1 Differentialgleichungen

1.1 Beispiele und Methoden

Was ist eine Differentialgleichung?

Ist $k \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1}$ ein Gebiet und $F : G \to \mathbb{R}$ eine (zunächst beliebige) Funktion, so nennt man

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}) = 0 \quad (*)$$

eine ***gewöhnliche Differentialgleichung k-ter Ordnung***.

Diese Definition wird erst klar, wenn wir sagen, was eine Lösung einer solchen Gleichung ist.

Eine ***Lösung*** der DGL (*) ist eine Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $I \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall und φ ist k-mal differenzierbar.
2. Für alle $x \in I$ ist $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(k)}(x)) \in G$ und
$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(k)}(x)) = 0.$$

Ein Satz Anfangsbedingungen für die DGL (*) besteht aus einem Punkt $x_0 \in I$ und einem Vektor $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$. Eine Lösung φ erfüllt die Anfangsbedingungen, wenn gilt:

$$\varphi(x_0) = c_0,\ \varphi'(x_0) = c_1,\ \dots, \varphi^{(k-1)}(x_0) = c_{k-1}.$$

Hauptproblem der Theorie der DGLn ist die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Dabei beschränkt man sich meist auf sogenannte ***explizite Differentialgleichungen*** der Form

$$y^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}).$$

1.1.1. Beispiele

A. Die DGL $y' = ay$ (mit positiver Konstante a) tritt auf, wenn Wachstumsprozesse beschrieben werden sollen.

Offensichtlich ist die Funktion $\varphi_0(x) \equiv 0$ eine Lösung. Ist φ eine beliebige Lösung, so setzen wir $\Phi(x) := \varphi(x)e^{-ax}$. Dann ist

$$\Phi'(x) = (\varphi'(x) - a \cdot \varphi(x))e^{-ax} \equiv 0,$$

also $\Phi(x) \equiv c$ konstant und $\varphi(x) = c \cdot e^{ax}$. Die Probe zeigt, dass dies tatsächlich eine Lösung ist. Gleichzeitig ergibt sich aus unserer Argumentation, dass jede Lösung so aussehen muss. Dabei ist $c = \varphi(0)$, insbesondere kann auch $c = 0$ sein.

Zu jeder Anfangsbedingung gibt es genau eine Lösung.

B. Die Gleichung $y' = \sqrt{y}$ ist nicht eindeutig lösbar. Neben der Lösung $\varphi_0(x) \equiv 0$ ist auch jede der Funktionen

$$\varphi_\alpha(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq \alpha, \\ (x-\alpha)^2/4 & \text{für } x > \alpha, \end{cases}$$

für jedes $\alpha \geq 0$ eine Lösung mit $\varphi_\alpha(0) = 0$.

Bevor wir weitere Beispiele betrachten, wollen wir sehen, dass es reicht, Systeme von expliziten DGLn 1. Ordnung zu betrachten. Ein System von DGLn 1. Ordnung sieht i.a. folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_k) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \ldots, y_k) \\ &\vdots \\ y_k' &= f_k(x, y_1, \ldots, y_k) \end{aligned}$$

Eine Lösung eines solchen Systems ist ein System von differenzierbaren Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ mit $\varphi_j'(x) = f_j(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x))$ für $j = 1, \ldots, k$.

Man benutzt gerne die Vektorschreibweise:

Definition

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ ein Gebiet und $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Unter einer ***Lösung der Differentialgleichung***

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$$

versteht man eine Abbildung $\boldsymbol{\varphi} : I \to \mathbb{R}^k$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $I \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall, und der Graph $\{(t, \boldsymbol{\varphi}(t)) \, : \, t \in I\}$ liegt in G.
2. $\boldsymbol{\varphi}$ ist differenzierbar, und es ist $\boldsymbol{\varphi}'(t) = F(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ auf I.

Ist $k = 1$, so spricht man von einer ***gewöhnlichen Differentialgleichung***.

Ist $\boldsymbol{\varphi}$ eine Lösung von $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ und $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$, so sagt man, $\boldsymbol{\varphi}$ erfüllt die ***Anfangsbedingung*** $(t_0, \mathbf{y}_0)$. Die Lösung heißt ***maximal***, wenn sie sich nicht zu einer Lösung mit größerem Definitionsbereich fortsetzen lässt.

1.1.2. Satz

Ist $\boldsymbol{\varphi}$ Lösung der DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ und $\mathbf{F}$ r-mal (stetig) differenzierbar, so ist $\boldsymbol{\varphi}$ $(r+1)$-mal (stetig) differenzierbar.

BEWEIS: Definitionsgemäß ist $\boldsymbol{\varphi}$ einmal differenzierbar. Ist $\mathbf{F}$ stetig, so folgt aus der Gleichung $\boldsymbol{\varphi}'(t) = \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$, dass $\boldsymbol{\varphi}$ sogar stetig differenzierbar ist.

Ist $\mathbf{F}$ differenzierbar, so folgt aus der selben Gleichung, dass $\boldsymbol{\varphi}'$ differenzierbar, also $\boldsymbol{\varphi}$ zweimal differenzierbar ist, u.s.w. ∎

Es besteht nun ein direkter Zusammenhang zwischen (expliziten) gewöhnlichen DGLn k–ter Ordnung und den Systemen von k expliziten DGLn erster Ordnung:

Ist eine DGL

$$y^{(k)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}) \qquad (*)$$

gegeben, so ordnen wir ihr folgendes System zu:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{k-1}' &= y_k \\ y_k' &= f(x, y_1, \ldots, y_k) \end{aligned} \qquad (**)$$

Ist φ eine Lösung der DGL $(*)$, so ist φ k-mal differenzierbar und $\varphi^{(k)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(k-1)}(x))$. Wir setzen

$$\varphi_1 := \varphi, \quad \varphi_2 := \varphi', \quad \ldots, \quad \varphi_k := \varphi^{(k-1)}.$$

Dann sind alle φ_ν mindestens einmal differenzierbar, und es ist

$$\begin{aligned} \varphi_1'(x) &= \varphi_2(x), \\ &\vdots \\ \varphi_{k-1}'(x) &= \varphi_k(x) \\ \text{und} \quad \varphi_k'(x) &= \varphi^{(k)}(x) = f(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)), \end{aligned}$$

d.h., $\boldsymbol{\varphi} := (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ ist eine Lösung des Systems (**).

Ist umgekehrt eine Lösung $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ des Systems gegeben, so setze man $\varphi := \varphi_1$. Dann ist φ differenzierbar, $\varphi' = \varphi_2$ ebenfalls differenzierbar u.s.w., und schließlich auch $\varphi^{(k-1)} = \varphi_k$ differenzierbar. Also ist φ k-mal differenzierbar und

$$\varphi^{(k)}(x) = \varphi_k'(x) = f(x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{(k-1)}(x)),$$

also φ Lösung von $(*)$.

Eine Anfangsbedingung für ein System von k DGLn hat die Gestalt

$$\varphi_\nu(x_0) = y_\nu^{(0)},\ \nu = 1, \dots, k.$$

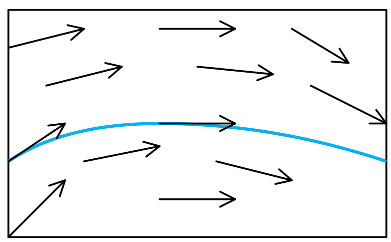
Über die Formel

$$(y_1^{(0)}, \dots, y_k^{(0)}) = \mathbf{y}_0 = \mathbf{c} = (c_0, \dots, c_{k-1})$$

erhält man daraus eine Anfangsbedingung für die DGL k-ter Ordnung, und umgekehrt.

Gewöhnliche Differentialgleichungen lassen sich besonders gut veranschaulichen. Die durch die DGL $y' = f(t, y)$ induzierte Zuordnung $(t, y) \mapsto f(t, y) \in \mathbb{R}$ liefert für jeden Punkt $(t, y) \in G$ eine Richtung, beschrieben durch ihre Steigung $f(t, y)$. Zeichnet man an der Stelle (t, y) einen kleinen Vektor mit der angegebenen Richtung, so erhält man ein „Richtungsfeld" auf G.

