text{falls } z = z_0. \end{cases}$

3.1.8. Satz

$f, g : G \to \mathbb{C}$ seien beide in $z_0 \in G$ komplex differenzierbar, c eine komplexe Zahl.

1. *$f + g$, $c\,f$ und $f \cdot g$ sind ebenfalls in z_0 komplex differenzierbar, und es gilt:*

$$\begin{aligned} (f+g)'(z_0) &= f'(z_0) + g'(z_0) \\ (c\,f)'(z_0) &= c\,f'(z_0) \\ \textit{und} \qquad (f \cdot g)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0). \end{aligned}$$

2. *Ist $g(z_0) \neq 0$, so ist auch noch $g(z) \neq 0$ nahe z_0, f/g in z_0 komplex differenzierbar und*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

3. *Ist h in $w_0 := f(z_0)$ komplex differenzierbar, so ist $h \circ f$ in z_0 komplex differenzierbar, und es gilt:*

$$(h \circ f)'(z_0) = h'(w_0) \cdot f'(z_0).$$

Der Beweis geht genauso wie im Reellen. Exemplarisch soll hier nur der Beweis für die Kettenregel angedeutet werden:

Ist $h(w) = h(w_0) + \Delta^{**}(w) \cdot (w - w_0)$ und $f(z) = f(z_0) + \Delta^*(z) \cdot (z - z_0)$, so folgt:

$$\begin{aligned} (h \circ f)(z) &= h(w_0) + \Delta^{**}(f(z)) \cdot (f(z) - w_0) \\ &= (h \circ f)(z_0) + \Delta^{**}(f(z)) \cdot \Delta^*(z) \cdot (z - z_0). \end{aligned}$$

Nun kann man $\Delta(z) := \Delta^{**}(f(z)) \cdot \Delta^*(z)$ setzen.

3.1.9. Satz

Sei $f : G \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und $f'(z) \equiv 0$. Dann ist f konstant.

Beweis: Sei $z_0 \in G$ und $U = U(z_0) \subset G$ eine konvexe offene Umgebung. Ist $z \in U$, so definieren wir $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ durch $g(t) := f(z_0 + t(z - z_0))$.

Sei $t_0 \in [a, b]$ und $w_0 := z_0 + t_0(z - z_0)$. Weil f komplex differenzierbar ist, gibt es eine in w_0 stetige Funktion Δ, so dass $f(w) - f(w_0) = (w - w_0)\Delta(w)$ und $\Delta(w_0) = f'(w_0)$ ist. Mit $w := z_0 + t(z - z_0)$ folgt dann:

$$g(t) - g(t_0) = f(w) - f(w_0) = (t - t_0)(z - z_0)\Delta(z_0 + t(z - z_0)),$$

also

$$\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0} = (z-z_0)\Delta(z_0+t(z-z_0)),$$

wobei die rechte Seite für $t \to t_0$ gegen gegen $(z-z_0)\cdot f'(w_0) = 0$ konvergiert. Also verschwindet die Ableitung von g auf dem ganzen Intervall $[a,b]$, und g ist dort konstant. Daraus folgt, dass $f(z) = g(1) = g(0) = f(z_0)$ ist, also f konstant auf U. Die Menge der Punkte $z \in G$, in denen $f(z) = f(z_0)$ ist, ist offen und (trivialerweise) abgeschlossen und daher $= G$. ■

3.1.10. Beispiele

A. Weil $z^n - z_0^n = (z-z_0)\cdot \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1}$ ist, ist

$$\lim_{z\to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} z_0^{n-1} = n\cdot z_0^{n-1}\,.$$

Also ist tatsächlich überall $(z^n)' = n\,z^{n-1}$.

Dass das so schön geht, liegt daran, dass $\mathbb{C}$ eben mehr als der $\mathbb{R}^2$ ist. $\mathbb{C}$ ist ein Körper.

B. Die komplexen Polynome $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ sind auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar, die Ableitung gewinnt man in gewohnter Weise.

C. Die Funktion $f(z) = z\overline{z}$ ist in $z_0 = 0$ komplex differenzierbar, denn $\Delta(z) := \overline{z}$ ist im Nullpunkt stetig, und es ist

$$f(z) = f(0) + z\cdot\Delta(z).$$

Die Punkte $z \neq 0$ werden wir später untersuchen.

D. Rationale Funktionen sind auf ihrem ganzen Definitionsbereich komplex differenzierbar. Das gilt insbesondere für alle „Möbius-Transformationen“. Eine ***(gebrochen) lineare Transformation*** oder ***Möbius-Transformation*** ist eine Abbildung der Gestalt

$$T(z) := \frac{az+b}{cz+d}\,, \quad ad-bc \neq 0.$$

Die Funktion T ist für alle $z \neq -d/c$ definiert und stetig.

Wir betrachten zwei Spezialfälle.

1. Fall: Ist $c = 0$, $A := a/d$ und $B := b/d$, so ist T eine komplexe affin-lineare Funktion:

$$T(z) = A\cdot z + B.$$

Da A eine komplexe Zahl ist, stellt die Abbildung $z \mapsto A{\cdot}z$ eine Drehstreckung dar. Die Abbildung $w \mapsto w + B$ ist eine Translation der Ebene.

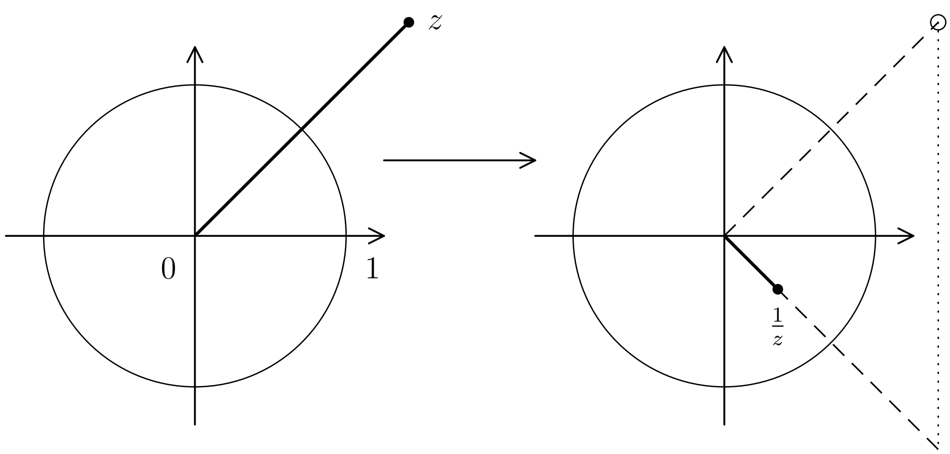
2. Fall: Die Abbildung $I(z) := 1/z$ nennt man die ***Inversion***. Sie ist auf $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert und stetig. Bekanntlich ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z\overline{z}} \cdot \overline{z}.$$

Schreibt man z in der Form $z = r \cdot (\cos t + \mathrm{i}\ \sin t)$, mit reellem $r > 0$ und $t \in [0, 2\pi)$, so ist $z\overline{z} = r^2$ und $\overline{z} = r \cdot (\cos t - \mathrm{i}\ \sin t)$. Also gilt:

$$|I(z)| = \frac{1}{|z|} \quad \text{und} \quad \arg(I(z)) = -\arg(z)\,.$$

Für $z = r \cdot (\cos t + \mathrm{i}\ \sin t)$ bedeutet der Übergang $r \mapsto 1/r$ eine Spiegelung am Einheitskreis, der Übergang $t \mapsto -t$ eine Spiegelung an der x–Achse.



Ist $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ eine beliebige Möbius-Transformation mit $c \neq 0$ und

$$A := \frac{bc - ad}{c} \quad \text{und} \quad B := \frac{a}{c}\,,$$

so ist

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{1}{cz+d} + B &= \frac{(a(cz+d) + (bc - ad)}{c(cz+d)} \\ &= \frac{acz + ad + bc - ad}{c(cz+d)} = \frac{az+b}{cz+d} = T(z). \end{aligned}$$

Also setzt sich T aus affin-linearen Funktionen und der Inversion zusammen.

E. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ eine konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 und Konvergenzradius $R > 0$.

Behauptung: *f ist in jedem Punkt z des Konvergenzkreises $D_R(0)$ komplex differenzierbar, und es gilt:*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n z^{n-1}.$$

Beweis: Wir wissen schon, dass die formal gliedweise differenzierte Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n z^{n-1}$$

ebenfalls in $D_R(0)$ konvergiert. Daraus kann man leicht folgern, dass f im Nullpunkt differenzierbar und $f'(0) = c_1$ ist: Es ist

$$f(z) - f(0) = z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}.$$

Schwieriger wird es aber, wenn man die komplexe Differenzierbarkeit von f in einem beliebigen Punkt z_0 des Konvergenzkreises $D_R(z_0)$ zeigen will. Sei nun z_0 ein solcher Punkt . Ist $F_N(z)$ die N-te Partialsumme von $f(z)$, so ist

$$F_N(z) - F_N(z_0) = \sum_{n=1}^{N} c_n(z^n - z_0^n) = (z - z_0) \cdot \Delta_N(z),$$

mit

$$\Delta_N(z) := \sum_{n=1}^{N} c_n \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1}.$$

Wir wählen ein $r < R$, so dass $|z_0| < r$ ist. Für $z \in D_r(0)$ gilt dann:

$$|c_n \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1}| \le |c_n| \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |z|^i |z_0|^{n-i-1} \le |c_n| \cdot n \cdot r^{n-1}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n z^{n-1}$ in jedem Punkt $z \in \overline{D_r(0)}$ absolut konvergiert, ist insbesondere die reelle Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|r^{n-1}$ konvergent.

Nach dem Weierstraß-Kriterium konvergiert dann $\Delta_N(z)$ gleichmäßig auf $D_r(0)$ gegen die stetige Funktion

$$\Delta(z) := \lim_{N\to\infty} \Delta_N(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1} \quad (\text{mit } \Delta(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n z_0^{n-1}).$$

Aus der Gleichung $F_N(z) = F_N(z_0)+(z-z_0)\cdot\Delta_N(z)$ wird beim Grenzübergang $N \to \infty$ die Gleichung $f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot \Delta(z)$. Also ist f in z_0 komplex differenzierbar und

$$f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot z_0^{n-1}.$$

∎

Potenzreihen mit beliebigem Entwicklungspunkt werden wir später behandeln.

Die Reihen

$$\begin{aligned} \exp(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \\ \sin(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \text{und} \quad \cos(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

konvergieren auf ganz $\mathbb{C}$ und stellen dort komplex differenzierbare Funktionen dar. Auf $\mathbb{R}$ stimmen sie natürlich mit den bekannten Funktionen überein.

Die Reihen können gliedweise differenziert werden. Deshalb gilt:

$$\exp'(z) = \exp(z), \quad \sin'(z) = \cos(z) \quad \text{und} \quad \cos'(z) = -\sin(z).$$

3.1.11. Satz

Für $t \in \mathbb{R}$ *ist* $\exp(\mathrm{i}\,t) = \cos t + \mathrm{i}\sin t = e^{\mathrm{i}\,t}$.

Beweis: Man berechne Realteil und Imaginärteil der Reihenentwicklung von $\exp(\mathrm{i}\,t)$. ∎

Auch die komplexe Exponentialfunktion erfüllt das

3.1.12. Additionstheorem

Es ist $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$ *für alle* $z, w \in \mathbb{C}$.

Beweis: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ fest und $f(z) := \exp(z) \cdot \exp(z_0 - z)$. Dann ist $f'(z) \equiv 0$, also $f(z) \equiv f(0) = \exp(z_0)$ konstant. Setzt man $w := z_0 - z$, so ist $z_0 = z + w$ und $\exp(z + w) = f(z) = \exp(z) \cdot \exp(w)$. ∎

3.1.13. Folgerung

Es ist $\exp(z + 2\pi\,\mathsf{i}\,) = \exp(z)$*, für alle* $z \in \mathbb{C}$*.*

Beweis: Es ist $\exp(2\pi\,\mathsf{i}\,) = \cos(2\pi) + \mathsf{i}\ \sin(2\pi) = 1$, also

$$\exp(z + 2\pi\,\mathsf{i}\,) = \exp(z) \cdot \exp(2\pi\,\mathsf{i}\,) = \exp(z).$$

Das ist alles! ∎

Die Exponentialfunktion ist also über $\mathbb{C}$ periodisch.

Außerdem gilt für **alle** $z \in \mathbb{C}$ die **Eulersche Formel**:

$$\boxed{\exp(\,\mathsf{i}\,z) = \cos(z) + \mathsf{i}\ \sin(z)\,.}$$

Beweis: Ersetzt man jeweils -1 durch i^2, so erhält man

$$\begin{aligned}
\cos z + \mathsf{i}\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \mathsf{i}\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\,\mathsf{i}\,z)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\,\mathsf{i}\,z)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \exp(\,\mathsf{i}\,z).
\end{aligned}$$

∎

Daraus folgen auch neue Relationen, z.B.:

$$\begin{aligned}
\cos(z) &= \frac{1}{2}(e^{\,\mathsf{i}\,z} + e^{-\,\mathsf{i}\,z}) \\
\text{und} \qquad \sin(z) &= \frac{1}{2\,\mathsf{i}}(e^{\,\mathsf{i}\,z} - e^{-\,\mathsf{i}\,z}).
\end{aligned}$$

Nun wollen wir die komplexe Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$ mit der reellen Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^2$ vergleichen.

Zur Erinnerung:

f heißt in z_0 *(reell) differenzierbar*, wenn es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und eine in der Nähe des Nullpunktes definierte Funktion r gibt, so dass gilt:

1. $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + r(z - z_0)$ für z nahe z_0.

2. $\displaystyle\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{r(h)}{|h|} = 0.$

Die eindeutig bestimmte lineare Abbildung L nennt man die ***totale Ableitung*** von f in z_0 und bezeichnet sie mit $Df(z_0)$.

Bei der Identifikation von $\mathbb{C}$ mit dem $\mathbb{R}^2$ entsprechen die komplexen Zahlen 1 und i den Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ und $\mathbf{e}_2 = (0,1)$. Deshalb nennt man die komplexen Zahlen

$$f_x(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) := Df(z_0)(1) \quad \text{und} \quad f_y(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) := Df(z_0)(\mathrm{i})$$

die ***partiellen Ableitungen*** von f nach x und y. Ist $f = g + \mathrm{i}\,h$, so gilt:

$$f_x(z_0) = g_x(z_0) + \mathrm{i}\,h_x(z_0) \quad \text{und } f_y(z_0) = g_y(z_0) + \mathrm{i}\,h_y(z_0).$$

Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $Df(z_0)$ wird deshalb bezüglich der Basis $\{1, \mathrm{i}\}$ durch die Funktionalmatrix

$$J_f(z_0) := \begin{pmatrix} g_x(z_0) & g_y(z_0) \\ h_x(z_0) & h_y(z_0) \end{pmatrix}$$

beschrieben.

3.1.14. Satz

Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so ist f in z_0 auch reell differenzierbar, und die totale Ableitung $Df(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist die Multiplikation mit $f'(z_0)$, also $\mathbb{C}$−linear. Auch die Umkehrung dieser Aussage ist richtig.

Beweis: Sei f in z_0 komplex differenzierbar. Dann gibt es eine in z_0 stetige Funktion Δ, so dass gilt:

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z) \\ &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \big(\Delta(z) - f'(z_0)\big)(z - z_0) \\ &= f(z_0) + L(z - z_0) + r(z - z_0), \end{aligned}$$

mit der linearen Abbildung L (mit $L(v) := f'(z_0) \cdot v$) und der Funktion $r(h) := (\Delta(z_0 + h) - f'(z_0)) \cdot h$. Dann gilt:

$$\frac{r(h)}{h} = \Delta(z_0 + h) - f'(z_0) \to 0 \text{ (für } h \to 0)$$

Also ist f in z_0 reell differenzierbar und $Df(z_0)$ $\mathbb{C}$-linear.

Ist umgekehrt f in z_0 reell differenzierbar und $Df(z_0)$ $\mathbb{C}$-linear, so gibt es eine komplexe Zahl a, so dass $Df(z_0)(v) = a \cdot v$ ist, und es gibt eine Darstellung

$$f(z) = f(z_0) + a(z - z_0) + r(z - z_0), \text{ mit } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Setzt man dann $\Delta(z) := a + \dfrac{r(z - z_0)}{z - z_0}$, für $z \neq z_0$, so strebt $\Delta(z) \to a$ für $z \to z_0$, Δ ist also stetig nach z_0 fortsetzbar. Außerdem ist $\Delta(z)(z - z_0) = f(z) - f(z_0)$. ∎

Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann zusätzlich $\mathbb{C}$-linear, wenn es eine komplexe Zahl c_0 gibt, so dass $L(w) = c_0 \cdot w$ ist. Schreibt man $c_0 = a_0 + \mathsf{i}\, b_0$, so ist

$$c_0 \cdot 1 = a_0 + \mathsf{i}\, b_0 \quad \text{und} \quad c_0 \cdot \mathsf{i} = -b_0 + \mathsf{i}\, a_0\,.$$

Das bedeutet, dass L bezüglich $\{1, \mathsf{i}\}$ durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} a_0 & -b_0 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix}$ beschrieben wird. Für eine in z_0 komplex differenzierbare Funktion muss also gelten:

$$\boxed{g_x(z_0) = h_y(z_0) \quad \text{und} \quad g_y(z_0) = -h_x(z_0)\,.}$$

Dieses kleine System von partiellen Differentialgleichungen ist der Schlüssel zum Verständnis der komplexen Differenzierbarkeit. Man spricht von den **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen**.

3.1.15. Satz

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. *f ist in z_0 reell differenzierbar und $Df(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-linear.*
2. *Es gibt eine **in** z_0 **stetige** Funktion $\Delta : G \to \mathbb{C}$, so dass für alle $z \in G$ gilt:*
$$f(z) = f(z_0) + \Delta(z) \cdot (z - z_0).$$
3. *f ist in z_0 komplex differenzierbar.*
4. *f ist in z_0 reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*
$$g_x(z_0) = h_y(z_0) \quad \textit{und} \quad g_y(z_0) = -h_x(z_0).$$

Beweis:

Die Äquivalenz der Aussagen (1), (2) und (3) haben wir schon gezeigt. Ausserdem ist klar, dass aus diesen Aussagen auch (4) folgt.

Ist schließlich f in z_0 reell differenzierbar, und gelten die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, so beschreibt die totale Ableitung die Multiplikation mit der komplexen Zahl $g_x(z_0) + \mathsf{i}\, h_x(z_0) = f_x(z_0)$. Also ist $Df(z_0)$ $\mathbb{C}$-linear. ∎

Bemerkung: Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so ist

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= f_x(z_0) = g_x(z_0) + \mathsf{i}\, h_x(z_0) \\ &= h_y(z_0) - \mathsf{i}\, g_y(z_0) = -\mathsf{i}\,(g_y(z_0) + \mathsf{i}\, h_y(z_0)) = -\mathsf{i}\, f_y(z_0). \end{aligned}$$

3.1.16. Beispiel

Sei $f(z) := z\overline{z}$. Dann ist f in $z_0 := 0$ komplex differenzierbar und $f'(0) = 0$. Aber f ist in keinem Punkt $z_0 \neq 0$ komplex differenzierbar, denn sonst wäre dort auch die Funktion

$$k(z) := \overline{z} = \frac{1}{z} \cdot f(z)$$

komplex differenzierbar. Es ist aber $J_k(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind nicht erfüllt!

Wir kommen jetzt zum zentralen Begriff der Vorlesung.

Definition

Eine Funktion f heißt in $z_0 \in \mathbb{C}$ ***holomorph***, wenn sie in einer offenen Umgebung $U = U(z_0) \subset \mathbb{C}$ definiert und komplex differenzierbar ist.

Komplexe Polynome sind auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Eine durch eine Potenzreihe definierte Funktion ist auf dem Konvergenzkreis der Reihe holomorph. Die Funktion $f(z) := z\overline{z}$ ist zwar in $z = 0$ komplex differenzierbar, aber **nirgends** holomorph!

Funktionen, die auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ komplex differenzierbar sind, sind dort auch automatisch holomorph.

3.1.17. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph.

1. *Nimmt f nur reelle oder nur rein imaginäre Werte an, so ist f konstant.*
2. *Ist $|f|$ konstant, so ist auch f konstant.*

Beweis: 1) Nimmt $f = g + \mathrm{i}\,h$ nur reelle Werte an, so ist $h(z) \equiv 0$. Da f holomorph ist, gelten die Cauchy-Riemannschen DGLn, und es ist $g_x = g_y = 0$. Das ist nur möglich, wenn g lokal-konstant und daher überhaupt konstant ist. Also ist auch f konstant. Im Falle rein imaginärer Werte geht es genauso.

2) Sei $|f|$ konstant. Ist diese Konstante $= 0$, so ist $f(z) \equiv 0$. Ist aber $|f| =: c \neq 0$, so ist die Funktion $f\overline{f} = c^2$ konstant und damit holomorph, und f besitzt keine Nullstellen. Daraus folgt, dass $\overline{f} = \dfrac{c^2}{f}$ holomorph ist, und damit auch

$$\mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \overline{f}) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(f) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}(f - \overline{f}).$$

Wegen (1) muss f dann konstant sein. ∎

Wir setzen jetzt voraus, dass $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ ist. Wegen der Cauchy-Riemannschen DGLn ist dann

$$\det Df(z) = \det \begin{pmatrix} g_x & -h_x \\ h_x & g_x \end{pmatrix} = (g_x)^2 + (h_x)^2 = |f'(z)|^2 > 0.$$

Das bedeutet, dass f – aufgefasst als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ – orientierungserhaltend ist!

Holomorphe Funktionen lassen außerdem Winkel invariant. Allerdings müssen wir erst einmal erklären, was darunter zu verstehen ist.

Sind $z = r_1 \cdot e^{\mathrm{i}\, t_1}$ und $w = r_2 \cdot e^{\mathrm{i}\, t_2}$ zwei komplexe Zahlen $\neq 0$, so verstehen wir unter dem Winkel zwischen z und w die Zahl

$$\angle(z, w) = \arg\left(\frac{w}{z}\right) = \begin{cases} t_2 - t_1 & \text{falls } t_2 > t_1 \\ 2\pi + t_2 - t_1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Winkel $\angle(z, w)$ wird also von z aus immer in mathematisch positiver Drehrichtung gemessen.

Sind $\alpha, \beta : [0, 1] \to \mathbb{C}$ zwei glatte differenzierbare Wege mit $\alpha(0) = \beta(0) = z_0$, so setzt man

$$\angle(\alpha, \beta) := \angle(\alpha'(0), \beta'(0)).$$

Ist f eine holomorphe Funktion, so ist $(f \circ \alpha)'(0) = f'(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0)$.

Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine stetig differenzierbare Abbildung $f : G \to \mathbb{C}$ mit nicht verschwindender Ableitung heißt in z_0 ***winkeltreu***, falls für beliebige glatte differenzierbare Wege α, β mit $\alpha(0) = \beta(0) = z_0$ gilt:

$$\angle(f \circ \alpha, f \circ \beta) = \angle(\alpha, \beta).$$

Ist f lokal umkehrbar, überall winkeltreu und orientierungserhaltend, so nennt man f ***lokal konform***. Ist f sogar global injektiv, so nennt man f ***konform***.

3.1.18. Satz

Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, mit stetigen partiellen Ableitungen, und $f'(z) \neq 0$ für $z \in G$, so ist f lokal konform.

BEWEIS: Ist $f'(z_0) \neq 0$, so ist auch $\det Df(z_0) = |f'(z_0)|^2 \neq 0$. Sind außerdem die partiellen Ableitungen von f stetig, so folgt aus dem Satz über inverse Abbildungen, dass es offene Umgebungen $U = U(z_0)$ und $V = V(f(z_0))$ gibt, so dass $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Also ist f lokal umkehrbar.

Wir müssen nur noch zeigen, dass f winkeltreu ist. Aber es ist

$$\begin{aligned}\angle(f\circ\alpha, f\circ\beta) &= \angle((f\circ\alpha)'(0),(f\circ\beta)'(0)) = \angle(f'(z_0)\cdot\alpha'(0), f'(z_0)\cdot\beta'(0)) \\ &= \arg\left(\frac{f'(z_0)\cdot\beta'(0)}{f'(z_0)\cdot\alpha'(0)}\right) = \arg\left(\frac{\beta'(0)}{\alpha'(0)}\right) = \angle(\alpha,\beta).\end{aligned}$$

■

Zum Schluss eine nicht ganz so triviale holomorphe Funktion!

