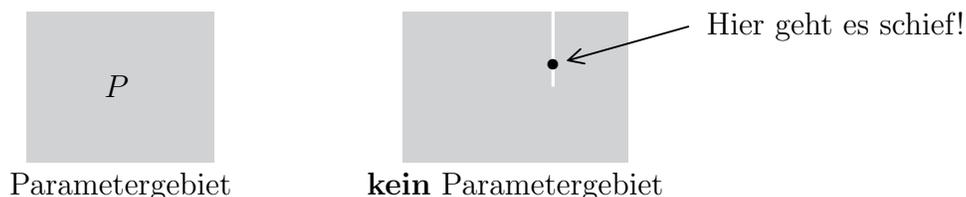

2 Der Divergenzsatz

2.1 Glatte Hyperflächen

Zur Erinnerung: Ein **Parametergebiet** ist ein beschränktes Gebiet $P \subset \mathbb{R}^n$, bei dem jeder Randpunkt von P auch ein Randpunkt von \overline{P} ist. Durch die Randbedingung werden gewisse pathologische Fälle ausgeschlossen:



Definition

Sei $n \geq 2$ und $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein Parametergebiet. Unter einem (**glatten**) **parametrisierten Hyperflächenstück** über P verstehen wir eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$, für die gilt:

1. φ ist injektiv.
2. $\text{rg } J_\varphi(\mathbf{u}) = n - 1$ für alle $\mathbf{u} \in P$.
3. Ist $\mathbf{u}_0 \in P$ und $\mathbf{u}_\nu \in P$ eine Folge mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi(\mathbf{u}_\nu) = \varphi(\mathbf{u}_0)$, so ist auch $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathbf{u}_\nu = \mathbf{u}_0$.

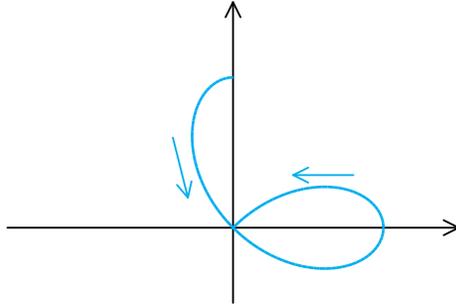
Bemerkungen:

1. Bei den glatten parametrisierten Hyperflächenstücken handelt es sich um einen Spezialfall der glatten (p -dimensionalen) Flächenstücke, die im 2. Semester behandelt wurden. Zur Erinnerung werden die Definitionen, Sätze und Beweise zu diesem Thema in einem Anhang zum vorliegenden Abschnitt wiederholt.
2. Ist $n = 2$, so ist $P = I$ ein offenes Intervall und es liegt ein stetig differenzierbarer, ebener Weg $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ vor. Es ist φ injektiv, $\varphi(t) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in I$. Man spricht dann von einem **glatten Weg**. Durch die dritte Bedingung werden Situationen wie die folgende ausgeschlossen:

Sei $\varphi : (-\pi/2, +\pi/4) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\varphi(t) := (\cos(2t) \cos t, \cos(2t) \sin t).$$

Im Parameterintervall ist φ injektiv, der Nullpunkt ist das Bild von $t = -\pi/4$. Außerdem kann man leicht nachrechnen, dass $\varphi'(t)$ nirgends verschwindet. Setzen wir aber $t_0 := -\pi/4$ und $t_\nu := \pi/4 - 1/\nu$, so konvergiert $\varphi(t_\nu)$ gegen $(0, 0) = \varphi(t_0)$, nicht aber (t_ν) gegen t_0 .



3. Die Menge $S := \varphi(P)$ heißt die **Spur** des Flächenstücks. Manchmal be- geht man aus Bequemlichkeit etwas Notationsmissbrauch und nennt S ein Flächenstück. Damit verzichtet man natürlich auf Information.
4. Man kann zeigen: Ist $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein Parametergebiet, $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes Hyperflächenstück, $S := \varphi(P)$ und $U \subset P$ offen, so gibt es eine offene Menge $B \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\varphi(U) = B \cap S$ ist. Das bedeutet, dass $\varphi(U)$ eine offene Teilmenge von S (in der Relativtopologie) ist.

Definition

Eine Menge $H \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine **glatte Hyperfläche**, falls es zu jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in H$ eine Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$, ein Parametergebiet $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$, ein glattes parametrisiertes Hyperflächenstück $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(P) = H \cap U$ und einen Parameter $\mathbf{u}_0 \in P$ mit $\varphi(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$ gibt.

Mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen wurde in Analysis 2 gezeigt:

2.1.1. Jede Niveaumenge ist eine glatte Hyperfläche

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $M = \{\mathbf{x} \in B : f(\mathbf{x}) = 0\}$. Ist $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ in jedem Punkt $\mathbf{x} \in M$, so ist M eine glatte Hyperfläche.

Es gilt in gewisser Weise auch die Umkehrung:

2.1.2. Jede glatte Hyperfläche ist lokal eine Niveaufläche

Sei $H \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Hyperfläche. Dann gibt es zu jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in H$ eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass gilt:

1. $U \cap H = f^{-1}(0)$.
2. $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ für $\mathbf{x} \in U \cap H$.

2.1.3. Beispiele

- A. Sei $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein Parametergebiet, $g : P \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann wird der Graph $S := \{(\mathbf{u}, z) : z = g(\mathbf{u})\}$ durch $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(\mathbf{u}) := (\mathbf{u}, g(\mathbf{u}))$ parametrisiert. Die Injektivität von φ ist offensichtlich und die Funktionalmatrix

$$J_{\varphi}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \nabla g(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

hat natürlich den Rang $n - 1$. Ist schließlich $\mathbf{u}_0 \in P$ und \mathbf{u}_ν eine Folge in P , so dass $(\mathbf{u}_\nu, g(\mathbf{u}_\nu)) = \varphi(\mathbf{u}_\nu)$ gegen $\varphi(\mathbf{u}_0) = (\mathbf{u}_0, g(\mathbf{u}_0))$ konvergiert, so konvergiert auch \mathbf{u}_ν gegen \mathbf{u}_0 . Also liegt ein glattes parametrisiertes Hyperflächenstück vor.

- B. Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x_1, \dots, x_n) := x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1$. Dann ist $S^{n-1} = f^{-1}(0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ die $(n-1)$ -dimensionale Sphäre. Sie ist eine glatte Hyperfläche, weil $\nabla f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ in jedem Punkt $\mathbf{x} \in S^{n-1}$ gilt. Im Falle $n = 2$ erhält man den Einheitskreis.
- C. Sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, sowie $c \in \mathbb{R}$. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} - c$. Dann nennt man $H := \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) = 0\}$ eine affine Hyperebene. Weil $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ ist, ist H eine glatte Hyperfläche.
- D. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so dass $S := f^{-1}(0)$ eine glatte Hyperfläche ist. Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $g : B \times I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $g(\mathbf{x}, t) := f(\mathbf{x})$. Dann ist $g^{-1}(0) = S \times I$ ebenfalls eine glatte Hyperfläche, der **Zylinder über S** .
- E. Sei $h > 0$, $r > 0$, $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |z| < h\}$, $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) := x^2 + y^2 - r^2$ und $S := f^{-1}(0)$. Weil $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 0) \neq (0, 0, 0)$ für $(x, y, z) \in S$ ist, ist S eine glatte (Hyper-)Fläche, ein **Zylindermantel** der Höhe $2h$ mit Radius r .

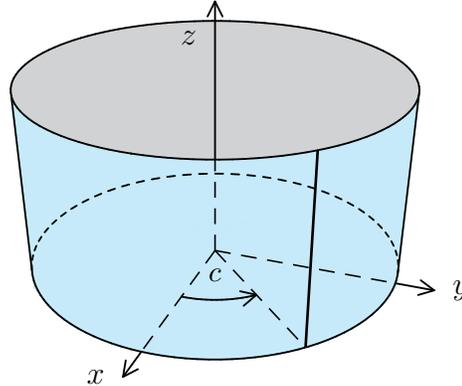
Ist $c \in \mathbb{R}$, so ist $P_c := (c, c + 2\pi) \times (-h, h)$ ein Parametergebiet und $\varphi : P_c \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(u, v) := (r \cos u, r \sin u, v)$$

eine glatte Parametrisierung, denn die Spalten von

$$J_{\varphi}(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

sind offensichtlich immer linear unabhängig. Dass φ injektiv ist, kann man sich leicht überlegen. Leider deckt eine einzelne derartige Parametrisierung nicht die ganze Fläche S ab, es fehlt immer ein Streckenstück, das man als „Klebekante“ interpretieren kann.



Im Falle $c = 0$ wird der Zylinder entlang der Linie $\{(r, 0, z) : |z| \leq h\}$ zusammengeklebt. Zwar kann man φ auf \bar{P} stetig differenzierbar fortsetzen, aber dort ist φ nicht mehr injektiv. Benutzt man eine zweite Parametrisierung mit dem Definitionsbereich P_c , $c \neq 0$, so wird S durch $\varphi(P_0)$ und $\varphi(P_c)$ überdeckt.

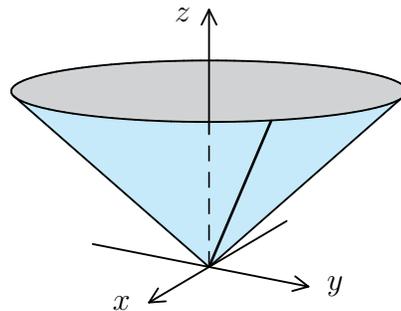
F. Nun sei $P = (0, 2\pi) \times (0, 1)$ und $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(u, v) := (v \cos u, v \sin u, v).$$

Das ist eine glatte Parametrisierung der Fläche

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times (0, 1) : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}.$$

Für jeden Punkt $\mathbf{x}_u = (\cos u, \sin u, 1)$ ist die Verbindungsstrecke von $\mathbf{0}$ und \mathbf{x}_u (ohne die Endpunkte) ganz in S enthalten. Daher ist S ein kreisförmiger **Kegelmantel** mit einer Spitze bei $(0, 0, 0)$. Die Spitze gehört allerdings nicht zu S , und es gibt wieder eine Klebekante.

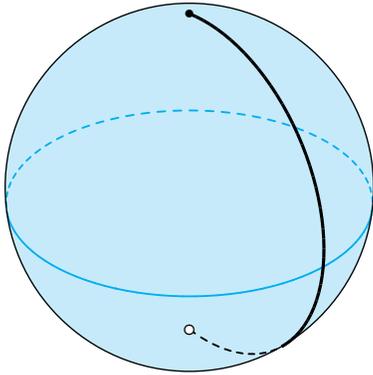


G. Wir wissen schon, dass die **Einheitssphäre** (Oberfläche der Einheitskugel),

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

eine glatte Fläche ist. Sei $P := (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ und

$$\varphi(u, v) := (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v).$$



Dies ist die von den räumlichen Polarkoordinaten herrührende Parametrisierung.

Die linke und die rechte Seite von P werden zu einem Längengrad zusammengeklebt, die untere und die obere Seite von P ergeben den Südpol und den Nordpol.

H. Sei $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Abbildung, $\alpha(t) = (f(t), g(t))$, $f(t) > 0$ auf (a, b) . Dann wird durch

$$\varphi(u, v) := (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

ein Flächenstück parametrisiert, die durch α bestimmte **Rotationsfläche**.

Definition

Sei $H \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Hyperfläche, $\mathbf{x}_0 \in H$. Ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ heißt **Tangentenvektor** an H im Punkte \mathbf{x}_0 , falls es ein $\varepsilon > 0$ und einen stetig differenzierbaren Weg $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, so dass gilt:

1. Die Spur von α liegt ganz in H .
2. Es ist $\alpha(0) = \mathbf{x}_0$ und $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.

2.1.4. Charakterisierung von Tangentialvektoren

Sei $H \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Hyperfläche, $\mathbf{x}_0 \in H$. Es sei $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung, so dass gilt:

- a) Es gibt eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f^{-1}(0) = U \cap H$ und $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{x} \in U \cap H$.
- b) Es gibt ein Parametergebiet $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und eine stetig differenzierbare Parametrisierung $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$ und $\varphi(P) = U \cap H$.

Dann sind die folgenden Aussagen über einen Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ äquivalent:

1. \mathbf{v} ist ein Tangentialvektor an H im Punkte \mathbf{x}_0 .
2. $\mathbf{v} \cdot \nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$.
3. Es gibt einen Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n-1}$ mit $\mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot J_\varphi(\mathbf{u}_0)^\top$.

BEWEIS: (1) \implies (2): Sei \mathbf{v} ein Tangentialvektor an H in \mathbf{x}_0 , also $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{x}_0$ und $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{v}$. Dann ist $f \circ \boldsymbol{\alpha}(t) \equiv 0$, also $0 = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \boldsymbol{\alpha}'(0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}$.

(2) \implies (3): Weil $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ ist, hat der Raum der zu $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ orthogonalen Vektoren die Dimension $n - 1$. Und der Raum $\text{Im } D\varphi(\mathbf{x}_0)$ besitzt ebenfalls die Dimension $n - 1$ ($= \text{rg } J_\varphi(\mathbf{u}_0)$).

Weil $f \circ \varphi(\mathbf{u}) \equiv 0$ ist, ist $\mathbf{0} = \nabla(f \circ \varphi)(\mathbf{u}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot J_\varphi(\mathbf{u}_0)$ (Kettenregel). Ist also ein Element $\mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot J_\varphi(\mathbf{u}_0)^\top$ von $\text{Im } D\varphi(\mathbf{u}_0)$ gegeben, so ist

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}^\top = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot J_\varphi(\mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{w}^\top = 0.$$

Daher sind die beiden betrachteten Vektorräume gleich und aus (2) folgt (3).

(3) \implies (1): Es gebe einen Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n-1}$ mit $\mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot J_\varphi(\mathbf{u}_0)^\top = D\varphi(\mathbf{u}_0)(\mathbf{w})$. Dann definiere man $\boldsymbol{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $\boldsymbol{\alpha}(t) := \varphi(\mathbf{u}_0 + t\mathbf{w})$. Offensichtlich liegt die Spur von $\boldsymbol{\alpha}$ in H , es ist $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{x}_0$ und $\boldsymbol{\alpha}'(0) = D\varphi(\mathbf{u}_0)(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$. Also ist \mathbf{v} ein Tangentialvektor an H in \mathbf{x}_0 . ■

Bemerkung: Wir haben insbesondere gezeigt, dass die Tangentialvektoren an eine glatte Hyperfläche $H \subset \mathbb{R}^n$ in einem Punkt $\mathbf{x}_0 \in H$ einen $(n-1)$ -dimensionalen Vektorraum bilden. Das irritiert etwas, denn die anschauliche „Tangentialebene“ in einem Punkt $\mathbf{x}_0 \in H$ ist i.a. kein Vektorraum, sondern ein affiner Raum. Den Vektorraum der Tangentialvektoren in \mathbf{x}_0 erhält man, indem man die anschauliche Tangentialebene in den Nullpunkt verschiebt.