Der Graph einer Lösungsfunktion ist eine Kurve (eine sogenannte ***Integralkurve***), die sich dem Richtungsfeld anschmiegt.



Es gilt also, eine Kurve zu finden, deren Tangente an jeder Stelle mit dem gegebenen Richtungsfeld übereinstimmt. Das liefert die Motivation für das ***Peano-Verfahren***, einen Beweis für die lokale Existenz von Lösungen im Falle einer stetigen Funktion f. Die Eindeutigkeit kann man i.a. natürlich nicht erhalten. Wir wollen das Peano-Verfahren kurz andeuten.

Sei $(x_0, y_0) \in G$ und $f : G \to \mathbb{R}$ stetig. Wir wählen reelle Zahlen $a, r > 0$, so dass gilt:

1. $G_0 := [x_0, x_0 + a] \times [y_0 - r, y_0 + r] \subset G$.
2. $a \cdot \sup_{G_0} |f| \le r$.

Das ist stets möglich. Sind nämlich a_0 und r so gewählt, dass $G_1 := [x_0, x_0 + a_0] \times [y_0 - r, y_0 + r] \subset G$ ist, so setze man $k := \sup_{G_1} |f|$ und $a := \min(a_0, r/k)$ (bzw. a beliebig im Falle $k = 0$). Ist $K := \sup_{G_0} |f|$, so ist $a \cdot K \le a \cdot k \le r$.

Nun betrachtet man Zerlegungen $\mathfrak{Z} = (x_0, \dots, x_n)$ des Intervalls $I := [x_0, x_0 + a]$. Bei fester Zerlegung sei $J_\lambda := [x_0, x_\lambda]$, für $\lambda = 1, \dots, n$. Dann wird wie folgt ein Streckenzug konstruiert.

Auf J_1 sei $\varphi_1(x) := y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$. An der Stelle x_0 hat φ_1 die richtige Steigung, und außerdem ist

$$|\varphi_1(x) - y_0| = |f(x_0, y_0)| \cdot |x - x_0| \le K \cdot a \le r.$$

Der Graph von φ_1 verläuft ganz in G_0.

Auf J_2 sei

$$\varphi_2(x) := \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{für } x \in J_1, \\ \varphi_1(x_1) + f(x_1, \varphi_1(x_1)) \cdot (x - x_1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

φ_2 ist stetig und hat bei x_1 rechtsseitig die richtige Steigung. Außerdem gilt für $x_1 < x \leq x_2$:

$$\begin{aligned} |\varphi_2(x) - y_0| &= |f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + f(x_1, \varphi_1(x_1))(x - x_1)| \\ &\leq K\big(|x_1 - x_0| + |x - x_1|\big) = K \cdot |x - x_0| \leq K \cdot a \leq r. \end{aligned}$$

Also verläuft auch der Graph von φ_2 ganz in G_0. Und so fährt man fort, bis man einen Streckenzug $\varphi_{\mathfrak{Z}}$ über $[x_0, x_0 + a]$ konstruiert hat, dessen Graph ganz in G_0 verläuft und an den Stellen x_i rechtsseitig jeweils die richtige Steigung hat.

Man kann nun zeigen: Ist $\mathfrak{Z}_\nu$ eine Folge von Zerlegungen von $[x_0, x_0 + a]$, deren Feinheit gegen Null strebt, so kann man aus dem System der zugehörigen Streckenzüge $\varphi_{\mathfrak{Z}_\nu}$ eine Teilfolge auswählen, die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion φ konvergiert. Der Graph von φ verläuft ganz in G_0 und φ selbst löst die Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = y_0$. Ist diese Lösung sogar eindeutig bestimmt, so braucht man nicht zu einer Teilfolge überzugehen. Auf den Beweis dieser Aussagen müssen wir hier leider verzichten.

Wir untersuchen jetzt einige spezielle Typen von Differentialgleichungen.

Differentialgleichungen mit getrennten Variablen:

Unter einer *Differentialgleichung mit getrennten Variablen* versteht man eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f(x)g(y),$$

wobei $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf geeigneten Intervallen sind.

Wir wollen das Anfangswertproblem lösen, d.h., wir suchen eine Funktion φ mit $\varphi(x_0) = y_0$ und $\varphi'(x) = f(x) \cdot g(\varphi(x))$.

1. Fall: Ist $g(y_0) = 0$, so ist für jedes $x_0 \in I$ die konstante Funktion $\varphi(x) \equiv y_0$ eine Lösung mit $\varphi(x_0) = y_0$.

2. Fall: Sei $J_0 \subset J$ ein offenes Intervall, auf dem g keine Nullstellen hat, und $y_0 \in J_0$. Ist φ eine Lösung auf I mit $\varphi(x_0) = y_0$, so ist $g(\varphi(x)) \neq 0$ nahe x_0 und

$$\frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = f(x).$$

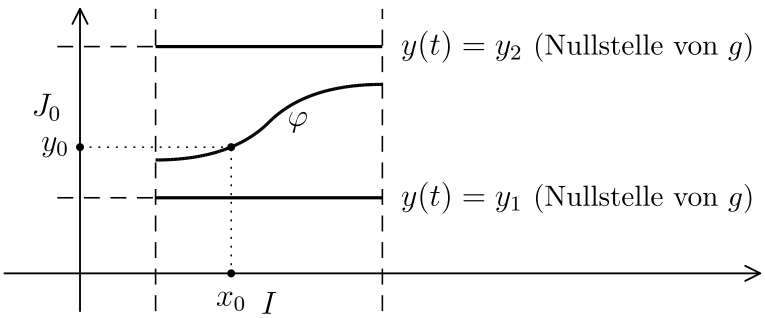
Also ist

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))}\, dt = \int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{1}{g(u)}\, du.$$

Sei nun F eine Stammfunktion von f auf I und G eine Stammfunktion von $1/g$ auf J_0. Dann ist $F(x) - F(x_0) = G(\varphi(x)) - G(y_0)$. Außerdem ist $G'(x) = 1/g(x) \neq 0$ für $x \in J_0$, also G dort streng monoton. Damit ist G umkehrbar und

$$\varphi(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0)).$$

Die Probe zeigt sofort, dass φ tatsächlich die DGL löst.



Bemerkung: Die Physiker haben – wie immer – eine suggestive Schreibweise dafür:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad &\Longrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \\
&\Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx \\
&\Longrightarrow \quad G(y) = F(x) + c \\
&\Longrightarrow \quad y = G^{-1}(F(x) + c).
\end{aligned}$$

Damit $y(x_0) = y_0$ ist, muss man $c = G(y_0) - F(x_0)$ wählen.

Als konkretes **Beispiel** nehmen wir die DGL $\quad y' = xy.$

Hier sind $f(x) = x$ und $g(y) = y$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Als Stammfunktionen können wir

$$F(x) := \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{auf } \mathbb{R}$$

und

$$G(y) := \ln|y| \qquad \text{auf jedem Intervall } J\text{, das nicht die Null enthält,}$$

nehmen. Dann ist

$$G^{-1}(z) = \begin{cases} e^z & \text{falls } J \subset \mathbb{R}_+, \\ -e^z & \text{sonst,} \end{cases}$$

also

$$\begin{aligned}
y(x) &= G^{-1}(F(x) + c) \\
&= \pm\exp(\frac{1}{2}x^2 + c) \\
&= C \cdot \exp(\frac{1}{2}x^2), \ \text{mit } C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Das schließt insbesondere die Lösung $y(x) \equiv 0$ mit ein. Liegt J in $\mathbb{R}_+$, so muss $C > 0$ gewählt werden, sonst $C < 0$.

Als zweites **Beispiel** betrachten wir die DGL

$$y' = xy^2.$$

Hier ist $f(x) = x$, also $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, wie oben, sowie $g(y) = y^2$, also $G(y) = -\frac{1}{y}$ (auf jedem Intervall J, das nicht die Null enthält). Nach dem obigen Verfahren erhalten wir die Lösungen

$$y_c(x) = G^{-1}(F(x) + c) = -\frac{1}{x^2/2 + c} = -\frac{2}{2c + x^2}.$$

Hinzu kommt die konstante Lösung $y(x) \equiv 0$, die sich aus der einzigen Nullstelle von $g(y)$ ergibt.