Man kann sich die Frage stellen, ob es auch im Komplexen eine Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion gibt. Leider kann das nicht sein, denn es ist

$$\exp(z+2k\pi\,\mathrm{i}\,) = \exp(z) \qquad \text{für alle } k\in\mathbb{Z}.$$

Genauer ist $\{z\in\mathbb{C} : \exp(z)=1\} = 2\pi\,\mathrm{i}\,\mathbb{Z}$. Immerhin gilt:

3.1.19. Satz

Sei $a\in\mathbb{R}$ beliebig. Dann ist

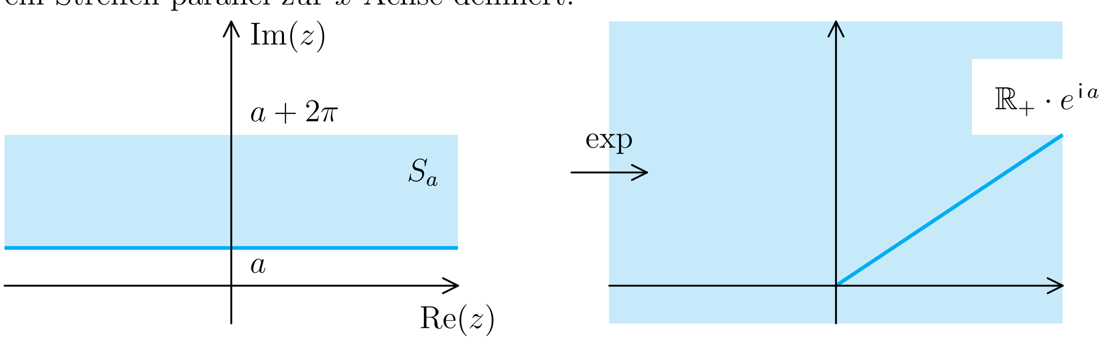
$$\exp : \{z\in\mathbb{C} : a\le \mathrm{Im}(z) < a+2\pi\} \to \mathbb{C}^*$$

bijektiv.

Beweis: Sei $a\in\mathbb{R}$. Dann wird durch

$$S_a := \{z\in\mathbb{C} : a\le \mathrm{Im}(z) < a+2\pi\}$$

ein Streifen parallel zur x-Achse definiert.



1) Injektivität:

Es ist $\exp(z)=1 \iff z = 2\pi\,\mathrm{i}\,n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Also gilt:

$$\begin{aligned}\exp(z)=\exp(w) &\implies \exp(z-w)=1\\ &\implies z = w+2\pi\,\mathrm{i}\,n\\ &\implies z \text{ und } w \text{ nicht beide im gleichen Streifen } S_a.\end{aligned}$$

2) Surjektivität:

Sei $w = re^{\mathrm{i}\,t} \in \mathbb{C}^*$, also $r > 0$, $0 \le t < 2\pi$.

Wir setzen $z := \ln(r) + \mathrm{i}\,t$. Dann ist $\exp(z) = e^{\ln(r)+\mathrm{i}\,t} = r \cdot e^{\mathrm{i}\,t} = w$.

Liegt z nicht im Streifen S_a, so kann man ein $k \in \mathbb{Z}$ finden, so dass $z^* := z + 2\pi\,\mathrm{i}\,k$ in S_a liegt. Dann ist $\exp(z^*) = \exp(z) = w$. ∎

Definition

$$\log_{(a)} := (\exp\Big|_{\mathring{S}_a})^{-1} : \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+ e^{\mathrm{i}\,a} \to \mathring{S}_a$$

heißt ***der durch*** a ***bestimmte Logarithmuszweig***. Insbesondere heißt $\log(z) = \log_{(-\pi)}(z)$ der ***Hauptzweig*** des Logarithmus.

3.1.20. Satz

Ist $z = r \cdot e^{\mathrm{i}\,t}$, *mit* $a < t < a + 2\pi$, *so ist* $\log_{(a)}(z)$ *definiert, und es gilt*

$$\log_{(a)}(z) = \ln(r) + \mathrm{i}\,t.$$

Der Beweis ist klar.

3.1.21. Satz

$\log(z)$ *ist eine holomorphe Funktion mit*

$$\log(1) = 0, \quad \exp(\log(z)) = z \quad \textit{und} \quad \log'(z) = 1/z.$$

Beweis: Die Funktion log ist auf der entlang der negativen reellen Achse aufgeschlitzten Ebene $\mathbb{C}'$ definiert. Die Zahl 1 liegt in dieser aufgeschlitzten Ebene, und es ist $\log(1) = \ln(1) = 0$. Nach Konstruktion ist $\exp(\log(z)) = z$ auf ganz $\mathbb{C}'$. Als Umkehrabbildung zur komplexen Exponentialfunktion (deren Funktionaldeterminante nirgends verschwindet und deren Ableitung wieder die Exponentialfunktion, also stetig ist) ist log zumindest reell differenzierbar.

Sei $z_0 \in \mathbb{C}'$ und $w_0 := \log(z_0)$. Nach der Kettenregel im $\mathbb{R}^2$ ist $D\exp(w_0) \circ D\log(z_0) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, also $\exp(w_0) \cdot D\log(z_0)(v) = v$ für alle $v \in \mathbb{C}$. Daraus folgt, dass $D\log(z_0)$ die Multiplikation mit der komplexen Zahl $\exp(w_0)^{-1}$, also insbesondere $\mathbb{C}$-linear ist. Damit ist log in z_0 komplex differenzierbar und $\log'(z_0) = 1/\exp(w_0) = 1/z_0$. Das gilt für jeden Punkt $z_0 \in \mathbb{C}'$. ∎

Wir können noch eine weitere Beschreibung des Logarithmus geben. Aus der reellen Analysis ist bekannt, dass folgendes gilt:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$$

$$\text{bzw.} \qquad \ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n.$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist $= 1$, also wird durch

$$\widetilde{L}(w) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} w^n$$

auf $D_1(0)$ eine holomorphe Funktion gegeben. Sei $L(z) := \widetilde{L}(z-1)$.

Behauptung: Für $|z-1| < 1$ ist $L(z) = \log(z)$.

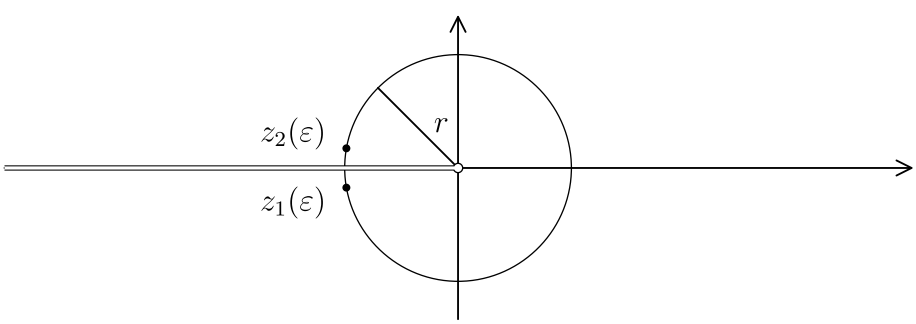
BEWEIS:

$$\text{In } D_1(0) \text{ ist} \qquad \widetilde{L}'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{n} w^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-w)^{n-1} = \frac{1}{1+w}.$$

Weil $\widetilde{L}$ auf $D_1(0)$ holomorph ist, ist $L(z) = \widetilde{L}(z-1)$ holomorph auf $D_1(1)$, und es ist $L'(z) = \widetilde{L}'(z-1) = 1/z = \log'(z)$, also $L(z) = \log(z) + c$, mit einer Konstanten c. Setzen wir $z = 1$ ein, so erhalten wir $c = 0$. ∎

Der Nullpunkt ist natürlich ein unüberwindliches Hindernis für den Logarithmus. Warum man ihn aber nicht wenigstens auf $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definieren kann, zeigt die folgende Überlegung:

Ist $z_1(\varepsilon) = r\,e^{\mathrm{i}\,t_1}$ und $z_2(\varepsilon) = r\,e^{\mathrm{i}\,t_2}$, mit $t_1 = -\pi+\varepsilon$ und $t_2 = \pi-\varepsilon$, so streben beide Punkte $z_i(\varepsilon)$ für $\varepsilon \to 0$ gegen die reelle Zahl $-r$. Aber $\log(z_2(\varepsilon)) - \log(z_1(\varepsilon)) = \mathrm{i}\,(\pi-\varepsilon) - \mathrm{i}\,(-\pi+\varepsilon) = 2(\pi-\varepsilon)\,\mathrm{i}$ strebt für $\varepsilon \to 0$ gegen $2\pi\,\mathrm{i}$.



Die Zweige $\log_{(-\pi+2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$, sind alle auf $\mathbb{C}'$ definiert. Verschafft man sich für jedes k ein Exemplar G_k von $\mathbb{C}'$ und verheftet man jeweils G_k mit G_{k+1} entlang der negativen reellen Achse und so, dass die Logarithmuswerte aneinander passen, so erhält man eine wendeltreppenartige Fläche aus unendlich vielen Blättern, die Riemann'sche Fläche des Logarithmus, auf der eine globale Logarithmusfunktion definiert werden kann.

Das Kochrezept zum Bestimmen des Logarithmus lautet folgendermaßen:

Ist eine komplexe Zahl $z = r \cdot e^{\mathrm{i}\,t}$ gegeben, mit $0 \le t < 2\pi$, so wähle man ein $a \in \mathbb{R}$, so dass $a < t < a + 2\pi$ ist. Wenn z nicht gerade auf der negativen reellen Achse liegt, kann $a = -\pi$ oder $a = \pi$ gewählt werden. Dann ist

$$\log_{(a)}(z) = \ln(r) + \mathrm{i}\,t.$$

Liegt t zwischen π und 2π, so liegt $t - 2\pi$ zwischen $-\pi$ und π, und es ist $\log_{(-\pi)}(z) = \ln r + \mathrm{i}\,t - 2\pi\,\mathrm{i}$.

3.1.22. Beispiele

A. Sei $z = 2\,\mathrm{i}$. Dann ist $r = 2$ und $t = \frac{\pi}{2}$. Also kann $a = -\pi$ gewählt werden, und es ist $\log(z) = \log_{(-\pi)}(z) = \ln(2) + \mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}$.

B. Sei $z = -2\,\mathrm{i}$. Dann ist wieder $r = 2$, aber diesmal $t = \frac{3\pi}{2}$. Wir können $a = \pi$ wählen und erhalten: $\log_{(\pi)}(z) = \ln(2) + \mathrm{i}\,\frac{3\pi}{2}$.

Nun ist zugleich $z = 2 \cdot e^{-(\pi/2)\,\mathrm{i}}$, also auch $\log_{(-\pi)}(z) = \ln(2) - \mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}$. Die beiden verschiedenen Darstellungen entsprechen der allgemeinen Gleichung

$$\log_{(a+2\pi)}(z) = \log_{(a)}(z) + 2\pi\,\mathrm{i}\,.$$

Da auch $0 < \frac{3\pi}{2} < 2\pi$ gilt, hätten wir auch $a = 0$ wählen können. Das ergibt aber nichts neues. Es ist $\log_{(0)}(z) = \ln(2) + \mathrm{i}\,\frac{3\pi}{2}$.

Jetzt können wir auch beliebige Potenzen in $\mathbb{C}$ definieren.

Definition

Für komplexe Zahlen z und w mit $z \ne 0$ setzt man

$$z^w := \exp(w \cdot \log_{(a)}(z)).$$

Dabei muss z im Definitionsbereich des verwendeten Logarithmuszweiges liegen. Wenn möglich, benutzt man den Hauptzweig.

Das ist eine seltsame Definition! Die Potenz z^w wird im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt sein, im schlimmsten Fall gibt es unendlich viele Werte. Betrachten wir einige Beispiele:

1. Was ist i^{i}? Benutzen wir die Beziehung $\mathsf{i} = e^{\mathsf{i}\,\frac{\pi}{2}}$ und den Hauptzweig des Logarithmus, so folgt:

$$\mathsf{i}^{\mathsf{i}} = \exp(\mathsf{i} \cdot \log_{(-\pi)}(e^{\mathsf{i}\,\frac{\pi}{2}})) = \exp(\mathsf{i} \cdot \mathsf{i}\,\frac{\pi}{2}) = e^{-\pi/2} = 0.207879\ldots$$

   Es kommen aber noch unendlich viele andere Werte in Frage, nämlich $e^{-\pi/2}e^{-2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Die Wurzel aus einer komplexen Zahl $z = re^{\mathsf{i}\,t}$ ist die Potenz

$$\begin{aligned} z^{1/2} &= \exp(\frac{1}{2} \cdot [\log_{(-\pi)}(z) + 2\pi\,\mathsf{i}\,k]) \\ &= \exp(\frac{1}{2} \cdot [\ln(r) + \mathsf{i}\,t + 2\pi\,\mathsf{i}\,k]) \\ &= \exp(\frac{1}{2}\ln(r)) \cdot \exp(\mathsf{i}\,(\frac{t}{2} + \pi k)) \\ &= \pm\sqrt{r} \cdot e^{\mathsf{i}\,\frac{t}{2}}, \end{aligned}$$

   je nachdem, ob k gerade oder ungerade ist. Das ist ein ganz vernünftiges Ergebnis. Von den ursprünglich unendlich vielen Möglichkeiten bleiben nur zwei übrig.

3. Ähnlich ist es bei der n-ten Wurzel:

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \sqrt[n]{r} \cdot e^{\mathsf{i}\,\frac{t}{n} + \mathsf{i}\,\frac{2k}{n}\pi} \\ &= \sqrt[n]{r} \cdot e^{\mathsf{i}\,\frac{t}{n}} \cdot (\zeta_n)^k,\ k = 0, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

   wobei ζ_n eine n-te Einheitswurzel bezeichnet.

In den bekannten Fällen kommt also auch Bekanntes heraus.

3.2 Der Cauchy'sche Integralsatz

Zur Erinnerung: Eine (komplexwertige) Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ heißt *stückweise stetig*, wenn es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ gibt, so dass f auf jedem der offenen Intervalle (t_{i-1}, t_i) stetig ist und in den Punkten t_i einseitige Grenzwerte besitzt. f heißt *stückweise stetig differenzierbar*, wenn f auf $[a, b]$ stetig und auf den abgeschlossenen Teilintervallen einer geeigneten Zerlegung stetig differenzierbar ist.

Schon in Analysis 1 wurden Integrale von vektorwertigen Funktionen und als Spezialfall Integrale von komplexwertigen Funktionen (von einer reellen Veränderlichen) behandelt. Wir wiederholen hier einige Ergebnisse.

Definition

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige komplexwertige Funktion. Dann erklärt man das Integral über f durch

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b \operatorname{Re} f(t)\,dt + \mathrm{i} \int_a^b \operatorname{Im} f(t)\,dt.$$

Die Zuordnung $f \mapsto \int_a^b f(t)\,dt$ ist $\mathbb{C}$-linear, und das Integral einer reellwertigen Funktion ist reell.

Außerdem gilt:

1. Ist f stetig und F eine (komplexwertige) Stammfunktion von f auf $[a, b]$, so ist
$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$
2. Ist $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig differenzierbar, so ist
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt = \int_a^b f(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds.$$
3. Ist (f_ν) eine Folge von stetigen Funktionen auf $[a, b]$, die gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert, so ist
$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\nu\to\infty} \int_a^b f_\nu(t)\,dt.$$
4. Es gilt die Abschätzung
$$|\int_a^b f(t)\,dt| \le \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

3.2.1. Beispiele

A. Sei $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $f(t) := e^{\mathrm{i}\,nt}$ und $F(t) := \dfrac{1}{\mathrm{i}\,n} e^{\mathrm{i}\,nt}$. Dann ist $F'(t) = f(t)$ und daher

$$\int_a^b e^{\mathrm{i}\,nt}\,dt = \frac{1}{\mathrm{i}\,n} e^{\mathrm{i}\,nt}\Big|_a^b = \frac{1}{\mathrm{i}\,n}(e^{\mathrm{i}\,nb} - e^{\mathrm{i}\,na}).$$

B. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ **komplex differenzierbar** und f' **stetig.**

Ist $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein stetig differenzierbarer Weg, so ist auch $f \circ \alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und

$$\int_a^b f'\big(\alpha(t)\big) \cdot \alpha'(t)\,dt = \int_a^b (f \circ \alpha)'(t)\,dt = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

Man beachte, dass der Strich hier einmal die komplexe und einmal die reelle Ableitung bezeichnet!

Im ersten Abschnitt haben wir die komplexe Differenzierbarkeit eingeführt, indem wir den reellen Differentialquotienten einfach formal ins Komplexe übertragen haben:

$$f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\ .$$

Jetzt wollen wir versuchen, nach dem Muster der reellen Analysis auch komplexe Integrale

$$\int_p^q f(z)\,dz$$

einzuführen. Aber wie sollen wir das tun? Im Reellen muss der Integrand in allen Punkten zwischen dem Anfangs- und dem Endpunkt definiert und in irgend einem Sinne integrierbar sein. Im Komplexen gibt es keine Intervalle, bestenfalls die Verbindungsstrecke. Ist aber etwa f eine stetige Funktion auf einem Gebiet G und sind p, q Punkte aus G, so braucht die Verbindungsstrecke nicht komplett zu G zu gehören.

Dass G ein Gebiet ist, sichert aber auf jeden Fall die Existenz eines stetigen Verbindungsweges von p nach q innerhalb von G. Wir können versuchen, die Funktion f entlang eines solchen Weges zu integrieren. Leider erhalten wir dann eine zusätzliche Abhängigkeit vom Integrationsweg. Welche Konsequenzen das hat, werden wir untersuchen müssen.

Wir führen noch folgende Sprachregelung ein: Ein ***Integrationsweg*** in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist ein stückweise stetig differenzierbarer Weg $\alpha : [a, b] \to G$.

Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige komplexwertige Funktion und $\alpha : [a, b] \to G$ ein Integrationsweg. Dann wird das ***komplexe Kurvenintegral*** von f über α definiert durch

$$\int_\alpha f(z)\,dz := \int_a^b f\big(\alpha(t)\big) \cdot \alpha'(t)\,dt.$$

Man kann das komplexe Kurvenintegral einer stetigen Funktion f über α natürlich schon dann bilden, wenn f nur auf der Spur $|\alpha|$ definiert ist.

3.2.2. Satz

Das komplexe Kurvenintegral hat folgende Eigenschaften:

1. *Ist $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ eine stetig differenzierbare, streng monoton wachsende* ***Parametertransformation****, so ist*

$$\int_{\alpha\circ\varphi} f(z)\,dz = \int_\alpha f(z)\,dz.$$

2. *Für stetige Funktionen f_1, f_2 und Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ist*

$$\int_\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2)(z)\,dz = c_1 \cdot \int_\alpha f_1(z)\,dz + c_2 \cdot \int_\alpha f_2(z)\,dz.$$

3. *Es gilt die* ***Standardabschätzung****:*

$$|\int_\alpha f(z)\,dz| \le L(\alpha) \cdot \max_{z\in|\alpha|} |f(z)|,$$

wobei $L(\alpha) = \displaystyle\int_a^b |\alpha'(t)|\,dt$ die ***Länge*** *von α ist.*

4. *Sind f und f_ν stetige Funktionen auf $|\alpha|$ und konvergiert (f_ν) auf $|\alpha|$ gleichmäßig gegen f, so ist*

$$\int_\alpha f(z)\,dz = \lim_{\nu\to\infty} \int_\alpha f_\nu(z)\,dz.$$

BEWEIS: 1) Ist φ eine Parametertransformation, so ist

$$\begin{aligned} \int_\alpha f(z)\,dz &= \int_a^b f\circ\alpha(t)\alpha'(t)\,dt = \int_c^d f\circ\alpha(\varphi(s))\alpha'(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds \\ &= \int_c^d f\circ(\alpha\circ\varphi)(s)(\alpha\circ\varphi)'(s)\,ds = \int_{\alpha\circ\varphi} f(z)\,dz. \end{aligned}$$

2) Die Linearität ist trivial.

3) Es ist

$$|\int_\alpha f(z)\,dz| = |\int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt| \le \int_a^b |f(\alpha(t))\alpha'(t)|\,dt.$$

Setzt man $M := \max_{z\in|\alpha|} |f(z)|$, so ist

$$\int_a^b |f(\alpha(t))\alpha'(t)|\,dt \le M \cdot \int_a^b |\alpha'(t)|\,dt = M \cdot L(\alpha).$$

Zu (4): Da α stückweise stetig differenzierbar ist, gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass $|\alpha'(t)| \le C$ auf $[a,b]$ ist. Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein ν_0, so dass gilt:

$$|f_\nu(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{C} \text{ für } \nu \geq \nu_0 \text{ und } z \in |\alpha|.$$

Also ist

$$|f_\nu(\alpha(t))\alpha'(t) - f(\alpha(t))\alpha'(t)| = |f_\nu(\alpha(t)) - f(\alpha(t))| \cdot |\alpha'(t)| < \varepsilon$$

für $\nu \geq \nu_0$ und $t \in [a,b]$. Das bedeutet, dass $((f_\nu \circ \alpha) \cdot \alpha')$ gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen $(f \circ \alpha) \cdot \alpha'$ konvergiert, und daraus folgt die Behauptung. ∎

3.2.3. Satz

Ist $f : G \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, f' stetig und $\alpha : [a,b] \to G$ ein Integrationsweg, so ist

$$\int_\alpha f'(z)\,dz = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

Beweis: Wir haben diese Aussage schon oben in einem Beispiel bewiesen. ∎

Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Eine ***Stammfunktion*** von f ist eine holomorphe Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$.

Bemerkung: Ist $f : G \to \mathbb{C}$ stetig, so unterscheiden sich je zwei Stammfunktionen von f höchstens um eine Konstante.

3.2.4. Beispiele

A. Sei $z_0 \neq 0$ und $\alpha(t) := t \cdot z_0$ (für $0 \leq t \leq 1$) die Verbindungsstrecke von 0 und z_0. Weiter sei $f(z) := z^n$. Dann ist

$$\int_\alpha f(z)\,dz = \int_0^1 f(t \cdot z_0) \cdot z_0\,dt = z_0^{n+1} \cdot \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1} z_0^{n+1}.$$

Dieses Ergebnis kann man auch auf anderem Wege erhalten. Setzt man $F(z) := \dfrac{1}{n+1} z^{n+1}$, so ist $F'(z) = f(z)$ und daher

$$\int_\alpha f(z)\,dz = F(\alpha(1)) - F(\alpha(0)).$$

B. $\alpha(t) := z_0 + r \cdot e^{\mathrm{i}\,t}$ (für $0 \leq t \leq 2\pi$) ist die übliche Parametrisierung der Kreislinie $\partial D_r(z_0)$. Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, benutzen wir immer diese Parametrisierung.