Definition

Sei H eine glatte Hyperfläche im \mathbb{R}^n . Den Vektorraum $T_{\mathbf{x}}(H)$ der Tangentialvektoren an H in \mathbf{x} nennt man den **Tangentialraum** von H in \mathbf{x} .

2.1.5. Beispiel

Die Sphäre $S^{n-1} = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ ist die Nullstellenmenge von

$$f(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x}\|^2 - 1 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 1.$$

Für $\mathbf{x}_0 \in S^{n-1}$ ist

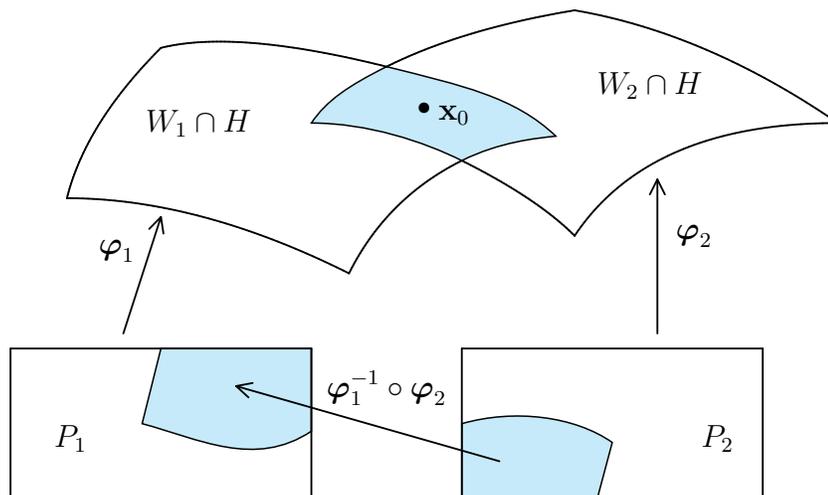
$$T_{\mathbf{x}_0}(S^{n-1}) = \text{Ker } Df(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = 0\} = \{\mathbf{v} : \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{v} = 0\}.$$

2.1.6. Satz (über Parametertransformationen)

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und $H \subset B$ eine glatte Hyperfläche. W_1, W_2 seien zwei offene Mengen im \mathbb{R}^n mit $W_1 \cap W_2 \cap H \neq \emptyset$, so dass es lokale Parametrisierungen $\varphi_1 : P_1 \rightarrow W_1 \cap H$ und $\varphi_2 : P_2 \rightarrow W_2 \cap H$ gibt. Dann ist

$$\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : \varphi_2^{-1}(W_1 \cap W_2 \cap H) \rightarrow \varphi_1^{-1}(W_1 \cap W_2 \cap H)$$

ein Diffeomorphismus.



Der Beweis wurde in Analysis 2 für beliebige glatte Flächen geführt. Er wird hier im Anhang wiederholt.

Definition

Sei H eine glatte Hyperfläche. Eine stetige Funktion $h : H \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar**, falls $h \circ \varphi$ für jede Parametrisierung φ differenzierbar ist.

Diese Definition ist nach dem obigen Satz vernünftig. Ist nämlich $f \circ \varphi$ differenzierbar und ψ eine andere Parametrisierung, so ist auch $f \circ \psi = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)$ differenzierbar.

2.1.7. Satz

Eine Teilmenge $H \subset B$ ist genau dann eine glatte Hyperfläche, wenn es zu jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in H$ eine offene Umgebung $U(\mathbf{x}_0) \subset B$ und eine umkehrbar differenzierbare Abbildung $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, so dass gilt:

$$\mathbf{F}(U \cap H) = \{\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{F}(U) : y_n = 0\}.$$

BEWEIS:

Sei H eine glatte Hyperfläche, $\mathbf{x}_0 \in H \cap U = \{f = 0\}$. Weil $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ ist, kann man – nach geeigneter Nummerierung der Koordinaten – annehmen, dass $f_{x_n}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ ist. Dann definieren wir $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n) := (x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_n)).$$

Es ist

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_{n-1} & \mathbf{0}^\top \\ \hline f_{x_1}(\mathbf{x}_0), \dots, f_{x_{n-1}}(\mathbf{x}_0) & f_{x_n}(\mathbf{x}_0) \end{array} \right)$$

und daher $\det J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Also ist \mathbf{F} bei \mathbf{x}_0 ein lokaler Diffeomorphismus und

$$\mathbf{F}(H \cap U) = \{\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{F}(U) : y_n = 0\}.$$

Ist umgekehrt ein lokaler Diffeomorphismus $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\mathbf{F}^{-1}(\{\mathbf{y} : y_n = 0\}) = U \cap H$$

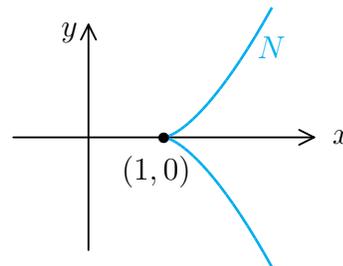
auf einer Umgebung U von \mathbf{x}_0 gegeben, so setzen wir $f := F_n$. Dann ist $H \cap U = \{f = 0\}$, und da $J_{\mathbf{F}}$ überall regulär ist, muss $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ sein, für alle $\mathbf{x} \in U$. ■

2.1.8. Beispiel

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := (x - 1)^3 - y^2$. Dann nennt man

$$N := \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$$

eine *Neil'sche Parabel*.



Der Gradient $\nabla f(x, y) = (3(x - 1)^2, -2y)$ verschwindet in dem Punkt $(1, 0)$ (der leider auf N liegt), aber in keinem anderen Punkt.

Durch $\alpha(t) := (1 + t^2, t^3)$ wird N parametrisiert, in allen Punkten $t \neq 0$ ist das eine glatte Parametrisierung. Also erhält man (für $t \neq 0$) durch den Vektor $\alpha'(t) = (2t, 3t^2) = t \cdot (2, 3t)$ die Richtung des Tangentialraumes in $\alpha(t)$. Wäre N eine glatte Kurve, so müsste der Tangentialraum stetig variieren, und wir hätten in $(1, 0)$ die x -Achse als Tangentialraum. Aber N wäre in der Nähe dieses Punktes auch ein Graph. Da N kein Graph über der x -Achse

ist (die Eindeutigkeit ist verletzt, es ist $y = \pm\sqrt{(x-1)^3}$), muss N Graph einer Funktion $x = g(y)$ über der y -Achse sein. Der hätte dann im Nullpunkt eine „senkrechte“ Tangente, was bei einer differenzierbaren Funktion g nicht möglich ist.

Also ist N keine glatte Kurve. Tatsächlich hat N in $(1, 0)$ eine „Spitze“.

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ irgendeine Funktion, so nennt man die Menge

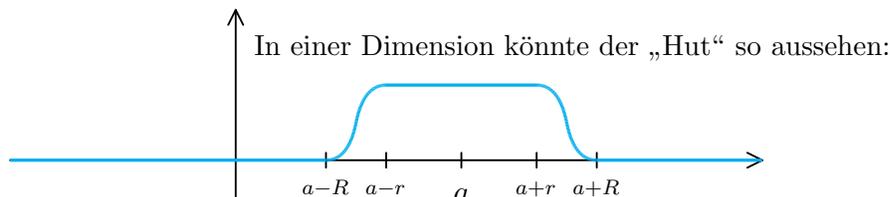
$$\text{Tr}(f) := \overline{\{\mathbf{x} \in M : f(\mathbf{x}) \neq 0\}}$$

den **Träger** von f . Wir verstehen ab sofort unter einer **differenzierbaren Funktion** eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Die Menge aller differenzierbaren Funktionen auf M wird dann mit $\mathcal{C}^\infty(M)$ bezeichnet, die Menge aller Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit kompaktem Träger mit $\mathcal{C}_c^\infty(M)$.

2.1.9. Satz vom „Hut“

Sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $0 < r < R$. Dann gibt es eine \mathcal{C}^∞ -Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, so dass gilt:

1. $f(\mathbf{x}) \equiv 1$ auf $B_r(\mathbf{a})$,
2. $f(\mathbf{x}) \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_R(\mathbf{a})$,
3. $0 \leq f(\mathbf{x}) \leq 1$ überall sonst.



BEWEIS: Durch

$$g(t) := \begin{cases} \exp(-1/t^2) & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

wird eine \mathcal{C}^∞ -Funktion auf \mathbb{R} definiert, die genau für $x > 0$ Werte > 0 annimmt (Beweis in Analysis 1). Dann ist $h(t) := g(1+t)g(1-t)$ genau auf dem Intervall $(-1, 1)$ positiv und überall sonst $= 0$.

Die Funktion

$$\varphi(t) := \left(\int_{-1}^t h(\tau) d\tau \right) / \left(\int_{-1}^1 h(\tau) d\tau \right)$$

ist wieder eine \mathcal{C}^∞ -Funktion, die nur Werte zwischen 0 und 1 annimmt. Für $t \leq -1$ ist $\varphi(t) \equiv 0$ und für $t \geq 1$ ist $\varphi(t) \equiv 1$. Schließlich setzen wir

$$f(\mathbf{x}) := \varphi\left(\frac{R+r-2\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}{R-r}\right).$$

Diese Funktion nimmt auch nur Werte zwischen 0 und 1 an. Für $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \geq R$ ist $f(\mathbf{x}) \equiv 0$, und für $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r$ ist $f(\mathbf{x}) \equiv 1$. ■

Wir wollen den Satz vom Hut benutzen, um auf einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ zu jeder endlichen offenen Überdeckung $\{U_1, \dots, U_N\}$ eine sogenannte **Teilung der Eins** zu konstruieren. Darunter versteht man ein System von C^∞ -Funktionen φ_i auf dem \mathbb{R}^n , so dass gilt:

1. $0 \leq \varphi_i(\mathbf{x}) \leq 1$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $i = 1, \dots, N$.
2. $\sum_{i=1}^N \varphi_i(\mathbf{x}) \equiv 1$ auf K .
3. Für jedes i liegt der (kompakte) Träger von φ_i in U_i .

Wir benötigen zwei Hilfssätze:

2.1.10. Lemma 1

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $C \subset U$ kompakt. Dann gibt es eine kompakte Menge $M \subset U$ mit $C \subset \overset{\circ}{M}$.

BEWEIS: Zu jedem Punkt $\mathbf{x} \in C$ gibt es ein $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x}) > 0$, so dass die abgeschlossene Hülle der Kugel $B(\mathbf{x}) := B_\varepsilon(\mathbf{x})$ noch ganz in U enthalten ist. Die offenen Kugeln überdecken die kompakte Menge C , und dafür reichen natürlich schon endlich viele Kugeln $B(\mathbf{x}_1), \dots, B(\mathbf{x}_r)$. Die Vereinigung M der abgeschlossenen Hüllen der Kugeln $B(\mathbf{x}_\rho)$ ist kompakt, und zu jedem Punkt $\mathbf{x} \in C$ gibt es ein ρ , so dass $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_\rho)$ ist. Also ist $C \subset \overset{\circ}{M}$. ■

2.1.11. Lemma 2

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $C \subset U$ kompakt. Dann gibt es eine offene Menge W mit $C \subset W$ und $\overline{W} \subset U$, sowie eine C^∞ -Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) \equiv 1$ auf C , $f(\mathbf{x}) \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus W$ und $0 \leq f(\mathbf{x}) \leq 1$ überall sonst.

BEWEIS: 1) Wir wählen zu jedem Punkt $\mathbf{a} \in C$ reelle Zahlen $r = r(\mathbf{a})$ und $R = R(\mathbf{a})$ mit $0 < r < R$, so dass $\overline{B_R(\mathbf{a})} \subset U$ ist. Nach dem Satz vom Hut gibt es eine C^∞ -Funktion $g = g_{\mathbf{a}}$, so dass überall $0 \leq g(\mathbf{x}) \leq 1$ ist, $g(\mathbf{x}) \equiv 1$ auf $B_r(\mathbf{a})$ und $g(\mathbf{x}) \equiv 0$ außerhalb $B_R(\mathbf{a})$.

Endlich viele (der kleineren) Kugeln (um Punkte $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s$) überdecken bereits die kompakte Menge C . Die zugehörigen Funktionen seien mit g_1, \dots, g_s bezeichnet, die Radien mit r_σ und R_σ . Dann ist $W := B_{R_1}(\mathbf{x}_1) \cup \dots \cup B_{R_s}(\mathbf{x}_s)$ eine offene Menge mit $C \subset W$ und $\overline{W} \subset U$.

Wir setzen $\tilde{f} := g_1 + \dots + g_s$. Dann ist $\tilde{f}(\mathbf{x}) > 0$ für $\mathbf{x} \in C$ (weil dort immer wenigstens ein g_σ den Wert 1 annimmt), und $\tilde{f}(\mathbf{x}) = 0$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus W$. Weil C kompakt ist, gibt es sogar ein $\delta > 0$, so dass $\tilde{f}(\mathbf{x}) \geq \delta$ auf C ist.

Im Beweis des Satzes vom Hut wurde eine \mathcal{C}^∞ -Funktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konstruiert, mit $0 \leq \varphi(t) \leq 1$, $\varphi(t) = 0$ für $t \leq -1$ und $= 1$ für $t \geq 1$. Sei $\varphi_\delta(t) := \varphi(2t/\delta - 1)$, also $0 \leq \varphi_\delta(t) \leq 1$, $\varphi_\delta(t) = 0$ für $t \leq 0$ und $= 1$ für $t \geq \delta$. Dann hat $f(\mathbf{x}) := \varphi_\delta(\tilde{f}(\mathbf{x}))$ die gewünschten Eigenschaften. ■

2.1.12. Existenz einer „Teilung der Eins“

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\{U_1, \dots, U_N\}$ eine offene Überdeckung von K . Dann gibt es \mathcal{C}^∞ -Funktionen φ_i auf dem \mathbb{R}^n , so dass gilt:

1. $0 \leq \varphi_i(\mathbf{x}) \leq 1$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $i = 1, \dots, N$.

2. $\sum_{i=1}^N \varphi_i(\mathbf{x}) = 1$ für $\mathbf{x} \in K$.