Lineare Differentialgleichungen:

Eine allgemeine lineare DGL 1. Ordnung über einem Intervall I hat folgende Gestalt:

$$y' + a(x)y = r(x), \text{ mit stetigen Funktionen } a, r : I \to \mathbb{R}.$$

Ist $r(x) \equiv 0$, so spricht man vom ***homogenen*** Fall. Dann ist auf jeden Fall die Funktion $y(x) \equiv 0$ eine Lösung. Suchen wir nach weiteren Lösungen, so können wir voraussetzen, dass $y(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ ist, und es gilt:

$$(\ln|y|)'(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x).$$

Ist $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$ über I, so ist

$$y(x) = c \cdot e^{-A(x)},$$

mit einer Integrationskonstanten c, die auch ≤ 0 sein darf.

Nun betrachten wir den ***inhomogenen*** Fall ($r(x) \not\equiv 0$): Sind φ_1, φ_2 zwei Lösungen, so ist

$$(\varphi_1 - \varphi_2)'(t) + a(t)(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) = r(t) - r(t) = 0,$$

also unterscheiden sich je zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung um eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung hat demnach die Gestalt

$$\varphi(t) = \varphi_p(t) + c \cdot e^{-A(t)},$$

mit einer „partikulären Lösung" $\varphi_p(t)$ der inhomogenen Gleichung. Die müssen wir noch finden.

Meistens findet man spezielle Lösungen über einen geeigneten Ansatz. So geht man auch hier vor. Wir benutzen die Methode der ***Variation der Konstanten***.

$$\textbf{Ansatz:} \quad y_p(x) = c(x) \cdot e^{-A(x)}.$$

Durch Differenzieren und Einsetzen in die DGL versucht man, Bedingungen für $c(x)$ zu erhalten:

$$y_p'(x) = (c'(x) - c(x) \cdot A'(x)) \cdot e^{-A(x)} = (c'(x) - c(x)a(x)) \cdot e^{-A(x)}.$$

Da $y_p'(x) + a(x)y_p(x) = r(x)$ sein soll, erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$c'(x) \cdot e^{-A(x)} = r(x),$$

und setzt daher

$$c(x) := \int_{x_0}^{x} r(t)e^{A(t)}\,dt.$$

Die Probe zeigt, dass y_p tatsächlich die inhomogene DGL löst.

Die allgemeine Lösung hat somit die Gestalt

$$y(x) = y_p(x) + c \cdot e^{-A(x)} = (\int_{x_0}^{x} r(t)e^{A(t)}\,dt + c) \cdot e^{-A(x)}.$$

Transformationen:

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $F : G \to \mathbb{R}$ stetig. Die DGL $y' = F(x,y)$ lässt sich manchmal besser lösen, wenn man sie transformiert.

Sei $T : G \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus auf ein Gebiet D, mit $T(t,y) = (t, \widetilde{T}(t,y))$.

Die Integralkurven $\boldsymbol{\alpha}(t) = (t, \varphi(t))$ der ursprünglichen DGL werden auf Kurven

$$T \circ \boldsymbol{\alpha}(t) = T(t,\varphi(t)) = (t, \widetilde{T}(t,\varphi(t))) =: (t, \psi(t)) \qquad (*)$$

abgebildet, und wir versuchen, diese Kurven als Integralkurven einer neuen DGL aufzufassen. Wie sieht diese DGL aus?

Hat die transformierte DGL die Gestalt $v' = \widetilde{F}(t,v)$, so muss gelten:

$$\psi'(t) = \widetilde{F}(t,\psi(t)) \quad \text{ und } \psi(t) = \widetilde{T}(t,\varphi(t)).$$

Dann ist

$$\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t}(t,\varphi(t)) + \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial y}(t,\varphi(t))\varphi'(t) = \psi'(t) = \widetilde{F}(t,\psi(t))$$

und (wegen (*))

$$(t,\varphi(t)) = T^{-1}(t,\psi(t)), \text{ sowie } \varphi'(t) = F(t,\varphi(t)),$$

also

$$\widetilde{F}(t,v) = \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t}(T^{-1}(t,v)) + \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial y}(T^{-1}(t,v)) \cdot F(T^{-1}(t,v)).$$

Als Beispiel betrachten wir „homogene Differentialgleichungen". Die DGL $y' = F(t,y)$ wird *homogen* genannt, falls $F(rt,ry) = F(t,y)$ für $(t,y) \in G$ und $r \neq 0$ ist.[1] Der Definitionsbereich G von F muss dann folgende Eigenschaft besitzen: Mit (t,y) gehört für jedes $r \neq 0$ auch (rt,ry) zu G.

Enthält G keinen Punkt (t,y) mit $t = 0$, so ist folgende Transformation möglich:

$$T(t,y) := (t, \frac{y}{t}).$$

Ist $\varphi(t)$ Lösung der Ausgangsgleichung, so ist $\psi(t) := \varphi(t)/t$ Lösung der transformierten Gleichung, und es gilt:

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \frac{t\varphi'(t) - \varphi(t)}{t^2} = \frac{t \cdot F(t,\varphi(t)) - \varphi(t)}{t^2} \\ &= \frac{t \cdot F(t,t\psi(t)) - t\psi(t)}{t^2} = \frac{F(1,\psi(t)) - \psi(t)}{t}, \end{aligned}$$

d.h., ψ ist Lösung der DGL $v' = \dfrac{F(1,v) - v}{t}$. Eventuell ist ψ einfacher zu finden.

Sei etwa $F(t,y) = \dfrac{y}{t} + \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{t^2}}$ auf

$$G = \{(t,y) \,:\, t^2 \geq y^2\} = \{(t,y) \,:\, (t-y)\cdot(t+y) \geq 0\}.$$

Man sieht sofort, dass das eine homogene DGL ergibt, und die obige Transformation macht daraus

$$v' = \frac{1}{t}\sqrt{1 - v^2}.$$

Das ist eine DGL mit getrennten Variablen, der Gestalt $v' = f(t)g(v)$, mit $f(t) = 1/t$ und $g(v) = \sqrt{1-v^2}$. Offensichtlich ist die Lösung ψ mit $\psi(t_0) = v_0$ gegeben durch

$$\psi(t) = \sin\big(\ln(t/t_0) + \arcsin(v_0)\big).$$

Dabei sei $(t_0, v_0) = (t_0, y_0/t_0)$ eine (transformierte) Anfangsbedingung. Als Lösung der Ausgangsgleichung erhält man dann:

$$\varphi(t) = t \cdot \psi(t) = t \cdot \sin\big(\ln(t/t_0) + \arcsin(y_0/t_0)\big).$$

Ein anderes Anwendungsbeispiel ist die ***Bernoulli'sche DGL*** :

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha,$$

wobei α reell, $\neq 0$ und $\neq 1$ sein soll.

Wir verwenden die Transformation $T(t,y) := (t, y^{1-\alpha})$. Dann ist

[1] Dieser Begriff sollte nicht mit dem Begriff „homogen" bei linearen DGLn verwechselt werden!

$$T^{-1}(t,v) = (t, v^{1/(1-\alpha)}), \quad \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t}(t,y) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial y}(t,y) = (1-\alpha)y^{-\alpha}.$$

Weil $F(t,y) = a(t)y + b(t)y^\alpha$ ist, folgt: Die transformierten Integralkurven genügen der DGL $v' = \widetilde{F}(t,v)$, mit

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}(t,v) &= \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t}(t, v^{1/(1-\alpha)}) + \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial y}(t, v^{1/(1-\alpha)}) \cdot F(t, v^{1/(1-\alpha)}) \\
&= (1-\alpha)v^{-\alpha/(1-\alpha)} \cdot \big(a(t)v^{1/(1-\alpha)} + b(t)v^{\alpha/(1-\alpha)}\big) \\
&= (1-\alpha) \cdot (a(t)v + b(t)).
\end{aligned}$$

Die transformierte DGL ist linear und daher sicher einfacher zu behandeln als die Ausgangsgleichung.