Ein **fundamentaler Baustein der Funktionentheorie** ist folgende Formel:

$$\boxed{\int\limits_{\partial D_r(z_0)} (z-z_0)^n\,dz := \int\limits_{\alpha} (z-z_0)^n\,dz = \begin{cases} 2\pi\,\mathsf{i} & \text{für } n=-1 \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}}$$

Beweis: Es ist

$$\int_\alpha \frac{1}{z-z_0}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} e^{-\mathsf{i}\,t} \cdot r\,\mathsf{i}\,e^{\mathsf{i}\,t}\,dt = \mathsf{i} \cdot \int_0^{2\pi} dt \; = \; 2\pi\,\mathsf{i}\,,$$

und für $n \neq -1$ ist

$$\begin{aligned}\int_\alpha (z-z_0)^n\,dz &= \int_0^{2\pi} (re^{\mathsf{i}\,t})^n \cdot r\,\mathsf{i}\,e^{\mathsf{i}\,t}\,dt \; = \; r^{n+1}\,\mathsf{i} \cdot \int_0^{2\pi} e^{\mathsf{i}\,(n+1)t}\,dt \\ &= r^{n+1}\,\mathsf{i} \cdot \left(\frac{1}{\mathsf{i}\,(n+1)} e^{\mathsf{i}\,(n+1)t} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Ist $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, so bezeichne $-\alpha$ den in umgekehrter Richtung durchlaufenen Weg, parametrisiert z.B. durch

$$-\alpha(t) := \alpha(a+b-t) \qquad (\text{für } a \leq t \leq b).$$

Mit $\varphi(t) := a+b-t$ gilt dann:

$$\begin{aligned}\int_{-\alpha} f(z)\,dz &= \int_a^b f(\alpha\circ\varphi(t))(\alpha\circ\varphi)'(t)\,dt \\ &= \int_a^b f\circ\alpha(\varphi(t))\alpha'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\circ\alpha(s)\alpha'(s)\,ds \\ &= -\int_a^b f\circ\alpha(s)\alpha'(s)\,ds \; = \; -\int_\alpha f(z)\,dz.\end{aligned}$$

Sind $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\beta : [c,d] \to \mathbb{C}$ zwei Integrationswege (i.a. mit $\alpha(b) = \beta(c)$, aber das muss nicht zwingend so sein), so bezeichne $\alpha+\beta$ den Weg, der entsteht, indem man α und β hintereinander durchläuft. Dann setzt man

$$\int_{\alpha+\beta} f(z)\,dz := \int_\alpha f(z)\,dz + \int_\beta f(z)\,dz.$$

Bemerkung: Ist $\alpha(b) = \beta(c)$, so kann man $\alpha+\beta$ auf $[a, b+d-c]$ durch

$$(\alpha+\beta)(t) := \begin{cases} \alpha(t) & \text{für } a \le t \le b \\ \beta(t-b+c) & \text{für } b < t \le b+d-c \end{cases}$$

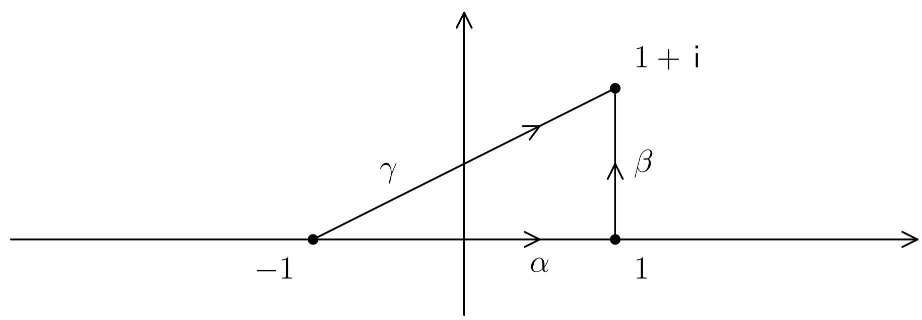
parametrisieren. Dann ist tatsächlich

$$\begin{aligned} \int_{\alpha+\beta} f(z)\,dz &= \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt + \int_b^{b+d-c} f(\beta(t-b+c))\beta'(t-b+c)\,dt \\ &= \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt + \int_c^d f(\beta(s))\beta'(s)\,ds \\ &= \int_\alpha f(z)\,dz + \int_\beta f(z)\,dz. \end{aligned}$$

3.2.5. Beispiel

Wir betrachten die Wege $\alpha, \beta, \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit

$$\alpha(t) := -1 + 2t, \quad \beta(t) := 1 + \mathrm{i}\,t \quad \text{und} \quad \gamma(t) := (-1+2t) + \mathrm{i}\,t.$$



Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\alpha+\beta} \overline{z}\,dz &= \int_0^1 (-1+2t)\cdot 2\,dt + \int_0^1 (1-\mathrm{i}\,t)\cdot \mathrm{i}\,dt \\ &= 2\cdot(-t+t^2)\Big|_0^1 + \mathrm{i}\cdot(t-\frac{\mathrm{i}}{2}t^2)\Big|_0^1 \\ &= 2\cdot(-1+1) + \mathrm{i}\cdot(1-\frac{\mathrm{i}}{2}) \;=\; \mathrm{i} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_\gamma \overline{z}\,dz &= \int_0^1 (-1+2t-\mathrm{i}\,t)(2+\mathrm{i})\,dt \\ &= (2+\mathrm{i})\cdot(-t+\frac{2-\mathrm{i}}{2}t^2)\Big|_0^1 \\ &= (2+\mathrm{i})\cdot(-1+1-\frac{\mathrm{i}}{2}) \;=\; -\mathrm{i} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Das komplexe Kurvenintegral über $f(z) := \overline{z}$ hängt vom Integrationsweg ab! Wir werden bald sehen, dass das daran liegt, dass f nicht holomorph ist.

Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. G heißt ***sternförmig bezüglich*** $a \in G$, falls mit jedem $z \in G$ auch die Verbindungsstrecke von a und z ganz in G liegt.

Jedes konvexe Gebiet ist sternförmig, aber die Umkehrung ist i.a. falsch. Sind G_1 und G_2 konvex und ist $a \in G_1 \cap G_2$, so ist $G_1 \cup G_2$ bezüglich a sternförmig.

Das „Innere eines Dreiecks“ (die exakte Formulierung sei dem Leser überlassen) nennen wir ein ***Dreiecksgebiet***. Offensichtlich ist jedes Dreiecksgebiet konvex, und der Rand ist stückweise stetig differenzierbar. Nimmt man den Rand hinzu, so spricht man von einem ***abgeschlossenen Dreieck***.

3.2.6. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein bezüglich $a \in G$ sternförmiges Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

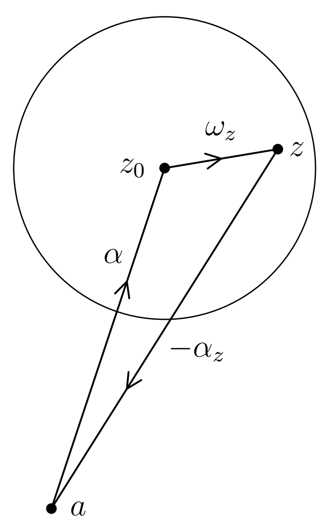
1. *f besitzt auf G eine Stammfunktion.*
2. *Es ist $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$, das a als Eckpunkt hat.*

Beweis:

$(1) \implies (2)$: Trivial!

$(2) \implies (1)$: Für $z \in G$ sei $F(z) := \displaystyle\int_{\alpha_z} f(\zeta)\,d\zeta$, wobei $\alpha_z : [0,1] \to G$ die Verbindungsstrecke von a und z bezeichnet.

Zu zeigen bleibt: F ist auf G komplex differenzierbar, und es ist $F' = f$.



Dazu betrachten wir einen Punkt $z_0 \in G$ und wählen eine offene Kreisscheibe D um z_0, die noch ganz in G enthalten ist. Für $z \in D$ sei $\omega_z(t) := z_0 + t\cdot(z - z_0)$ die (in D enthaltene) Verbindungsstrecke zwischen z_0 und z. Weiter sei $\alpha := \alpha_{z_0}$.

Dann ist $\gamma := \alpha + \omega_z - \alpha_z$ ein geschlossener Weg, und es gilt:

$$\begin{aligned} 0 = \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta &= \int_\alpha f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\omega_z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\alpha_z} f(\zeta)\,d\zeta \\ &= F(z_0) - F(z) + \int_0^1 f(z_0 + t(z-z_0)) \cdot (z - z_0)\,dt \\ &= F(z_0) - F(z) + \Delta(z) \cdot (z - z_0), \end{aligned}$$

mit $\Delta(z) := \int_0^1 f(z_0 + t(z-z_0))\,dt$. Offensichtlich ist $\Delta(z_0) = f(z_0)$, und für $z \in D$ ist

$$\begin{aligned} |\Delta(z) - \Delta(z_0)| &= \Big| \int_0^1 [f(z_0 + t(z-z_0)) - f(z_0)]\,dt \Big| \\ &\le \max_{0 \le t \le 1} |f(z_0 + t(z-z_0)) - f(z_0)|. \end{aligned}$$

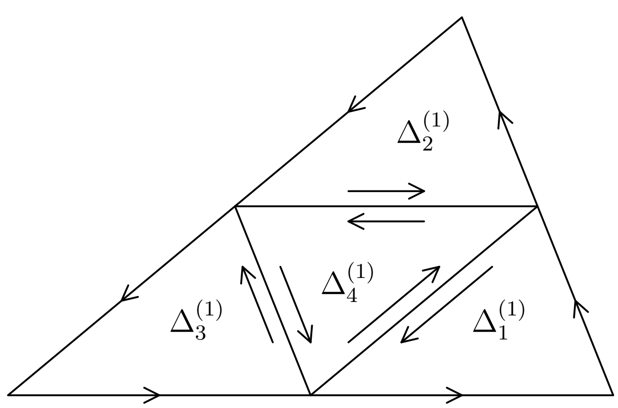
Da f stetig ist, folgt hieraus auch die Stetigkeit von Δ in z_0. Damit ist alles bewiesen. ∎

3.2.7. Satz von Goursat

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine **holomorphe** *Funktion und $\triangle \subset G$ ein abgeschlossenes Dreieck. Dann gilt:*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0.$$

Beweis: Wir schreiben $\Delta = \Delta^{(0)}$. Indem wir die Seiten von Δ halbieren, unterteilen wir Δ in 4 kongruente Teildreiecke $\Delta_1^{(1)}, \ldots, \Delta_4^{(1)}$.



Sei $\gamma := \sum_{k=1}^{4} \partial\Delta_k^{(1)}$. Dann ist $\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial\Delta_k^{(1)}} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z)\,dz$,

denn die Integrale über die Strecken im Innern des Dreiecks heben sich gegenseitig auf, da sie jeweils doppelt mit entgegengesetzten Vorzeichen auftreten.

Also ist

$$\Big|\int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z)\,dz\,\Big| = \Big|\int_{\gamma} f(z)\,dz\,\Big| \le 4\cdot\max_k\Big|\int_{\partial\Delta_k^{(1)}} f(z)\,dz\,\Big|.$$

Nun wählt man unter den Dreiecken $\Delta_1^{(1)},\dots,\Delta_4^{(1)}$ dasjenige aus, bei dem der Betrag des Integrals am größten ist, und nennt es $\Delta^{(1)}$. Dann ist

$$\Big|\int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z)\,dz\,\Big| \le 4\cdot\Big|\int_{\partial\Delta^{(1)}} f(z)\,dz\,\Big|.$$

Wiederholt man diese Prozedur, so erhält man eine Folge von Dreiecken

$$\Delta = \Delta^{(0)} \supset \Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \supset \dots$$

mit

$$\Big|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\,\Big| \le 4^n\cdot\Big|\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\,dz\,\Big| \text{ und } L(\partial\Delta^{(n)}) = 2^{-n}\cdot L(\partial\Delta).$$

Da alle $\Delta^{(i)}$ kompakt und nicht leer sind, enthält $\bigcap\limits_{n\ge 0}\Delta^{(n)}$ einen Punkt z_0 (man kann eine gegen z_0 konvergente Folge konstruieren), und da der Durchmesser der Dreiecke beliebig klein wird, kann es auch nur einen solchen Punkt geben.

Jetzt kommt der entscheidende Trick dieses Beweises! Wir nutzen die komplexe Differenzierbarkeit von f in z_0 aus:

Es gibt eine in z_0 stetige Funktion A, so dass gilt:

1. $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\cdot(f'(z_0) + A(z))$.
2. $A(z_0) = 0$.

Die affin-lineare Funktion $\lambda(z) := f(z_0) + (z - z_0)\cdot f'(z_0)$ hat auf G eine Stammfunktion, nämlich

$$\Lambda(z) := (f(z_0) - z_0\cdot f'(z_0))\cdot z + \frac{f'(z_0)}{2}\cdot z^2.$$

Also ist $\displaystyle\int_{\partial\Delta^{(n)}} \lambda(z)\,dz = 0$ für alle n. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\,dz\Big| &= \Big|\int_{\partial\Delta^{(n)}} (z - z_0)A(z)\,dz\Big| \\
&\le L(\partial\Delta^{(n)})\cdot\max_{\partial\Delta^{(n)}}(|z - z_0|\cdot|A(z)|) \\
&\le L(\partial\Delta^{(n)})^2\cdot\max_{\partial\Delta^{(n)}}(|A(z)|.
\end{aligned}$$

Setzt man alles zusammen, so erhält man:

$$\begin{aligned} \left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| &\leq 4^n \cdot \left|\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\,dz\right| \\ &\leq 4^n \cdot L(\partial\Delta^{(n)})^2 \cdot \max_{\partial\Delta^{(n)}}|A(z)| \\ &= L(\partial\Delta)^2 \cdot \max_{\partial\Delta^{(n)}}|A(z)|. \end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ strebt die rechte Seite gegen 0. ■

Der Satz von Goursat lässt sich noch ein wenig verschärfen.

3.2.8. Satz von Goursat in verschärfter Form

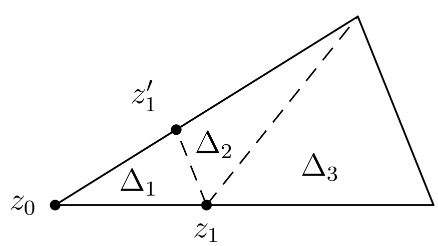
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann gilt für jedes abgeschlossene Dreieck $\triangle \subset G$:

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0.$$

Beweis: Wir können annehmen, dass f überall bis auf einen einzigen Ausnahmepunkt z_0 holomorph ist. Nun unterscheiden wir mehrere Fälle:

1. Fall: z_0 ist Eckpunkt von $\triangle$.

Dann zerlegen wir $\triangle$ folgendermaßen in drei Teildreiecke:



Aus dem gewöhnlichen Satz von Goursat folgt, dass $\int_{\partial\triangle_2} f(z)\,dz = \int_{\partial\triangle_3} f(z)\,dz = 0$ ist, also

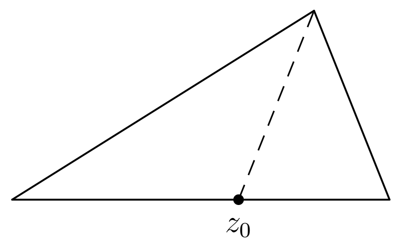
$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = \int_{\partial\triangle_1} f(z)\,dz,$$

unabhängig davon, wie z_1 und z_1' gewählt werden. Dann ist

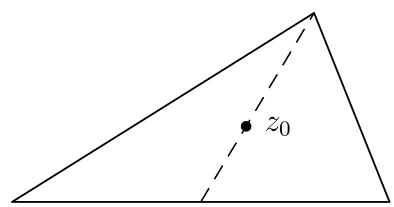
$$\left|\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz\right| \leq L(\partial\triangle_1) \cdot \sup_{\triangle}|f(z)|,$$

und die rechte Seite strebt gegen Null, wenn z_1 und z_1' gegen z_0 wandern.

2. Fall: z_0 liegt auf einer Seite von $\triangle$, ist aber kein Eckpunkt. Dann zerlegt man $\triangle$ in zwei Teildreiecke, auf die beide jeweils der erste Fall anwendbar ist:



3. Fall: z_0 liegt im Innern von $\triangle$. Diesen Fall kann man auf den 2. Fall reduzieren:



Liegt z_0 außerhalb $\triangle$, so ist überhaupt nichts zu zeigen. ∎

3.2.9. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann besitzt f auf G eine Stammfunktion.

Beweis: Sei G sternförmig bezüglich $a \in G$. Nach dem verschärften Satz von Goursat ist $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$, insbesondere also für jedes Dreieck, das a als Eckpunkt hat. Aber dann besitzt f eine Stammfunktion. ∎

Hinweis: Wir haben im Beweis nicht direkt die Holomorphie von f benutzt, sondern nur die Tatsache, dass das Integral über f und den Rand eines abgeschlossenen Dreiecks in G verschwindet!

Nun folgt:

3.2.10. Cauchy'scher Integralsatz (für Sterngebiete)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und bis auf endlich viele Punkte holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg α in G:

$$\int_\alpha f(z)\,dz = 0.$$

Beweis: f besitzt eine Stammfunktion, und daraus folgt die Behauptung. ∎

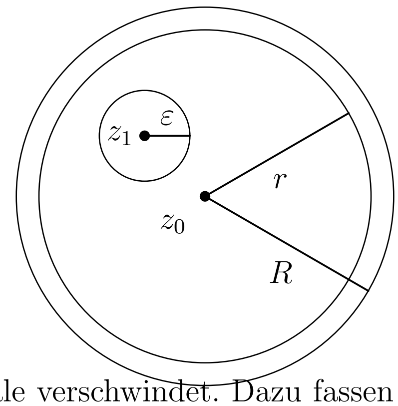
3.2.11. Lemma

Sei $R > 0$ und $f : D_R(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph außerhalb des Punktes $z_1 \in D_R(z_0)$, $z_1 \neq z_0$.

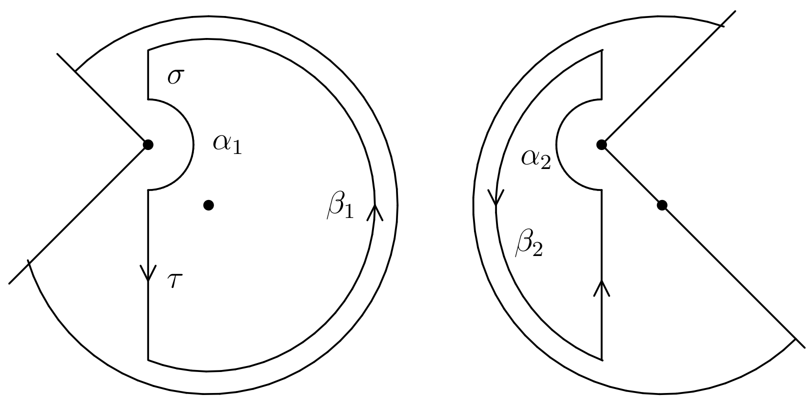
Wir wählen ein r mit $0 < r < R$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass noch $D_\varepsilon(z_1) \subset D_r(z_0)$ ist.

Dann ist

$$\int_{\partial D_r(z_0)} f(z)\,dz = \int_{\partial D_\varepsilon(z_1)} f(z)\,dz.$$



Beweis: Wir zeigen, dass die Differenz der Integrale verschwindet. Dazu fassen wir die „Differenz" der Integrale als Summe zweier Integrale über geschlossene Wege auf, auf die sich jeweils der Cauchy'sche Integralsatz anwenden lässt:



Bezeichnen wir die beiden Verbindungsstrecken vom kleinen inneren Kreis zum großen äußeren Kreis (von oben nach unten orientiert) mit σ und τ und die positiv orientierten Teil-Kreislinien mit α_1, α_2 und β_1, β_2, so gilt:

$$(\beta_1 + \sigma - \alpha_1 + \tau) + (\beta_2 - \tau - \alpha_2 - \sigma) = (\beta_1 + \beta_2) - (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Die beiden geschlossenen Wege auf der linken Seite der Gleichung verlaufen jeweils in einem sternförmigen Gebiet, in dem f holomorph ist. Nach Cauchy ist das Integral über diese Wege $= 0$, und daraus folgt auch schon die Behauptung. ∎

Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $B \subset G$ eine offene Teilmenge. Wir sagen, B liegt ***relativ-kompakt*** in G (in Zeichen: $B \subset\subset G$), wenn B beschränkt und $\overline{B} \subset G$ ist.

3.2.12. Folgerung

Ist $D \subset \mathbb{C}$ eine Kreisscheibe und $z \in \mathbb{C} \setminus \partial D$, so ist

$$\int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 2\pi\,\mathsf{i} & \textit{falls } z \in D, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: 1) Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $D_\varepsilon(z) \subset\subset D$ ist. Für $\zeta \neq z$ ist $f(\zeta) := 1/(\zeta - z)$ holomorph. Also ist

$$\int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi\,\mathsf{i}\,.$$

2) Ist $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$, so gibt es eine Kreisscheibe D' mit $D \subset\subset D'$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D'}$. Dann ist $f(\zeta)$ auf D' holomorph, und das Integral verschwindet auf Grund des Cauchy'schen Integralsatzes für Sterngebiete. ∎

Definition

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt ***einfach-zusammenhängend***, falls jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion besitzt.

3.2.13. Satz

1. *Jedes sternförmige Gebiet ist einfach-zusammenhängend.*
2. *Sind G_1 und G_2 einfach-zusammenhängende Gebiete und ist $G_1 \cap G_2 \neq \varnothing$ zusammenhängend, so ist auch $G_1 \cup G_2$ einfach-zusammenhängend.*

Beweis: 1) ist klar, auf Grund des Cauchy'schen Integralsatzes.

2) $G := G_1 \cup G_2$ ist wieder ein Gebiet. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gibt es Stammfunktionen F_λ von $f|_{G_\lambda}$, für $\lambda = 1, 2$. Auf $G_1 \cap G_2$ ist dann $(F_1 - F_2)'(z) \equiv 0$, also $F_1(z) - F_2(z) \equiv c$ konstant. Sei

$$F(z) := \begin{cases} F_1(z) & \text{auf } G_1, \\ F_2(z) + c & \text{auf } G_2. \end{cases}$$

Offensichtlich ist F holomorph auf G und $F' = f$. ∎

Bemerkung: Man kann einfach-zusammenhängende Gebiete auch rein topologisch charakterisieren. Das gibt dem folgenden Satz seinen Sinn.

3.2.14. Cauchy'scher Integralsatz (für einfach-zusammenhängende Gebiete)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach-zusammenhängendes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg α in G :

$$\int_\alpha f(z)\, dz = 0.$$

BEWEIS: Trivial! ∎

3.2.15. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach-zusammenhängendes Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $f(z) \neq 0$ auf G und f' holomorph. Dann gibt es eine holomorphe Funktion h auf G, so dass $\exp(h(z)) = f(z)$ für alle $z \in G$ gilt.

BEWEIS: Weil f'/f holomorph auf G ist, gibt es eine Stammfunktion F von f'/f. Sei $H := (\exp \circ F)/f$. Dann ist

$$H'(z) = \frac{\exp(F(z)) \cdot F'(z) \cdot f(z) - \exp(F(z)) \cdot f'(z)}{f(z)^2} = 0 \text{ für alle } z \in G,$$

also $H(z) \equiv c$ konstant. Deshalb ist $\exp(F(z)) = c \cdot f(z)$ und $c \neq 0$. Man setze $h(z) := F(z) - \log(c)$, mit einem geeigneten Logarithmus. Dann ist $e^h = f$. ∎

Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet. Eine ***Logarithmusfunktion*** auf G ist eine stetige Funktion $L : G \to \mathbb{C}$, so dass $\exp(L(z)) \equiv z$ auf G gilt.

3.2.16. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet.

1. *Ist $L : G \to \mathbb{C}$ eine Logarithmusfunktion, so ist L holomorph und $L'(z) = 1/z$.*

2. *Je zwei Logarithmusfunktionen auf G unterscheiden sich um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi\,\mathrm{i}$.*

3. *Ist $G \subset \mathbb{C}^*$ einfach-zusammenhängend, so gibt es auf G eine Logarithmusfunktion.*

Beweis: 1) Da exp lokal injektiv ist, folgt wie bei den schon behandelten Logarithmuszweigen, dass L komplex differenzierbar und $L'(z) = 1/z$ ist.

2) Ist $\exp(L_1(z)) = \exp(L_2(z)) = z$ auf G, so ist $L_1 - L_2$ holomorph und $(L_1 - L_2)'(z) \equiv 0$, also $L_1(z) - L_2(z) \equiv c$ auf G. Andererseits nimmt $L_1 - L_2$ nur Werte in $2\pi\mathrm{i}\,\mathbb{Z}$ an. Daraus folgt die Behauptung.

3) Die Funktion $f(z) := z$ ist holomorph und ohne Nullstellen auf G. Wir haben oben schon gezeigt, dass dann eine holomorphe Funktion L mit $\exp(L(z)) = z$ ist. Also ist L eine Logarithmusfunktion. ■

Wir wollen jetzt zeigen, dass der Wert einer holomorphen Funktion f an einer Stelle z_0 durch das Integral über f und einen geschlossenen Weg um z_0 herum berechnet werden kann.

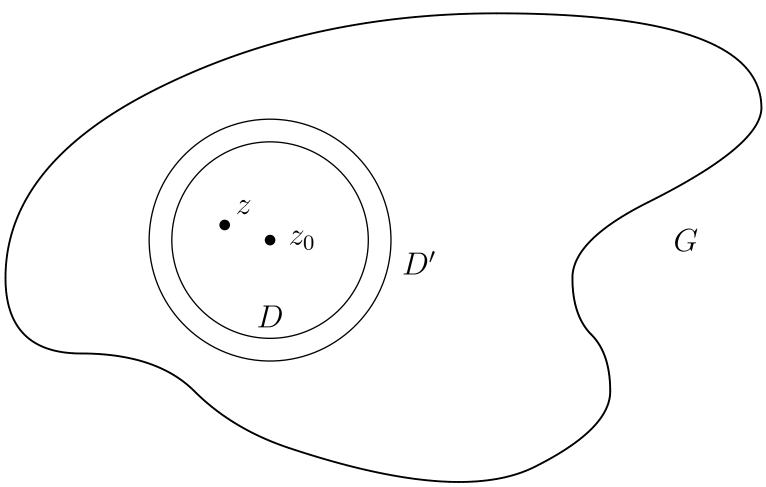
3.2.17. Die Cauchy'sche Integralformel

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $r > 0$, so dass $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ ist.

Dann gilt für alle $z \in D$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Beweis: Wir können ein $\varepsilon > 0$ finden, so dass auch noch $D' := D_{r+\varepsilon}(z_0) \subset G$ ist.