3. Für jedes i hat φ_i kompakten Träger in U_i .

BEWEIS: 1) Sei $\{U_1, \dots, U_N\}$ die gegebene offene Überdeckung von K . Wir konstruieren kompakte Mengen $M_i \subset U_i$, so dass $\{\overset{\circ}{M}_1, \dots, \overset{\circ}{M}_N\}$ immer noch eine offene Überdeckung von K ist.

Dabei gehen wir induktiv vor, wir ersetzen sukzessive eine Menge U_i nach der anderen durch den offenen Kern einer geeigneten kompakten Menge.

Anfang: Die Menge

$$C_1 := K \setminus (U_2 \cup U_3 \cup \dots \cup U_N)$$

ist (als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge) kompakt und in U_1 enthalten. Nach Lemma 1 gibt es eine kompakte Menge $M_1 \subset U_1$ mit $C_1 \subset \overset{\circ}{M}_1$. Also ist $\{\overset{\circ}{M}_1, U_2, \dots, U_N\}$ eine Überdeckung von K .

Induktionsschritt: Es seien schon kompakte Mengen M_1, \dots, M_k konstruiert, so dass stets $M_i \subset U_i$ und $\{\overset{\circ}{M}_1, \dots, \overset{\circ}{M}_k, U_{k+1}, \dots, U_N\}$ eine offene Überdeckung von K ist. Nun sei

$$C_{k+1} := K \setminus (\overset{\circ}{M}_1 \cup \dots \cup \overset{\circ}{M}_k \cup U_{k+2} \cup \dots \cup U_N).$$

Dann ist C_{k+1} kompakt und in U_{k+1} enthalten. Wieder findet man eine kompakte Menge $M_{k+1} \subset U_{k+1}$, so dass $C_{k+1} \subset \overset{\circ}{M}_{k+1}$ ist. Damit hat man U_{k+1} durch $\overset{\circ}{M}_{k+1}$ ersetzt.

2) Nach Lemma 2 gibt es \mathcal{C}^∞ -Funktionen ψ_i auf dem \mathbb{R}^n , die $= 1$ auf M_i und $= 0$ außerhalb einer offenen Menge P_i mit $M_i \subset P_i \subset \overline{P}_i \subset U_i$ sind und sonst überall Werte zwischen 0 und 1 annehmen.

Sei $\psi := \psi_1 + \dots + \psi_N$ und $U := \overset{\circ}{M}_1 \cup \dots \cup \overset{\circ}{M}_N$. Dann ist U eine offene Menge mit $K \subset U \subset U_1 \cup \dots \cup U_N$, so dass $\psi > 0$ auf U ist. Wir setzen $\tilde{\varphi}_i := \psi_i/\psi$, für

$i = 1, \dots, N$. Dann ist $\tilde{\varphi}_i$ eine \mathcal{C}^∞ -Funktion auf U , die durch den Wert Null zu einer \mathcal{C}^∞ -Funktion auf dem ganzen \mathbb{R}^n fortgesetzt werden kann. Es ist

$$0 \leq \tilde{\varphi}_i \leq 1, \quad \tilde{\varphi}_i(\mathbf{x}) = 0 \text{ außerhalb } P_i \text{ und } \sum_i \tilde{\varphi}_i = 1 \text{ auf } U.$$

Nach Lemma 1 gibt es eine kompakte Menge $M \subset U$ mit $K \subset \overset{\circ}{M}$. Nach Lemma 2 gibt es eine offene Menge W mit $K \subset W \subset \overline{W} \subset \overset{\circ}{M}$ und eine \mathcal{C}^∞ -Funktion f mit $0 \leq f \leq 1$, $f(\mathbf{x}) \equiv 1$ auf K und $f(\mathbf{x}) \equiv 0$ außerhalb W .

Wir setzen $\varphi_i := f \cdot \tilde{\varphi}_i$, für $i = 1, \dots, N$. Dann ist φ_i eine \mathcal{C}^∞ -Funktion auf dem \mathbb{R}^n , $0 \leq \varphi_i \leq 1$, $\sum_i \varphi_i = 1$ auf K und $\varphi_i(\mathbf{x}) \equiv 0$ außerhalb $A_i := W \cap P_i$. Also ist $\text{Tr}(\varphi_i) \subset W \cap P_i \subset M \cap \overline{P}_i$, und das ist eine kompakte Teilmenge von U_i . ■

Anwendungen des Konzeptes der Teilung der Eins finden sich in den folgenden Abschnitten.

Definition

Unter einem **glatt berandeten Gebiet** verstehen wir ein **Parametergebiet** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dessen Rand eine **glatte Hyperfläche** ist.

2.1.13. Theorem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glatt berandetes Gebiet. Dann gibt es zu jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ eine zusammenhängende offene Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ und eine differenzierbare Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass gilt:

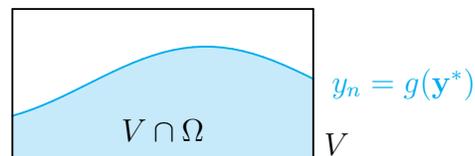
1. $U \cap \Omega = \{\mathbf{x} \in U : h(\mathbf{x}) < 0\}$.
2. $\nabla h(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ für $\mathbf{x} \in U$.
3. $U \cap \partial\Omega = \{\mathbf{x} \in U : h(\mathbf{x}) = 0\}$.

BEWEIS: Sei $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$. Als glatte Hyperfläche ist $\partial\Omega$ in der Nähe von \mathbf{x}_0 Nullstelle einer differenzierbaren Funktion mit nicht-verschwindendem Gradienten. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $\mathbf{F} : U \rightarrow V = V^* \times I$ (mit einem Gebiet $V^* \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und einem offenen Intervall I) und eine differenzierbare Funktion $g : V^* \rightarrow I$, so dass

$$\mathbf{F}(U \cap \partial\Omega) = \{(\mathbf{y}^*, y_n) \in V^* \times I : y_n = g(\mathbf{y}^*)\}$$

ist. Sei $\tilde{h} : V \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\tilde{h}(\mathbf{y}^*, y_n) := y_n - g(\mathbf{y}^*)$, sowie $h := \tilde{h} \circ \mathbf{F}$. Dann setzen wir

$$\begin{aligned} V_- &:= \{\mathbf{y} \in V : \tilde{h}(\mathbf{y}) < 0\}, \\ V_+ &:= \{\mathbf{y} \in V : \tilde{h}(\mathbf{y}) > 0\} \\ \text{und } V_0 &:= \{\mathbf{y} \in V : \tilde{h}(\mathbf{y}) = 0\}. \end{aligned}$$



Es ist $\nabla \tilde{h}(\mathbf{y}^*, y_n) := (-\nabla g(\mathbf{y}^*), 1)$ und deshalb $\nabla h(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ für $\mathbf{x} \in U$. Außerdem ist $U \cap \partial\Omega = \{\mathbf{x} \in U : h(\mathbf{x}) = 0\}$.

Da V_- und V_+ Gebiete sind, gilt das auch für $U_- := \mathbf{F}^{-1}(V_-) = \{h < 0\}$ und $U_+ := \mathbf{F}^{-1}(V_+) = \{h > 0\}$. Wir haben eine disjunkte Zerlegung

$$U = U_- \cup U_+ \cup (U \cap \partial\Omega).$$

Indem man notfalls h durch $-h$ ersetzt, kann man annehmen, dass es einen Punkt $\mathbf{x}_1 \in U_- \cap \Omega$ gibt. Wir zeigen, dass $U_- \subset \Omega$ (und analog $U_+ \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$) ist, also $U_- = U \cap \Omega$.

Sei $\mathbf{x}_2 \in U_-$. Da \mathbf{x}_2 nicht in $\partial\Omega$ liegen kann, bleibt nur zu zeigen, dass \mathbf{x}_2 auch nicht in $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ liegen kann. Wir nehmen an, genau das wäre aber der Fall. Da dann $\mathbf{y}_1 := \mathbf{F}(\mathbf{x}_1)$ und $\mathbf{y}_2 := \mathbf{F}(\mathbf{x}_2)$ beide in V_- liegen, gibt es einen stetigen Weg $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow V_-$, der \mathbf{y}_1 mit \mathbf{y}_2 innerhalb von V_- verbindet. Der Weg $\alpha := \mathbf{F}^{-1} \circ \tilde{\alpha}$ verbindet \mathbf{x}_1 mit \mathbf{x}_2 innerhalb U_- . Sei

$$t_0 := \sup\{t \in [0, 1] : \alpha(t) \in \Omega\}.$$

Dann ist $0 < t_0 < 1$, und es gibt eine monoton wachsende Folge (t_ν) in $[0, 1]$ mit $\alpha(t_\nu) \in \Omega$, die gegen t_0 konvergiert. Dann muss zumindest $\alpha(t_0)$ in $\overline{\Omega}$ liegen. Weil der Weg in U_- verläuft, kann er $\partial\Omega$ nicht treffen, aber die Aussage $\alpha(t_0) \in \Omega$ kann nach Definition von t_0 auch nicht gelten. Das ist der gewünschte Widerspruch. ■

Man nennt h eine **lokale Randfunktion**. Diese Randfunktion ist nicht eindeutig bestimmt.

2.1.14. Satz

Sei Ω ein glatt berandetes Gebiet. Sind h_1, h_2 zwei lokale Randfunktionen auf einer Umgebung U eines Punktes $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$, so gibt es eine differenzierbare Funktion λ auf U , so dass gilt:

1. $\lambda > 0$ auf U .
2. $h_1 = \lambda \cdot h_2$ auf U .
3. $\nabla h_1(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) \cdot \nabla h_2(\mathbf{x})$ auf $U \cap \partial\Omega$.

BEWEIS: Durch eine Koordinatentransformation kann man erreichen, dass $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ und $h_2 = x_n$ ist. Für festes $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U$ ist

$$g(t) := h_1(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$$

eine differenzierbare Funktion, die bei $t = 0$ verschwindet. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
h_1(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) &= g(x_n) - g(0) = \int_0^{x_n} g'(s) ds \\
&= x_n \int_0^1 g'(tx_n) dt \quad (\text{mit Substitution } \varphi(t) = tx_n) \\
&= h_2(x_1, \dots, x_n) \cdot \lambda(x_1, \dots, x_n),
\end{aligned}$$

wobei $\lambda(x_1, \dots, x_n) := \int_0^1 \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, tx_n) dt$ eine differenzierbare Funktion ist (Satz über Parameterintegrale).

Offensichtlich ist $\lambda = h_1/h_2 > 0$ auf $U \setminus \partial\Omega$. Weil h_2 auf $\partial\Omega$ verschwindet und

$$\nabla h_1(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) \cdot \nabla h_2(\mathbf{x}) + h_2(\mathbf{x}) \cdot \nabla \lambda(\mathbf{x})$$

ist, ist sogar $\nabla h_1(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) \cdot \nabla h_2(\mathbf{x})$ auf $U \cap \partial\Omega$. Das zeigt aber, dass λ auf $\partial\Omega$ nicht verschwinden kann. Aus Stetigkeitsgründen muss $\lambda \geq 0$ auf ganz U gelten. Also ist $\lambda > 0$ auch auf $U \cap \partial\Omega$. ■

2.1.15. Existenz (und Eindeutigkeit) der äußeren Normale

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glatt berandetes Gebiet und $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten normierten Vektor $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{x}_0)$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass gilt:

1. $\mathbf{N} \cdot \mathbf{v} = 0$ für alle $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}_0}(\partial\Omega)$.
2. $\mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{N}$ liegt für $-\varepsilon < t < 0$ in Ω und für $0 < t < \varepsilon$ in $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$.

BEWEIS: Es gibt eine Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ und eine lokale Randfunktion auf U , also eine stetig differenzierbare Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$U \cap \partial\Omega = \{\mathbf{x} \in U : h(\mathbf{x}) = 0\} \quad \text{und} \quad U \cap \Omega = \{\mathbf{x} \in U : h(\mathbf{x}) < 0\}.$$

Außerdem kann man annehmen, dass $\nabla h(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ auf U ist.

Ist $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}_0}(\partial\Omega)$ tangential zu $\partial\Omega$, so gibt es einen stetig differenzierbaren Weg $\boldsymbol{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \partial\Omega$ mit $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{x}_0$ und $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{v}$. Dann ist $h \circ \boldsymbol{\alpha}(t) \equiv 0$, also

$$0 = (h \circ \boldsymbol{\alpha})'(0) = \nabla h(\boldsymbol{\alpha}(0)) \cdot \boldsymbol{\alpha}'(0) = \nabla h(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}.$$

Das bedeutet, dass $\nabla h(\mathbf{x}_0)$ auf dem Tangentialraum senkrecht steht. Wir setzen

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}_0) := \frac{\nabla h(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla h(\mathbf{x}_0)\|},$$

sowie $\varrho(t) := h(\mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}_0))$. Dann ist $\varrho(0) = h(\mathbf{x}_0) = 0$ und $\varrho'(0) = \nabla h(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}_0) = \|\nabla h(\mathbf{x}_0)\| > 0$. Also wächst ϱ in der Nähe von $t = 0$ streng monoton. Daraus folgt: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $\varrho(t) < 0$ für $-\varepsilon < t < 0$ und $\varrho(t) > 0$ für $0 < t < \varepsilon$ ist. Das bedeutet:

$\mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}_0) \in \Omega$ für $-\varepsilon < t < 0$ und $\mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ für $0 < t < \varepsilon$.

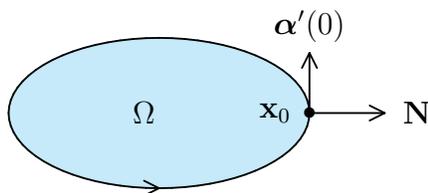
Der Raum aller Vektoren $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, die in \mathbf{x}_0 auf $\partial\Omega$ senkrecht stehen, ist 1-dimensional. Weil der Vektor $\mathbf{N}(\mathbf{x}_0)$ normiert sein und nach außen zeigen soll, ist er eindeutig bestimmt. ■

Wir nennen $\mathbf{N}(\mathbf{x}_0)$ den **äußeren (Einheits-)Normalenvektor** von $\partial\Omega$ in \mathbf{x}_0 . Er legt eine „transversale Orientierung“ des Randes fest. Die „innere Orientierung“ des Randes im Punkte \mathbf{x}_0 wird durch die Anordnung der Elemente $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ einer Basis von $T_{\mathbf{x}_0}(\partial\Omega)$ festgelegt. Sie ist so zu wählen, dass $\det(\mathbf{N}(\mathbf{x}_0), \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) > 0$ ist.