Die logistische Gleichung:

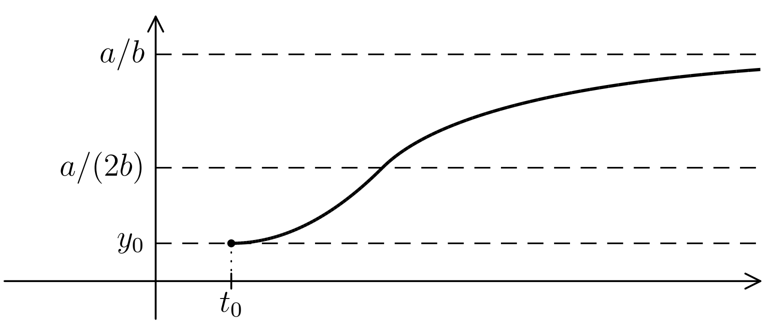
Die *logistische Gleichung* (oder *Gleichung des beschränkten Wachstums*)

$$y' = ay - by^2, \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}_+ \text{ und } y > 0$$

ist vom Bernoulli'schen Typ (mit $\alpha = 2$). Bevor wir sie transformieren, noch ein paar Anmerkungen:

Es ist $y' = y(a - by)$. Ist φ eine Lösung und $0 < \varphi(t) < a/b$, so ist $a - b \cdot \varphi(t) > 0$, also $\varphi'(t) > 0$. Der „Bestand" wächst! Ist dagegen $\varphi(t) > a/b$, so ist $\varphi'(t) < 0$ und der Bestand nimmt ab.

Weiter ist $\varphi''(t) = a\varphi'(t) - 2b\varphi(t)\varphi'(t) = (a - 2b\varphi(t))\varphi'(t)$. Ist also $0 < \varphi(t) < a/(2b)$, so ist $\varphi'(t) > 0$ und $\varphi''(t) > 0$. Das ist der Bereich „beschleunigten Wachstums", der Graph beschreibt eine Linkskurve. Ist dagegen $a/(2b) < \varphi(t) < a/b$, so ist $\varphi''(t) < 0$. Hier beschreibt der Graph eine Rechtskurve, das Wachstum wird gebremst.



Nun wenden wir unsere Transformation an. Suchen wir eine Lösung von $y' = ay - by^2$ zum Anfangswert (t_0, y_0), so können wir genauso gut eine Lösung von $v' = -av + b$ suchen, zum Anfangswert (t_0, y_0^{-1}). Das ist eine inhomogene DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Eine partikuläre Lösung ist die konstante Funktion $v_p(t) \equiv b/a$, und die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist gegeben durch $v_c(t) := c \cdot e^{-at}$, $c \in \mathbb{R}$.

Die allgemeine Lösung der Ausgangsgleichung ist dann gegeben durch

$$y_c(t) = (v_p(t) + v_c(t))^{-1} = \frac{a}{b + ac \cdot e^{-at}}.$$

Für alle diese Lösungen gilt:

$$y_c(t) \to \frac{a}{b} \quad \text{für } t \to \infty.$$

1.2 Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Zur Erinnerung:

Sei E ein Vektorraum mit Norm $\|\cdots\|$. Eine Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{a}_\nu$ in E heißt (im gewöhnlichen Sinne) ***konvergent***, falls es ein Element $\mathbf{a} \in E$ gibt, so dass gilt:

$$\lim_{N\to\infty} \|\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{a}_\nu - \mathbf{a}\| = 0.$$

Die Reihe heißt ***normal*** (oder ***absolut***) ***konvergent***, falls die Zahlenreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \|\mathbf{a}_\nu\|$ konvergiert.

Der Vektorraum E heißt ***vollständig*** oder ein ***Banachraum***, falls in E jede normal konvergente Reihe auch im gewöhnlichen Sinne konvergiert.

Definition

Sei E ein Banachraum und $M \subset E$ eine Teilmenge. Eine Abbildung $f : M \to M$ heißt ***kontrahierend***, falls es eine reelle Zahl q mit $0 < q < 1$ gibt, so dass $\|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\| \le q \cdot \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$ für alle $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in M$ gilt.

Ein Element $\mathbf{x}_0 \in M$ heißt ***Fixpunkt*** von f, falls $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ ist.

Bemerkung: Ist f kontrahierend, so kann f höchstens einen Fixpunkt besitzen.

1.2.1. Banach'scher Fixpunktsatz

Sei E ein Banachraum, $A \subset E$ abgeschlossen und $f : A \to A$ eine kontrahierende Abbildung. Dann besitzt f einen (eindeutig bestimmten) Fixpunkt in A.

Definition

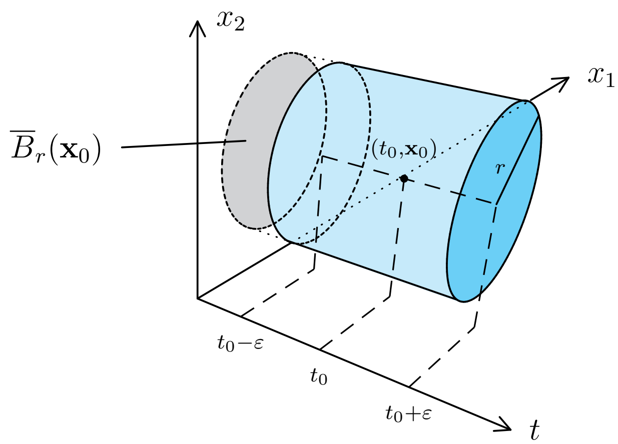
Sei $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Die ***Tonne*** mit *Radius* r und *Länge* 2ε um $(t_0, \mathbf{x}_0)$ ist die Menge

$$T := [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}_r(\mathbf{x}_0).$$

Ist $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, so nennt man eine Tonne $T \subset G$ mit Radius r und Länge 2ε eine ***Sicherheitstonne*** für $\mathbf{F}$, falls gilt:

$$\sup_T \|\mathbf{F}(t, \mathbf{x})\| \le \frac{r}{\varepsilon}\,.$$

In einer Sicherheitstonne lässt sich das Streckenzug-Verfahren aus dem Peano'schen Existenzsatz anwenden!



1.2.2. Existenz von Sicherheitstonnen

Ist T_0 eine beliebige Tonne um $(t_0, \mathbf{x}_0)$ mit Radius r und Länge 2ε und $\mathbf{F}$ stetig auf T_0, so gibt es ein δ mit $0 < \delta \le \varepsilon$, so dass jede Tonne T mit Radius r und Länge $\le 2\delta$ um $(t_0, \mathbf{x}_0)$ eine Sicherheitstonne für $\mathbf{F}$ ist.

BEWEIS: Sei $M := \sup_{T_0}\|\mathbf{F}\|$ und $\delta := \min(\varepsilon, \dfrac{r}{M})$. Dabei sei $r/M := +\infty$ gesetzt, falls $M = 0$ ist. Dann ist $r/\delta = \max(r/\varepsilon, M)$, und für die Tonne T gilt: $\sup_{T}\|\mathbf{F}\| \le \sup_{T_0}\|\mathbf{F}\| = M \le \dfrac{r}{\delta}$. ∎

Definition

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine stetige Abbildung $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ genügt auf G einer ***Lipschitz-Bedingung*** mit Lipschitz-Konstante k, falls gilt:

$$\|\mathbf{F}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_2)\| \le k \cdot \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \text{ für alle Punkte } (t, \mathbf{x}_1), (t, \mathbf{x}_2) \in G.$$

$\mathbf{F}$ genügt *lokal* der *Lipschitz-Bedingung*, falls es zu jedem $(t_0, \mathbf{x}_0) \in G$ eine Umgebung $U = U(t_0, \mathbf{x}_0) \subset G$ gibt, so dass $\mathbf{F}$ auf U einer Lipschitz-Bedingung genügt.

1.2.3. Satz

Ist $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, x_1, \ldots, x_n)$ auf G stetig und nach den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ stetig partiell differenzierbar, so genügt $\mathbf{F}$ auf jeder Tonne $T \subset G$ einer Lipschitz-Bedingung.