Sei $z \in D$ beliebig vorgegeben. Da f in G holomorph ist, gibt es eine in z stetige Funktion Δ_z auf G, so dass für alle $\zeta \in G$ gilt:

$$f(\zeta) = f(z) + \Delta_z(\zeta) \cdot (\zeta - z).$$

Dann ist

$$\Delta_z(\zeta) = \begin{cases} \big(f(\zeta) - f(z)\big)/(\zeta - z) & \text{falls } \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{falls } \zeta = z. \end{cases}$$

Nachdem Δ_z überall stetig und außerhalb z sogar holomorph ist, können wir auf der sternförmigen Menge D' den Cauchyschen Integralsatz auf Δ_z und den geschlossenen Weg $\partial D \subset D'$ anwenden:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial D} \Delta_z(\zeta)\, d\zeta = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \cdot \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \cdot 2\pi\,\mathsf{i}\,. \end{aligned}$$

■

Beim Beweis der Cauchyschen Integralformel ist nun ganz deutlich die **komplexe** Differenzierbarkeit eingegangen. Dementsprechend hat der Satz Konsequenzen, die weit über das hinausgehen, was man von einer reell differenzierbaren Abbildung erwarten würde.

3.2.18. Beispiele

A. Es soll das Integral $\displaystyle\int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z^2 + 2z}\, dz$ berechnet werden.

Indem man den Nenner in Linearfaktoren zerlegt und eine Partialbruchzerlegung durchführt, bringt man das Integral in die Form, die auf der rechten Seite der Cauchyschen Integralformel steht:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z^2 + 2z}\, dz &= \int_{\partial D_3(0)} \left[\frac{1/2}{z} - \frac{1/2}{z+2}\right] \cdot e^z\, dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z}\, dz - \frac{1}{2} \int_{\partial D_3(0)} \frac{e^z}{z - (-2)}\, dz \\ &= 2\pi\,\mathsf{i} \cdot \frac{1}{2} \cdot [e^0 - e^{-2}] = \pi\,\mathsf{i}\,(1 - e^{-2}). \end{aligned}$$

B. Sei $C = \partial D_1(\frac{1}{2}\,\mathsf{i})$. Dann liegt i im Innern von C, und $-\mathsf{i}$ nicht. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dz}{z^2 + 1} &= \frac{1}{2\,\mathsf{i}} \int_C \frac{dz}{z - \mathsf{i}} - \frac{1}{2\,\mathsf{i}} \int_C \frac{dz}{z + \mathsf{i}} \\ &= \frac{1}{2\,\mathsf{i}} \cdot [2\pi\,\mathsf{i} - 0] = \pi. \end{aligned}$$

3.3 Der Entwicklungssatz

Wir kommen jetzt zur wichtigsten Folgerung aus der Cauchy'schen Integralformel. Der sogenannte „Entwicklungssatz“ ist höchst überraschend und lässt die holomorphen Funktionen in ganz neuem Licht erscheinen. Entdeckt wurde er von Taylor und Cauchy beim Versuch, die Taylor-Entwicklung von komplex differenzierbaren Funktionen zu berechnen. Die Motivation erwuchs also aus der Idee, bekannte Sachverhalte aus dem Reellen ins Komplexe zu übertragen. Cauchys Integralformel lieferte schließlich das passende Hilfsmittel.

3.3.1. Entwicklungs-Lemma

Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, $f : |\alpha| \to \mathbb{C}$ stetig, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus |\alpha|$ und $R := \operatorname{dist}(z_0, |\alpha|)$.

Dann gibt es eine Potenzreihe $p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, die im Innern von $D_R(z_0)$ absolut und gleichmäßig gegen die auf $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$ definierte Funktion

$$F(z) := \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int\limits_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

konvergiert. Die Koeffizienten a_n genügen der Formel

$$a_n = \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Insbesondere ist F holomorph auf $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$.

Beweis: Ist $\zeta \in |\alpha|$ und $z \in D_R(z_0)$, so ist $|z - z_0| < R \le |\zeta - z_0|$. Wir können den folgenden „Trick mit der geometrischen Reihe“ anwenden:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\
&= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - (z - z_0)/(\zeta - z_0)} \\
&= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n .
\end{aligned}$$

Da f auf der kompakten Menge $|\alpha|$ beschränkt ist, etwa durch eine Zahl $C > 0$, ist

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n \right| \le \frac{C}{R} \cdot \left(\frac{|z - z_0|}{R} \right)^n, \text{ für } \zeta \in |\alpha| \text{ und } z \in D_R(z_0).$$

Die Reihe über die Terme auf der rechten Seite konvergiert für jedes feste $z \in D_R(z_0)$. Nach dem Weierstraß-Kriterium konvergiert dann (für festes z) die Reihe

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$$

absolut und gleichmäßig in ζ auf $|\alpha|$. Da die Partialsummen stetig in ζ sind, kann man Grenzwertbildung und Integration vertauschen und erhält:

$$\frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \right) \cdot (z - z_0)^n.$$

Die Reihe konvergiert für jedes $z \in D_R(z_0)$.

Wir setzen

$$a_n := \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ absolut und gleichmäßig im Innern von $D_R(z_0)$ gegen $F(z)$. Da man diese Konstruktion in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus |\alpha|$ durchführen kann, ist F überall holomorph. ■

Jetzt sind wir auf den folgenden Satz vorbereitet:

3.3.2. Entwicklungssatz von Cauchy

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$. Ist $R > 0$ der Radius der größten (offenen) Kreisscheibe um z_0, die noch in G hineinpasst, so gibt es eine Potenzreihe

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

die für jedes r mit $0 < r < R$ auf $D_r(z_0)$absolut und gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert. Für jedes solche r ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int\limits_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta,$$

und die Funktion f ist auf G beliebig oft komplex differenzierbar.

BEWEIS: Sei $0 < r < R$ und $\alpha(t) := z_0 + re^{\mathsf{i}t}$, $0 \le t \le 2\pi$. Dann ist f auf $|\alpha|$ stetig und man kann das Entwicklungs-Lemma anwenden. Es gibt eine Potenzreihe $p(z)$, die im Innern von $D_r(z_0)$ absolut und gleichmäßig gegen $F(z) := \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ konvergiert. Die Koeffizienten der Reihe sind durch die Formel

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int\limits_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$$

gegeben.

Nach der Cauchyschen Integralformel ist aber $F(z) = f(z)$, und es ist klar, dass die Koeffizienten a_n nicht von r abhängen. ■

3.3.3. Folgerung (Höhere Cauchy'sche Integralformeln)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f auf G beliebig oft komplex differenzierbar, und für $z_0 \in G$, $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ und $z \in D$ ist

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis: Ist $z \in D$, so gibt es nach dem Entwicklungslemma eine Potenzreihe $p(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w - z)^n$, die auf einer Umgebung $U = U_\delta(z)$ gegen die holomorphe Funktion $F(w) := \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \displaystyle\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta$ konvergiert. Dabei ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Nach der Cauchy'schen Integralformel ist aber $f(w) = F(w) = p(w)$ für $w \in U$, und daher $f^{(k)}(z) = p^{(k)}(z) = a_k \cdot k!$. Daraus folgt:

$$\frac{f^{(k)}(z)}{k!} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta.$$

Das gilt für jedes $z \in D$ und $k \in \mathbb{N}_0$. ■

Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in G$ ***in eine Potenzreihe entwickelbar***, wenn es ein $r > 0$ gibt, so dass $D := D_r(z_0) \subset\subset G$ ist und f auf D mit einer konvergenten Potenzreihe übereinstimmt.

f heißt auf G ***analytisch***, wenn f in jedem Punkt von G in eine Potenzreihe entwickelbar ist.

Analytische Funktionen sind beliebig oft komplex differenzierbar! Man beachte aber, dass man i.a. nicht mit einer einzigen Potenzreihe auskommt.

3.3.4. Satz von Morera

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und $\displaystyle\int_{\partial\triangle} f(z)\, dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\triangle \subset G$. Dann ist f holomorph auf G.

Beweis: f besitzt zumindest lokal stets eine (holomorphe) Stammfunktion F. Aber F ist beliebig oft komplex differenzierbar, und dann ist auch $f = F'$ holomorph. ∎

Fassen wir nun zusammen:

3.3.5. Theorem

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Folgende Aussagen über eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:

1. *f ist reell differenzierbar und erfüllt die Cauchyschen DGLn.*
2. *f ist komplex differenzierbar.*
3. *f ist holomorph.*
4. *f ist beliebig oft komplex differenzierbar.*
5. *f ist analytisch.*
6. *f ist stetig und besitzt lokal immer eine Stammfunktion.*
7. *f ist stetig, und es ist $\displaystyle\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\triangle$ in G.*

Wir haben eine erstaunliche Entdeckung gemacht. Eine einmal komplex differenzierbare Funktion ist automatisch schon beliebig oft komplex differenzierbar. Das ist ein großer Unterschied zur reellen Theorie!

Und wir sind noch lange nicht am Ende. Die holomorphen Funktionen weisen noch viele andere bemerkenswerte Eigenschaften auf.

3.3.6. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und außerhalb von $z_0 \in G$ sogar holomorph. Dann ist f auf ganz G holomorph.

Beweis: Aus den Voraussetzungen folgt, dass f lokal immer eine Stammfunktion besitzt. ∎

3.3.7. Riemann'scher Hebbarkeitssatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und f auf $G \setminus \{z_0\}$ holomorph. Bleibt f in der Nähe von z_0 beschränkt, so gibt es eine holomorphe Funktion $\widehat{f}$ auf G, die auf $G \setminus \{z_0\}$ mit f übereinstimmt.

Beweis: Wir benutzen einen netten kleinen Trick:

$$\text{Sei} \quad F(z) := \begin{cases} f(z) \cdot (z - z_0) & \text{für } z \neq z_0, \\ 0 & \text{für } z = z_0. \end{cases}$$

Wegen der Beschränktheit von f ist F stetig in G. Außerdem ist F natürlich holomorph auf $G \setminus \{z_0\}$. Beides zusammen ergibt, dass F auf ganz G holomorph ist. Also gibt es eine Darstellung

$$F(z) = F(z_0) + \Delta(z) \cdot (z - z_0),$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion Δ. Da $\Delta(z) = f(z)$ außerhalb von z_0 holomorph ist, muss Δ sogar auf ganz G holomorph sein. Wir können $\widehat{f} := \Delta$ setzen. ∎

Jetzt untersuchen wir die Nullstellen einer holomorphen Funktion.

3.3.8. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $f(z_0) = 0$. Dann ist entweder $f^{(k)}(z_0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, oder es gibt ein $k > 0$, eine offene Umgebung $U = U(z_0) \subset G$ und eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$, so dass gilt:

1. *$f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$ für $z \in U$.*
2. *$g(z_0) \neq 0$*

Die Zahl k ist eindeutig bestimmt durch

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \textit{und} \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Beweis: Wählt man für U eine kleine Kreisscheibe um z_0, so hat man auf U eine Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Da $f(z_0) = 0$ ist, muss $a_0 = 0$ sein. Ist nicht $a_k = 0$ für alle k, so gibt es ein kleinstes $k \geq 1$, so dass $a_k \neq 0$ ist. Dann ist

$$f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z), \quad \text{mit } g(z) := \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+k} (z - z_0)^m.$$

Mit Hilfe des Lemmas von Abel sieht man sofort, dass die Reihe für $g(z)$ ebenfalls auf U konvergiert. Das ergibt die gewünschte Darstellung, und außerdem ist $g(z_0) = a_k \neq 0$.

Weiter ist

$$f^{(n)}(z_0) = n! a_n \begin{cases} = 0 & \text{für } n = 0, \ldots, k-1 \\ \neq 0 & \text{für } n = k. \end{cases}$$

Dadurch ist k auch eindeutig festgelegt. ∎

Die Zahl k nennt man die ***Ordnung der Nullstelle von f in*** z_0.

Von besonderer Bedeutung ist der

3.3.9. Identitätssatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet (hier ist wichtig, dass G zusammenhängend ist!). Für zwei holomorphe Funktionen $f, g : G \to \mathbb{C}$ ist äquivalent:

1. *$f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$.*
2. *$f(z) = g(z)$ für alle z aus einer Teilmenge $M \subset G$, die wenigstens einen Häufungspunkt in G hat.*
3. *Es gibt einen Punkt $z_0 \in G$, so dass $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist.*

BEWEIS: (1) $\implies$ (2) ist trivial.

(2) $\implies$ (3): Ist $z_0 \in G$ Häufungspunkt der Menge $M \subset G$, so gibt es eine Folge (z_ν) in M, die gegen z_0 konvergiert. Wegen der Stetigkeit ist

$$f(z_0) = \lim_{\nu\to\infty} f(z_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} g(z_\nu) = g(z_0).$$

Es reicht, zu zeigen: Ist h holomorph und $h(z) = 0$ für alle $z \in M \cup \{z_0\}$, so ist $h^{(k)}(z_0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Wenn Letzteres nicht erfüllt ist, gibt es ein k und eine holomorphe Funktion q, so dass $h(z) = (z - z_0)^k \cdot q(z)$ und $q(z_0) \neq 0$ ist. Dann wäre aber auch $q(z_\nu) = 0$ für alle ν und damit $q(z_0) = 0$. Widerspruch!

(3) $\implies$ (1): Sei $h := f - g$ und $N := \{z \in G \mid h^{(k)}(z) = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0\}$. Dann liegt z_0 in N, also ist $N \neq \varnothing$. Außerdem ist N offen: Ist nämlich $w_0 \in N$, so sind in der Potenzreihenentwicklung von h in w_0 alle Koeffizienten $= 0$, und das bedeutet, dass h auf einer ganzen Umgebung von w_0 identisch verschwindet.

Andererseits ist auch $G \setminus N$ offen, denn es gilt:

$$\begin{aligned} G \setminus N &= \{z \in G \mid \exists\, k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } h^{(k)}(z) \neq 0\} \\ &= \bigcup_k \{z \in G \mid h^{(k)}(z) \neq 0\}, \end{aligned}$$

und das ist eine Vereinigung offener Mengen.

Die charakteristische Funktion von N ist demnach auf G eine lokal-konstante Funktion, und da G ein Gebiet ist, muss sie konstant sein. Also ist $G = N$. ∎

Die Menge M, die im Satz vorkommt, kann z.B. eine kleine Umgebung U eines Punktes $z_0 \in G$ sein. Der Identitätssatz sagt: eine holomorphe Funktion auf G ist schon durch ihre Werte auf U festgelegt. Das zeigt eine gewisse Starrheit der holomorphen Funktionen. Wackelt man im Lokalen an ihnen, so wackelt stets die ganze Funktion mit!

3.3.10. Folgerung

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht die Nullfunktion, so ist $\{z \in G \mid f(z) = 0\}$ in G abgeschlossen und diskret[2] *in G.*

Die Cauchysche Integralformel zeigt, dass der Wert einer holomorphen Funktion in einem Punkt durch die Werte auf einer Kreislinie um den Punkt herum festgelegt sind. Noch deutlicher können wir das durch die folgende Formel ausdrücken:

3.3.11. Mittelwerteigenschaft

Ist f holomorph auf dem Gebiet G, $z_0 \in G$ und $D_r(z_0) \subset\subset G$, dann ist

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\mathrm{i}\,t})\,dt.$$

Zum Beweis braucht man nur die Parametrisierung der Kreislinie in die Cauchysche Integralformel einzusetzen.

3.3.12. Maximumprinzip

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Besitzt $|f|$ in G ein lokales Maximum, so ist f konstant.

Beweis: Wenn $|f|$ in $z_0 \in G$ ein Maximum besitzt, dann gibt es ein $r > 0$, so dass $|f(z)| \le |f(z_0)|$ für $|z - z_0| \le r$ ist.

Aus der Mittelwerteigenschaft folgt für $0 < \varrho < r$:

$$|f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \varrho e^{\mathrm{i}\,t})|\,dt \le |f(z_0)|.$$

Dann muss natürlich überall sogar das Gleichheitszeichen stehen, und es folgt:

$$\int_0^{2\pi} \big(|f(z_0 + \varrho e^{\mathrm{i}\,t})| - |f(z_0)|\big)\,dt = 0.$$

Da der Integrand überall ≤ 0 und $\varrho < r$ beliebig ist, folgt:

$$|f(z)| = |f(z_0)| \text{ für } |z - z_0| < r.$$

Also ist $|f|$ auf $D_r(z_0)$ konstant, und dann natürlich auch f selbst. Schließlich wenden wir den Identitätssatz an und erhalten, dass f auf ganz G konstant sein muss. ∎

[2] Eine Teilmenge D eines topologischen Raumes X heißt *diskret in X*, falls es zu jedem Punkt $x \in D$ eine Umgebung U gibt, so dass $U \cap D = \{x\}$ ist.

Man kann das Maximumprinzip auch so formulieren:

Eine nicht-konstante holomorphe Funktion nimmt nirgendwo in ihrem Definitionsbereich ein lokales Maximum an (worunter stets ein Maximum von $|f|$ zu verstehen wäre).

3.3.13. Folgerung

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf G, so nimmt $|f|$ sein Maximum auf dem Rand von G an.

BEWEIS: Als stetige Funktion auf einer kompakten Menge muss $|f|$ irgendwo auf $\overline{G}$ sein Maximum annehmen. Wegen des Maximumprinzips kann das nicht in G liegen. Da bleibt nur der Rand. ∎

3.3.14. Minimumprinzip

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und ohne Nullstellen. Besitzt $|f|$ in G ein lokales Minimum, so ist f konstant.

Der triviale BEWEIS sei dem Leser überlassen.

3.3.15. Cauchy'sche Ungleichungen

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $r > 0$ mit $D_r(z_0) \subset\subset G$. Dann gelten die folgenden Abschätzungen:

1. $|f(z_0)| \le \max\limits_{\partial D_r(z_0)} |f|$.
2. $|f'(z)| \le \dfrac{4}{r} \max\limits_{\partial D_r(z_0)} |f|$ *für* $z \in \overline{D_{r/2}(z_0)}$.

BEWEIS: 1) folgt sofort aus dem Maximumprinzip.

2) Für $z \in \overline{D_{r/2}(z_0)}$ gilt die Cauchy'sche Integralformel

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta.$$

Für $\zeta \in \partial D_r(z_0)$ ist $|\zeta - z| \ge r/2$. Also ergibt die Standardabschätzung:

$$|f'(z)| \le \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \max_{\partial D_r(z_0)} \Big| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \Big| \le \frac{4}{r} \cdot \max_{\partial D_r(z_0)} |f|.$$

Das ist die gewünschte Ungleichung. ∎

3.3.16. Satz von Liouville

Ist f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist f konstant.

Beweis: Sei $|f(z)| \le C$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus der zweiten Cauchy'schen Ungleichung folgt:

$$|f'(z)| \le \frac{4}{r} \max_{\partial D_r(z_0)} |f| \le \frac{4C}{r}, \text{ für } |z| \le r/2.$$

Dann ist aber $f'(z) \equiv 0$ auf jeder festen Kreisscheibe um Null, also sogar auf ganz $\mathbb{C}$. Und f selbst ist konstant. ∎

Wer das Wundern noch nicht verlernt hat, sollte an dieser Stelle einmal innehalten und sich bewusst machen, wieviele erstaunliche Eigenschaften holomorpher Funktionen wir in kurzer Zeit hergeleitet haben!

Definition

Eine ***ganze Funktion*** ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktion.

Beispiele sind die Exponentialfunktion, der Sinus und der Cosinus, vor allem aber die Polynome.

3.3.17. Fundamentalsatz der Algebra

Jedes nicht konstante Polynom besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis: Wir machen die Annahme, es gebe ein Polynom $p(z)$ vom Grad $n \ge 1$ ohne Nullstellen. Es sei $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ mit $a_n \ne 0$. Dann ist

$$f(z) := \frac{1}{p(z)}$$

eine ganze Funktion, und für $z \ne 0$ ist

$$f(z) = \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{q(1/z)},$$

mit dem Polynom $q(w) := a_n + a_{n-1} w + \cdots + a_1 w^{n-1} + a_0 w^n$. Wegen $q(0) = a_n \ne 0$ ist

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{q(0)} = 0.$$

Also ist f eine beschränkte ganze Funktion und nach Liouville konstant, im Gegensatz zur Annahme. ∎

Hieraus folgt per Induktion, dass jedes Polynom vom Grad $n \ge 1$ genau n Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) besitzt und daher in n Linearfaktoren zerfällt.

3.3.18. Konvergenzsatz von Weierstraß

Ist (f_n) eine Folge von holomorphen Funktionen auf einem Gebiet G, die lokal gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f konvergiert, so ist auch f holomorph und (f_n') konvergiert auf G lokal gleichmäßig gegen f'.

Beweis: Die Grenzfunktion f ist auf jeden Fall stetig. Sei $\triangle$ ein abgeschlossenes Dreieck in G. Dann konvergiert (f_n) auf $\partial\triangle$ gleichmäßig, und man kann den Satz über die Vertauschbarkeit von Integration und Limesbildung anwenden:

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\triangle} f_n(z)\,dz = 0.$$

Also ist f nach dem Satz von Morera holomorph.

Sei $z_0 \in G$ beliebig. Es genügt zu zeigen, dass es eine offene Umgebung $U = U(z_0) \subset G$ gibt, so dass (f_n') auf U gleichmäßig gegen f' konvergiert. Dazu sei $r > 0$ so gewählt, dass $D_r(z_0) \subset\subset G$ ist, und dann $U := D_{r/2}(z_0)$ gesetzt.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Für $z \in U$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|f_n'(z) - f'(z)| \le \frac{4}{r} \cdot \max_{\partial D_r(z_0)} |f_n - f|.$$

Man kann n_0 so groß wählen, dass $\max_{\partial D_r(z_0)} |f_n - f| < \frac{r}{4} \cdot \varepsilon$ für $n \ge n_0$ ist. Aber dann ist $|f_n'(z) - f'(z)| < \varepsilon$ für $z \in U$ und $n \ge n_0$. Das heißt, dass (f_n') lokal gleichmäßig gegen f' konvergiert. ∎

Definition

1. Seien B_1, B_2 zwei offene Mengen in $\mathbb{C}$, $f : B_1 \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(B_1) = B_2$. f heißt ***biholomorph***, falls f sogar bijektiv und f^{-1} holomorph ist.

2. Eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt ***in*** $z_0 \in G$ ***lokal biholomorph***, falls es eine offene Umgebung $U = U(z_0) \subset G$ und eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{C}$ gibt, so dass $f|_U : U \to V$ biholomorph ist.

3. f heißt ***auf*** G ***lokal biholomorph***, falls f in jedem Punkt $z \in G$ lokal biholomorph ist.

Offensichtlich gilt: Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ injektiv und lokal biholomorph, so ist $f(G)$ ebenfalls ein Gebiet und $f : G \to f(G)$ biholomorph.

3.3.19. Satz

Eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ist genau dann in $z_0 \in G$ lokal biholomorph, wenn $f'(z_0) \neq 0$ ist.

Beweis:

1) Ist $f(z_0) = w_0$ und f in z_0 lokal biholomorph, so gibt es offene Umgebungen $U = U(z_0)$ und $V = V(w_0)$, sowie eine holomorphe Funktion $g : V \to U$, so dass $g \circ f|_U = \mathrm{id}_U$ ist. Aber dann ist $1 = (g \circ f)'(z_0) = g'(w_0) \cdot f'(z_0)$, also $f'(z_0) \neq 0$.

2) Sei umgekehrt f holomorph und $f'(z_0) \neq 0$. Da f' holomorph und damit insbesondere stetig ist, besitzt f auf einer offenen Umgebung $U = U(z_0)$ eine reell differenzierbare Umkehrung g.

Auf U ist $f'(z) \neq 0$. Sei $z \in U$ und $f(z) = w$. Dann ist $Df(z) \circ Dg(w) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, also $f'(z) \cdot Dg(w)(v) = v$ und $Dg(w)(v) = (1/f'(z)) \cdot v$. Das ist eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, also ist g in w komplex differenzierbar. ∎

3.3.20. Satz von der Gebietstreue

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung, so ist auch $f(G)$ ein Gebiet.

Beweis: Das stetige Bild einer zusammenhängenden Menge ist wieder zusammenhängend. Wir müssen also nur zeigen, dass $f(G)$ offen ist.

Sei $z_0 \in G$ und $g(z) := f(z) - f(z_0)$, also $g(z_0) = 0$. Es reicht zu zeigen, dass 0 innerer Punkt von $g(G)$ ist.

Nach dem Identitätssatz gibt es eine Kreisscheibe $D = D_r(z_0) \subset G$, so dass $g(z) \neq 0$ auf ∂D ist. Sei $\varepsilon := \frac{1}{2} \min_{\partial D} |g| > 0$. Ist $w \in D_\varepsilon(0)$ und $h(z) := g(z) - w$, so ist $|h(z_0)| = |w| < \varepsilon$. Für $z \in \partial D$ ist andererseits $|h(z)| \geq |g(z)| - |w| \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$. Das bedeutet, dass $|h|$ ein Minimum in D annimmt. Aus dem Minimumprinzip folgt nun, dass h eine Nullstelle in D besitzt. Also gibt es ein $z \in D$ mit $g(z) = w$. Damit ist $D_\varepsilon(0) \subset g(D) \subset g(G)$. ∎

Und jetzt kommt noch ein weiterer erstaunlicher Satz:

3.3.21. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv.

Dann ist $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$, also insbesondere $f : G \to f(G)$ biholomorph.