Eine Basis von $T_{\mathbf{x}_0}(\partial\Omega)$, also eine innere Orientierung des Randes, gewinnt man durch eine lokale Parametrisierung des Randes. Ist $\varphi : P \rightarrow S \subset \partial\Omega$ eine solche Parametrisierung und $\varphi(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$, so ist $\{\varphi_{u_1}(\mathbf{u}_0), \dots, \varphi_{u_{n-1}}(\mathbf{u}_0)\}$ eine Basis von $T_{\mathbf{x}_0}(\partial\Omega)$.

2.1.16. Beispiele

- A. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein glatt berandetes Gebiet, $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ und $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lokale Parametrisierung des Randes in der Nähe von \mathbf{x}_0 mit $\alpha(0) = \mathbf{x}_0$, sowie \mathbf{N} der äußere Normalenvektor in \mathbf{x}_0 . Die Parametrisierung α liefert die „richtige“ Orientierung des Randes, wenn $\det(\mathbf{N}, \alpha'(0)) > 0$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn die Basis $\{\mathbf{N}, \alpha'(0)/\|\alpha'(0)\|\}$ durch eine (positive) Drehung aus $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ hervorgeht. Und das ist wiederum genau dann der Fall, wenn das Gebiet Ω „links“ vom Rand liegt und die äußere Normale \mathbf{N} nach „rechts“ zeigt.



- B. Im \mathbb{R}^3 ist es nützlich, sich des Vektorproduktes zu bedienen.

Sind \mathbf{v}, \mathbf{w} zwei linear unabhängige Vektoren des \mathbb{R}^3 , so ist die Zuordnung

$$\mathbf{a} \mapsto \det(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

eine Linearform $\neq 0$. Deshalb gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor \mathbf{u} , so dass $\det(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$ für alle $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ gilt. Diesen Vektor \mathbf{u} nennt man das **Vektorprodukt** von \mathbf{v} und \mathbf{w} und bezeichnet ihn mit $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Allgemein ist also

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \text{für alle } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

Setzt man für \mathbf{a} nacheinander die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ein, so erhält man die drei Komponenten des Vektors $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ und damit die Gleichung

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \times \mathbf{w} &= (\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \det(\mathbf{e}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \det(\mathbf{e}_3, \mathbf{v}, \mathbf{w})) \\ &= (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1).\end{aligned}$$

Aus den Eigenschaften der Determinante folgt:

Das Vektorprodukt ist bilinear, es ist $\mathbf{w} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ und $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$.

Ist $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 (also eine ON-Basis mit $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 1$), so gilt:

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2.$$

Das folgt daraus, dass $\mathbf{v} = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}_2 + (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}_3$ für jeden Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ gilt.

Ist nun $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein glatt berandetes Gebiet, $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$, $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lokale Parametrisierung des Randes und $\varphi(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$, so bilden die Vektoren $\varphi_u(\mathbf{u}_0)$ und $\varphi_v(\mathbf{u}_0)$ eine Basis von $T_{\mathbf{x}_0}(\partial\Omega)$. Das Vektorprodukt $\varphi_u(\mathbf{u}_0) \times \varphi_v(\mathbf{u}_0)$ steht in \mathbf{x}_0 auf $\partial\Omega$ senkrecht. Kann man die Parametrisierung so wählen, dass $\varphi_u(\mathbf{u}_0) \times \varphi_v(\mathbf{u}_0)$ und $\mathbf{N}(\mathbf{x}_0)$ in die gleiche Richtung zeigen (was der Fall ist, wenn $\det(\mathbf{N}, \varphi_u, \varphi_v) > 0$ ist), so ist

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}_0) = \frac{\varphi_u(\mathbf{u}_0) \times \varphi_v(\mathbf{u}_0)}{\|\varphi_u(\mathbf{u}_0) \times \varphi_v(\mathbf{u}_0)\|}.$$

Andernfalls unterscheiden sich die beiden Vektoren um das Vorzeichen.

Anhang (p -dimensionale Flächen)

Definition

Sei $P \subset \mathbb{R}^p$ ein Parametergebiet. Ein **glattes parametrisiertes Flächenstück** (über P) ist eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$, für die gilt:

1. φ ist injektiv.
2. $\text{rg } J_\varphi(\mathbf{u}) = p$ für alle $\mathbf{u} \in P$.
3. Ist $\mathbf{u}_0 \in P$ und $\mathbf{u}_\nu \in P$ eine Folge mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi(\mathbf{u}_\nu) = \varphi(\mathbf{u}_0)$, so ist auch $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathbf{u}_\nu = \mathbf{u}_0$.

Die Zahl p nennt man die **Dimension** des Flächenstücks. Ist $p = 1$, so sprechen wir von einem **glatten Weg**.

Definition

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine p -dimensionale **glatte Fläche** oder **Untermannigfaltigkeit**, falls es zu jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in M$ eine Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$, ein Parametergebiet $P \subset \mathbb{R}^p$, einen Parameter $\mathbf{u}_0 \in P$ und ein p -dimensionales glattes parametrisiertes Flächenstück $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$ und $\varphi(P) = M \cap U$ gibt. Ist $p = n - 1$, so spricht man von einer **Hyperfläche**.

2.1.17. Satz

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $M \subset B$ und $0 \leq q < n$. Es gebe stetig differenzierbare Funktionen $f_1, \dots, f_q : B \rightarrow \mathbb{R}$, so dass gilt:

1. $M = \{\mathbf{x} \in B : f_1(\mathbf{x}) = \dots = f_q(\mathbf{x}) = 0\}$.
2. Die Vektoren $\nabla f_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla f_q(\mathbf{x})$ sind in jedem Punkt $\mathbf{x} \in M$ linear unabhängig.

Dann ist M eine p -dimensionale Untermannigfaltigkeit (mit $p = n - q$).

BEWEIS: $\mathbf{f} := (f_1, \dots, f_q)$ ist eine stetig differenzierbare Abbildung von B nach \mathbb{R}^q . Ist $\mathbf{x}_0 \in M$, so gilt nach Voraussetzung $\text{rg } J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = q$. O.B.d.A. kann man annehmen, dass

$$\det \begin{pmatrix} (f_1)_{x_{p+1}}(\mathbf{x}_0) & \cdots & (f_1)_{x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ (f_q)_{x_{p+1}}(\mathbf{x}_0) & \cdots & (f_q)_{x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

ist. Setzen wir $\mathbf{x}' := (x_1, \dots, x_p)$ und $\mathbf{x}'' := (x_{p+1}, \dots, x_n)$, so gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen eine Umgebung $U = U(\mathbf{x}'_0) \subset \mathbb{R}^p$, eine Umgebung $V = V(\mathbf{x}''_0) \subset \mathbb{R}^q$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\mathbf{g} : U \rightarrow V$, so dass $(U \times V) \cap M = \{(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \in U \times V : \mathbf{x}'' = \mathbf{g}(\mathbf{x}')\}$ ist. Durch $\varphi(\mathbf{x}') := (\mathbf{x}', \mathbf{g}(\mathbf{x}'))$ gewinnt man eine lokale Parametrisierung von M in \mathbf{x}_0 . ■

2.1.18. Lemma

Sei $P \subset \mathbb{R}^p$ ein Parametergebiet, $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes parametrisiertes Flächenstück, $S := \varphi(P)$ und $U \subset P$ offen. Dann gibt es eine offene Menge $B \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\varphi(U) = B \cap S$ ist. Das bedeutet, dass $\varphi(U)$ eine offene Teilmenge von S (in der Relativtopologie) ist.

BEWEIS: **1. Schritt:** Sei $\mathbf{u}_0 \in U$ beliebig und $\mathbf{x}_0 := \varphi(\mathbf{u}_0)$. Wir zeigen, dass es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \cap S \subset \varphi(U)$ gibt.

Andernfalls gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $\mathbf{x}_n \in B_{1/n}(\mathbf{x}_0) \cap S$ mit $\mathbf{x}_n \notin \varphi(U)$. Zu jedem n gibt es dann auch ein $\mathbf{u}_n \in P$ mit $\varphi(\mathbf{u}_n) = \mathbf{x}_n$. Wählt man ein $\delta > 0$, so dass $U_\delta(\mathbf{u}_0) \subset U$ ist, so ist $\|\varphi(\mathbf{u}_n) - \varphi(\mathbf{u}_0)\| < 1/n$ und $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_0\| \geq \delta$ für alle n . Das kann nicht sein.

2. Schritt: Sei jetzt für jedes $\mathbf{u} \in U$ ein $\varepsilon(\mathbf{u}) > 0$ gewählt, so dass $B_{\varepsilon(\mathbf{u})}(\varphi(\mathbf{u})) \cap S \subset \varphi(U)$ ist. Wir setzen

$$B := \bigcup_{\mathbf{u} \in U} B_{\varepsilon(\mathbf{u})}(\varphi(\mathbf{u})).$$

Das ist eine offene Menge im \mathbb{R}^n , und es gilt:

$$B \cap S = \bigcup_{\mathbf{u} \in U} B_{\varepsilon(\mathbf{u})}(\varphi(\mathbf{u})) \cap S \subset \varphi(U).$$

Ist umgekehrt $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{u}) \in \varphi(U)$ (mit $\mathbf{u} \in U$), so liegt \mathbf{x} in S und in $B_{\varepsilon(\mathbf{u})}(\varphi(\mathbf{u}))$, also in $S \cap B$. Zusammen haben wir die Gleichheit $\varphi(U) = B \cap S$. ■

2.1.19. Satz

Sei $P \subset \mathbb{R}^p$ ein Parametergebiet, $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes parametrisiertes Flächenstück, $S := \varphi(P)$. Dann gibt es zu jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in S$ eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$, so dass gilt:

1. $U \cap S = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{0})$.
2. $\text{rg } J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = n - p$ für $\mathbf{x} \in U \cap S$.

BEWEIS: Wir benutzen die Projektionen

$$\pi_1 : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}^p \quad \text{und} \quad \pi_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$$

mit

$$\pi_1(x_1, \dots, x_n) := (x_1, \dots, x_p) \quad \text{und} \quad \pi_2(x_1, \dots, x_n) := (x_{p+1}, \dots, x_n).$$

Dann ist z.B. $\pi_1 \circ \varphi(\mathbf{u}) = (\varphi_1(\mathbf{u}), \dots, \varphi_p(\mathbf{u}))$.

Sei $\varphi(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$. Wegen der Rangbedingung können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\det J_{\pi_1 \circ \varphi}(\mathbf{u}_0) \neq 0$ ist. Nach dem Satz von der Umkehrabbildung gibt es also offene Umgebungen $U_1(\mathbf{u}_0)$ und $U_2(\pi_1 \circ \varphi(\mathbf{u}_0))$ im \mathbb{R}^p , so dass $\pi_1 \circ \varphi : U_1 \rightarrow U_2$ ein Diffeomorphismus ist.

Sei $\psi := (\pi_1 \circ \varphi)^{-1} : U_2 \rightarrow U_1$ die Umkehrabbildung. Wir können nun $\mathbf{g} : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ definieren durch

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}') := \pi_2 \circ \varphi \circ \psi(\mathbf{y}'), \quad \text{für } \mathbf{y}' = (y_1, \dots, y_p) \in U_2.$$

Nach dem Lemma gibt es eine offene Menge $B \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\varphi(U_1) = B \cap S$ ist. Für $\mathbf{y} = (\mathbf{y}', \mathbf{y}'') = (y_1, \dots, y_p; y_{p+1}, \dots, y_n) \in B$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} \in S &\iff \mathbf{y} \in \varphi(U_1) \\ &\iff \exists \mathbf{u} \in U_1 \text{ mit } \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{u}) \\ &\iff \exists \mathbf{u} \in U_1 \text{ mit } \mathbf{y}' = \pi_1 \circ \varphi(\mathbf{u}) \text{ und } \mathbf{y}'' = \pi_2 \circ \varphi(\mathbf{u}) \\ &\iff \exists \mathbf{u} \in U_1 \text{ mit } \mathbf{y}' = \psi^{-1}(\mathbf{u}) \text{ und } \mathbf{y}'' = \mathbf{g}(\psi^{-1}(\mathbf{u})) \\ &\iff \mathbf{y}' \in U_2 \text{ und } \mathbf{y}'' = \mathbf{g}(\mathbf{y}'). \end{aligned}$$

$U := (U_2 \times \mathbb{R}^{n-p}) \cap B$ ist eine offene Umgebung von \mathbf{x}_0 , und $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ mit $\mathbf{f}(\mathbf{y}', \mathbf{y}'') := \mathbf{y}'' - \mathbf{g}(\mathbf{y}')$ ist eine stetig differenzierbare Abbildung, deren Funktionalmatrix $J_{\mathbf{f}} = (-J_{\mathbf{g}} \mid E_{n-p})$ überall den Rang $n - p$ besitzt. Außerdem ist $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{0}) = U \cap S$. ■

Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, $\mathbf{x}_0 \in M$. Ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ heißt **Tangentenvektor** an M im Punkte \mathbf{x}_0 , falls es ein $\varepsilon > 0$ und einen stetig differenzierbaren Weg $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, so dass gilt:

1. Die Spur von α liegt ganz in M .
2. Es ist $\alpha(0) = \mathbf{x}_0$ und $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.

2.1.20. Charakterisierung von Tangentialvektoren

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, $\mathbf{x}_0 \in M$. Es sei $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung, so dass gilt:

- a) Es gibt eine stetig differenzierbare Abbildung $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ mit $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{0}) = U \cap M$ und $\text{rg}(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) = n - p$ für alle $\mathbf{x} \in U \cap M$.
- b) Es gibt ein Parametergebiet $P \subset \mathbb{R}^p$ und eine stetig differenzierbare Parametrisierung $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$ und $\varphi(P) = U \cap M$.

Dann sind die folgenden Aussagen über einen Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ äquivalent:

1. \mathbf{v} ist ein Tangentialvektor an M im Punkte \mathbf{x}_0 .
2. $\mathbf{v} \in \text{Ker } D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.
3. $\mathbf{v} \in \text{Im } D\varphi(\mathbf{u}_0)$.

BEWEIS: (1) \implies (2): Sei \mathbf{v} ein Tangentialvektor an M in \mathbf{x}_0 . Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und einen stetig differenzierbaren Weg $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$, dessen Spur ganz in M liegt, so dass $\alpha(0) = \mathbf{x}_0$ und $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ ist. Insbesondere ist dann $\mathbf{f} \circ \alpha(t) \equiv 0$ und $0 = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})$, also $\mathbf{v} \in \text{Ker } D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.