BEWEIS: Sei $T = I \times B \subset G$ eine beliebige Tonne. Die partiellen Ableitungen $\mathbf{F}_{x_i}(t, \mathbf{x})$ sind auf T stetig und damit beschränkt, etwa durch $M > 0$. Für $t \in I$ ist

$\mathbf{f}_t(\mathbf{x}) := \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = (F_1(t, \mathbf{x}), \dots, F_1(t, \mathbf{x}))$ auf B (total) stetig differenzierbar, und für $\mathbf{x} \in B$ ist

$$\begin{aligned}
\|D\mathbf{f}_t(\mathbf{x})\mathbf{v}\|^2 &= \big(\nabla F_1(t, \mathbf{x}) \bullet \mathbf{v}\big)^2 + \cdots + \big(\nabla F_n(t, \mathbf{x}) \bullet \mathbf{v}\big)^2 \\
&\leq \|\nabla F_1(t, \mathbf{x})\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2 + \cdots + \|\nabla F_n(t, \mathbf{x})\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2 \\
&\leq \|\mathbf{v}\|^2 \cdot n \cdot \max_\nu \|\nabla F_\nu(t, \mathbf{x})\|^2 \\
&\leq \|\mathbf{v}\|^2 \cdot n \cdot \max_\nu \Big(\big((F_\nu)_{x_1}(t, \mathbf{x})\big)^2 + \cdots + \big((F_\nu)_{x_n}(t, \mathbf{x})\big)^2\Big) \\
&\leq \|\mathbf{v}\|^2 \cdot n \cdot (n \cdot M^2),
\end{aligned}$$

also

$$\|D\mathbf{f}_t(\mathbf{x})\|_{\text{op}} := \sup_{\|\mathbf{v}\| \leq 1} \|D\mathbf{f}_t(\mathbf{x})\mathbf{v}\| \leq n \cdot M.$$

Aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz folgt dann:

$$\|\mathbf{f}_t(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_2)\| \leq n \cdot M \cdot \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \text{ für } \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B.$$

Da dies unabhängig von t gilt, haben wir unsere gesuchte Lipschitz-Bedingung. ■

1.2.4. Satz

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ stetig. Genügt $\mathbf{F}$ auf G lokal der Lipschitz-Bedingung, so gibt es zu jedem $(t_0, \mathbf{x}_0) \in G$ ein $\varepsilon > 0$ und eine Sicherheitstonne $T \subset G$ mit Zentrum $(t_0, \mathbf{x}_0)$ und Länge 2ε für $\mathbf{F}$, auf der $\mathbf{F}$ einer Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstante $k < 1/(2\varepsilon)$ genügt.

Beweis: Sei $U = U(t_0, \mathbf{x}_0)$ eine Umgebung, auf der $\mathbf{F}$ einer Lipschitz-Bedingung mit Konstante k genügt. Weiter sei $T_0 \subset U$ eine Tonne mit Zentrum $(t_0, \mathbf{x}_0)$, Radius $r < 1$ und Länge 2ε. Man kann ε so weit verkleinern, dass $\varepsilon < 1/(2k)$ und T eine Sicherheitstonne für $\mathbf{F}$ ist. ■

1.2.5. Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ stetig. Genügt $\mathbf{F}$ lokal der Lipschitz-Bedingung, so gibt es zu jedem $(t_0, \mathbf{y}_0) \in G$ ein $\varepsilon > 0$, so dass auf $I := [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ genau eine Lösung $\boldsymbol{\varphi}$ der Differentialgleichung $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ mit $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$ existiert.

Beweis: Es sei $T = I \times B \subset G$ eine Sicherheitstonne mit Radius r und Länge 2ε um $(t_0, \mathbf{y}_0)$ für $\mathbf{F}$, auf der $\mathbf{F}$ einer Lipschitz-Bedingung mit einer Konstanten $k < 1/(2\varepsilon)$ genügt. Weiter sei $I = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ und $B = \overline{B}_r(\mathbf{y}_0)$. Wir betrachten den Banachraum E aller stetigen Abbildungen $\boldsymbol{\varphi} : I \to \mathbb{R}^n$ und setzen

$$A := \{\boldsymbol{\varphi} \in E \,:\, \boldsymbol{\varphi}(I) \subset B \text{ und } \boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0\}.$$

Offensichtlich ist $A \neq \varnothing$, denn die Funktion $\boldsymbol{\varphi}(t) \equiv \mathbf{y}_0$ gehört zu A.

Sei nun $(\boldsymbol{\varphi}_\nu)$ eine Folge in A, die in E gegen eine stetige Grenzfunktion $\boldsymbol{\varphi}_0$ konvergiert. Da B abgeschlossen und $\boldsymbol{\varphi}_\nu(t)$ stets in B enthalten ist, muss auch der Grenzwert $\boldsymbol{\varphi}_0(t)$ in B liegen. Und die Relation $\boldsymbol{\varphi}_\nu(t_0) = \mathbf{y}_0$ bleibt ebenfalls beim Grenzübergang erhalten. Das bedeutet, dass $\boldsymbol{\varphi}_0$ wieder in A liegt, A ist eine abgeschlossene Teilmenge von E.

Als nächstes definieren wir eine Abbildung $S : A \to E$ durch

$$(S\boldsymbol{\varphi})(t) := \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}(u))\, du\,.$$

Es ist klar, dass $S\boldsymbol{\varphi}$ stetig ist und Werte in $\mathbb{R}^n$ hat. Außerdem ist $(S\boldsymbol{\varphi})(t_0) = \mathbf{y}_0$, und für $t \in I$ gilt:

$$\begin{aligned} \|(S\boldsymbol{\varphi})(t) - \mathbf{y}_0\| &= \|\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}(u))\, du\| \\ &\leq |t - t_0| \cdot \sup_T \|\mathbf{F}(t, \mathbf{y})\| \\ &\leq \varepsilon \cdot \frac{r}{\varepsilon} = r. \end{aligned}$$

Also liegt $S\boldsymbol{\varphi}$ wieder in A, S bildet A auf sich ab.

Wir wollen nun zeigen, dass S kontrahierend ist. Für $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} \in A$ ist

$$\begin{aligned} \|S\boldsymbol{\varphi} - S\boldsymbol{\psi}\| &= \sup_I \|S\boldsymbol{\varphi}(t) - S\boldsymbol{\psi}(t)\| \\ &= \sup_I \|\int_{t_0}^{t} [\mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}(u)) - \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\psi}(u))]\, du\| \\ &\leq \varepsilon \cdot k \cdot \sup_I \|\boldsymbol{\varphi}(u) - \boldsymbol{\psi}(u)\| \\ &< \frac{1}{2}\, \|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}\|. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass S genau einen Fixpunkt $\boldsymbol{\varphi}^*$ besitzt. Nun gilt:

$$\boldsymbol{\varphi}^*(t) = (S\boldsymbol{\varphi}^*)(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}^*(u))\, du.$$

Differenzieren auf beiden Seiten ergibt $(\boldsymbol{\varphi}^*)'(t) = \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\varphi}^*(t))$. Damit ist $\boldsymbol{\varphi}^*$ eine Lösung der DGL, mit $\boldsymbol{\varphi}^*(t_0) = \mathbf{y}_0$.

Ist umgekehrt $\boldsymbol{\varphi}$ eine Lösung der DGL mit der gewünschten Anfangsbedingung, so ist

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}(u))\, du = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\varphi}'(u)\, du = \boldsymbol{\varphi}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\varphi}(t) - \mathbf{y}_0,$$

also $S\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}$. Damit ist Existenz und Eindeutigkeit der Lösung über I gezeigt. ∎

Bemerkung: Das oben vorgestellte Lösungsverfahren nennt man das ***Verfahren von Picard-Lindelöf***. Es ist konstruktiv in dem Sinne, dass man mit einer beliebigen Funktion (z.B. $\boldsymbol{\varphi}(t) \equiv \mathbf{y}_0$) starten kann und die gesuchte Lösung als Grenzwert der Folge $\boldsymbol{\varphi}_k := S^k\boldsymbol{\varphi}$ für $k \to \infty$ erhält.