Beweis: Da f' holomorph und nicht identisch Null ist, ist die Menge $A := \{z \in G \mid f'(z) = 0\}$ diskret in G. Weiter wissen wir schon, dass $f(G)$ ein Gebiet und $f : G \to f(G)$ stetig, offen und bijektiv ist, also ein Homöomorphismus. Daher ist auch $M := f(A)$ diskret in $f(G)$. Da $f : G \setminus A \to f(G) \setminus M$ bijektiv und lokal biholomorph, also sogar global biholomorph ist, gilt: $f^{-1} : f(G) \to G$ ist stetig und außerhalb M holomorph. Aber dann muss f^{-1} sogar auf ganz $f(G)$ holomorph sein. ∎

3.3.22. Satz

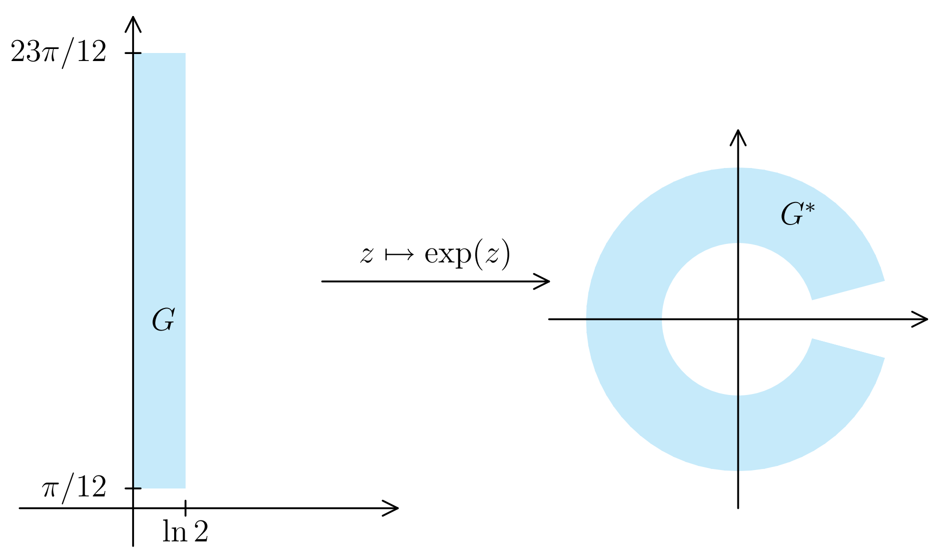
Sei G einfach-zusammenhängend, $F : G \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Dann ist auch $F(G)$ einfach-zusammenhängend.

Beweis: Wir wissen schon, dass $G^* := F(G)$ ein Gebiet ist. Sei f holomorph auf G^*. Dann ist $(f \circ F) \cdot F'$ holomorph auf G, und es gibt eine Stammfunktion g von $(f \circ F) \cdot F'$ auf G. Die Funktion $F^{-1} : G^* \to G$ ist ebenfalls holomorph, und damit auch $h := g \circ F^{-1}$. Es ist

$$h'(w) = g'(F^{-1}(w)) \cdot \frac{1}{F'(F^{-1}(w))} = f(w) \quad \text{für } w \in G^*.$$

∎

3.3.23. Beispiel



Das (sternförmige) Rechteck

$$G := \{x + \mathrm{i}\,y \,:\, 0 < x < \ln 2 \text{ und } \pi/12 < y < 23\pi/12\}$$

wird durch $w = \exp(z)$ biholomorph auf einen aufgeschlitzten Kreisring

$$G^* = \{re^{\mathrm{i}\,t} \,:\, 1 < r < 2 \text{ und } \pi/12 < t < 23\pi/12\}$$

abgebildet. Also ist G^* einfach-zusammenhängend.

Der komplette Kreisring $K := \{re^{\mathrm{i}\,t} \,:\, 1 < r < 2 \text{ und } 0 \leq t < 2\pi\}$ ist nicht einfach-zusammenhängend, denn die auf K holomorphe Funktion $f(z) := 1/z$ besitzt keine Stammfunktion.

3.4 Isolierte Singularitäten

Definition

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann nennt man z_0 eine ***isolierte Singularität*** von f.

Zunächst einmal ist z_0 nur eine Definitionslücke für f. Wie „singulär“ f tatsächlich in z_0 ist, das müssen wir erst von Fall zu Fall herausfinden. Entscheidend ist, dass z_0 eine *isolierte* Definitionslücke ist, dass es also keine Folge von singulären Punkten von f gibt, die sich gegen z_0 häuft. Der komplexe Logarithmus ist im Nullpunkt nicht definiert, aber er hat dort auch keine isolierte Singularität, denn man muss immer einen von Null nach ∞ führenden Weg aus $\mathbb{C}$ herausnehmen, um log auf dem Rest definieren zu können.

Wir wollen nun die isolierten Singularitäten klassifizieren.

Definition

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und f holomorph auf U, bis auf eine isolierte Singularität in einem Punkt $z_0 \in U$.

1. z_0 heißt eine ***hebbare Singularität*** von f, wenn es eine holomorphe Funktion $\widehat{f}$ auf U gibt, so dass $f(z) = \widehat{f}(z)$ für $z \in U \setminus \{z_0\}$ ist.

2. z_0 heißt eine ***Polstelle*** von f, wenn es ein $k \geq 1$, eine Umgebung $W = W(z_0) \subset U$ und eine auf W holomorphe Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$ gibt, so dass gilt:
$$f(z) \cdot (z - z_0)^k = g(z) \quad \text{für } z \in W \setminus \{z_0\}.$$
Die eindeutig bestimmte Zahl k mit dieser Eigenschaft heißt dann die Polstellenordnung von f in z_0.

3. z_0 heißt eine ***wesentliche Singularität*** von f, wenn z_0 weder hebbar noch eine Polstelle ist.

Offensichtlich schließen sich die Hebbarkeit und die Polstelle gegenseitig aus, so dass die isolierten Singularitäten durch die obige Definition tatsächlich klassifiziert werden. Die Polstellenordnung ist dadurch eindeutig bestimmt, dass k die kleinste natürliche Zahl ist, für die $f(z) \cdot (z - z_0)^k$ holomorph und $\neq 0$ in z_0 ist, während $f(z) \cdot (z - z_0)^{k+1}$ holomorph mit einer Nullstelle in z_0 ist.

Man kann die drei Typen isolierter Singularitäten auch auf Grund des Werteverhaltens von f in der Nähe von z_0 unterscheiden:

3.4.1. Satz

Sei z_0 eine isolierte Singularität von f.

1. *z_0 ist genau dann eine hebbare Singularität, wenn f in der Nähe von z_0 beschränkt bleibt.*
2. *Eine Polstelle liegt genau dann in z_0 vor, wenn $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$ ist.*

BEWEIS: 1) folgt sofort aus dem Riemannschen Hebbarkeitssatz.

2) Ist $f(z) \cdot (z - z_0)^k = g(z)$, mit einer holomorphen Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$, so gibt es eine Umgebung $V = V(z_0)$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $|g(z)| > \varepsilon$ für $z \in V$. Ist $z \neq z_0$, so gilt:

$$|f(z)| = \frac{1}{|z - z_0|^k} \cdot |g(z)| > \frac{\varepsilon}{|z - z_0|^k} \to +\infty \quad (\text{für } z \to z_0).$$

Setzen wir umgekehrt voraus, dass $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$ ist, so lässt sich $1/f$ zu einer holomorphen Funktion h mit $h(z_0) = 0$ fortsetzen. Das bedeutet, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion $\widetilde{h}$ in der Nähe von z_0 gibt, so dass gilt:

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^k \cdot \widetilde{h}(z) \text{ und } \widetilde{h}(z) \neq 0 \text{ nahe } z_0.$$

Also ist $f(z) = \dfrac{1}{(z - z_0)^k} \cdot g(z)$, wobei $g(z) := 1/\widetilde{h}(z)$ holomorph und $\neq 0$ nahe z_0 ist. ∎

3.4.2. Satz von Casorati-Weierstraß

f hat in z_0 genau dann eine wesentliche (isolierte) Singularität, wenn $f(z)$ in jeder Umgebung von z_0 jedem beliebigen Wert beliebig nahe kommt.

Das Kriterium bedeutet: Ist $w_0 \in \mathbb{C}$ ein beliebig vorgegebener Wert, so gibt es eine Folge von Punkten (z_n) mit $\lim_{n \to \infty} z_n = z_0$ und $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = w_0$.

BEWEIS: 1) Ist das Kriterium erfüllt, so ist $|f|$ nicht beschränkt und strebt auch nicht gegen $+\infty$. Also muss die Singularität wesentlich sein.

2) Sei umgekehrt z_0 eine wesentliche Singularität von f. Wir wollen zeigen, dass f in jeder Umgebung von z_0 jedem Wert $w_0 \in \mathbb{C}$ beliebig nahe kommt. Nehmen wir also an, es gibt eine offene Umgebung $V = V(z_0)$, ein $w_0 \in \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass gilt:

$$f(V \setminus \{z_0\}) \cap D_\varepsilon(w_0) = \varnothing.$$

Dann ist $g(z) := 1/\big(f(z) - w_0\big)$ holomorph auf $V \setminus \{z_0\}$ und beschränkt bei Annäherung an z_0. Es gibt daher eine holomorphe Funktion $\widehat{g}$ auf V mit $\widehat{g}|_{V \setminus \{z_0\}} = g$

Ist $\widehat{g}(z_0) = 0$, so hat $f(z) = w_0 + 1/g(z)$ in z_0 eine Polstelle. Ist dagegen $\widehat{g}(z_0) \neq 0$, so ist f nahe z_0 beschränkt, die Singularität also hebbar. Beides kann nicht sein! ■

3.4.3. Beispiele

A. Sei $f(z) := z/\sin z$ für $|z| < \pi$ und $z \neq 0$. Es ist $\sin(0) = 0$ und $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, also $\sin(z) = z \cdot h(z)$, mit einer nahe $z_0 = 0$ holomorphen Funktion h mit $h(0) = 1$. Aus Stetigkeitsgründen gibt es dann ein kleines $\varepsilon > 0$, so dass $\bigl|\sin(z)/z\bigr| = |h(z)| > 1 - \varepsilon$ für z nahe bei 0 und $z \neq 0$ ist.

Also ist $|f(z)| = \bigl|z/\sin(z)\bigr| < 1/(1-\varepsilon)$ in der Nähe von 0 beschränkt. (Die Abschätzung gilt natürlich nur für $z \neq 0$). Damit liegt eine hebbare Singularität vor. Der Wert, der in 0 ergänzt werden muss, ist gegeben durch $f(0) := 1/h(0) = 1$.

B. $f(z) := 1/z$ hat offensichtlich in $z = 0$ eine Polstelle.

C. Sei $f(z) := \exp(1/z)$. In $z_0 = 0$ liegt eine isolierte Singularität vor. Aber was für eine?

Setzen wir $z_n := 1/n$ ein, dann strebt $f(z_n) = e^n$ gegen ∞. Also kann die Singularität nicht hebbar sein.

Setzen wir dagegen $z_n := -\mathrm{i}/(2\pi n)$ ein, so erhalten wir $f(z_n) = e^{2\pi n \cdot \mathrm{i}} = 1$. Also strebt $f(z_n)$ in diesem Fall nicht gegen ∞. Damit kann auch keine Polstelle vorliegen, die Singularität ist wesentlich!

Die Methode, den Typ einer Singularität über das Werteverhalten der Funktion herauszubekommen, ist nicht immer so einfach anwendbar. Wir werden deshalb nach einer besseren Methode suchen.

Zur Motivation betrachten wir eine Funktion f, so dass $f(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^k} \cdot h(z)$ ist, mit einer nahe z_0 holomorphen Funktion h. Dann können wir h in z_0 in eine Taylorreihe entwickeln,

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \text{ für } |z-z_0| < r,$$

und dann gilt für $z \neq z_0$ und $|z - z_0| < r$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-k} = \frac{a_0}{(z-z_0)^k} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + a_k + a_{k+1}(z-z_0) + \cdots$$

Im Falle einer wesentlichen Singularität, etwa $f(z) := \exp(1/z)$, erhalten wir dagegen für $z \neq 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2} + \frac{1}{6} z^{-3} + \cdots$$

Die Reihe erstreckt sich über unendlich viele negative Potenzen von z. Wir werden sehen, dass es immer möglich ist, eine holomorphe Funktion um eine isolierte Singularität z_0 herum in eine Reihe zu entwickeln, die sowohl positive als auch negative Potenzen von $z - z_0$ enthalten kann.

Definition

Eine ***Laurent-Reihe*** ist eine Reihe der Form

$$L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Die Zahlen a_n heißen die *Koeffizienten* der Reihe, z_0 der Entwicklungspunkt.

$$\begin{aligned} H(z) &:= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \\ &= \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots \end{aligned}$$

heißt ***Hauptteil der Reihe***,

$$\begin{aligned} N(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

heißt ***Nebenteil*** der Reihe.

Die Laurentreihe $L(z) = H(z) + N(z)$ heißt *konvergent (absolut konvergent, lokal gleichmäßig konvergent usw.)*, wenn Hauptteil und Nebenteil es jeweils für sich sind.

Ist $0 \le r < R$, so nennt man

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$

den ***Kreisring*** um z_0 mit innerem Radius r und äußerem Radius R. Dabei ist die Möglichkeit $R = +\infty$ zugelassen.

3.4.4. Satz

Sei $L(z) = H(z) + N(z)$ eine Laurentreihe mit Entwicklungspunkt z_0, $R > 0$ der Konvergenzradius des Nebenteils $N(z)$ und $r^* > 0$ der „Konvergenzradius“ des Hauptteils, d.h. der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\widetilde{H}(w) := H(\frac{1}{w} + z_0) = a_{-1}w + a_{-2}w^2 + \cdots .$$

1. *Ist $r^* \cdot R \leq 1$, so konvergiert $L(z)$ auf keiner offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$.*

2. *Ist $r^* \cdot R > 1$und $r := 1/r^*$, so konvergiert $L(z)$ in dem Kreisring $K_{r,R}(z_0)$ absolut und lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion.*

Beweis: Die Reihe $\widetilde{H}(w)$ konvergiert nach Voraussetzung für $|w| < r^*$. Dann konvergiert $H(z) = \widetilde{H}(\dfrac{1}{z - z_0})$ für $|z - z_0| > \dfrac{1}{r^*} = r$.

Ist $r^* \cdot R \leq 1$, so ist $R \leq r$, und die Reihe kann nirgends konvergieren. Ist $r^* \cdot R > 1$, so konvergieren Haupt- und Nebenteil beide für $r < |z - z_0| < R$. ∎

Laurentreihen konvergieren also auf Ringgebieten. Lässt man den inneren Radius gegen 0 und den äußeren gegen ∞ gehen, so erhält man $\mathbb{C}^*$ als Beispiel eines ausgearteten Ringgebietes.

Wir wollen nun sehen, dass sich umgekehrt jede auf einem Ringgebiet definierte holomorphe Funktion dort in eine konvergente Laurentreihe entwickeln lässt. Auf dem Weg dahin brauchen wir ein paar Hilfssätze.

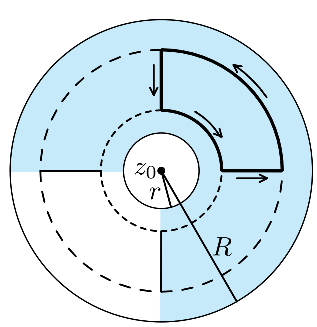
3.4.5. Hilfssatz 1

Sei $0 < r < R$ und f holomorph auf dem ***Kreisring***

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \,:\, r < |z - z_0| < R\}.$$

Für $r < \varrho_1 < \varrho_2 < R$ ist dann stets $\displaystyle\int_{\partial D_{\varrho_1}(z_0)} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\partial D_{\varrho_2}(z_0)} f(\zeta)\, d\zeta.$

Beweis: Man teile den Kreisring in mehrere Sektoren und wende jeweils den Cauchy'schen Integralsatz für einfach-zusammenhängende Gebiete an:



Das Integral über die Sektoren des kleineren Ringes $K_{\varrho_1,\varrho_2}(z_0)$ verschwindet immer. Addiert man diese Integrale, so fallen die über die „Verbindungsstege“ weg und es bleiben nur die Integrale über $\partial D_{\varrho_1}(z_0)$ und über $\partial D_{\varrho_1}(z_0)$ übrig, mit umgekehrten Vorzeichen. ■

3.4.6. Hilfssatz 2

Sei f holomorph auf dem Kreisring $K_{r,R}(z_0)$ und $r < \varrho < R$. Dann ist $F_\varrho(z) := \dfrac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \displaystyle\int_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \partial D_\varrho(z_0)$. Außerdem gilt:

1. *Ist $\varrho < \sigma < R$, so ist $F_\sigma = F_\varrho$ auf $D_\varrho(z_0)$.*
2. *Ist $r < \sigma < \varrho$, so ist $F_\sigma = F_\varrho$ auf $\mathbb{C} \setminus \overline{D_\varrho(z_0)}$.*

Beweis: Die Holomorphie von F_ϱ folgt aus dem Entwicklungslemma.

Sei $\varrho < \sigma < R$ und $z \in D_\varrho(z_0)$. Dann gibt es ein δ mit $\max(|z - z_0|, r) < \delta < \varrho$. Also ist $F_z(\zeta) := f(\zeta)/(\zeta - z)$ holomorph auf $K_{\delta,R}(z_0)$ und $\displaystyle\int_{\partial D_\sigma(z_0)} F_z(\zeta)\, d\zeta = \int_{\partial D_\varrho(z_0)} F_z(\zeta)\, d\zeta$, nach Hilfssatz 1.

Ist $r < \sigma < \varrho$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_\varrho(z_0)}$, so gibt es ein ε mit $\varrho < \varepsilon < \min(|z - z_0|, R)$. Dann ist F_z holomorph auf $K_{r,\varepsilon}(z_0)$, und man kann wieder Hilfssatz 1 anwenden. ■

3.4.7. Hilfssatz 3

Sei f holomorph auf dem Kreisring $K_{r,R}(z_0)$ und $r < \varrho_1 < |z - z_0| < \varrho_2 < R$. Dann ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{\partial D_{\varrho_2}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{\partial D_{\varrho_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Beweis: Sei $z \in K_{r,R}(z_0)$ und $r < \varrho_1 < |z - z_0| < \varrho_2 < R$. Dann wird durch

$$g(\zeta) := \begin{cases} \big(f(\zeta) - f(z)\big)/(\zeta - z) & \text{für } \zeta \neq z, \\ f'(z) & \text{für } \zeta = z \end{cases}$$

eine holomorphe Funktion auf $K_{r,R}(z_0)$ definiert. Nach Hilfssatz 1 ist

$$\int_{\partial D_{\varrho_1}(z_0)} g(\zeta)\, d\zeta = \int_{\partial D_{\varrho_2}(z_0)} g(\zeta)\, d\zeta,$$

und daher

$$\begin{aligned}\int_{\partial D_{\varrho_2}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - 2\pi\,\mathsf{i}\,f(z) &= \int_{\partial D_{\varrho_2}(z_0)} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta \\ &= \int_{\partial D_{\varrho_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta \;=\; \int_{\partial D_{\varrho_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.\end{aligned}$$

∎

Wir können jetzt das entscheidende Resultat für die Entwickelbarkeit in Kreisringen beweisen. Es benutzt noch gar keine Reihen:

3.4.8. Satz von der „Laurent-Trennung“

Sei f holomorph auf dem Ringgebiet $K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$. Dann gibt es eindeutig bestimmte holomorphe Funktionen

$$f^+ : D_R(z_0) \to \mathbb{C} \quad \text{und} \quad f^- : \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)} \to \mathbb{C}$$

mit

1. $f^+ + f^- = f$ *auf* $K_{r,R}(z_0)$.
2. $|f^-(z)| \to 0$ *für* $|z| \to \infty$.

Beweis: Wir beginnen mit der einfacher zu beweisenden Eindeutigkeit:

Es gebe zwei Darstellungen der gewünschten Art:

$$f = f_1^+ + f_1^- = f_2^+ + f_2^-.$$

Dann definieren wir eine neue Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$h(z) := \begin{cases} f_1^+(z) - f_2^+(z) & \text{für } z \in D_R(z_0), \\ f_2^-(z) - f_1^-(z) & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)}. \end{cases}$$

Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, und für $z \to \infty$ strebt sie gegen 0. Also handelt es sich um eine beschränkte ganze Funktion, die natürlich konstant sein muss (Liouville). Es ist nur $h(z) \equiv 0$ möglich.

Nun kommen wir zur Existenz von f^+ und f^-.

Für ϱ mit $r < \varrho < R$ und $|z - z_0| \neq \varrho$ setzen wir $F_\varrho(z) := \dfrac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \displaystyle\int_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$.

Dann ist F_ϱ in $\mathbb{C} \setminus \partial D_\varrho(z_0)$ holomorph. Ist $|z - z_0| < R$, so gibt es ein ϱ mit $|z - z_0| < \varrho < R$, und wir setzen

$$f^+(z) := F_\varrho(z).$$

Nach Hilfssatz 2 kommt es dabei nicht darauf an, welches ϱ wir nehmen.

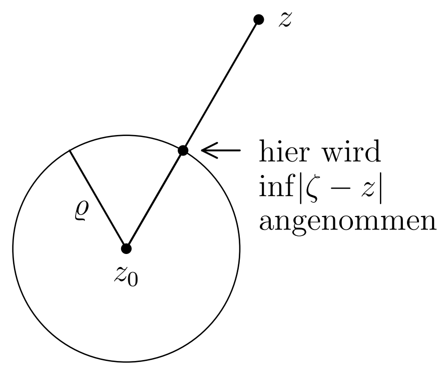
Entsprechend definiert man $f^- : \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)} \to \mathbb{C}$ durch $f^-(z) := -F_\varrho(z)$, wobei ϱ die Bedingung $r < \varrho < \min(R, |z - z_0|)$ erfüllen muss. Holomorphie und Unabhängigkeit von ϱ folgen wie bei f^+.

Ist nun $r < \varrho_1 < |z - z_0| < \varrho_2 < R$, so ergibt sich aus Hilfssatz 3:

$$f(z) = F_{\varrho_2}(z) - F_{\varrho_1}(z) = f^+(z) + f^-(z).$$

Nun müssen wir nur noch $|f^-(z)|$ für $|z| \to \infty$ abschätzen: Wir halten ϱ mit $r < \varrho < R$ fest und betrachten ein z mit $|z - z_0| > \varrho$. Dann ist

$$\begin{aligned} |f^-(z)| &= |F_\varrho(z)| \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \Big| \int_{\partial D_\varrho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \Big| \\ &\le \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\varrho \cdot \sup_{\partial D_\varrho} \Big| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \Big| \\ &\le \varrho \cdot \frac{1}{\inf_{\partial D_\varrho} |\zeta - z|} \cdot \sup_{\partial D_\varrho} |f(\zeta)| \\ &= \varrho \cdot \frac{1}{|z - z_0| - \varrho} \cdot \sup_{\partial D_\varrho} |f(\zeta)|, \end{aligned}$$



und dieser Ausdruck strebt gegen Null, für $|z| \to \infty$. ■

3.4.9. Folgerung

Sei f holomorph auf dem Ringgebiet $K = K_{r,R}(z_0)$. Dann lässt sich f auf K in eindeutiger Weise in eine Laurentreihe entwickeln:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,.$$

Die Reihe konvergiert im Innern von K absolut und gleichmäßig gegen f.