(2) \implies (3): Weil $\mathbf{f} \circ \varphi(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{0}$ ist, also $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \circ D\varphi(\mathbf{u}_0) = 0$, ist $\text{Im } D\varphi(\mathbf{u}_0) \subset \text{Ker } D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. Definitionsgemäß ist

$$\dim \text{Im } D\varphi(\mathbf{u}_0) = \text{rg } J_\varphi(\mathbf{u}_0) = p$$

und

$$\dim \text{Ker } D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = n - \text{rg } J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = n - (n - p) = p.$$

Daraus folgt, dass $\text{Ker } D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \text{Im } D\varphi(\mathbf{u}_0)$ ist. Jeder Vektor $\mathbf{v} \in \text{Ker } D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ liegt also auch in $\text{Im } D\varphi(\mathbf{u}_0)$.

(3) \implies (1): Sei $\mathbf{v} \in \text{Im } D\varphi(\mathbf{u}_0)$. Dann gibt es einen Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^p$ mit $D\varphi(\mathbf{u}_0)(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$. Nun sei $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch $\alpha(t) := \varphi(\mathbf{u}_0 + t\mathbf{w})$. Dann liegt die Spur von α in M , es ist $\alpha(0) = \mathbf{x}_0$ und $\alpha'(0) = D\varphi(\mathbf{u}_0)(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$. Also ist \mathbf{v} ein Tangentialvektor an M in \mathbf{x}_0 . ■

2.1.21. Satz

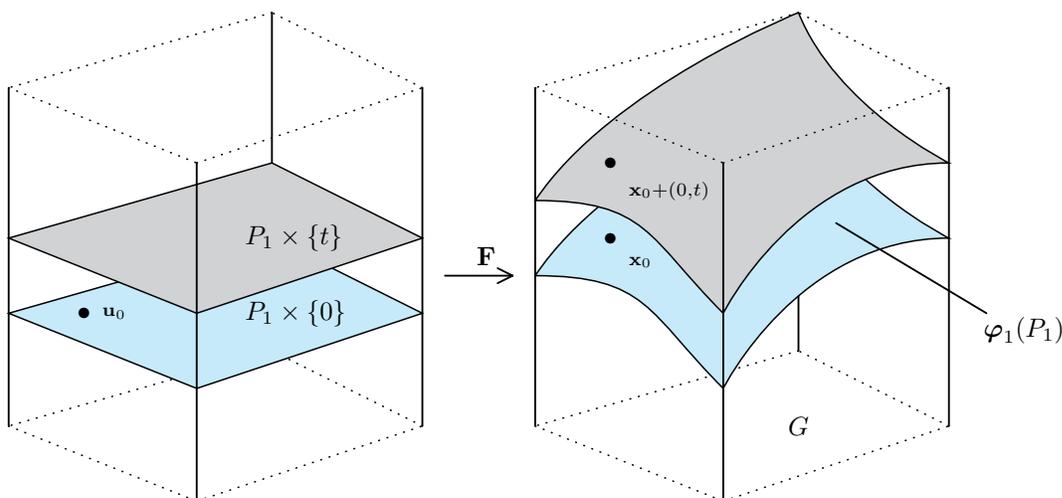
Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und $M \subset B$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. W_1, W_2 seien zwei offene Mengen im \mathbb{R}^n mit $W_1 \cap W_2 \cap M \neq \emptyset$, so dass es lokale Parametrisierungen $\varphi_1 : P_1 \rightarrow W_1 \cap M$ und $\varphi_2 : P_2 \rightarrow W_2 \cap M$ gibt. Dann ist

$$\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : \varphi_2^{-1}(W_1 \cap W_2 \cap M) \rightarrow \varphi_1^{-1}(W_1 \cap W_2 \cap M)$$

ein Diffeomorphismus.

BEWEIS: Der Beweis erfordert einen kleinen Trick. Ist $\mathbf{x}_0 \in W_1 \cap W_2 \cap M$ und $\varphi_1(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$, so können wir annehmen, dass die ersten k Zeilen von $J_{\varphi_1}(\mathbf{u}_0)$ linear unabhängig sind. Anschaulich bedeutet das, dass M in der Nähe von \mathbf{x}_0 wie ein Graph über einem Gebiet G des \mathbb{R}^k aussieht. Ist nämlich lokal $\varphi_1 = (\mathbf{g}, \mathbf{h})$, mit Werten in $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ und invertierbarem \mathbf{g} , so ist $\varphi_1(\mathbf{u}) = (\mathbf{w}', \mathbf{f}(\mathbf{w}'))$, mit $\mathbf{w}' = \mathbf{g}(\mathbf{u})$ und $\mathbf{f} = \mathbf{h} \circ \mathbf{g}^{-1}$.

Wir definieren $\mathbf{F} : P_1 \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{t}) := \varphi_1(\mathbf{u}) + (\mathbf{0}, \mathbf{t})$.



Dann bildet \mathbf{F} die Schichten $P_1 \times \{\mathbf{t}\}$ auf entsprechend verschobene Exemplare von $\varphi_1(P_1)$ ab. Es ist $\mathbf{F}(\mathbf{u}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{x}_0$ und

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{0}) = \left(J_{\varphi_1}(\mathbf{u}_0) \mid \begin{array}{c} 0 \\ E_{n-k} \end{array} \right),$$

also $\det J_{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{0}) \neq 0$. Das bedeutet, dass \mathbf{F} eine offene Umgebung $U \times U^*$ von $(\mathbf{u}_0, \mathbf{0})$ diffeomorph auf eine offene Umgebung W von \mathbf{x}_0 abbildet. Dabei kann man U so klein wählen, dass $W \cap M$ in $W_1 \cap W_2 \cap M$ enthalten ist.

Es gibt einen Punkt $\mathbf{v}_0 \in P_2$ mit $\varphi_2(\mathbf{v}_0) = \mathbf{x}_0$. Da φ_2 stetig ist, gibt es eine offene Umgebung V von \mathbf{v}_0 in P_2 mit $\varphi_2(V) \subset W$. Die Abbildung $\mathbf{F}^{-1} \circ \varphi_2 : V \rightarrow U \times U^*$ ist stetig differenzierbar und bildet V nach $P_1 \times \{\mathbf{0}\}$ ab. Zu jedem $\mathbf{v} \in V$ gibt es ein $\mathbf{u} \in P_1$ mit $\varphi_1(\mathbf{u}) = \varphi_2(\mathbf{v})$, und dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1} \circ \varphi_2(\mathbf{v}) &= \mathbf{F}^{-1} \circ \varphi_1(\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = (\mathbf{u}, \mathbf{0}) \\ &= (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2(\mathbf{v}), \mathbf{0}). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ auf V stetig differenzierbar ist. Und genauso zeigt man, dass $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ stetig differenzierbar ist. ■

2.2 Integration auf Hyperflächen

Wir brauchen zunächst etwas Lineare Algebra:

A) Sind $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ irgendwelche Vektoren ($n \geq 3$) und setzen wir

$$A := (\mathbf{a}_1^\top, \dots, \mathbf{a}_{n-1}^\top) \in M_{n, n-1}(\mathbb{R}),$$

so heißt

$$G_A = G(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) := \det(A^\top \cdot A) = \det(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \mid i, j = 1, \dots, n-1)$$

die **Gram'sche Determinante** von A bzw. $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$.

B) Das Skalarprodukt auf dem \mathbb{R}^n induziert ein Skalarprodukt auf dem Unterraum $V = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1} \rangle$. Ist $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}\}$ eine ON-Basis von V , so gibt es eine Darstellung

$$\mathbf{a}_i = \sum_{\nu=1}^{n-1} \alpha_{i,\nu} \mathbf{u}_\nu, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Setzen wir $\boldsymbol{\alpha}_i := (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n-1})$ und $\tilde{A} := (\boldsymbol{\alpha}_1^\top, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}^\top)$, so ist

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} \alpha_{i,\nu} \mathbf{u}_\nu \right) \cdot \left(\sum_{\mu=1}^{n-1} \alpha_{j,\mu} \mathbf{u}_\mu \right) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \alpha_{i,\nu} \alpha_{j,\nu} = \boldsymbol{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_j.$$

Dann ist $\tilde{A}^\top \cdot \tilde{A} = A^\top \cdot A$, also

$$G(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) = \det(A^\top \cdot A) = \det(\tilde{A}^\top \cdot \tilde{A}) = \det(\tilde{A})^2$$

und

$$|\det(\tilde{A})| = \sqrt{G(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1})}.$$

C) Durch $\lambda(\mathbf{w}) := \det(\mathbf{w}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1})$ wird eine Linearform λ auf dem \mathbb{R}^n definiert. Daher gibt es genau einen Vektor \mathbf{z} (der mit $\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}$ bezeichnet wird), so dass $\lambda(\mathbf{w}) = \mathbf{z} \cdot \mathbf{w}$ ist, also

$$(\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}) \cdot \mathbf{w} = \det(\mathbf{w}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}).$$

Insbesondere ist dann $\mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}) = 0$ für $i = 1, \dots, n-1$.

Der Laplace'sche Entwicklungssatz besagt:

$$\det(\mathbf{w}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} w_k \cdot \det(A_k),$$

wobei A_k die quadratische Matrix ist, die aus $A = (\mathbf{a}_1^\top, \dots, \mathbf{a}_{n-1}^\top)$ entsteht, indem man die k -te Zeile streicht. Setzt man für \mathbf{w} die Basisvektoren $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ ein, so gewinnt man die Komponenten von $\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}$.

$$(\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1})_i = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \delta_{ik} \cdot \det(A_k) = (-1)^{i+1} \det(A_i).$$

D) Sei nun $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsnormalenvektor zu dem von $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ erzeugten Unterraum V und $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}\}$ eine ON-Basis von V , so dass $\{\mathbf{N}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}\}$ eine positiv orientierte Basis des \mathbb{R}^n ist. Die durch $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}\}$ gegebene innere Orientierung von V und die durch \mathbf{N} gegebene transversale Orientierung entsprechen sich auf diesem Wege.

Ist

$$\mathbf{a}_i = \sum_{\nu=1}^{n-1} \alpha_{i\nu} \mathbf{u}_\nu, \text{ für } i = 1, \dots, n-1,$$

so ist

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{N}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) &= \sum_{\nu_1, \dots, \nu_{n-1}} \alpha_{1,\nu_1} \cdots \alpha_{n-1,\nu_{n-1}} \det(\mathbf{N}, \mathbf{u}_{\nu_1}, \dots, \mathbf{u}_{\nu_{n-1}}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \alpha_{1,\sigma(1)} \cdots \alpha_{n-1,\sigma(n-1)} \det(\mathbf{N}, \mathbf{u}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{u}_{\sigma(n-1)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \text{sign}(\sigma) \alpha_{1,\sigma(1)} \cdots \alpha_{n-1,\sigma(n-1)} \det(\mathbf{N}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}) \\ &= \det(\tilde{A}), \quad \text{weil } \det(\mathbf{N}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}) = 1 \text{ ist,} \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} G(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) &= |\det(\tilde{A})|^2 = |\mathbf{N} \cdot (\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1})|^2 \\ &= \|\mathbf{N}\|^2 \cdot \|\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}\|^2 \\ &= \|\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}\|^2 = \sum_{k=1}^n (\det(A_k))^2. \end{aligned}$$

Die letzten Gleichungen ergeben sich daraus, dass der Vektor $\mathbf{z} := \mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}$ (mit den Komponenten $z_k = (-1)^{k+1} \cdot \det(A_k)$) und der Normalenvektor \mathbf{N} beide auf V senkrecht stehen, also zueinander parallel sind. Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung wird dann zu einer Gleichung. Außerdem ist $\|\mathbf{N}\| = 1$.

2.2.1. Satz

1. Sei $A \in M_{n,n-1}(\mathbb{R})$ und $B \in M_{n-1}(\mathbb{R})$. Dann ist $G_{A \cdot B} = \det(B)^2 \cdot G_A$.

2. Ist $A = (\mathbf{a}_1^\top, \mathbf{a}_2^\top) \in M_{3,2}(\mathbb{R})$, so ist

$$G_A = \|\mathbf{a}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{a}_2\|^2 - (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)^2 = \|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|^2.$$

3. Ist $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}$ und $\angle(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ der (positive) Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^3$, so ist

$$\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\| = \|\mathbf{a}_1\| \cdot \|\mathbf{a}_2\| \cdot \sin(\angle(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2))$$

der Flächeninhalt des von \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 aufgespannten Parallelogramms.

BEWEIS: 1) Es ist

$$\begin{aligned} G_{A \cdot B} &= \det((AB)^\top \cdot (AB)) = \det(B^\top \cdot (A^\top \cdot A) \cdot B) \\ &= \det(B) \cdot \det(A^\top \cdot A) \cdot \det(B) = \det(B)^2 \cdot G_A. \end{aligned}$$

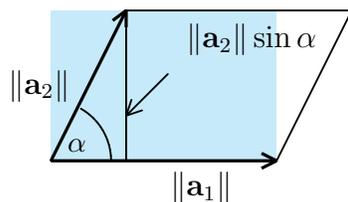
2) Es ist

$$\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|^2 = G_A = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \|\mathbf{a}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{a}_2\|^2 - (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)^2.$$

3) Sei $\alpha = \angle(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$. Dann ist $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \|\mathbf{a}_1\| \cdot \|\mathbf{a}_2\| \cos \alpha$ und

$$\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|^2 = \|\mathbf{a}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{a}_2\|^2 (1 - \cos^2 \alpha) = \|\mathbf{a}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{a}_2\|^2 \sin^2 \alpha,$$

also $\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\| = \|\mathbf{a}_1\| \cdot \|\mathbf{a}_2\| \cdot \sin(\angle(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2))$, weil $\sin \alpha > 0$ für $0 < \alpha < \pi$ ist.



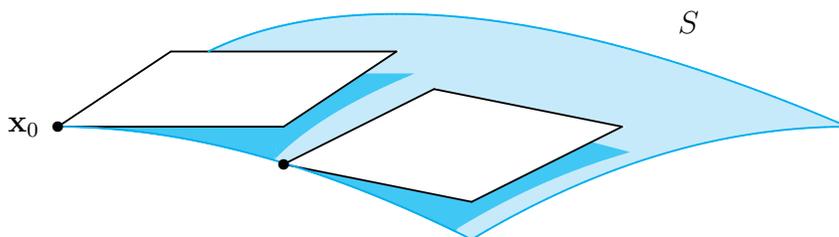
$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

■

Wir wollen uns jetzt mit dem Problem der Flächenberechnung beschäftigen. Zunächst betrachten wir nur den Fall $n = 3$ und versuchen es mit einer Approximation! Es sei ein Quader $Q \subset \mathbb{R}^3$ und eine Parametrisierung $\varphi : Q \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ gegeben. Wir zerlegen Q in viele kleine Teilquader. $\mathbf{u}_0 \in Q$ sei ein Gitterpunkt. Dann gibt es Zahlen s und t , so dass

$$\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0 + s\mathbf{e}_1, \mathbf{u}_0 + t\mathbf{e}_2 \text{ und } \mathbf{u}_0 + s\mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2$$

die Ecken eines Teilquaders sind. Die Bilder dieser vier Ecken auf der Fläche liegen leider nicht unbedingt in einer Ebene!