Betrachten wir als Beispiel die DGL $(y_1', y_2') = (-y_2, y_1)$. Sei $\boldsymbol{\varphi}_0(t) := (1, 0)$. Hier ist $\mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}_1(u), \boldsymbol{\varphi}_2(u)) = (-\boldsymbol{\varphi}_2(u), \boldsymbol{\varphi}_1(u))$, also

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_1(t) &= (1,0) + \int_0^t (0,1)\,du \;=\; (1,t), \\ \boldsymbol{\varphi}_2(t) &= (1,0) + \int_0^t (-u,1)\,du \;=\; (1 - \frac{t^2}{2}, t), \\ \boldsymbol{\varphi}_3(t) &= (1,0) + \int_0^t (-u, 1 - \frac{u^2}{2})\,du \;=\; (1 - \frac{t^2}{2}, t - \frac{t^3}{6})\,. \end{aligned}$$

Per Induktion zeigt man schließlich:

$$\boldsymbol{\varphi}_{2k}(t) = \Big(\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!}, \sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^\nu \frac{t^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\Big)$$

und

$$\boldsymbol{\varphi}_{2k+1}(t) = \Big(\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!}, \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu \frac{t^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\Big)\,.$$

Das bedeutet, dass $\boldsymbol{\varphi}(t) := (\cos(t), \sin(t))$ die einzige Lösung mit $\boldsymbol{\varphi}(0) = (1, 0)$ ist.

Erfüllt $\mathbf{F}$ keine Lipschitz-Bedingung, so sichert der Existenzsatz von Peano dennoch die Existenz einer Lösung. Allerdings gibt es dann kein konstruktives Verfahren, und es kann passieren, dass es zu einer Anfangsbedingung mehrere Lösungen gibt.

Im folgenden betrachten wir eine DGL $\mathbf{y}' = F(t, \mathbf{y})$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Die Abbildung F genüge lokal der Lipschitz-Bedingung.

1.2.6. Satz

Sei $\varphi : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung. Dann gibt es ein $t_2 > t_1$ und eine Lösung $\widehat{\varphi} : [t_0, t_2) \to \mathbb{R}^n$ mit $\widehat{\varphi}|_{[t_0,t_1]} = \varphi$.

Beweis: Nach dem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutig bestimmte Lösung $\psi : (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$. Außerdem ist

$$\psi'(t_1) = F(t_1, \psi(t_1)) = F(t_1, \varphi(t_1)) = \varphi'(t_1).$$

Also ist $\widehat{\varphi} : [t_0, t_1 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\widehat{\varphi}(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{für } t_0 \le t \le t_1, \\ \psi(t) & \text{für } t_1 < t < t_1 + \varepsilon. \end{cases}$$

stetig differenzierbar und damit eine Lösung über $[t_0, t_1 + \varepsilon)$. ■

1.2.7. Satz (von der globalen Eindeutigkeit)

Sind $\varphi, \psi : [t_0, t_1) \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen mit $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$, so ist $\varphi = \psi$.

Beweis: Nach dem lokalen Eindeutigkeitssatz gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\varphi(t) = \psi(t)$ für $t_0 \le t < t_0 + \varepsilon$ ist. Ist $\varphi = \psi$ auf ganz $[t_0, t_1)$, so ist nichts mehr zu zeigen. Andernfalls sei

$$t^* := \inf\{t \in [t_0, t_1) \,:\, \varphi(t) \ne \psi(t)\}.$$

Dann ist $t_0 < t^* < t_1$, und es muss $\varphi(t^*) = \psi(t^*)$ sein, denn die Menge aller t mit $\varphi(t) \ne \psi(t)$ ist offen. Wegen der lokalen Eindeutigkeit wäre dann aber auch noch in der Nähe von t^* die Gleichheit von $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ gegeben. Das ist ein Widerspruch zur Definition von t^*. ■

1.2.8. Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Zu vorgegebener Anfangsbedingung $(t_0, \mathbf{y}_0) \in G$ gibt es Zahlen $t_-, t_+ \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $t_- < t_0 < t_+$ und eine Lösung $\varphi : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

1. *$\varphi(t_0) = \mathbf{y}_0$.*
2. *φ lässt sich auf kein größeres Intervall fortsetzen.*
3. *Ist $\psi : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ eine weitere Lösung mit $\psi(t_0) = \mathbf{y}_0$, so ist $\varphi = \psi$.*
4. *Die Integralkurve $\Phi(t) := (t, \varphi(t))$ läuft in G „von Rand zu Rand“: Zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset G$ mit $(t_0, \mathbf{y}_0) \in K$ gibt es Zahlen t_1, t_2 mit*
$$t_- < t_1 < t_0 < t_2 < t_+,$$
so dass $\Phi((t_-, t_1)) \subset G \setminus K$ und $\Phi((t_2, t_+)) \subset G \setminus K$ ist.

Beweis: Wir beschränken uns auf die Konstruktion von t_+, die von t_- kann dann analog durchgeführt werden. Es sei

$$\varepsilon_+ := \sup\{\varepsilon > 0 \,:\, \exists \text{ Lösung } \varphi_\varepsilon : [t_0, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n \text{ mit } \varphi_\varepsilon(t_0) = \mathbf{y}_0\}$$

und

$$t_+ := t_0 + \varepsilon_+.$$

Ist nun $t \in [t_0, t_+)$, so gibt es ein ε mit $t - t_0 < \varepsilon < \varepsilon^+$, und wir setzen

$$\varphi(t) := \varphi_\varepsilon(t).$$

Diese Definition ist wegen der globalen Eindeutigkeit unabhängig vom gewählten ε, und φ ist deshalb auch eine Lösung der DGL. Nach Konstruktion von ε_+ lässt sich φ nicht über t_+ hinaus zu einer erweiterten Lösung fortsetzen. Offensichtlich ist φ eindeutig bestimmt.

Der Beweis der letzten Aussage ist etwas komplizierter.

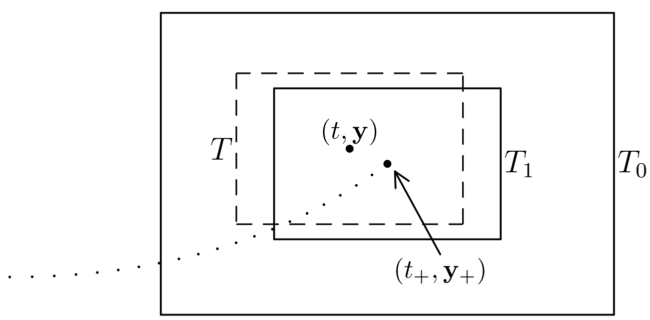
Sei $\Phi(t) := (t, \varphi(t))$ für $t_0 \le t < t_+$ die zugehörige Integralkurve. Wenn die Behauptung falsch wäre, gäbe es eine kompakte Menge $K \subset G$ und eine monoton wachsende und gegen t_+ konvergente Folge (t_ν), so dass $\Phi(t_\nu) \in K$ für $\nu \in \mathbb{N}$ gilt. Wir nehmen an, das sei der Fall. Da K kompakt ist, muss dann die Folge (t_ν) beschränkt sein, also t_+ endlich. Außerdem muss es eine Teilfolge (t_{ν_i}) geben, so dass $\Phi(t_{\nu_i})$ gegen ein Element $(t_+, \mathbf{y}_+) \in K$ (und damit in G) konvergiert. Zur Vereinfachung der Schreibweise nehmen wir an, dass schon die Folge $(\Phi(t_\nu))$ gegen $(t_+, \mathbf{y}_+)$ konvergiert.

Sei $T_0 = [t_+ - \varepsilon_0, t_+ + \varepsilon_0] \times \overline{B}_{r_0}(\mathbf{y}_+)$ eine Tonne, die noch ganz in G liegt. Dabei sei ε_0 so klein gewählt, dass F auf T_0 einer Lipschitzbedingung mit Konstante $k < 1/(2\varepsilon_0)$ genügt. Weiter sei

$$M := \sup_{T_0} \|F\|, \quad \varepsilon := \min\Big(\frac{\varepsilon_0}{2}, \frac{r_0}{2M}\Big) \quad \text{und} \quad r := \frac{r_0}{2},$$

sowie T_1 die Tonne mit Radius r und Länge 2ε um $(t_+, \mathbf{y}_+)$. Für einen beliebigen Punkt $(t, \mathbf{y}) \in T_1$ ist die Tonne $T = T(t, \mathbf{y})$ mit Radius r und Länge 2ε um $(t, \mathbf{y})$ eine in T_0 enthaltene Sicherheitstonne, denn es ist

$$\frac{r}{\varepsilon} = \max\Big(\frac{r_0}{\varepsilon_0}, M\Big), \text{ also } \sup_T \|F\| \le \sup_{T_0} \|F\| = M \le \frac{r}{\varepsilon}\,.$$



Außerdem erfüllt F auch auf T die Lipschitzbedingung mit der Konstanten k. Wir können das auf $T_\nu = T(t_\nu, \varphi(t_\nu))$ anwenden, denn für genügend großes ν liegt $(t_\nu, \varphi(t_\nu))$ in T_1. Dann ist $(t_+, \mathbf{y}_+)$ in T_ν enthalten. Nach dem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz gibt es genau eine Lösung $\psi : [t_\nu - \varepsilon, t_\nu + \varepsilon] \to \overline{B}_r(\varphi(t_\nu))$ mit $\psi(t_\nu) = \varphi(t_\nu)$.