Für jedes ϱ mit $r < \varrho < R$ und jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Beweis: Wir führen die Laurentzerlegung durch:

$$f(z) = f^+(z) + f^-(z),$$

wobei f^+ holomorph auf $D_R(z_0)$ ist, und f^- holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)}$. Dann kann man f^+ in eine Taylorreihe entwickeln:

$$f^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

mit

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta, \quad r < \varrho < R.$$

Der Hauptteil muss etwas anders behandelt werden:

Die Abbildung $\varphi(w) := z_0 + 1/w$ bildet $D_{1/r}(0) \setminus \{0\}$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)}$ ab. Also ist $g(w) := f^-(z_0 + \dfrac{1}{w})$ holomorph in $D_{1/r}(0) \setminus \{0\}$, und

$$\lim_{w \to 0} g(w) = \lim_{z \to \infty} f^-(z) = 0.$$

Deshalb können wir auf g den Riemannschen Hebbarkeitssatz anwenden. Es gibt eine holomorphe Funktion $\widehat{g}$ auf $D_{1/r}(0)$, die außerhalb 0 mit g übereinstimmt. Nun entwickeln wir $\widehat{g}$ in eine Taylorreihe:

$$\widehat{g}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n, \qquad \text{für } |w| < \frac{1}{r}.$$

Da $\widehat{g}(0) = 0$ ist, ist $b_0 = 0$. Also gilt für $|z - z_0| > r$:

$$f^-(z) = g(\frac{1}{z - z_0}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z - z_0} \right)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n,$$

mit $a_{-n} := b_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$

Insgesamt ist

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{für } z \in K_{r,R}(z_0).$$

Die Reihe konvergiert im Innern des Ringgebietes absolut und lokal gleichmäßig. Sie kann also für $r < \varrho < R$ über $\partial D_\varrho(z_0)$ gliedweise integriert werden. Das gleiche gilt dann für

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{N+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-N-1}.$$

Benutzt man noch, dass

$$\int\limits_{\partial D_\varrho(z_0)} (z - z_0)^n \, dz = \begin{cases} 2\pi \mathrm{i} & \text{falls } n = -1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist, so erhält man:

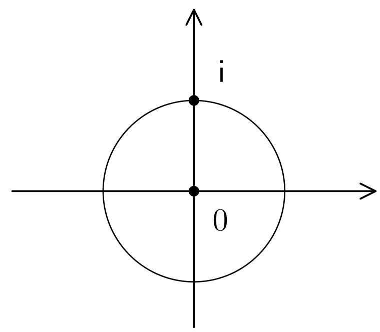
$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{N+1}}\,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\partial D_\varrho(z_0)} (z-z_0)^{n-N-1}\,dz = a_N.$$

■

3.4.10. Beispiel

Sei $f(z) := \dfrac{1}{z(z-\mathrm{i})^2}$.

Diese Funktion ist holomorph für $z \notin \{0, \mathrm{i}\}$.



Es gibt hier verschiedene Gebiete, in denen f in eine Laurentreihe entwickelt werden kann.

Im Kreisring $K_{0,1}(0)$:

Wir wollen f nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ entwickeln. Der erste Faktor hat schon die gewünschte Gestalt, und für den zweiten gibt es ein Kochrezept:

Will man – allgemein – eine Funktion der Gestalt $\dfrac{1}{z-z_0}$ in eine Laurentreihe um $a \neq z_0$ entwickeln, so benutzt man den Trick mit der geometrischen Reihe. Für alle z mit $|z-a| < |z_0-a|$ ist

$$|\frac{z-a}{z_0-a}| < 1,$$

also

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-z_0} &= \frac{1}{z-a-(z_0-a)} = -\frac{1}{z_0-a} \cdot \frac{1}{1-(z-a)/(z_0-a)} \\ &= -\frac{1}{z_0-a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)^n . \end{aligned}$$

Ist $|z-a| > |z_0-a|$, so geht man analog vor:

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1-(z_0-a)/(z-a)} = \frac{1}{z-a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_0-a}{z-a}\right)^n .$$

Ist $m \geq 2$, so ist

$$\frac{1}{(z-z_0)^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \left(\frac{1}{z-z_0}\right)^{(m-1)} .$$

Durch gliedweise Differentiation der Reihe für $\dfrac{1}{z-z_0}$ erhält man die Reihe für die m-ten Potenzen. Im vorliegenden Fall ist

$$\frac{1}{z-\mathrm{i}} = \mathrm{i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\mathrm{i}}\right)^n$$

und

$$\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} = -\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right)' = -\mathrm{i} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{z}{\mathrm{i}}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\mathrm{i}} = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot \left(\frac{z}{\mathrm{i}}\right)^n.$$

Also ist

$$f(z) = -\frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{\mathrm{i}^n} z^{n-1} = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)}{\mathrm{i}^{n+1}} z^n.$$

Im Kreisring $K_{1,\infty}(0)$:

Hier ist

$$\frac{1}{z-\mathrm{i}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{i}}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{i}^{n-1} \frac{1}{z^n}$$

und

$$\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} = -\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{i}^{n-1}(-n)\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{i}^{n-1} \cdot n \cdot \frac{1}{z^{n+1}}.$$

Also ist

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{i}^{n-1} \cdot n \cdot \frac{1}{z^{n+2}} = \sum_{n=3}^{\infty} \mathrm{i}^{n-3}(n-2)\frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-3} \mathrm{i}^{-n-1}(n+2) z^n,$$

wegen $\mathrm{i}^{-n-3}(-n-2) = \mathrm{i}^{-n-1}(n+2)$.

Im Kreisring $K_{0,1}(\mathrm{i})$:

Hier soll nach Potenzen von $(z-\mathrm{i})$ entwickelt werden. Es ist

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{-\mathrm{i}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-\mathrm{i}^{n+1})(z-\mathrm{i})^n,$$

also

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\mathrm{i}^{n+1})(z-\mathrm{i})^{n-2} = \sum_{n=-2}^{\infty} (-\mathrm{i}^{n+3})(z-\mathrm{i})^n \\ &= \frac{-\mathrm{i}}{(z-\mathrm{i})^2} + \frac{1}{z-\mathrm{i}} + \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i}^{n+1}(z-\mathrm{i})^n. \end{aligned}$$

Wir könnten noch den Kreisring $K_{1,\infty}(\mathrm{i})$ betrachten, aber darauf verzichten wir.

3.4.11. Satz

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von z_0 und z_0 eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Auf einem Kreisring $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ besitze f die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} z_0 \textit{ hebbar} &\iff a_n = 0 \textit{ für } \textbf{\textit{alle}}\ n < 0, \\ z_0 \textit{ Polstelle} &\iff \exists\, n < 0 \textit{ mit } a_n \neq 0 \textit{ und } a_k = 0 \textit{ für } k < n, \\ z_0 \textit{ wesentlich} &\iff a_n \neq 0 \textit{ für unendlich viele } n < 0. \end{aligned}$$

Beweis: 1) z_0 ist genau dann hebbar, wenn eine holomorphe Funktion $\widehat{f} : D_\varepsilon(z_0) \to \mathbb{C}$ existiert, mit $\widehat{f}\,\Big|_{K_{0,\varepsilon}(z_0)} = f$. Aber $\widehat{f}$ besitzt eine Taylorentwicklung:

$$\widehat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

2) z_0 ist genau dann eine Polstelle, wenn es in der Nähe von z_0 eine Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot h(z)$$

gibt, wobei gilt:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \qquad \text{mit } b_0 \neq 0.$$

Aber dann ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-k} = \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k} (z - z_0)^n.$$

3) z_0 ist wesentlich, wenn es weder hebbar noch Polstelle ist. Das lässt nur die Möglichkeit, dass $a_n \neq 0$ für unendlich viele n mit $n < 0$ ist. ∎

3.4.12. Beispiele

A. Die Funktion

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \cdot \left(z - \frac{z^3}{3!} \pm \ldots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} \pm \ldots$$

besitzt keinen Hauptteil, hat also in $z = 0$ eine hebbare Singularität. Natürlich ist

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

B. Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(z-\mathrm{i})^2}$$

hat eine Polstelle 1. Ordnung in 0 und eine Polstelle 2. Ordnung in i. Die nötigen Laurentreihen haben wir schon ausgerechnet.

C. Die Funktion

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \cdots$$

hat in $z = 0$ eine wesentliche Singularität.

D. Die Funktion

$$f(z) := \frac{1}{\sin z}$$

ist holomorph für $z \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Sei $g(z) := \dfrac{\sin z}{z}$. Dann ist g holomorph und $\neq 0$ auf $D_\pi(0)$, mit $g(0) = 1$. Aber dann ist auch $\dfrac{1}{g}$ holomorph auf $D_\pi(0)$, und man kann schreiben:

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \text{mit } a_0 = 1.$$

Also ist

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n.$$

Das bedeutet, dass f in $z = 0$ eine Polstelle 1. Ordnung besitzt.

Wir kehren noch einmal zu folgender Beziehung zurück:

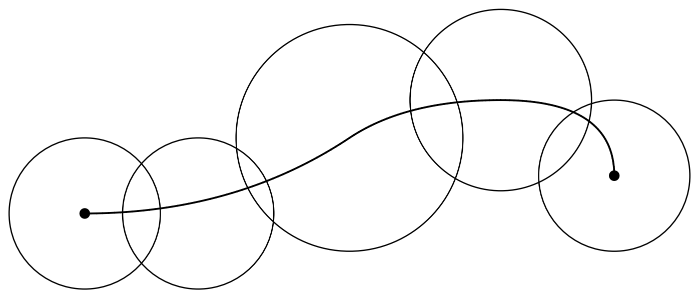
Ist $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ ein weiterer Punkt, $|z - z_0| \neq r$, so ist

$$\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 2\pi\,\mathrm{i} & \text{für } |z - z_0| < r, \\ 0 & \text{für } |z - z_0| > r. \end{cases}$$

Was passiert, wenn man den Kreisrand durch einen beliebigen Weg ersetzt?

3.4.13. Hilfssatz

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\alpha : [a, b] \to G$ ein stetiger Weg, so gibt es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ und Kreisscheiben $D_1, \ldots, D_n \subset G$, so dass $\alpha([t_{i-1}, t_i])$ in D_i enthalten ist, für $i = 1, \ldots, n$.



Man nennt $(D_1, D_2, \ldots, D_n)$ eine *Kreiskette längs* α. Beweis: Sei

$$t^* := \sup\{t \in [a,b] \;:\; \exists \text{ Kreiskette längs } \alpha|_{[a,t]}\}.$$

Offensichtlich existiert t^* mit $a < t^* \leq b$.

Ist $t^* = b$, so ist alles bewiesen. Andernfalls setzen wir $z^* := \alpha(t^*)$ und wählen ein $r > 0$, so dass $D := D_r(z^*) \subset G$ ist. Außerdem sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $\alpha([t^*-\varepsilon, t^*+\varepsilon]) \subset D$ ist. Dann gibt es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t^*-\varepsilon$ und Kreisscheiben $D_1, \ldots, D_n \subset G$ mit $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset D_i$. Dann ist $(D_1, \ldots, D_n, D)$ eine Kreiskette längs $\alpha|_{[a,s]}$, für $s := t^* + \varepsilon$. Wegen $s > t^*$ ist das ein Widerspruch.
■

Definition

Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg. Eine ***stetige Argumentfunktion*** längs α ist eine stetige Funktion $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\alpha(t) = |\alpha(t)| e^{\mathrm{i}\,\varphi(t)}$ für $t \in [a,b]$.

3.4.14. Satz

Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}^*$ ein Integrationsweg. Dann gibt es eine stetige Argumentfunktion $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ längs α. Je zwei solche Funktionen unterscheiden sich um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π.

Beweis: Es gibt eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ und eine dazu passende Kreiskette $(D_1, \ldots, D_n)$ längs α in $\mathbb{C}^*$. Auf jeder der Kreisscheiben D_ν gibt es eine Logarithmusfunktion L_ν. Sei $\psi_\nu : [t_{\nu-1}, t_\nu] \to \mathbb{R}$ definiert durch $\psi_\nu(t) := \operatorname{Im}(L_\nu \circ \alpha(t))$.

Zu jedem $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es ein $k_\nu \in \mathbb{Z}$, so dass $L_{\nu+1} = L_\nu + 2\pi\,\mathrm{i}\,k_\nu$ auf $D_\nu \cap D_{\nu+1}$ ist. Dann ist $\psi_{\nu+1} = \psi_\nu + 2\pi k_\nu$. Jetzt kann man definieren:

$$\varphi(t) := \begin{cases} \psi_1(t) & \text{für } t_0 \leq t < t_1 \\ \psi_\nu(t) - 2\pi(k_1 + \cdots + k_{\nu-1}) & \text{für } \nu \geq 2 \text{ und } t_{\nu-1} \leq t < t_\nu. \end{cases}$$

Offensichtlich ist φ stetig. Auf $[t_{\nu-1}, t_\nu)$ ist

$$|\alpha(t)| e^{\mathrm{i}\,\varphi(t)} = \exp\bigl(\ln|\alpha(t)| + \mathrm{i}\,\psi_\nu(t)\bigr) = \exp\bigl(L_\nu \circ \alpha(t)\bigr) = \alpha(t).$$

Also ist φ eine stetige Argumentfunktion längs α.

Sind $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Argumentfunktionen längs α, so ist $e^{\mathsf{i}\,\varphi(t)} = e^{\mathsf{i}\,\psi(t)}$, also $e^{\mathsf{i}\,(\varphi(t)-\psi(t))} \equiv 1$. Dann ist $\varphi - \psi$ eine stetige Funktion auf $[a, b]$, die nur Werte in $2\pi\mathbb{Z}$ annimmt. Weil $[a, b]$ zusammenhängend ist, muss $\varphi - \psi$ konstant (und ein Element von $2\pi\mathbb{Z}$) sein. ∎

3.4.15. Satz

Ist α geschlossen und φ eine stetige Argumentfunktion längs α, so ist $\varphi(b) - \varphi(a)$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π, das nicht von φ abhängt.

Beweis: Ist $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}^*$ ein geschlossener Weg und φ eine stetige Argumentfunktion längs α, so ist $\alpha(t)/|\alpha(t)| = e^{\mathsf{i}\,\varphi(t)}$, also

$$e^{\mathsf{i}\,(\varphi(b)-\varphi(a))} = \frac{\alpha(b)/|\alpha(b)|}{\alpha(a)/|\alpha(a)|} = 1,$$

also $\varphi(b) - \varphi(a) = 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Ist $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine weitere stetige Argumentfunktion längs α, so gibt es ein $k_0 \in \mathbb{Z}$, so dass $\psi(t) - \varphi(t) \equiv 2\pi k_0$ ist. Deshalb hängt der Wert von $\varphi(b) - \varphi(a)$ nicht von φ ab. ∎

Definition

Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $z \notin |\alpha|$. Dann heißt

$$n(\alpha, z) := \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_\alpha \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

die ***Umlaufszahl*** von α bezüglich z.

3.4.16. Satz

Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg, $z \notin |\alpha|$ und φ eine stetige Argumentfunktion längs α. Dann ist $n(\alpha, z) = \frac{1}{2\pi}\big(\varphi(b) - \varphi(a)\big)$.

Beweis: Sei $\alpha_z(t) := \alpha(t) - z$. Dann ist $0 \notin |\alpha|$ und

$$n(\alpha_z, 0) = \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{\alpha_z} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_a^b \frac{\alpha_z'(t)}{\alpha_z(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_a^b \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t) - z}\,dt = n(\alpha, z).$$

Wir brauchen also nur Umlaufszahlen um den Nullpunkt zu untersuchen. Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}^*$ ein geschlossener Integrationsweg und φ eine stetige Argumentfunktion längs α. Wir wählen eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ und eine dazu passende Kreiskette $(D_1, \ldots, D_n)$ längs α in $\mathbb{C}^*$. Auf jeder der Kreisscheiben D_ν gibt es eine Logarithmusfunktion L_ν, so dass gilt:

$$L_\nu(\alpha(t)) = \ln|\alpha(t)| + \mathsf{i}\,\varphi(t) \quad \text{für } t \in [t_{\nu-1}, t_\nu].$$

Setzt man $\alpha_\nu := \alpha|_{[t_{\nu-1},t_\nu]}$, so ist $(L_\nu \circ \alpha)'(t) = \alpha_\nu'(t)/\alpha_\nu(t)$ und

$$\begin{aligned}\int_\alpha \frac{d\zeta}{\zeta} &= \sum_{\nu=1}^n \int_{\alpha_\nu} \frac{d\zeta}{\zeta} = \sum_{\nu=1}^n \int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} \frac{\alpha_\nu'(t)}{\alpha_\nu(t)}\,dt = \sum_{\nu=1}^n \Big(L_\nu(\alpha(t_\nu)) - L_\nu(\alpha(t_{\nu-1}))\Big) \\ &= \sum_{\nu=1}^n \Big(\ln|\alpha(t_\nu)| - \ln|\alpha(t_{\nu-1})| + \mathsf{i}\,\varphi(t_\nu) - \mathsf{i}\,\varphi(t_{\nu-1})\Big) = \mathsf{i}\,(\varphi(b) - \varphi(a)),\end{aligned}$$

weil sich alle anderen Terme wegheben. Also ist $n(\alpha, z) = \frac{1}{2\pi}\big(\varphi(b) - \varphi(a)\big)$. ∎

Die Umlaufszahl eines geschlossenen Weges α um einen Punkt $z \notin |\alpha|$ ist immer eine ganze Zahl. Sie zählt, wie oft z von α umlaufen wird.

Wir wollen jetzt Umlaufszahlen berechnen. Dazu sind weitere geometrische Betrachtungen erforderlich.

Definition

Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, $B := \mathbb{C} \setminus K$ und $z_0 \in B$. Dann heißt die Menge

$$C_B(z_0) := \{z \in B \,:\, \exists \text{ stetiger Weg von } z_0 \text{ nach } z \text{ in } B.\}$$

die ***Zusammenhangskomponente*** von z_0 in B.

3.4.17. Satz

Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $B = \mathbb{C} \setminus K$.

1. *$C_B(z_0)$ ist das größte Teilgebiet von B, das z_0 enthält. Ist also $Z \subset B$ ein Gebiet mit $z_0 \in Z$, so liegt Z in einer Zusammenhangskomponente.*
2. *Je zwei verschiedene Zusammenhangskomponenten in B sind disjunkt.*
3. *Es gibt genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente.*
4. *B ist endliche Vereinigung von Zusammenhangskomponenten.*

Beweis: 1) Sei $C := C_B(z_0)$. Offensichtlich ist C ein Gebiet. Ist andererseits $G \subset B$ ein Gebiet, das z_0 enthält, so muss G definitionsgemäß in C liegen.

2) Gibt es einen Punkt $z_0 \in C_B(z_1) \cap C_B(z_2)$, so können Punkte $z' \in C_B(z_1)$ und $z'' \in C_B(z_2)$ durch einen über z_0 führenden Weg in B miteinander verbunden werden. Also stimmen die beiden Komponenten überein.

3) K ist kompakt und daher in einer abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D_R(0)}$ enthalten. Die zusammenhängende Menge $U := \mathbb{C} \setminus \overline{D_R(0)}$ liegt in einer (unbeschränkten) Komponente, jede andere Komponente muss in $D_R(0)$ enthalten, also beschränkt sein.

4) Ist $z \in B$, so liegt z in $C_B(z)$. Wegen (2) wird B in paarweise disjunkte Zusammenhangskomponenten zerlegt. Da man in jeder solchen Komponente einen Punkt mit rationalen Koordinaten auswählen kann, gibt es höchstens abzählbar viele Komponenten. Da das Komplement der unbeschränkten Komponente kompakt ist, kann es nur endlich viele beschränkte Komponenten geben. ■

3.4.18. Satz

Sei α ein geschlossener Integrationsweg in $\mathbb{C}$. Dann ist die Umlaufszahl $n(\alpha, z)$ auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$ konstant und $= 0$ auf der unbeschränkten Komponente.

Beweis: Da $n(\alpha, z)$ stetig ist, aber nur ganzzahlige Werte annimmt, muss die Umlaufszahl auf jeder Zusammenhangskomponente konstant sein.

Die Umlaufszahl auf der unbeschränkten Komponente berechnen wir wie folgt: Sei $|\alpha| \subset D_R(0)$. Ist $|z_0| > R$, so ist $f(z) := 1/(z - z_0)$ holomorph auf der sternförmigen Menge $D_R(0)$, besitzt dort also auch eine Stammfunktion. Daher ist

$$n(\alpha, z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\alpha f(z)\, dz = 0$$

und dann sogar $n(\alpha, z) = 0$ auf der gesamten unbeschränkten Komponente. ■

Es soll nun angedeutet werden, wie man zu einem geschlossenen Integrationsweg α ganz einfach „per Hand" sämtliche Umlaufszahlen $n(\alpha, z)$ bestimmen kann.

3.4.19. Satz

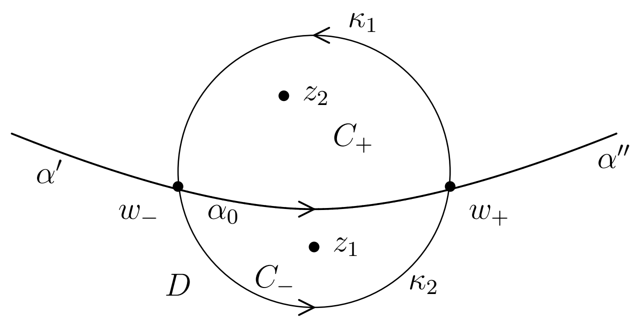
Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg, $t_0 \in (a, b)$, $z_0 := \alpha(t_0)$ und α in t_0 sogar differenzierbar, mit $\alpha'(t_0) \neq 0$. Es gebe ein $\varepsilon > 0$, so dass gilt:

1. *α läuft in $D_\varepsilon(z_0)$ von Rand zu Rand.*
2. *$D_\varepsilon(z_0) \setminus |\alpha|$ besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten C_+ und C_-.*
3. *Jeder Punkt aus $D_\varepsilon(z_0) \cap |\alpha|$ ist Randpunkt von C_+ und C_-.*
4. *C_+ liegt links von α und C_- liegt rechts von α.*

Ist dann $z_1 \in C_-$ und $z_2 \in C_+$, so ist $n(\alpha, z_2) = n(\alpha, z_1) + 1$.

Beweis: Sei $D := D_\varepsilon(z_0)$. Weiter seien t_- und t_+ so gewählt, dass gilt:

1. $t_- < t_0 < t_+$.
2. $w_- := \alpha(t_-)$ und $w_+ := \alpha(t_+)$ liegen auf ∂D.
3. $\alpha(t) \in D$ für $t_- < t < t_+$.



Da $w_- \neq w_+$ ist, wird der Kreis ∂D durch diese Punkte in zwei Kreisbögen κ_1 und κ_2 (links und rechts von α) unterteilt, so dass $\partial D = \kappa_1 + \kappa_2$ ist. Schließlich sei noch

$$\alpha' := \alpha|_{[a,t_-]}, \quad \alpha_0 := \alpha|_{[t_-,t_+]} \quad \text{und} \quad \alpha'' := \alpha|_{[t_+,b]}.$$

Dann ist $\partial C_+ = \alpha_0 + \kappa_1$ und $\partial C_- = \kappa_2 - \alpha_0$.

Sei $w_0 := \alpha(a) = \alpha(b)$ und $\gamma := \alpha' - \kappa_1 + \alpha''$. Dann ist γ offensichtlich ein geschlossener Weg.

Da $|\gamma| \cap D = \varnothing$ ist, liegt D ganz in einer Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$, und es ist $n(\gamma, z_1) = n(\gamma, z_2)$.

Weiter gilt:

1. $n(\kappa_1 + \kappa_2, z) = n(\partial D, z) = 1$ für jedes $z \in D$.
2. $n(\alpha_0 + \kappa_1, z_1) = n(\partial C_+, z_1) = 0$ und $n(\kappa_2 - \alpha_0, z_2) = n(\partial C_-, z_2) = 0$.

Alles zusammen ergibt:

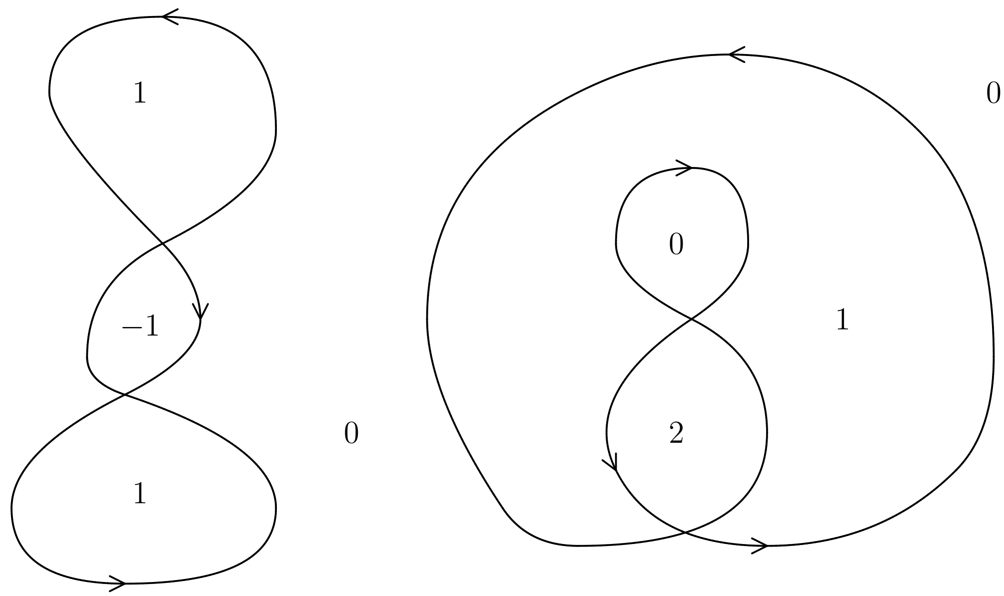
$$\begin{aligned} n(\alpha, z_2) - n(\alpha, z_1) &= n(\alpha' + \alpha_0 + \alpha'', z_2) - n(\alpha' + \alpha_0 + \alpha'', z_1) \\ &= n(\gamma, z_2) + n(\kappa_1 + \alpha_0, z_2) - n(\gamma, z_1) - n(\kappa_1 + \alpha_0, z_1) \\ &= n(\kappa_1 + \kappa_2, z_2) + n(\alpha_0 - \kappa_2, z_2) \ = \ 1. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. ∎

Die Moral von der Geschichte ist nun:

1. „Weit draußen“ ist auf jeden Fall $n(\alpha, z) = 0$.
2. Überquert man α (in einem glatten Punkt) so, dass α dabei von „links“ kommt, so erhöht sich die Umlaufszahl um 1. Kommt α von rechts, so erniedrigt sie sich um 1.