Wir können Genaueres über die Lage der Bilder der Ecken herausbekommen, wenn wir die Differenzierbarkeit von φ in \mathbf{u}_0 ausnutzen: Es gibt eine (matrixwertige) Funktion Δ , so dass gilt:

1. $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}_0) + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \cdot J_\varphi(\mathbf{u}_0)^\top + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \cdot \Delta(\mathbf{u})^\top$.
2. $\lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_0} \Delta(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

Näherungsweise ist also

$$\varphi(\mathbf{u}_0 + s\mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2) \approx \varphi(\mathbf{u}_0) + (s\mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2) \cdot J_\varphi(\mathbf{u}_0)^\top.$$

Setzen wir $\mathbf{a} := \varphi_u(\mathbf{u}_0)^\top$ und $\mathbf{b} := \varphi_v(\mathbf{u}_0)^\top$, so werden die Ecken des Teilquaders auf die Punkte $\varphi(\mathbf{u}_0)$, $\varphi(\mathbf{u}_0) + s\mathbf{a}$, $\varphi(\mathbf{u}_0) + t\mathbf{b}$ und $\varphi(\mathbf{u}_0) + s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ abgebildet, also auf die Ecken eines Parallelogramms. Wie gesagt, das gilt nur näherungsweise und nur für kleines s und t !

Die Fläche des Parallelogramms ist durch $\|s\mathbf{a} \times t\mathbf{b}\| = st\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ gegeben. Nun bezeichnen wir die Teilquader von Q mit $Q_{ij} = [t_i^{(1)}, t_{i+1}^{(1)}] \times [t_j^{(2)}, t_{j+1}^{(2)}]$. Zusätzlich setzen wir $\mathbf{t}_{ij} := (t_i^{(1)}, t_j^{(2)})$ (= linke untere Ecke von Q_{ij}). Ist \mathcal{P} die Zerlegung von Q in die Q_{ij} , so liegt es nahe, den Flächeninhalt $A(S)$ durch die „Riemann’schen Summen“

$$\Sigma(\mathcal{P}) := \sum_{i,j} \|\varphi_u(\mathbf{t}_{ij}) \times \varphi_v(\mathbf{t}_{ij})\| \cdot (t_{i+1}^{(1)} - t_i^{(1)})(t_{j+1}^{(2)} - t_j^{(2)})$$

zu approximieren und den Flächeninhalt selbst deshalb durch

$$A(S) := \int_Q \|\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)\| du dv$$

zu definieren. Dabei stimmt $\|\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)\|$ mit der Wurzel aus der Gram’schen Determinante der Funktionalmatrix $J_\varphi(u, v)$ überein. Das soll als Motivation für die folgende Definition dienen.

Definition

Sei $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein Parametergebiet und $\varphi : P \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$ die Parametrisierung eines glatten Hyperflachenstucks. Ist $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so bezeichnet man

$$\int_S f do := \int_P f(\varphi(\mathbf{u})) \sqrt{G_\varphi(\mathbf{u})} d\mu_{n-1}$$

als das (**Oberflächen-**)**Integral** der Funktion f über das Flächenstück S . Dabei sei $G_\varphi := \det(J_\varphi^\top \cdot J_\varphi)$.

Bemerkungen:

1. Sei $\varphi(\mathbf{u}) := (\mathbf{u}, 0)$, also S ein Gebiet im \mathbb{R}^{n-1} .

Dann ist $J_\varphi = \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ und $G_\varphi(\mathbf{u}) \equiv \det E_{n-1} = 1$, also $\int_S f do = \int_P f(\mathbf{u}, 0) d\mu_{n-1}$ das gewöhnliche Integral.

2. Wir wollen zeigen, dass das Oberflächenintegral nicht von der Parametrisierung abhängt. Ist $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein weiteres Parametergebiet und $\Phi : Q \rightarrow P$ ein Diffeomorphismus, so ist auch $\psi := \varphi \circ \Phi$ eine Parametrisierung von S , und mit der Kettenregel folgt:

$$J_\psi = (J_\varphi \circ \Phi) \cdot J_\Phi.$$

Dann ist

$$\sqrt{G_\psi} = \sqrt{\det(J_\Phi)^2 \cdot G_\varphi \circ \Phi} = |\det(J_\Phi)| \cdot \sqrt{G_\varphi \circ \Phi},$$

und mit der Transformationsformel folgt:

$$\begin{aligned} & \int_Q f(\psi(\mathbf{v})) \sqrt{G_\psi(\mathbf{v})} d\mu_{n-1} \\ &= \int_Q f(\varphi \circ \Phi(\mathbf{v})) |\det(J_\Phi(\mathbf{v}))| \cdot \sqrt{G_\varphi \circ \Phi(\mathbf{v})} d\mu_{n-1} \\ &= \int_P f(\varphi(\mathbf{u})) \sqrt{G_\varphi(\mathbf{u})} d\mu_{n-1}. \end{aligned}$$

3. An Stelle der Stetigkeit von f braucht man nur eine schwächere Bedingung. Es reicht, wenn die Funktion $\mathbf{u} \mapsto f(\varphi(\mathbf{u})) \sqrt{G_\varphi(\mathbf{u})}$ im Lebesgue'schen Sinne integrierbar ist. Das Bild einer Nullmenge $N \subset P$ unter φ spielt bei der Berechnung des Integrals keine Rolle. Deshalb können wir auch bei den folgenden Beispielen die „Klebekanten“ ignorieren.

Definition

Ist S ein (durch $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametrisiertes) Hyperflächenstück und $K \subset S$ kompakt, so nennt man

$$A_{n-1}(K) := \int_S \chi_K d\sigma = \int_{\varphi^{-1}(K)} \sqrt{G_\varphi(\mathbf{u})} d\mu_{n-1}$$

den **Flächeninhalt** von K .

2.2.2. Beispiele

- A. Wir beginnen mit der Fläche eines Zylinders. Dabei handelt es sich um den besonders einfachen Fall einer „abwickelbaren“ Fläche. Gehen wir von der Parametrisierung $\varphi : Q = (0, 2\pi) \times (-h, h) \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(u, v) := (r \cos u, r \sin u, v)$$

aus, so entsteht der Zylinder, indem wir das Rechteck zusammenrollen und entlang einer Seite verkleben, ohne es dabei zu deformieren. Daher erwarten wir, dass der Flächeninhalt $A(S) = 2r\pi \cdot 2h$ beträgt. Nun ist

$$J_{\varphi}(u, v) = \begin{pmatrix} -r \sin u & 0 \\ r \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{also } J_{\varphi}(u, v)^{\top} \cdot J_{\varphi}(u, v) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Gramsche Determinante

$$G_{\varphi} := \det(J_{\varphi}^{\top} \cdot J_{\varphi}) = r^2,$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_Q \sqrt{G_{\varphi}(u, v)} \, dudv = \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h r \, dv \, du \\ &= r \cdot 2h \cdot \int_0^{2\pi} du = 2r\pi \cdot 2h, \end{aligned}$$

ganz so, wie man es erwartet. Die Klebekante spielt dabei keine Rolle.

B. Als nächstes wollen wir den Inhalt der Oberfläche einer Kugel vom Radius r berechnen. Dazu benutzen wir die Parametrisierung

$$\varphi(u, v) := (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dann ist

$$J_{\varphi}(u, v) = \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v & -r \cos u \sin v \\ r \cos u \cos v & -r \sin u \sin v \\ 0 & r \cos v \end{pmatrix}$$

und daher

$$G_{\varphi}(u, v) = \det(J_{\varphi}(u, v)^{\top} \cdot J_{\varphi}(u, v)) = \det \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 v & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos v \, dv \, du = r^2 \int_0^{2\pi} \left(\sin v \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) du \\ &= 2r^2 \int_0^{2\pi} du = 4r^2\pi. \end{aligned}$$

Sei nun $S \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte glatte Hyperfläche (z.B. der Rand eines Gebietes). Dann gibt es eine offene Überdeckung $\{U_1, \dots, U_N\}$ von S und parametrisierte Flächenstücke $\varphi_j : P_j \rightarrow S_j := S \cap U_j$, $j = 1, \dots, N$. Ist (e_j) eine Teilung der Eins zu der Überdeckung (U_j) und $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so setzen wir

$$\int_S f \, do := \sum_{j=1}^N \int_{S_j} e_j f \, do.$$

Der Träger von $e_j f$ liegt in S_j , deshalb ist diese Definition sinnvoll. Ist S nur ein parametrisiertes Flächenstück, so kann man Summation und Integral vertauschen. Weil $\sum_j e_j f = f$ ist, kommt in diesem Fall nichts Neues heraus.

Wir müssen aber zeigen, dass die Definition nicht von der Überdeckung, den Parametrisierungen und der Teilung der Eins abhängt.

Sei $\{V_1, \dots, V_M\}$ eine zweite Überdeckung von S , (ψ_i) ein System von Parametrisierungen $\psi_i : Q_i \rightarrow \tilde{S}_i := V_i \cap S$ und (g_i) eine Teilung der Eins zur Überdeckung (V_i) . Dann ist

$$\sum_{j=1}^N e_j g_i = g_i, \quad \sum_{i=1}^M g_i e_j = e_j$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \int_{\tilde{S}_i} g_i f \, do &= \sum_{i=1}^M \int_{\tilde{S}_i} \sum_{j=1}^N e_j g_i f \, do = \sum_{i,j} \int_{\tilde{S}_i \cap S_j} e_j g_i f \, do \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{S_j} \sum_{i=1}^M g_i e_j f \, do = \sum_{j=1}^N \int_{S_j} e_j f \, do. \end{aligned}$$

Bei der praktischen Berechnung von Oberflächenintegralen kommt man meistens mit einer einzigen Parametrisierung aus und braucht keine Teilung der Eins.

2.2.3. Beispiel

Sei $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein Parametergebiet, $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $S := \{(\mathbf{x}, z) \in P \times \mathbb{R} : z = f(\mathbf{x})\}$ ihr Graph. Dann ist $\varphi : P \rightarrow S$ mit $\varphi(\mathbf{u}) := (\mathbf{u}, f(\mathbf{u}))$ eine Parametrisierung von S .

Es ist $J_\varphi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \nabla f(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$ und daher $G_\varphi(\mathbf{u}) = \det(E_{n-1} + \nabla f(\mathbf{u})^\top \cdot \nabla f(\mathbf{u}))$.

Ist $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $A := \mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{a}$, so ist A symmetrisch und daher diagonalisierbar. Außerdem ist $\text{rg}(A) = 1$, denn jeder Vektor, der auf \mathbf{a} senkrecht steht, wird durch $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \cdot A^\top$ auf Null abgebildet, während $\mathbf{a} \cdot A^\top = \|\mathbf{a}\|^2 \cdot \mathbf{a}$ ist. Insbesondere ist $\|\mathbf{a}\|^2$ der einzige Eigenwert $\neq 0$ von A . Zur Berechnung der Determinante von $E_n + A$ kann man die Diagonalisierung benutzen. Es gibt eine invertierbare Matrix R , so dass $RAR^{-1} = \Delta(\|\mathbf{a}\|^2, 0, \dots, 0)$ ist, also

$$\begin{aligned} \det(E_{n-1} + A) &= \det(R(E_{n-1} + A)R^{-1}) = \det(E_{n-1} + RAR^{-1}) \\ &= \det \begin{pmatrix} \|\mathbf{a}\|^2 + 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} = \|\mathbf{a}\|^2 + 1. \end{aligned}$$

Ist $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, so bleibt die Formel gültig. Damit ist $G_\varphi = \|\nabla f(\mathbf{u})\|^2 + 1$ und

$$A_{n-1}(S) = \int_P \sqrt{1 + \|\nabla f(\mathbf{u})\|^2} d\mu_{n-1}.$$

Es gibt eine alternative Methode zur Berechnung von G_φ . Ist $B = J_\varphi(\mathbf{u})$ und B_k die quadratische Matrix, die aus B entsteht, indem man die k -te Zeile streicht, so ist $\det B_k = \pm f_{u_k}(\mathbf{u})$ für $k = 1, \dots, n-1$ und $\det B_n = 1$. Dann folgt, dass $G_\varphi(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^n (\det B_k)^2 = 1 + \|\nabla f(\mathbf{u})\|^2$ ist.

2.3 Der Satz von Gauß

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$ ein (stetig) differenzierbares Vektorfeld auf Ω . Dann versteht man unter der **Divergenz** von \mathbf{F} die Funktion

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

2.3.1. Beispiele

A. Sei $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x}$ auf dem \mathbb{R}^n . Dann ist $\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv n$.

B. Sei $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Schreibt man als Abkürzung $r := \|\mathbf{x}\|$, so ist

$$r_{x_\nu} = x_\nu / r \quad \text{und} \quad (x_\nu \cdot r^{-3})_{x_\nu} = r^{-3} - 3x_\nu^2 \cdot r^{-5} \quad \text{für } \nu = 1, \dots, n,$$

also

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = r^{-5} \cdot \sum_{\nu=1}^n (r^2 - 3x_\nu^2) = r^{-5} \cdot (nr^2 - 3r^2).$$

Ist speziell $n = 3$, so ist $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$.

C. Sei $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_i$. Dann ist $\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$.