Offensichtlich wird φ durch ψ fortgesetzt, und zwar über t_+ hinaus. Das ist ein Widerspruch! ∎

1.3 Lineare Systeme

Wir betrachten in diesem Abschnitt ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und eine DGL

$$\mathbf{y}' = F(t, \mathbf{y}),$$

wobei $F : G \to \mathbb{R}^n$ lokal der Lipschitz-Bedingung genügt.

1.3.1. Lemma von Gronwall

Sei $t_0 < t_1 \leq \infty$, $g : [t_0, t_1) \to \mathbb{R}$ stetig, $\alpha \geq 0$ und $\beta \geq 0$. Ist

$$0 \leq g(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau \qquad \textit{für } t \in [t_0, t_1),$$

so ist

$$g(t) \leq \alpha \cdot e^{\beta(t-t_0)} \qquad \textit{für } t \in [t_0, t_1).$$

Beweis: Sei $G(t) := \alpha + \beta \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau$. Dann ist $G(t_0) = \alpha$ und $G'(t) = \beta g(t) \leq \beta G(t)$, also $(\ln G)'(t) \leq \beta$. Daraus folgt, dass $\ln G(t) - \beta t$ monoton fällt, Für $t > t_0$ ist dann

$$\ln G(t) - \beta t \leq G(t_0) - \beta t_0 = \ln \alpha - \beta t_0$$

und

$$g(t) \leq G(t) \leq \alpha e^{\beta(t-t_0)}.$$

■

1.3.2. Folgerung (Fundamentale Abschätzung)

Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Kugel, so dass $\mathbf{F}$ auf $T := J \times B$ einer Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstante k genügt.

Sind $\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2 : J \to B$ zwei Lösungen der DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ mit Anfangsbedingungen $\boldsymbol{\varphi}_1(t_0) = \mathbf{y}_1$ und $\boldsymbol{\varphi}_2(t_0) = \mathbf{y}_2$, so ist

$$\|\boldsymbol{\varphi}_1(t) - \boldsymbol{\varphi}_2(t)\| \leq \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \cdot e^{k \cdot |t-t_0|} \textit{ für } t \in J.$$

Beweis: Weil $\boldsymbol{\varphi}_\lambda'(t) = \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\varphi}_\lambda(t))$ ist, für $\lambda = 1, 2$, folgt:

$$\boldsymbol{\varphi}_\lambda(t) = \boldsymbol{\varphi}_\lambda(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}_\lambda(u))\, du.$$

Nun setzen wir

$$\omega(t) := \|\boldsymbol{\varphi}_1(t) - \boldsymbol{\varphi}_2(t)\| \text{ für } t \geq t_0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\omega(t) &\le \|\boldsymbol{\varphi}_1(t_0) - \boldsymbol{\varphi}_2(t_0)\| + \|\int_{t_0}^{t} (\mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}_1(u)) - \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}_2(u)))\, du\| \\ &\le \omega(t_0) + k \cdot \int_{t_0}^{t} \omega(u)\, du\end{aligned}$$

und nach Gronwall

$$\omega(t) \le \omega(t_0) \cdot e^{k(t-t_0)}.$$

Damit ist der Satz für $t \ge t_0$ bewiesen.

Um ihn auch für $t < t_0$ zu erhalten, setzen wir $\widetilde{\mathbf{F}}(t, \mathbf{y}) := -\mathbf{F}(t_0 - t, \mathbf{y})$. Ist $\boldsymbol{\varphi}$ Lösung der DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$, so ist $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(t) := \boldsymbol{\varphi}(t_0 - t)$ Lösung der DGL $\mathbf{y}' = \widetilde{\mathbf{F}}(t, \mathbf{y})$, und umgekehrt, denn es ist $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}'(t) = -\boldsymbol{\varphi}'(t_0 - t) = -\mathbf{F}(t_0 - t, \boldsymbol{\varphi}(t_0 - t)) = \widetilde{\mathbf{F}}(t, \boldsymbol{\varphi}(t_0 - t)) = \widetilde{\mathbf{F}}(t, \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(t))$. Außerdem ist $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(0) = \boldsymbol{\varphi}(t_0)$.

Sei $\widetilde{\omega}(t) := \|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(t) - \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_2(t)\| = \omega(t_0 - t)$. Ist $t < t_0$, so ist $t_0 - t > 0$ und

$$\omega(t) = \widetilde{\omega}(t_0 - t) \le \widetilde{\omega}(0) e^{k(t_0 - t)} = \omega(t_0) e^{k|t - t_0|}.$$

∎

Wir wollen nun Systeme von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung über einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ untersuchen:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A(t)^{\top} + \mathbf{b}(t),$$

mit stetigen Abbildungen $A : I \to M_{n,n}(\mathbb{R})$ und $\mathbf{b} : I \to \mathbb{R}^n$. Wie im Falle linearer Gleichungssysteme beginnt man mit dem **homogenen** Fall $\mathbf{b}(t) \equiv \mathbf{0}$. Die stetige Abbildung

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}) := \mathbf{y} \cdot A(t)^{\top}$$

ist auf ganz $I \times \mathbb{R}^n$ definiert und genügt dort lokal einer Lipschitz-Bedingung, denn es ist

$$\|\mathbf{F}(t, \mathbf{y}_1) - \mathbf{F}(t, \mathbf{y}_2)\| = \|(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \cdot A(t)^{\top}\| \le \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \cdot \|A(t)\|_{\text{op}}.$$

1.3.3. Der Lösungsraum einer homogenen linearen DGL

Ist die lineare DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ über $I = (a, b)$ definiert, so ist auch jede maximale Lösung über I definiert, und die Menge aller maximalen Lösungen bildet einen reellen Vektorraum.

Beweis: Sei $J = (t_-, t_+) \subset I$, $t_0 \in J$ und $\boldsymbol{\varphi} : J \to \mathbb{R}^n$ eine maximale Lösung mit $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$. Wir nehmen an, es sei $t_+ < b$. Dann ist $\|A(t)\|_{\text{op}}$ auf $[t_0, t_+]$ beschränkt, etwa durch eine Zahl $k > 0$. Wir wenden die fundamentale Abschätzung auf die beiden Lösungen $\boldsymbol{\varphi}$ und $\boldsymbol{\psi}(x) \equiv \mathbf{0}$ an. Damit ist $\|\boldsymbol{\varphi}(t)\| \le \|\mathbf{y}_0\| \cdot e^{k(t_+ - t_0)}$, bleibt also auf $[t_0, t_+)$ beschränkt. Das bedeutet, dass die Integralkurve $t \mapsto (t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ im Innern von $I \times \mathbb{R}^n$ endet, und das kann nicht sein. Also muss $t_+ = b$ (und entsprechend dann auch $t_- = a$) sein.