3.4.20. Beispiel



Definition

Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg. Dann nennt man

$$\mathrm{Int}(\alpha) := \{z \in \mathbb{C} \setminus |\alpha| \,:\, n(\alpha, z) \neq 0\}$$

das ***Innere*** von α, und

$$\mathrm{Ext}(\alpha) := \{z \in \mathbb{C} \setminus |\alpha| \,:\, n(\alpha, z) = 0\}$$

das ***Äußere*** von α.

3.4.21. Satz

Ist $G \subset \mathbb{C}$ einfach-zusammenhängend und $\alpha : [a,b] \to G$ ein geschlossener Integrationsweg, so ist $\mathrm{Int}(\alpha) \subset G$.

BEWEIS: Ist $z_0 \notin G$, so ist $1/(z - z_0)$ holomorph auf G und daher $n(\alpha, z_0) = 0$. ■

3.5 Der Residuensatz

Definition

Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen und D in B diskret. Eine holomorphe Funktion $f : B \setminus D \to \mathbb{C}$ heißt eine ***meromorphe Funktion auf*** B, falls f in den Punkten von D höchstens Polstellen besitzt (also keine wesentlichen Singularitäten).

Die Menge $P(f) := \{z \in D : \ f \text{ hat in } z \text{ eine Polstelle der Ordnung} \geq 1\}$ heißt ***Polstellenmege von*** f.

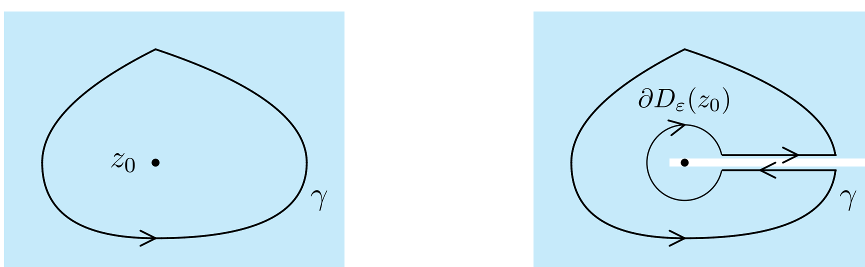
Typische Beispiele meromorpher Funktionen sind rationale Funktionen, aber auch Funktionen der Gestalt $1/\sin(z)$.

Es geht jetzt um folgendes Problem:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach-zusammenhängendes Gebiet, $z_0 \in G$, γ ein geschlossener Integrationsweg in $G' := G \setminus \{z_0\}$ und f eine meromorphe Funktion auf G mit einziger Polstelle z_0.

$$\text{Wie berechnet man } \int_\gamma f(z)\,dz\,?$$

Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst eine einfach geschlossene Kurve.



Umgeht man z_0 mit Hilfe eines kleinen Abstechers und eines in umgekehrter Richtung durchlaufenen Kreises $\partial D_\varepsilon(z_0)$ (siehe Skizze), so erhält man einen neuen geschlossenen Weg innerhalb eines einfach-zusammenhängenden Gebietes, der sich aus γ und $-\partial D_\varepsilon(z_0)$ zusammensetzt. Aus dem Cauchy'schen Integralsatz folgt:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(z)\,dz.$$

Das „Restintegral“ über den Kreisrand $\partial D_\varepsilon(z_0)$ bezeichnet man (nach Division durch $2\pi\,\mathrm{i}$) als *Residuum.*

Definition

Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in B$, $f : B \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\varepsilon > 0$, so dass $D_\varepsilon(z_0) \subset\subset B$ ist. Dann heißt

$$\text{res}_{z_0}(f) := \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int\limits_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(\zeta)\, d\zeta$$

das ***Residuum*** von f in z_0.

Bemerkungen:

1. Das Residuum hängt nicht von der Wahl des Radius ε ab. Das zeigt man wie üblich mit Hilfe des Cauchy'schen Integralsatzes.

2. z_0 braucht keine Singularität zu sein! Ist f in z_0 holomorph, so ist $\text{res}_{z_0}(f) = 0$. Auch das folgt aus dem Integralsatz.

3. In der Laurententwicklung von f um z_0 ist

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(\zeta)\, d\zeta = \text{res}_{z_0}(f),$$

für ein genügend kleines ε.

4. Es ist $\quad \text{res}_{z_0}(a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot \text{res}_{z_0}(f) + b \cdot \text{res}_{z_0}(g)$.

5. Ist F holomorph auf $B \setminus \{z_0\}$ und $F' = f$, so ist $\text{res}_{z_0}(f) = 0$. Das ist klar, denn das Integral über eine abgeleitete Funktion und einen geschlossenen Weg verschwindet immer.

6. $\text{res}_{z_0}\left(\dfrac{1}{z - z_0}\right) = 1$ und $\text{res}_{z_0}\left(\dfrac{1}{(z - z_0)^k}\right) = 0$ für $k \geq 2$.

7. Allgemeiner gilt: Hat f in z_0 eine *einfache* Polstelle, so ist

$$\text{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Beweis: Wir schreiben $f(z) = \dfrac{a_{-1}}{z - z_0} + h(z), \quad h$ holomorph in z_0.

Dann folgt: $\quad (z - z_0) f(z) = a_{-1} + (z - z_0) h(z) \to a_{-1}$ für $z \to z_0$. ∎

8. Und noch allgemeiner kann man zeigen:

Hat f in z_0 eine m-fache Polstelle, so ist

$$\text{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^m f(z)]^{(m-1)}.$$

Beweis: Es ist

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots ,$$

also

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + \cdots$$

Damit ist

$$[(z - z_0)^m f(z)]^{(m-1)} = (m-1)! a_{-1} + (z - z_0) \cdot (\ldots),$$

und es folgt die Behauptung. ■

9. Seien g und h holomorph nahe z_0, $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) \neq 0$.

   Dann ist $\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

   Beweis: Wir können schreiben:

$$\begin{aligned} g(z) &= c_0 + (z - z_0) \cdot \widetilde{g}(z), \text{ mit } c_0 \neq 0 \\ \text{und} \quad h(z) &= (z - z_0) \cdot (b_1 + \widetilde{h}(z)), \text{ mit } b_1 \neq 0 \text{ und } \widetilde{h}(z_0) = 0. \end{aligned}$$

   Dann ist

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{c_0 + (z - z_0) \cdot \widetilde{g}(z)}{(z - z_0) \cdot (b_1 + \widetilde{h}(z))} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{c_0}{b_1 + \widetilde{h}(z)} + \frac{\widetilde{g}(z)}{b_1 + \widetilde{h}(z)}.$$

   Also hat $f := g/h$ in z_0 eine einfache Polstelle, und es ist

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{c_0}{b_1 + \widetilde{h}(z_0)} = \frac{c_0}{b_1} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

■

3.5.1. Beispiele

A. Sei $f(z) := \frac{e^{\mathrm{i} z}}{z^2 + 1} = \frac{e^{\mathrm{i} z}}{(z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i})}$.

f hat einfache Polstellen bei i und $-\mathrm{i}$. Es ist

$$\operatorname{res}_{\mathrm{i}}(f) = \lim_{z \to \mathrm{i}} (z - \mathrm{i}) f(z) = \lim_{z \to \mathrm{i}} \frac{e^{\mathrm{i} z}}{z + \mathrm{i}} = -\frac{1}{2e} \mathrm{i},$$

und analog

$$\operatorname{res}_{-\mathrm{i}}(f) = \lim_{z \to -\mathrm{i}} (z + \mathrm{i}) f(z) = \lim_{z \to -\mathrm{i}} \frac{e^{\mathrm{i} z}}{z - \mathrm{i}} = \frac{e}{2} \mathrm{i}.$$

B. $f(z) := \dfrac{z^2}{1+z^4}$ hat 4 einfache Polstellen, insbesondere in

$$z_0 := e^{(\pi/4)\,\mathsf{i}} = \cos\frac{\pi}{4} + \mathsf{i}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathsf{i}).$$

Mit $g(z) := z^2$ und $h(z) := 1 + z^4$ ist

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} = \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4z_0} = \frac{1}{4}e^{-(\pi/4)\,\mathsf{i}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-\mathsf{i}).$$

3.5.2. Der Residuensatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach-zusammenhängendes Gebiet, $D \subset G$ diskret, γ ein geschlossener Integrationsweg in G mit $|\gamma| \cap D = \varnothing$ und $f : G \setminus D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{z\in G} n(\gamma, z)\operatorname{res}_z(f).$$

Bemerkung: Außerhalb einer kompakten Menge $K \subset G$ ist $n(\gamma, z) = 0$. Da $K \cap D$ endlich ist, gibt es höchstens endlich viele Punkte $z \in G$, in denen das Produkt $n(\gamma, z) \cdot \operatorname{res}_z(f)$ nicht verschwindet. Also ist die Summe auf der rechten Seite der Gleichung sinnvoll.

Das Gebiet G braucht nicht einfach-zusammenhängend zu sein. Man wird sehen, dass folgende Bedingung ausreicht: Für jede auf G holomorphe Funktion g verschwindet $\int_\gamma g(z)\,dz$.

Beweis: Die Menge $D' := D \cap \operatorname{Int}(\gamma)$ besteht nur aus endlich vielen Punkten $z_1, \ldots, z_N$.

Sei $h_\mu(z)$ der Hauptteil der Laurententwicklung von f um z_μ. Wie aus dem Satz von der Laurent-Trennung hervorgeht, ist h_μ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{z_\mu\}$. Daher gilt:

$$f - \sum_{\mu=1}^{N} h_\mu \text{ ist holomorph auf } G.$$

Also folgt:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{\mu=1}^{N} \int_\gamma h_\mu(z)\,dz.$$

Nun schreiben wir ausführlich:

$$h_\mu(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{\mu,n}(z - z_\mu)^n.$$

Diese Reihe konvergiert gleichmäßig auf $|\gamma|$, kann dort also gliedweise integriert werden. Daher gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma h_\mu(z)\,dz &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{\mu,n} \int_\gamma (z-z_\mu)^n\,dz \\
&= a_{\mu,-1} \int_\gamma \frac{1}{z-z_\mu}\,dz + \sum_{n\geq 2} a_{\mu,-n} \int_\gamma \frac{1}{(z-z_\mu)^n}\,dz \\
&= a_{\mu,-1} \cdot 2\pi\,\mathsf{i} \cdot n(\gamma, z_\mu),
\end{aligned}$$

denn für $n \geq 2$ besitzt $\dfrac{1}{(z-z_\mu)^n}$ in der Nähe von $|\gamma|$ eine Stammfunktion.

Da $a_{\mu,-1} = \text{res}_{z_\mu}(f)$ ist, folgt der Satz. ■

Angewandt wird der Residuensatz oft in einer spezielleren Form:

3.5.3. Residuenformel

Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen und $G \subset\subset B$ ein glatt und positiv berandetes, einfach-zusammenhängendes Gebiet. Außerdem seien $z_1, \ldots, z_N$ Punkte in G und $f : B \setminus \{z_1, \ldots, z_N\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{\partial G} f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{k=1}^{N} \text{res}_{z_k}(f).$$

Beweis: Man kann den Residuensatz auf f und $\gamma := \partial G$ anwenden. Da $n(\partial G, z) = 1$ für jedes $z \in G$ ist, folgt die Behauptung. ■

3.5.4. Beispiele

A. Es soll $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4}\,dz$ berechnet werden.

Das geht in diesem Falle auch sehr einfach mit einer der höheren Cauchy'schen Integralformeln:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4}\,dz = \frac{2\pi\,\mathsf{i}}{3!} \frac{d^3}{dz^3}\Big|_0 (e^z) = \frac{\pi\,\mathsf{i}}{3}.$$

Mit dem Residuensatz macht man es so:

Die Laurentreihe des Integranden um $z = 0$ hat die Gestalt

$$\frac{e^z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z} + \frac{1}{24} + \cdots$$

Also ist

$$\operatorname{res}_0\left(\frac{e^z}{z^4}\right) = \text{ Koeffizient bei } z^{-1} = \frac{1}{6}.$$

Daraus folgt:

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4}\,dz = 2\pi\,\mathsf{i}\cdot\operatorname{res}_0\left(\frac{e^z}{z^4}\right) = \frac{\pi\,\mathsf{i}}{3}.$$

B. Sei $G \subset \mathbb{C}$ einfach-zusammenhängend, f holomorph auf G und $\gamma : [a,b] \to G$ ein geschlossener Integrationsweg. Dann kann man den Residuensatz auf $g(z) := f(z)/(z-z_0)^{k+1}$ anwenden. Es ist

$$g(z) = \frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}\cdot\left(f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \cdots + \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k + \cdots\right),$$

also $\operatorname{res}_{z_0}(g) = \dfrac{1}{k!}f^{(k)}(z_0)$. Damit folgt:

$$\frac{k!}{2\pi\,\mathsf{i}}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\,d\zeta = n(\gamma,z_0)\cdot f^{(k)}(z_0).$$

Das ist eine Verallgemeinerung der höheren Cauchy'schen Integralformeln.

Der Cauchy'sche Integralsatz für einfach-zusammenhängende Gebiete folgt auch aus dem Residuensatz, da unter den Voraussetzungen des Integralsatzes alle Residuen (und damit die komplette rechte Seite) verschwinden.

Wir kommen nun zu weiteren Anwendungen des Residuensatzes:

3.5.5. Das Argument-Prinzip

Sei $G \subset \mathbb{C}$ einfach-zusammenhängend und γ ein geschlossener Integrationsweg in G. Weiter sei f auf G meromorph und nicht konstant, N die Menge der Nullstellen und P die Menge der Polstellen von f. Es sei $|\gamma| \cap (N \cup P) = \varnothing$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}}\int\limits_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = \sum_{a\in N} n(\gamma,a)o(f,a) - \sum_{b\in P} n(\gamma,b)o(f,b),$$

wenn man mit $o(f,z)$ die Null- bzw. Polstellenordnung von f in z bezeichnet.

Beweis: $D := N \cup P$ ist eine diskrete Menge in B, und es ist $n(\gamma,z) \neq 0$ für höchstens endlich viele Elemente von D. Die Funktion f'/f ist holomorph auf $G\setminus D$.

Sei $a \in D$. Dann gilt in der Nähe von a :

$$f(z) = (z-a)^k \cdot g(z),$$

mit einer nahe a holomorphen Funktion g ohne Nullstellen, $|k| \in \mathbb{N}$ und $k = \pm o(f,a)$, je nachdem, ob eine Null- oder Polstelle vorliegt. Daraus folgt:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k \cdot (z-a)^{k-1} \cdot g(z) + (z-a)^k \cdot g'(z)}{(z-a)^k \cdot g(z)} = \frac{k}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Da g'/g nahe a holomorph ist, ist $\operatorname{res}_a(f'/f) = k = \pm o(f,a)$. Mit dem Residuensatz ergibt sich die gewünschte Formel. ∎

Die Bezeichnung „Argument-Prinzip“ rührt daher, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))}\,dt = \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_a^b \frac{(f\circ\gamma)'(t)}{f\circ\gamma(t)}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int\limits_{f\circ\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = n(f\circ\gamma, 0).\end{aligned}$$

ist. Das Integral auf der linken Seite der Formel misst also die Änderung des Arguments beim Durchlaufen des Weges $f \circ \gamma$.

3.5.6. Folgerung

Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $G \subset\subset B$ ein positiv berandetes, einfach-zusammenhängendes Gebiet, f meromorph auf B und ohne Null- und Polstellen auf ∂G. Ist n die Anzahl der Nullstellen und p die Anzahl der Polstellen von f in G (jeweils mit Vielfachheit gezählt), so gilt:

$$\frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int\limits_{\partial G} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = n - p.$$

Der Beweis ist trivial, die Umlaufszahlen sind alle $= 1$.

3.5.7. Satz von Rouché

Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $f : B \to \mathbb{C}$ holomorph und $G \subset\subset B$ ein positiv berandetes, einfach-zusammenhängendes Gebiet.

Ist h eine weitere holomorphe Funktion auf B und $|h(z)| < |f(z)|$ auf ∂G, so haben f und $f + h$ gleich viele Nullstellen (mit Vielfachheit) in G.

Beweis: Für $0 \le \lambda \le 1$ sei $f_\lambda(z) := f(z) + \lambda \cdot h(z)$. Dann ist f_λ auf B holomorph, und für $z \in \partial G$ gilt:

$$|f_\lambda(z)| \ge |f(z)| - \lambda \cdot |h(z)| > (1-\lambda) \cdot |h(z)| \ge 0.$$

Also hat f_λ auf ∂G keine Nullstellen.

Nun sei N_λ die Anzahl der Nullstellen von f_λ in G. Der Wert des Integrals

$$N_\lambda = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{\partial G} \frac{f'_\lambda(z)}{f_\lambda(z)}\, dz$$

hängt stetig von λ ab, liegt aber in $\mathbb{Z}$. Also ist $N_0 = N_1$. ∎

3.5.8. Beispiel

Wieviele Nullstellen hat das Polynom $p(z) := z^4 - 4z + 2$ im Innern des Einheitskreises $\mathbb{D} = D_1(0)$?

Setzen wir $f(z) := -4z+2$ und $h(z) := z^4$, so ist $|f(z)| = |4z-2| \geq 4|z|-2 = 2$ auf $\partial\mathbb{D}$ und $|h(z)| = |z|^4 = 1 < |f(z)|$ auf $\partial\mathbb{D}$. Nach dem Satz von Rouché müssen nun f und $p = f + h$ in $\mathbb{D}$ gleichviele Nullstellen besitzen. Aber f hat dort genau eine Nullstelle (nämlich $z = 1/2$). Also kann auch p nur eine Nullstelle in $\mathbb{D}$ besitzen.

Der Residuensatz erlaubt es, gewisse analytisch schwer zu behandelnde reelle Integrale auf algebraischem Wege zu berechnen.

Typ 1: Trigonometrische Integrale

Sei $R(x, y)$ eine komplexwertige rationale Funktion. Wir wollen den Residuensatz anwenden, um Integrale vom Typ

$$I := \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt$$

zu berechnen. Zu diesem Zweck suchen wir eine holomorphe oder meromorphe Funktion f, so dass wir das fragliche Integral als komplexes Kurvenintegral auffassen können:

$$I = \int_\gamma f(z)\, dz, \quad \text{mit } \gamma(t) := e^{\mathsf{i}\, t}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Ist $z = \gamma(t)$, so ist $z = \cos t + \mathsf{i} \sin t$ und $1/z = \overline{z} = \cos t - \mathsf{i} \sin t$. Damit ergibt sich:

$$\cos t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \quad \text{und} \quad \sin t = \frac{1}{2\mathsf{i}}(z - \frac{1}{z}).$$

Da $\gamma'(t) = \mathsf{i}\, \gamma(t)$ ist, folgt:

$$R(\cos t, \sin t) = \frac{1}{\mathsf{i}\, \gamma(t)} \cdot R\left(\frac{1}{2}\Big(\gamma(t) + \frac{1}{\gamma(t)}\Big), \frac{1}{2\mathsf{i}}\Big(\gamma(t) - \frac{1}{\gamma(t)}\Big)\right) \cdot \gamma'(t).$$

Setzen wir also

$$f(z) := \frac{1}{z} \cdot R\left(\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2\mathsf{i}}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\right),$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt &= \frac{1}{\mathrm{i}}\int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \frac{1}{\mathrm{i}}\int_\gamma f(z)\,dz \\ &= 2\pi\cdot\sum_{z\in D_1(0)} \mathrm{res}_z(f).\end{aligned}$$

3.5.9. Beispiel

Sei $I := \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t}$, $\quad a > 1$ reell. Hier ist $R(x,y) = \dfrac{1}{a+y}$, also

$$f(z) = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{a+\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-1/z)} = \frac{2\mathrm{i}}{2a\mathrm{i}\,z+z^2-1} = \frac{2\mathrm{i}}{(z-z_1)(z-z_2)},$$

mit $z_{1,2} = \mathrm{i}\,(-a\pm\sqrt{a^2-1})$.

f hat zwei einfache Polstellen auf der imaginären Achse. Da $a > 1$ ist, ist

$$(a-1)^2 = a^2-2a+1 < a^2-1, \text{ also } a-1 < \sqrt{a^2-1} < a+1.$$

Also ist

$$-1 < -a+\sqrt{a^2-1} < 1, \quad \text{d.h. } z_1 = \mathrm{i}\,(-a+\sqrt{a^2-1}) \in D_1(0).$$

Andererseits ist $\left|-a-\sqrt{a^2-1}\right| = \left|a+\sqrt{a^2-1}\right| \geq |a| > 1$, also $z_2 \notin D_1(0)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a+\sin t} &= 2\pi\cdot\mathrm{res}_{z_1}(f) = 2\pi\cdot\lim_{z\to z_1}\frac{2\mathrm{i}}{z-z_2} \\ &= \frac{4\pi\,\mathrm{i}}{z_1-z_2} = \frac{4\pi\,\mathrm{i}}{2\mathrm{i}\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.\end{aligned}$$

Typ 2: Uneigentliche rationale Integrale

Nun wollen wir Integrale der Form

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

betrachten, wobei $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ sei, und $p(x)$ und $q(x)$ Polynome ohne reelle Nullstellen. Dabei müssen wir erst einmal klären, wann solche Integrale existieren.

3.5.10. Satz

Sei $p(z)$ ein komplexes Polynom n-ten Grades. Dann gibt es Konstanten c, $C > 0$ und ein $R > 0$, so dass gilt:

$$c|z|^n \leq |p(z)| \leq C|z|^n \quad \textit{für } |z| \geq R.$$

Beweis: Sei

$$p(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \quad \text{und} \quad r(z) := \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu| \cdot |z|^\nu .$$

Mit Hilfe der Dreiecks-Ungleichungen folgt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$|a_n| \cdot |z|^n - r(z) \le |p(z)| \le |a_n| \cdot |z|^n + r(z).$$

Für $|z| \ge 1$ und $\nu < n$ ist $|z|^\nu \le |z|^{n-1}$, also

$$r(z) \le \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu| \cdot |z|^{n-1} = k \cdot |z|^{n-1}, \text{ mit } k := \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu|.$$

Daraus folgt:

$$|a_n| \cdot |z|^n - k|z|^{n-1} \le |p(z)| \le |a_n| \cdot |z|^n + k|z|^{n-1},$$

also

$$(|a_n| - \frac{k}{|z|})|z|^n \le |p(z)| \le (|a_n| + \frac{k}{|z|})|z|^n.$$

Für $|z| \ge R$ ist dann sogar

$$(|a_n| - \frac{k}{R})|z|^n \le |p(z)| \le (|a_n| + \frac{k}{R})|z|^n.$$

Wählt man außerdem $R > \dfrac{k}{|a_n|}$, so ist $\dfrac{k}{R} < |a_n|$ und daher $|a_n| - \dfrac{k}{R} > 0$.

Man kann also $c := |a_n| - \dfrac{k}{R}$ und $C := |a_n| + \dfrac{k}{R}$ setzen. ∎

3.5.11. Folgerung

Sind $p(z)$ und $q(z)$ Polynome mit $\deg(q) = \deg(p) + k$, $k \ge 0$, so gibt es eine Konstante $C > 0$ und ein $R > 0$, so dass

$$\left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \le C \cdot \frac{1}{|z|^k}$$

für $|z| \ge R$ ist. Außerdem folgt:

1. *Ist $k = 1$, so ist $\left| z \cdot \dfrac{p(z)}{q(z)} \right|$ im Unendlichen beschränkt.*
2. *Ist $k \ge 2$ und $q(z)$ ohne reelle Nullstellen, so existiert das uneigentliche Integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx.$$

Beweis: Ist

$$c_1|z|^m \le |p(z)| \le C_1|z|^m \quad \text{und} \quad c_2|z|^n \le |q(z)| \le C_2|z|^n \ \text{ für } |z| \ge R,$$

so ist

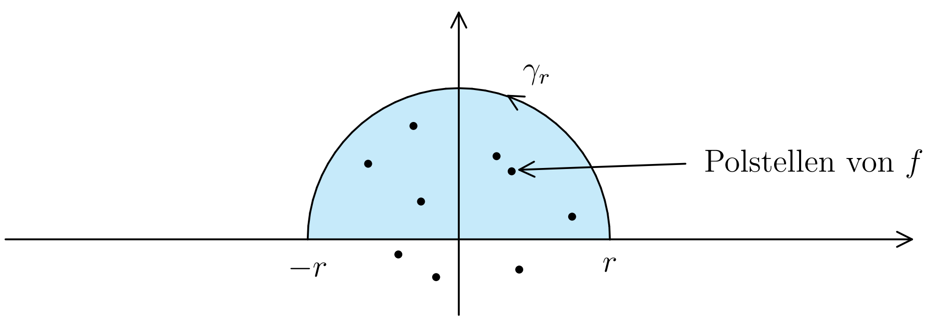
$$\Big|\frac{p(z)}{q(z)}\Big| \le C \cdot |z|^{m-n}, \qquad \text{für } |z| \ge R,\ C := \frac{C_1}{c_2} \text{ und } m-n \le -k.$$

Ist $k = 1$, so ist $\Big| z \cdot \dfrac{p(z)}{q(z)}\Big| \le C$.