2.3.2. Satz

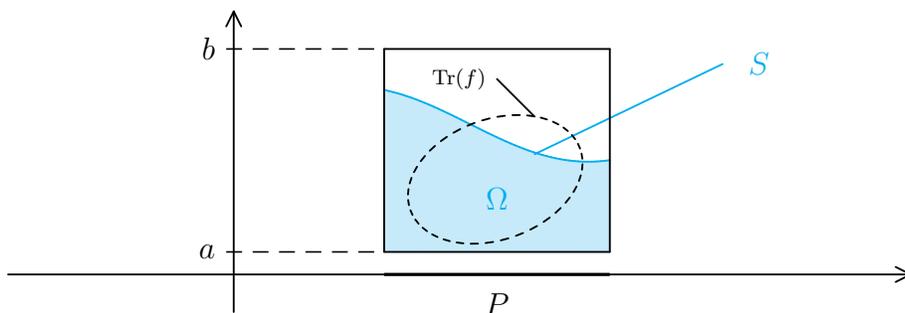
Sei $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein Parametergebiet, $g : P \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $a < g(\mathbf{u}) < b$ für alle $\mathbf{u} \in P$. Weiter sei

$$\Omega := \{(\mathbf{u}, u_n) \in P \times (a, b) : a < u_n < g(\mathbf{u})\},$$

\mathbf{N} das äußere Normalenfeld auf $S := \partial\Omega \cap (P \times (a, b))$ und $f : P \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger. Für $\mathbf{F}_i := f \cdot \mathbf{e}_i$ gilt dann:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F}_i d\mu_n = \int_S \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{N} d\sigma,$$

für $i = 1, \dots, n$.



BEWEIS: Sei $I := (a, b)$ und $\gamma(\mathbf{u}, u_n) := u_n - g(\mathbf{u})$. Dann ist

$$\Omega = \{(\mathbf{u}, u_n) \in P \times I : \gamma(\mathbf{u}, u_n) < 0\},$$

$$\text{also } \mathbf{N}(\mathbf{u}, u_n) = \frac{\nabla \gamma(\mathbf{u}, u_n)}{\|\nabla \gamma(\mathbf{u}, u_n)\|} = \frac{(-\nabla g(\mathbf{u}), 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla g(\mathbf{u})\|^2}} \text{ f\"ur } (\mathbf{u}, u_n) \in \partial\Omega \cap (P \times I).$$

F\"ur $i = 1, \dots, n-1$ ist $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{N} = f \cdot N_i = -(1 + \|\nabla g\|^2)^{-1/2} \cdot f \cdot \frac{\partial g}{\partial u_i}$, au\sserdem ist $\mathbf{F}_n \cdot \mathbf{N} = f \cdot N_n = (1 + \|\nabla g\|^2)^{-1/2} \cdot f$.

F\"ur $(\mathbf{u}, z) \in P \times I$ sei $F(\mathbf{u}, z) := \int_a^z f(\mathbf{u}, u_n) du_n$. Dann ist

$$\frac{\partial F}{\partial u_i}(\mathbf{u}, z) = \int_a^z \frac{\partial f}{\partial u_i}(\mathbf{u}, u_n) du_n, \text{ f\"ur } i = 1, \dots, n-1,$$

und $\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{u}, z) = f(\mathbf{u}, z)$. Mit $\varphi(\mathbf{u}) := (\mathbf{u}, g(\mathbf{u}))$ ist dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_i} \int_a^{g(\mathbf{u})} f(\mathbf{u}, u_n) du_n &= \frac{\partial (F \circ \varphi)}{\partial u_i}(\mathbf{u}) \\ &= \frac{\partial F}{\partial u_i}(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) + \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) \frac{\partial g}{\partial u_i}(\mathbf{u}) \\ &= \int_a^{g(\mathbf{u})} \frac{\partial f}{\partial u_i}(\mathbf{u}, u_n) du_n + f(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) \frac{\partial g}{\partial u_i}(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Die Funktion $h := F \circ \varphi : \mathbf{u} \mapsto \int_a^{g(\mathbf{u})} f(\mathbf{u}, u_n) du_n$ hat kompakten Tr\"ager in P . Man kann deshalb so tun, als w\"are h auf einem Quader $Q := [-R, R]^{n-1} \supset P$ definiert und $\equiv 0$ auf $Q \setminus P$. F\"ur $i = 1, \dots, n-1$ ist deshalb

$$\begin{aligned} \int_P \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\int_a^{g(\mathbf{u})} f(\mathbf{u}, u_n) du_n \right) d\mu_{n-1} &= \int_P \frac{\partial h}{\partial u_i}(\mathbf{u}) du_1 \dots du_{n-1} \\ &= \int_{-R}^R \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R \left(\frac{\partial h}{\partial u_i}(\mathbf{u}) du_i \right) du_1 \dots \widehat{du}_i \dots du_{n-1} \\ &= \int_{-R}^R \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R \left[h(u_1, \dots, R, \dots, u_{n-1}) - h(\dots, -R, \dots) \right] du_1 \dots \widehat{du}_i \dots du_{n-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial u_i}(\mathbf{u}, u_n) d\mu_n &= \int_P \left(\int_a^{g(\mathbf{u})} \frac{\partial f}{\partial u_i}(\mathbf{u}, u_n) du_n \right) d\mu_{n-1} \\
&= \int_P \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \int_a^{g(\mathbf{u})} f(\mathbf{u}, u_n) du_n - f(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) \frac{\partial g}{\partial u_i}(\mathbf{u}) \right) d\mu_{n-1} \\
&= - \int_P f(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) \frac{\partial g}{\partial u_i}(\mathbf{u}) d\mu_{n-1} \\
&= - \int_P f(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) \frac{\partial g}{\partial u_i}(\mathbf{u}) \frac{\sqrt{G_{\varphi}(\mathbf{u})}}{\sqrt{1 + \|\nabla g(\mathbf{u})\|^2}} d\mu_{n-1} \\
&= \int_P f(\varphi(\mathbf{u})) \cdot N_i(\varphi(\mathbf{u})) \sqrt{G_{\varphi}(\mathbf{u})} d\mu_{n-1} = \int_S \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{N} do.
\end{aligned}$$

Für jedes $\mathbf{u} \in P$ hat die Funktion $u_n \mapsto f(\mathbf{u}, u_n)$ kompakten Träger in (a, b) . Also ist

$$\int_a^{g(\mathbf{u})} \frac{\partial f}{\partial u_n}(\mathbf{u}, u_n) du_n = f(\mathbf{u}, g(\mathbf{u}))$$

und

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial u_n}(\mathbf{u}, u_n) d\mu_n &= \int_P \int_a^{g(\mathbf{u})} \frac{\partial f}{\partial u_n}(\mathbf{u}, u_n) du_n d\mu_{n-1} \\
&= \int_P f(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) d\mu_{n-1} \\
&= \int_P f(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) \frac{\sqrt{G_{\varphi}(\mathbf{u})}}{\sqrt{1 + \|\nabla g(\mathbf{u})\|^2}} d\mu_{n-1} \\
&= \int_P f(\varphi(\mathbf{u})) \cdot N_n(\varphi(\mathbf{u})) \sqrt{G_{\varphi}(\mathbf{u})} d\mu_{n-1} = \int_S \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{N} do.
\end{aligned}$$

■

Mit diesem Satz haben wir die Hauptarbeit für den Gauß'schen Satz schon erledigt. Der lautet nun folgendermaßen.

2.3.3. Gauß'scher Integralsatz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glatt berandetes, beschränktes Gebiet, \mathbf{N} das äußere Normalenfeld auf $\partial\Omega$, $U = U(\bar{\Omega})$ eine offene Umgebung und \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U . Dann ist

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} d\mu_n = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} do.$$

BEWEIS: Ist $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{e}_1 + \dots + F_n \mathbf{e}_n$, so ist

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} d\mu_n = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \operatorname{div}(F_i \mathbf{e}_i) d\mu_n \quad \text{und} \quad \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} do = \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} F_i \cdot N_i do.$$

Es reicht also, den Satz für ein Vektorfeld der Gestalt $\mathbf{F} = f\mathbf{e}_i$ zu beweisen. Dabei können wir o.B.d.A. annehmen, dass $i = 1$ ist.

1) Hat f kompakten Träger in Ω , so verschwindet natürlich das Randintegral. Andererseits ist $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x_1}$. Weil f auf den ganzen \mathbb{R}^n stetig differenzierbar (durch Null) fortgesetzt werden kann und Ω in einem Quader $Q = [-R, R]^n$ liegt, ist

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_1} d\mu_n = \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R [f(R, x_2, \dots, x_n) - f(-R, x_2, \dots, x_n)] dx_2 \dots dx_n = 0.$$

2) Ist $\Omega = \{(\mathbf{u}, u_n) \in P \times (a, b) : a < g(\mathbf{u}) < u_n\}$ und hat f kompakten Träger in $P \times (a, b)$, so folgt der Gauß'sche Satz aus dem vorigen Satz. Das bleibt auch richtig, wenn man die Koordinaten vertauscht.

3) Nun kommen wir zum allgemeinen Fall.

Ist $\mathbf{x} \in \Omega$, so gibt es eine Umgebung von \mathbf{x} , die ganz in Ω liegt. Ist $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, so gibt es – nach geeigneter Numerierung der Koordinaten – ein Parametergebiet $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$, ein Intervall $I = (a, b)$ und eine Funktion $g : P \rightarrow I$, so dass $\Omega \cap (P \times I) = \{(\mathbf{u}, u_n) \in P \times I : a < u_n < g(\mathbf{u})\}$ ist.

Da $\bar{\Omega}$ kompakt ist, kann man endlich viele Umgebungen U_ν finden, $\nu = 1, \dots, N$, die entweder ganz in Ω liegen oder von der Gestalt $U_\nu = P_\nu \times (a_\nu, b_\nu)$ mit $U_\nu \cap \Omega = \{(\mathbf{u}, u_n) \in P_\nu \times (a_\nu, b_\nu) : a_\nu < u_n < g_\nu(\mathbf{u})\}$ sind (letzteres evtl. nach Ummummerierung der Koordinaten).

Sei (ϱ_ν) eine passende Teilung der Eins zu der Überdeckung (U_ν) . Dann hat $\varrho_\nu f$ jeweils kompakten Träger in U_ν . Nach (1) und (2) gilt der Satz für jedes Vektorfeld $\varrho_\nu \mathbf{F} = (\varrho_\nu f)\mathbf{e}_1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} d\mu_n &= \sum_{\nu=1}^N \int_{\Omega} \operatorname{div}(\varrho_\nu \mathbf{F}) d\mu_n \\ &= \sum_{\nu=1}^N \int_{\partial\Omega} \varrho_\nu \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma. \end{aligned}$$

■

2.3.4. Anwendung

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glatt berandetes, beschränktes Gebiet, so ist

$$\mu_n(\Omega) = \frac{1}{n} \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \cdot \mathbf{N} d\sigma.$$

Speziell besteht zwischen dem Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel und dem Flächeninhalt ihres Randes die Beziehung $\mu_n(B_1(\mathbf{0})) = \frac{1}{n} A_{n-1}(S^{n-1})$.

BEWEIS: 1) Wir benutzen das Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \mathbf{x}$. Dann ist $\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv n$, also

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} d\mu_n = n \cdot \mu_n(\Omega).$$

Damit folgt die erste Behauptung sofort aus dem Gauß'schen Integralsatz.

Ist $\Omega = B_1(\mathbf{0})$ (und damit $\partial\Omega = S^{n-1}$), so ist $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ auf dem gesamten Rand, also $\mathbf{x} \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 \equiv 1$ und

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \cdot \mathbf{N} do = \int_{\partial\Omega} do = A_{n-1}(S^{n-1}).$$

■

2.3.5. Beispiel

Wir betrachten das Vektorfeld $\mathbf{F}(x, y, z) := (x^2 + y^2 + z^2) \cdot (x, y, z)$ und berechnen $\int_{\partial B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} do$, für $B := B_1(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^3$.

1) **Direkte Berechnung:** Es ist $\mathbf{N}(x, y, z) := (x, y, z)$ auf ∂B , also

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 1 \text{ (auf } \partial B\text{)}.$$

Benutzt man $\varphi(u, v) := (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$, für $0 \leq u \leq 2\pi$ und $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$, als Parametrisierung für ∂B , so ist $\sqrt{G_{\varphi}(u, v)} = \cos v$ und daher

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} do &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos v du dv \\ &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v dv = 2\pi \sin v \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi. \end{aligned}$$

2) **Berechnung mit Gauß:** Es ist

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = (3x^2 + y^2 + z^2) + (3y^2 + x^2 + z^2) + (3z^2 + x^2 + y^2) = 5(x^2 + y^2 + z^2).$$

Zur Berechnung des Integrals verwenden wir Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} do &= \int_B \operatorname{div} \mathbf{F} d\mu_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 5r^2 \cdot r^2 \cos \theta dr d\varphi d\theta \\ &= 5 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^4 \cos \theta dr d\varphi d\theta = 10\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{r^5}{5}\right) \Big|_0^1 \cos \theta d\theta \\ &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = 4\pi. \end{aligned}$$

Wie erwartet erhält man in beiden Fällen das gleiche Ergebnis.

Viele Gebiete sind nicht glatt berandet, typisches und besonders einfaches Beispiel ist ein Quader. Aber auch für Quader gilt der Gauß'sche Satz.

Ist $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader, so definieren wir

$$\begin{aligned} \partial_i^u Q &:= \{(x_1, \dots, x_n) \in Q : x_i = a_i\} \\ \text{und } \partial_i^o Q &:= \{(x_1, \dots, x_n) \in Q : x_i = b_i\}. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist

$$\partial Q = \bigcup_{i=1}^n (\partial_i^u Q \cup \partial_i^o Q).$$

Durch

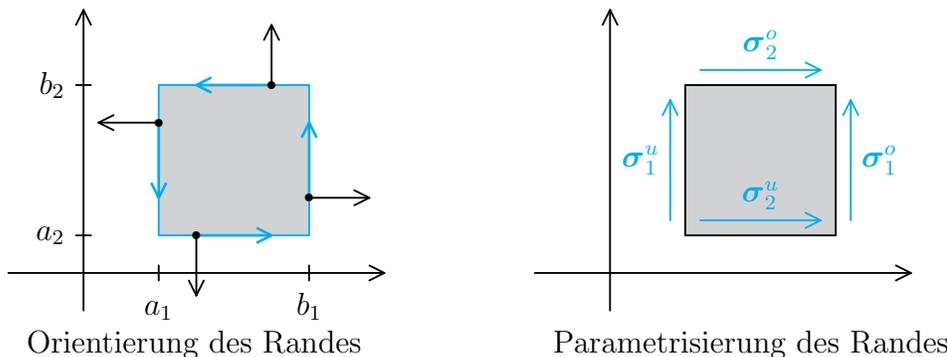
$$\begin{aligned} \sigma_i^u(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n) &:= (x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ \text{und } \sigma_i^o(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n) &:= (x_1, \dots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

werden Parametrisierungen

$$\sigma_i^u, \sigma_i^o : [a_1, b_1] \times \dots \times \widehat{[a_i, b_i]} \times \dots \times [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

von Hyperflächenstücken definiert, der *i-ten unteren Seite* $\partial_i^u Q$ und der *i-ten oberen Seite* $\partial_i^o Q$ von Q . Das Dach über einem Eintrag bedeutet, dass dieser Eintrag weggelassen werden soll.