Ist $k \ge 2$, so folgt die Existenz des uneigentlichen Integrals aus der Konvergenz des Integrals $\int_a^\infty (1/|x|^k)\,dx$, dem Majoranten-Kriterium für uneigentliche Integrale und der Tatsache, dass $q(x)$ keine reellen Nullstelle besitzt. ∎

Es seien nun die Voraussetzungen der Folgerung für $f(z) = p(z)/q(z)$ erfüllt, mit $k \ge 2$. Insbesondere ist dann $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Das bedeutet, dass es ein $r > 0$ gibt, so dass alle Polstellen von $f(z)$ in $D_r(0)$ liegen, und das können auch nur höchstens endlich viele sein.

Wir betrachten nun folgenden Weg:



Der Weg γ sei zusammengesetzt aus der Strecke zwischen $-r$ und r auf der reellen Achse und dem Halbkreis $\gamma_r(t) := re^{\mathrm{i}\,t}$, $0 \le t \le \pi$. Dann ist

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz + \int_{-r}^{r} f(x)\,dx = \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi\,\mathrm{i} \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(f).$$

Man beachte, dass das Residuum höchstens in den Singularitäten $\neq 0$ ist, die Summe auf der rechten Seite ist also immer eine **endliche** Summe!

Da $|f(z)| \le C/|z|^2$ für große z ist, folgt:

$$\Big|\int_{\gamma_r} f(z)\,dz\Big| \le \pi r \frac{C}{r^2} = \frac{\pi C}{r} \to 0 \text{ für } r \to \infty.$$

Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\,\mathrm{i} \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(f)$$

$$(\text{oder} \quad = -2\pi\,\mathsf{i} \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z)<0} \mathrm{res}_z(f)\ ).$$

Man kann sich fragen, ob wir die Existenz des Integrals bei dem gerade durchgeführten Grenzübergang nicht automatisch mitbewiesen haben. Leider ist das nicht der Fall. Zur **Erinnerung:**

$$\text{C.H.} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt := \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} g(t)\,dt$$

heißt ***Cauchy'scher Hauptwert*** des uneigentlichen Integrals. Er kann existieren, auch wenn das uneigentliche Integral divergiert. Wenn letzteres allerdings konvergiert, dann stimmt es mit dem Cauchy'schen Hauptwert überein.

Aus der obigen Rechnung kann man nur entnehmen, dass der Cauchy'sche Hauptwert existiert, denn wir haben die Grenzen $-r$ und $+r$ gleichzeitig gegen ∞ gehen lassen. Deshalb waren die vorangegangenen Grad-Betrachtungen nötig, um die Existenz des uneigentlichen Integrals zu sichern.

3.5.12. Beispiel

Wir wollen $I := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$ berechnen.

Die Funktion $f(z) := \dfrac{z^2}{1+z^4}$ hat Polstellen in den Punkten

$$z_k = \zeta_{4,k} e^{\mathsf{i}\,\pi/4} = e^{\mathsf{i}\,(\pi+2\pi k)/4} = \cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{4}\right) + \mathsf{i}\,\sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{4}\right),$$

für $k = 0, 1, 2, 3$. Dabei ist $\mathrm{Im}(z_k) > 0$ für $k = 0$ und $k = 1$.

Da die 4 Polstellen paarweise verschieden sind, liegen in

$$z_0 = e^{\mathsf{i}\,\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathsf{i}\,) \quad \text{und} \quad z_1 = \mathsf{i}\,e^{\mathsf{i}\,\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathsf{i}\,-1)$$

jeweils einfache Polstellen vor. Wie wir schon an früherer Stelle gesehen haben, ist

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{z_0}(f) &= \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4}\bar{z}_0 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-\mathsf{i}\,) \\ \text{und} \quad \mathrm{res}_{z_1}(f) &= \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4}\bar{z}_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1-\mathsf{i}\,), \end{aligned}$$

und demnach

$$\begin{aligned} I &= 2\pi\,\mathsf{i} \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}(1-\mathsf{i}\,) + \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1-\mathsf{i}\,) \right) \\ &= \frac{\pi\,\mathsf{i}}{2\sqrt{2}}(-2\,\mathsf{i}\,) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Typ 3: Die Fourier-Rücktransformation

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige und absolut integrierbare Funktion, so existiert dazu die ***Fourier-Transformierte***

$$\widehat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\mathrm{i}\,\omega t}\, dt.$$

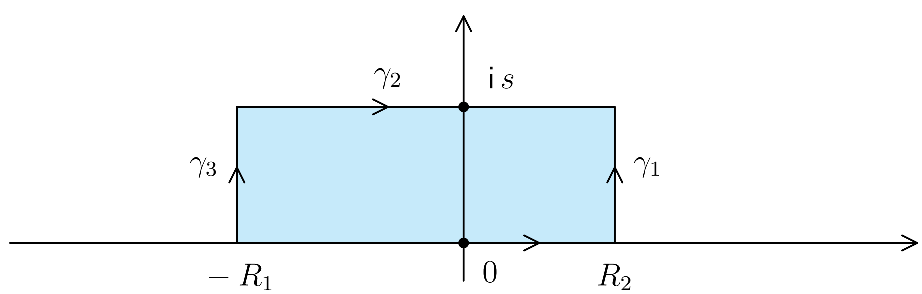
Das „Fourier-Integral-Theorem" besagt, dass man f aus $\widehat{f}$ zurückgewinnen kann. Und zwar ist

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \text{C.H.} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{\mathrm{i}\,\omega t}\, d\omega.$$

In der Praxis kann dieses Problem besonders schön gelöst werden, wenn man $\widehat{f}$ als Einschränkung einer meromorphen Funktion F auffassen kann.

Wir nehmen außerdem an, dass F nur endlich viele Polstellen hat und dass $z \cdot F(z)$ für großes z beschränkt bleibt, und wir betrachten nur den Fall $t > 0$.

Dann benutzen wir folgende Integrationswege:



$$\begin{array}{rrcll} \text{Sei} & \gamma_1(\tau) & := & R_2 + \mathrm{i}\,\tau, & 0 \le \tau \le s, \\ & \gamma_2(\tau) & := & \tau + \mathrm{i}\,s, & -R_1 \le \tau \le R_2, \\ \text{und} & \gamma_3(\tau) & := & -R_1 + \mathrm{i}\,\tau, & 0 \le \tau \le s. \end{array}$$

Dann ist $\gamma_1'(\tau) \equiv \gamma_3'(\tau) \equiv \mathrm{i}$ und $\gamma_2'(\tau) \equiv 1$.

Hat F nur endlich viele Polstellen, so kann man R_1, R_2 und s so groß wählen, dass die Polstellen alle im Innern des Weges $\gamma_0 + \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$ liegen (wobei γ_0 die Strecke von $-R_1$ nach R_2 bezeichnet).

Setzen wir

$$I_\nu(t) := \int\limits_{\gamma_\nu} F(z) e^{\mathrm{i}\,zt}\, dz$$

für $\nu = 1, 2, 3$, so erhalten wir mit dem Residuensatz:

$$\int_{-R_1}^{R_2} F(x) e^{\mathrm{i}\,xt}\, dx + I_1(t) - I_2(t) - I_3(t) = 2\pi\,\mathrm{i} \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(F(z) e^{\mathrm{i}\,zt}).$$

Wir schätzen nun die Integrale $I_\nu(t)$ einzeln ab. Dabei verwenden wir folgende Tatsachen:

a) Ist $z = x + \mathrm{i}\,y$, so ist $|e^{\mathrm{i}\,zt}| = e^{-yt}$.

b) Da s nicht unabhängig von R_1 und R_2 gewählt werden muss, kann man $s := R_1 + R_2$ setzen.

c) Es gibt ein $C > 0$ und ein $R > 0$, so dass für $|z| \geq R$ gilt:

$$|F(z)| \leq \frac{C}{|z|}.$$

Wir wählen $R_1 \geq R$ und $R_2 \geq R$.

Dann ist auch $s \geq R$, und für $z \in |\gamma_2|$ ist $|z| \geq s$. Die Standardabschätzung ergibt nun:

$$|I_2(t)| \leq (R_1 + R_2) \cdot e^{-st} \cdot \sup_{|\gamma_2|} |F(z)| \leq C \cdot e^{-st} \longrightarrow 0$$

(für festes t und $R_1, R_2 \to \infty$). Das Integral I_1 wird folgendermaßen abgeschätzt:

$$\begin{aligned}
|I_1(t)| &\leq \int_0^s |F(R_2 + \mathrm{i}\,\tau)| \cdot e^{-\tau t}\, d\tau \\
&\leq \frac{C}{R_2} \int_0^s e^{-\tau t}\, d\tau = \frac{C}{R_2}\Big(-\frac{1}{t} e^{-\tau t}\Big)\Big|_0^s \\
&= \frac{C}{R_2 t}(1 - e^{-st}) \longrightarrow 0 \quad (\text{für } s \to \infty \text{ und } R_2 \to \infty).
\end{aligned}$$

$I_3(t)$ wird analog abgeschätzt.

Also ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{\mathrm{i}\,xt}\, dx = 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(F(z)e^{\mathrm{i}\,zt}),$$

und die Existenz des Integrals wurde (unter den obigen Voraussetzungen) gleich mitbewiesen.

3.5.13. Beispiel

Zu berechnen ist das Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}\,ax}}{x - \mathrm{i}\,b}\, dx$, mit $a, b > 0$.

$$\text{Es ist} \quad \mathrm{res}_{\mathrm{i}\,b}\left(\frac{e^{\mathrm{i}\,az}}{z - \mathrm{i}\,b}\right) = e^{-ab}, \quad \text{also}$$

$$I = 2\pi\,\mathrm{i} \cdot e^{-ab}.$$

Typ 4: „Pole auf der Kontur“

Bisher haben wir immer vermieden, dass Pole auf dem Integrationsweg liegen. Manchmal lohnt es sich aber auch, diesen Fall einzubeziehen.

Dabei wird die folgende Aussage benötigt:

Behauptung: Ist f meromorph mit einem einfachen Pol bei a und $\alpha_\varrho : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\alpha_\varrho(t) := a + \varrho e^{\mathrm{i}\, t}$, so ist

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{\alpha_\varrho} f(z)\, dz = \pi\, \mathrm{i}\, \mathrm{res}_a(f).$$

BEWEIS: Ist $f(z) = \dfrac{c}{z-a} + g(z)$ (nahe a), mit einer holomorphen Funktion g, so ist

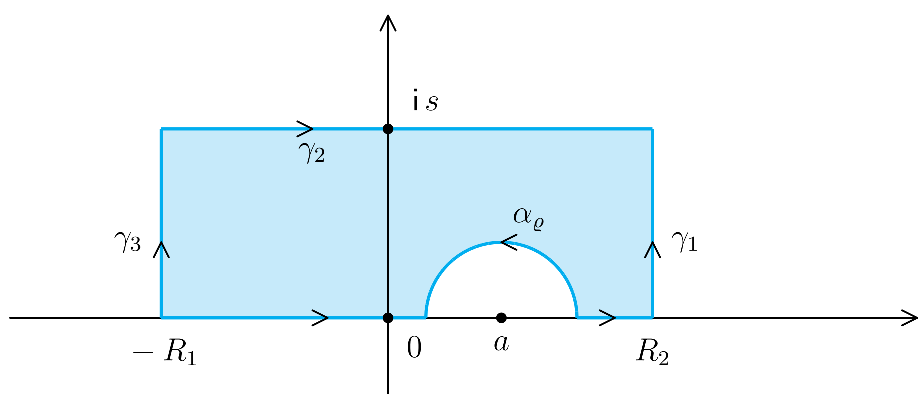
$$\int_{\alpha_\varrho} f(z)\, dz = c \int_{\alpha_\varrho} \frac{dz}{z-a} + \int_{\alpha_\varrho} g(z)\, dz = c \int_0^\pi \frac{\mathrm{i}\, \varrho e^{\mathrm{i}\, t}}{\varrho e^{\mathrm{i}\, t}}\, dt = \mathrm{res}_a(f) \cdot \pi\, \mathrm{i}\,.$$

■

Sei nun wieder F meromorph, mit insgesamt nur endlich vielen Polstellen und genau einer Polstelle a auf der reellen Achse. Außerdem bleibe $z \cdot F(z)$ für großes z beschränkt. Man kann zwar nicht direkt das Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{\mathrm{i}\, x}\, dx$ berechnen, aber es gilt:

$$\lim_{\varrho \to 0} \Big[\int_{-\infty}^{a-\varrho} F(x) e^{\mathrm{i}\, x}\, dx + \int_{a+\varrho}^{+\infty} F(x) e^{ix}\, dx \Big] = 2\pi\, \mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(F(z) e^{\mathrm{i}\, z}) + \pi\, \mathrm{i}\, \mathrm{res}_a(F(z) e^{\mathrm{i}\, z}).$$

Zum BEWEIS benutzen wir die folgenden Integrationswege:



Sei $f(z) := F(z) e^{\mathrm{i}\, z}$. Sind R_1, R_2 und s genügend groß und ist ϱ genügend klein, so ist

$$\int_{-R_1}^{a-\varrho} f(x)\, dx + \int_{a+\varrho}^{R_2} f(x)\, dx - \int_{\alpha_\varrho} f(z)\, dz + \int_{\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3} f(z)\, dz = 2\pi\, \mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(f(z)).$$

Wie beim vorigen Fall folgt auch hier, dass das Integral über den Umweg $\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$ verschwindet, wenn R_1, R_2 und s gegen Unendlich gehen. Daraus ergibt sich die gewünschte Formel.

3.5.14. Beispiel

Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty}\big((\sin x)/x\big)\,dx$ existiert, wie man schon in Analysis 1 zeigen kann. Um es mit Hilfe des Residuenkalküls zu berechnen, muss man allerdings die Funktion $f(z) := e^{\mathsf{i}\,z}/z$ betrachten, und die hat einen Pol im Nullpunkt. Die Funktion $\sin z$ nimmt für wachsenden Imaginärteil von z immer größere Werte an, so dass man nicht mit $(\sin z)/z$ arbeiten kann. Nun ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx &= \lim_{\varrho\to 0}\Big(\int_{-\infty}^{-\varrho} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_{\varrho}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx\Big)\\
&= \lim_{\varrho\to 0} \operatorname{Im}\Big(\int_{-\infty}^{-\varrho} \frac{e^{\mathsf{i}\,x}}{x}\,dx + \int_{\varrho}^{+\infty} \frac{e^{\mathsf{i}\,x}}{x}\,dx\Big)\\
&= \operatorname{Im}\Big[2\pi\,\mathsf{i} \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{res}_z\Big(\frac{e^{\mathsf{i}\,z}}{z}\Big) + \pi\,\mathsf{i}\,\operatorname{res}_0\Big(\frac{e^{\mathsf{i}\,z}}{z}\Big)\Big]\\
&= \operatorname{Im}\Big(\pi\,\mathsf{i}\,\operatorname{res}_0\big(\frac{e^{\mathsf{i}\,z}}{z}\big)\Big) \;=\; \pi.
\end{aligned}$$

Typ 5. Die Mellin-Transformation

Sei $f(z)$ eine meromorphe Funktion mit endlich vielen Polstellen, von denen keine auf der positiven reellen Achse liegt. Dann soll folgendes Integral berechnet werden:

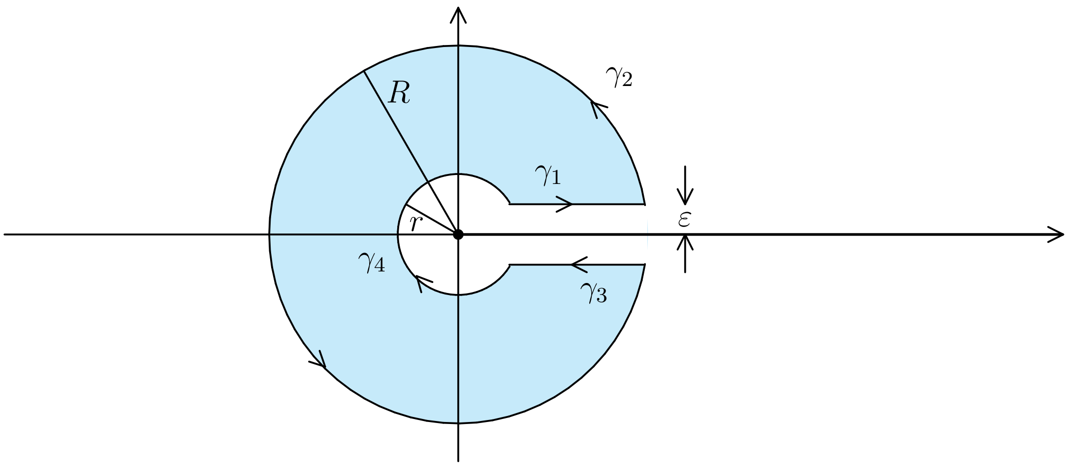
$$\int_0^{\infty} f(x)x^a\,\frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} f(x)x^{a-1}\,dx.$$

Um den Integranden als Einschränkung oder Grenzwert einer holomorphen Funktion $f(z)\cdot z^{a-1}$ auffassen zu können, muß man zunächst einen geeigneten Logarithmus-Zweig wählen, und das ist nur auf einer aufgeschlitzten Ebene möglich. Der Trick besteht darin, ausgerechnet

$$\lambda(z) := \log_{(0)} \qquad \text{auf} \qquad \widetilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+$$

zu wählen, so daß $z^a = e^{a\lambda(z)}$ ist.

Wir benutzen dann den wie folgt skizzierten Weg und lassen $r \to 0$, $R \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$ gehen.



Für $0 < t < 2\pi$ ist $\lambda(re^{\mathrm{i}t}) = \ln r + \mathrm{i}\,t$. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \lambda(x+\mathrm{i}\,\varepsilon) &= \ln(x) \\ \text{und} \quad \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon<0}} \lambda(x+\mathrm{i}\,\varepsilon) &= \ln(x) + 2\pi\,\mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

Entsprechend ist

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (x+\mathrm{i}\,\varepsilon)^{a-1} &= x^{a-1} \\ \text{und} \quad \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon<0}} (x+\mathrm{i}\,\varepsilon)^{a-1} &= x^{a-1}\cdot e^{2\pi\,\mathrm{i}\,(a-1)} = x^{a-1}\cdot e^{2\pi\,\mathrm{i}\,a}. \end{aligned}$$

Sind r und ε sehr klein, R sehr groß, so liegen alle etwaigen Polstellen von f in dem von $\gamma := \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4$ berandeten Gebiet G.

3.5.15. Satz

Ist $\lim_{z\to 0} f(z)z^a = 0$ *und* $\lim_{z\to\infty} f(z)z^a = 0$, *so existiert das Integral*

$$\int_0^\infty f(x)x^{a-1}\,dx = \frac{2\pi\,\mathrm{i}}{1-e^{2\pi\,\mathrm{i}\,a}} \cdot \sum_{w\in\widetilde{\mathbb{C}}} \operatorname{res}_w(f(z)z^{a-1}).$$

Beweis: Sei $I_\nu := \displaystyle\int_{\gamma_\nu} f(z)z^{a-1}\,dz$.

a) Es ist

$$\begin{aligned} |I_2| &\le 2\pi R \cdot \sup_{|\gamma_2|} |f(z)z^{a-1}| \\ &= 2\pi \cdot \sup_{|\gamma_2|} |f(z)z^a| \longrightarrow 0 \quad (\text{für } R\to\infty). \end{aligned}$$

b) Weiter ist

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq 2\pi r \cdot \sup_{|\gamma_4|} |f(z)z^{a-1}| \\ &= 2\pi \cdot \sup_{|\gamma_4|} |f(z)z^a| \longrightarrow 0 \qquad (\text{für } r \to 0). \end{aligned}$$

c) Schließlich gilt:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_1} f(z)z^{a-1}\,dz = \int_r^R f(x)x^{a-1}\,dx$$

und

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_3} f(z)z^{a-1}\,dz = -\int_r^R f(x)x^{a-1}e^{2\pi\,\mathrm{i}\,a}\,dx,$$

also strebt $I_1 + I_3$ bei festem r und R für $\varepsilon \to 0$ gegen

$$(1 - e^{2\pi\,\mathrm{i}\,a}) \cdot \int_r^R f(x)x^{a-1}\,dx.$$

Ist dabei r genügend klein und R genügend groß, so nimmt $I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ den festen Wert $2\pi\,\mathrm{i} \cdot \sum_{w \in \widetilde{\mathbb{C}}} \mathrm{res}_w(f(z)z^{a-1})$ an.

Läßt man jetzt $r \to 0$ und $R \to \infty$ streben, so erhält man die Existenz des Integrals $\int_0^\infty f(x)x^{a-1}\,dx$ und die Gültigkeit der gewünschten Gleichung. ■

3.5.16. Zusatz

Ist $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ *mit* $\mathrm{grad}(q) > \mathrm{grad}(p)$ *und* $0 < \mathrm{Re}(a) < 1$*, so sind die Voraussetzungen des obigen Satzes erfüllt.*

BEWEIS: Sei $z = re^{\mathrm{i}\,t} \in \widetilde{\mathbb{C}}$ und $a = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$ mit $0 < \alpha < 1$. Dann ist

$$z^a = e^{\alpha \ln r - \beta t} \cdot e^{\mathrm{i}\,(\beta \ln r + \alpha t)},$$

also

$$|z^a| = r^\alpha \cdot e^{-\beta t} = |z|^\alpha \cdot e^{-\beta \arg(z)} \leq |z|^\alpha \cdot e^{|\beta| 2\pi}.$$

Da f nach Voraussetzung im Nullpunkt keine Singularität besitzt, folgt:

$$|f(z)z^a| \leq |f(z)| \cdot |z|^{\mathrm{Re}(a)} \cdot e^{2\pi|\mathrm{Im}(a)|} \longrightarrow 0 \qquad (\text{für } z \to 0).$$

Andererseits gibt es ein $C > 0$, so daß für große z gilt: $|f(z)| \leq \dfrac{C}{|z|}$. Da $\mathrm{Re}(a) - 1 < 0$ ist, bedeutet das:

$$|f(z)z^a| \leq C \cdot |z|^{\mathrm{Re}(a)-1} \cdot e^{2\pi|\mathrm{Im}(a)|} \longrightarrow 0 \qquad (\text{für } z \to \infty).$$

$\blacksquare$

Da $e^{-\pi \mathrm{i} a} - e^{\pi \mathrm{i} a} = -2\mathrm{i}\sin(\pi a)$ ist, gilt:

$$\frac{2\pi\mathrm{i}}{1 - e^{2\pi\mathrm{i} a}} = \frac{2\pi\mathrm{i}\, e^{-\pi\mathrm{i} a}}{e^{-\pi\mathrm{i} a} - e^{\pi\mathrm{i} a}} = -\frac{\pi e^{-\pi\mathrm{i} a}}{\sin(\pi a)}.$$

3.5.17. Folgerung

Sei $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ *eine rationale Funktion ohne Polstellen in* $\mathbb{R}_+$, $\operatorname{grad}(q) > \operatorname{grad}(p)$ *und* $a \in \mathbb{C}$ *mit* $0 < \operatorname{Re}(a) < 1$. *Dann ist*

$$\int_0^\infty f(x)x^{a-1}\,dx = -\frac{\pi e^{-\pi\mathrm{i} a}}{\sin(\pi a)} \cdot \sum_{w \in \widetilde{\mathbb{C}}} \operatorname{res}_w(f(z)z^{a-1}).$$

3.5.18. Beispiel

Berechnet werden soll das Integral $I := \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx$, mit $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$.

Hier ist $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$, mit $z = -1$ als einziger Polstelle. Es ist

$$\operatorname{res}_{-1}(f(z)z^{a-1}) = \lim_{z \to -1} z^{a-1} = (-1)^{a-1} = (e^{\pi\mathrm{i}})^{a-1} = -e^{\pi\mathrm{i} a},$$

also

$$I = -\frac{\pi e^{-\pi\mathrm{i} a}}{\sin(\pi a)} \cdot (-e^{\pi\mathrm{i} a}) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$