Die Parametrisierungen geben zugleich Orientierungen vor. So wie angegeben werden z.B. im Falle $n = 2$ Boden und Deckel von links nach rechts durchlaufen, die Seitenkanten von unten nach oben. Die zugehörigen äußeren Normalenvektoren zeigen dann immer nach unten bzw. nach links. Im Falle $n = 2$ sieht das folgendermaßen aus (vgl. rechtes Bild):



Das linke Bild zeigt, dass die äußere Normale in Wirklichkeit anders aussieht. Wir können das natürlich auch beweisen.

Ist $\mathbf{x}_0 \in \partial_i^o Q$, also $x_0^i = b_i$, so existiert eine Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$, so dass $U \cap \overset{\circ}{Q} = \{\mathbf{x} \in U : x_i < b_i\}$ ist. Setzt man $\boldsymbol{\alpha}(t) := \mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i$, so ist $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $\alpha_i(t) = x_0^i + t = b_i + t$. Daraus folgt, dass $\alpha_i(t) < b_i$ (also $\boldsymbol{\alpha}(t) \in U \cap \overset{\circ}{Q}$) für $t < 0$ und $\alpha_i(t) > b_i$ für $t > 0$ ist, also $\mathbf{N}(\mathbf{x}_0) = \boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{e}_i$.

Ist dagegen $\mathbf{x}_0 \in \partial_i^u Q$, also $x_0^i = a_i$, so existiert eine Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$, so dass $U \cap \overset{\circ}{Q} = \{\mathbf{x} \in U : x_i > a_i\}$ ist. In diesem Fall setzt man $\boldsymbol{\alpha}(t) := \mathbf{x}_0 - t\mathbf{e}_i$. Dann ist $\alpha_i(t) = x_0^i - t = a_i - t$, also $\alpha_i(t) > a_i$ für $t < 0$ und $\alpha_i(t) < a_i$ für $t > 0$. Diesmal folgt, dass $\mathbf{N}(\mathbf{x}_0) = \boldsymbol{\alpha}'(0) = -\mathbf{e}_i$ ist.

2.3.6. Satz von Gauß für Quader

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader und \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Umgebung U von Q . Dann gilt:

$$\int_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mu_n = \int_{\partial Q} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do := \sum_{i=1}^n \left(\int_{\partial_i^u Q} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do + \int_{\partial_i^o Q} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do \right).$$

BEWEIS: Es reicht, die Behauptung für ein Feld vom Typ

$$\mathbf{F} = f \mathbf{e}_j$$

zu zeigen. Dann ist $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x_j}$,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}|_{\partial_i^u Q} = f \mathbf{e}_j \cdot (-\mathbf{e}_i) = \begin{cases} -f & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}|_{\partial_i^o Q} = f \mathbf{e}_j \cdot (\mathbf{e}_i) = \begin{cases} f & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bezeichnen wir die Parametrisierungen der Seiten von $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ wieder mit $\boldsymbol{\sigma}_i^u$ und $\boldsymbol{\sigma}_i^o$, so ist $\sqrt{G_{\boldsymbol{\sigma}_i^u}} = \sqrt{G_{\boldsymbol{\sigma}_i^o}} = 1$ und daher

$$\begin{aligned} \int_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mu_n &= \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_j}^{b_j} \dots \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_j \dots dx_n \\ &= \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_j}^{\widehat{b_j}} \dots \int_{a_1}^{b_1} [f \circ \boldsymbol{\sigma}_j^o(x_1, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_n) \\ &\quad - f \circ \boldsymbol{\sigma}_j^u(x_1, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_n)] \, dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_n \\ &= \left[\int_{\partial_j^o Q} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do + \int_{\partial_j^u Q} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do \right] = \int_{\partial Q} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do, \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. ■

Bemerkung: Der Beweis funktioniert noch, wenn \mathbf{F} nur auf \overline{Q} stetig und auf Q stetig differenzierbar ist. Allerdings muss dann zusätzlich die Integrierbarkeit von $\operatorname{div} \mathbf{F}$ auf Q gefordert werden. Die ist z.B. dann gegeben, wenn \mathbf{F} auf Q beschränkt bleibt. Die Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ist

unter den abgeschwächten Voraussetzungen zunächst nur auf einem etwas verkleinerten Quader möglich. Der dann noch erforderliche Grenzübergang kann mit den Grenzwertsätzen der Lebesgue-Theorie leicht vollzogen werden.

Dass \mathbf{F} über jede Seite des Quaders integrierbar ist, ist trivial. Allerdings kommen die Kanten des Quaders mehrfach vor. Dass das nichts ausmacht, liegt daran, dass die Kanten im Sinne der Oberflächen-Integration Nullmengen bilden, also nichts zum Integral beitragen.

Definition

$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine *k -dimensionale Hausdorff-Nullmenge*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Kugeln B_1, \dots, B_N mit Radien r_1, \dots, r_N gibt, so dass gilt:

1. $M \subset B_1 \cup \dots \cup B_N$.
2. $r_1^k + \dots + r_N^k \leq \varepsilon$.

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine *Jordan-Nullmenge*, falls sie eine n -dimensionale Hausdorff-Nullmenge ist.

Bemerkung: Das Volumen einer Kugel vom Radius r im \mathbb{R}^n beträgt $\tau_n \cdot r^n$, mit einer nur von n abhängigen Konstanten τ_n , ist also proportional zum Würfelvolumen. Deshalb ist jede Jordan-Nullmenge auch eine Lebesgue-Nullmenge.

Ist K eine kompakte Teilmenge einer affinen Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$, so ist K eine Jordan-Nullmenge, also eine n -dimensionale Hausdorff-Nullmenge. Allerdings hat K normalerweise einen positiven „Flächeninhalt“. Schneidet man K mit einem $(n-2)$ -dimensionalen affinen Unterraum $L \subset H$, so erhält man eine $(n-1)$ -dimensionale Hausdorff-Nullmenge, deren (Hyper-)flächeninhalt = 0 ist. Beim Einheitswürfel im \mathbb{R}^3 sind die Flächen 3-dimensionale, die Kanten 2-dimensionale und die Ecken 1-dimensionale Hausdorff-Nullmengen.

Definition

Sei $T \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein beschränktes Parametergebiet, $U = U(\bar{T}) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine offene Umgebung und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung, so dass gilt:

1. φ ist auf T injektiv.
2. $\text{rg } J_\varphi(\mathbf{u}) = n - 1$ für $\mathbf{u} \in T$.
3. ∂T ist eine Jordan-Nullmenge.

Dann nennt man $S := \varphi(T)$ ein *parametrisiertes Hyperflächenstück mit Rand*. Die Menge $bS := \varphi(\partial T)$ nennt man den **Rand** von S .

Unter den in der Definition gemachten Voraussetzungen ist bS eine $(n - 1)$ -dimensionale Hausdorff-Nullmenge. Jetzt kann man den Gauß'schen Integralsatz allgemeiner formulieren.

2.3.7. Gauß'scher Integralsatz für Gebiete mit stückweise glattem Rand

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Parametergebiet. Es gebe glatte parametrisierte Hyperflächenstücke S_1, \dots, S_N mit Rand, so dass gilt:

1. $\partial\Omega = \bar{S}_1 \cup \dots \cup \bar{S}_N$.
2. $\bar{S}_i \cap \bar{S}_j = bS_i \cap bS_j$ für $i \neq j$.

Ist dann \mathbf{F} ein auf $\bar{\Omega}$ stetiges und in Ω stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\int_{\Omega} |\operatorname{div} \mathbf{F}| d\mu_n < +\infty$, so gilt:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} d\mu_n = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma.$$

Der BEWEIS soll hier nicht ausgeführt werden. Man findet ihn – sogar unter noch ein wenig strengeren Voraussetzungen – in

- K. Königsberger: *Analysis 2*, Springer-Verlag,
- F. Sauvigny: *Partielle Differentialgleichungen der Geometrie und der Physik (nach Vorlesungen von E. Heinz)*, Band 1 (Grundlagen und Integraldarstellungen), Springer Verlag.

Einschub (Pfaff'sche Formen)

Definition

Eine **Pfaff'sche Form** auf einer offenen Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung

$$\omega : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

die linear im zweiten Argument ist.

2.3.8. Beispiele

- A. Sei \mathbf{F} ein stetiges Vektorfeld auf B . Dann ist $\omega_{\mathbf{F}} : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\omega_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$$

eine Pfaff'sche Form auf B .

- B. Ist $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion, so wird das **totale Differential** $df : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$df(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}.$$

Einen Spezialfall stellen die Differentiale dx_i dar, für $i = 1, \dots, n$. Es ist

$$dx_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \nabla x_i \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v} = v_i.$$

So bekommt auch der Integrand $f(t) dt$ in einem gewöhnlichen Integral endlich eine Bedeutung. Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so bezeichnet $f dt$ die Abbildung von $I \times \mathbb{R}$ nach \mathbb{R} , die durch $f dt(t, v) = f(t) \cdot v$ gegeben wird.

Ist f eine stetige Funktion und ω eine Pfaff'sche Form, so ist das Produkt $f \cdot \omega$ definiert durch

$$(f \cdot \omega)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := f(\mathbf{x}) \cdot \omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

Das ist wieder eine Pfaff'sche Form.

2.3.9. Satz

Sei ω eine Pfaff'sche Form auf B . Dann gibt es eindeutig bestimmte stetige Funktionen $\omega_1, \dots, \omega_n$ auf B , so dass gilt:

$$\omega = \omega_1 dx_1 + \dots + \omega_n dx_n.$$

BEWEIS: Wir beginnen mit der Eindeutigkeit: Ist eine Darstellung der gewünschten Art gegeben, so folgt:

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) &= \omega_1(\mathbf{x}) \cdot dx_1(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) + \dots + \omega_n(\mathbf{x}) \cdot dx_n(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) \\ &= \omega_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_j + \dots + \omega_n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_j \\ &= \omega_j(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Um die Existenz der Darstellung zu erhalten, setzen wir $\omega_0 := \omega_1 dx_1 + \dots + \omega_n dx_n$, mit $\omega_j(\mathbf{x}) := \omega(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \omega_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) &= \omega_1(\mathbf{x}) \cdot dx_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \dots + \omega_n(\mathbf{x}) \cdot dx_n(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \\ &= \omega(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) \cdot v_1 + \dots + \omega(\mathbf{x}, \mathbf{e}_n) \cdot v_n \\ &= \omega(\mathbf{x}, v_1 \mathbf{e}_1 + \dots + v_n \mathbf{e}_n) = \omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \end{aligned}$$

also $\omega = \omega_0$. ■

Ist $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$ ein Vektorfeld, so ist $\omega_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_j = F_j(\mathbf{x})$, also

$$\omega_{\mathbf{F}} = F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n.$$

Das bedeutet, dass jede Pfaff'sche Form die Gestalt $\omega_{\mathbf{F}}$ (mit einem Vektorfeld \mathbf{F}) besitzt.

Ist f stetig partiell differenzierbar, so ist $df(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) = D_{\mathbf{e}_j}f(\mathbf{x}) = f_{x_j}(\mathbf{x})$, also

$$df = f_{x_1} dx_1 + \dots + f_{x_n} dx_n.$$

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\alpha : I := [a, b] \rightarrow B$ ein Integrationsweg und ω eine Pfaff'sche Form auf B . Dann wird durch

$$t \mapsto \omega(\alpha(t), \alpha'(t))$$

eine stetige Funktion $\omega \circ (\alpha, \alpha') : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, und man setzt

$$\int_{\alpha} \omega := \int_a^b \omega(\alpha(t), \alpha'(t)) dt.$$

Ist $\omega = \omega_{\mathbf{F}} = F_1 dx_1 + \cdots + F_n dx_n$, so ist $\omega(\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\alpha}'(t)) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}(t)) \cdot \boldsymbol{\alpha}'(t)$, also

$$\int_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\boldsymbol{\alpha}} (F_1 dx_1 + \cdots + F_n dx_n).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird in der Literatur gerne als Schreibweise für Kurvenintegrale benutzt. Wir wissen jetzt, dass es sich dabei eigentlich um ein Integral über eine Pfaff'sche Form handelt.

Wir kommen jetzt zum Satz von Green.

Ist $C \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Kurve mit einer glatten Parametrisierung $\boldsymbol{\alpha} : [a, b] \rightarrow C$ und $\omega = f dx + g dy$ eine Pfaff'sche Form auf einer Umgebung von C , so kann man

$$\int_C (f dx + g dy) = \int_C \omega := \int_{\boldsymbol{\alpha}} \omega = \int_a^b (f(\boldsymbol{\alpha}(t))\alpha'_1(t) + g(\boldsymbol{\alpha}(t))\alpha'_2(t)) dt$$

setzen. Es wurde an früherer Stelle gezeigt, dass das Integral nicht von der Parametrisierung abhängt.

2.3.10. Satz von Green

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Sind f, g zwei stetig differenzierbare Funktionen auf einer Umgebung von $\overline{\Omega}$, so gilt:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\mu_2 = \int_{\partial\Omega} (f dx + g dy).$$

BEWEIS: Das Vektorfeld $\mathbf{F} := (g, -f)$ ist auf einer Umgebung $U = U(\overline{\Omega})$ stetig differenzierbar. Der Gauß'sche Integralsatz besagt dann:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} d\mu_2 = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} do.$$

Dabei ist $\operatorname{div} \mathbf{F} = g_x - f_y$, was die gewünschte linke Seite ergibt.

Auf der rechten Seite steht $\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} do = \int_a^b (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N})(\boldsymbol{\alpha}(t)) \sqrt{G_{\boldsymbol{\alpha}}(t)} dt$. Dabei ist

$$G_{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \det \left((\alpha'_1(t), \alpha'_2(t)) \cdot \begin{pmatrix} \alpha'_1(t) \\ \alpha'_2(t) \end{pmatrix} \right) = (\alpha'_1)^2(t) + (\alpha'_2)^2(t) = \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^2$$

und $\mathbf{N} = \frac{(\alpha'_2, -\alpha'_1)}{\|\boldsymbol{\alpha}'\|}$, also

$$\int_a^b (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N})(\boldsymbol{\alpha}(t)) \sqrt{G_{\boldsymbol{\alpha}}(t)} dt = \int_a^b (g(\boldsymbol{\alpha}(t))\alpha'_2(t) + f(\boldsymbol{\alpha}(t))\alpha'_1(t)) dt = \int_{\partial\Omega} (f dx + g dy).$$

Damit ist alles gezeigt. ■