Dass die Menge aller (maximalen) Lösungen dann einen Vektorraum bildet, ist trivial. ■

Sei $\mathcal{L}$ der (reelle) Vektorraum aller Lösungen über I. Für ein festes $t_0 \in I$ sei $E : \mathcal{L} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $E(\boldsymbol{\varphi}) := \boldsymbol{\varphi}(t_0)$. [2] Dann ist E offensichtlich linear, und aus dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz und dem obigen Resultat folgt, dass E bijektiv ist, also ein Isomorphismus von $\mathcal{L}$ auf $\mathbb{R}^n$. Daraus folgt:

> *Der Lösungsraum $\mathcal{L}$ eines homogenen linearen Systems $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A(t)^\top$ in $I \times \mathbb{R}^n$ ist ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.*

Eine Basis $\{\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n\}$ von $\mathcal{L}$ bezeichnet man auch als ***Fundamentalsystem*** (von Lösungen), die Matrix

$$X(t) := \big(\boldsymbol{\varphi}_1^\top(t), \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n^\top(t)\big)$$

nennt man ***Fundamentalmatrix***. Sie erfüllt die Gleichung

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t).$$

Die Funktion $W(t) := \det X(t)$ heißt ***Wronski-Determinante*** des Fundamentalsystems.

Wir erinnern uns an einige Tatsachen aus der Determinantentheorie. Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ und $S_{ij}(A)$ die Streichungsmatrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte aus A entsteht. Dann wird die Zahl $A_{ij} := (-1)^{i+j} \det S_{ij}(A)$ als ***Cofaktor***, *algebraisches Komplement* oder ***Adjunkte*** bezeichnet, und der Laplace'sche Entwicklungssatz besagt: Für beliebiges k und beliebiges l ist

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{il} \cdot A_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj}.$$

Man beachte: Sind $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ die Zeilen der Matrix A, so ist

$$A_{ij} = \det\big(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{e}_j, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n\big),$$

und die Koeffizienten $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ kommen in A_{ij} nicht vor.

Die Matrix $\operatorname{ad}(A) := \left(A_{ij} \;\middle|\; \begin{array}{l} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, n \end{array} \right)$ heißt ***adjungierte Matrix*** zu A.

[2] „E“ steht für *evaluate* (auswerten).

1.3.4. Hilfssatz

1. *Ist* $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$*, so ist* $(\det A) \cdot E_n = A \cdot \mathrm{ad}(A)^\top$.
2. *Ist* $t \mapsto A(t) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ *differenzierbar, so ist*

$$(\det \circ A)'(t) = \sum_{i,j} a'_{ij}(t) \cdot A_{ij}(t).$$

Beweis: 1) Seien $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ die Zeilen der Matrix A. Dann ist

$$\begin{aligned}
\left(A \cdot \mathrm{ad}(A)^\top\right)_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} \\
&= \sum_{k=1}^n a_{ik} \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{e}_k, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) \\
&= \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \sum_{k=1}^n a_{ik}\mathbf{e}_k, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) \\
&= \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) \\
&= \delta_{ij} \cdot \det A.
\end{aligned}$$

2) Weil A_{ij} von a_{ij} nicht abhängt, folgt mit dem Entwicklungssatz

$$\frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A) = \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \left(\sum_{k=1}^n a_{kj} \cdot A_{kj} \right) = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} A_{kj} = A_{ij},$$

nach Kettenregel also

$$(\det \circ A)'(t) = \sum_{i,j} \frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A(t)) \cdot a'_{ij}(t) = \sum_{i,j} a'_{ij}(t) \cdot A_{ij}(t).$$

∎

Man kann den Begriff der Wronski-Determinante noch etwas verallgemeinern:

Definition

Sind $\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n : I \to \mathbb{R}^n$ irgendwelche (differenzierbare) Funktionen, so nennt man

$$W(\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n)(t) := \det(\boldsymbol{\varphi}_1(t), \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n(t))$$

die ***Wronski-Determinante*** von $\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n$.

1.3.5. Die Formel von Liouville

Die Wronski-Determinante $W(t)$ eines Systems von Lösungen der DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A(t)^\top$ erfüllt die gewöhnliche Differentialgleichung

$$z' = z \cdot \mathrm{Spur} A(t)\,.$$

Ist $W(t)$ sogar die Wronski-Determinante einer Fundamentalmatrix, so ist $W(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, und für beliebiges (festes) $t_0 \in \mathbb{R}$ ist

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t \mathrm{Spur} A(s)\, ds\right).$$

Beweis: Sei $X(t) = (x_{ij}(t)) = (\boldsymbol{\varphi}_1^\top(t), \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n^\top(t))$ und $W(t) = \det X(t)$. Dann ist

$$\begin{aligned} W'(t) &= (\det \circ X)'(t) \\ &= \sum_{i,j} x'_{ij}(t) \cdot (\mathrm{ad}(X))_{ij}(t) \\ &= \sum_{i=1}^n (X'(t) \cdot \mathrm{ad}(X)^\top(t))_{ii} \\ &= \mathrm{Spur}\big(X'(t) \cdot \mathrm{ad}(X)^\top(t)\big). \end{aligned}$$

Da die Spalten von $X(t)$ Lösungen der DGL sind, ist

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t),$$

also

$$\begin{aligned} W'(t) &= \mathrm{Spur}\big(A(t) \cdot X(t) \cdot \mathrm{ad}(X)^\top(t)\big) \\ &= \mathrm{Spur}\big(A(t) \cdot (\det X(t) \cdot E_n)\big) \\ &= W(t) \cdot \mathrm{Spur} A(t). \end{aligned}$$

Sei $X(t) = \big(\boldsymbol{\varphi}_1^\top(t), \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n^\top(t)\big)$ eine Fundamentalmatrix. Gibt es ein $t_0 \in I$ mit $W(t_0) = 0$, so gibt es reelle Zahlen c_ν, nicht alle $= 0$, so dass $\sum_\nu c_\nu \boldsymbol{\varphi}_\nu(t_0) = \mathbf{0}$ ist. Die Funktion $\boldsymbol{\varphi} := \sum_\nu c_\nu \boldsymbol{\varphi}_\nu$ ist Lösung der DGL und verschwindet in t_0. Nach dem Eindeutigkeitssatz muss dann $\boldsymbol{\varphi}(t) \equiv \mathbf{0}$ sein. Also sind $\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n$ linear abhängig und können kein Fundamentalsystem sein. Widerspruch!

Also ist $W(t) \neq 0$ und $X(t)$ invertierbar für alle $t \in I$. Außerdem ist

$$(\ln \circ W)'(t) = \frac{W'(t)}{W(t)} = \mathrm{Spur} A(t),$$

also

$$\ln\Big(\frac{W(t)}{W(t_0)}\Big) = \ln W(t) - \ln W(t_0) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{Spur} A(s)\, ds.$$

Wendet man exp an, so erhält man die Liouville-Formel. ∎

1.3.6. Die Fundamentallösung

Sei $A : I \to M_{n,n}(\mathbb{R})$ stetig.

1. *Zu jedem $t_0 \in I$ gibt es genau eine Fundamentalmatrix X_0 der DGL*

   $$\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A(t)^\top \quad \text{mit} \quad X_0(t_0) = E_n \quad (= n\text{-reihige Einheitsmatrix}).$$

   Für $\mathbf{t} \in \mathbf{I}$ wird dann $\mathbf{C}(\mathbf{t}, \mathbf{t_0}) := \mathbf{X_0}(\mathbf{t}) \in \mathbf{M_{n,n}}(\mathbb{R})$ gesetzt.

2. *Ist $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, so ist $\boldsymbol{\varphi}(t) := \mathbf{y}_0 \cdot C(t, t_0)^\top$ die eindeutig bestimmte Lösung mit $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$.*

3. *Die Matrix $C(t, t_0)$ ist stets invertierbar, und für $s, t, u \in I$ gilt:*

   (a) $C(s, t) \cdot C(t, u) = C(s, u)$.

   (b) $C(t, t) = E_n$,

   (c) $C(s, t)^{-1} = C(t, s)$.

4. *Ist $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$, so wird durch $\boldsymbol{\varphi}_\nu(t) := \mathbf{a}_\nu \cdot C(t, t_0)^\top$ ein Fundamentalsystem von Lösungen mit $\boldsymbol{\varphi}_\nu(t_0) = \mathbf{a}_\nu$ definiert.*

BEWEIS: 1) Es gibt eindeutig bestimmte Lösungen $\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n$, so dass $\boldsymbol{\varphi}_\nu(t_0) = \mathbf{e}_\nu$ der ν-te Einheitsvektor ist. Da die Einheitsvektoren eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden und die Evaluationsabbildung E ein Isomorphismus ist, bilden die $\boldsymbol{\varphi}_\nu$ eine Basis des Lösungsraumes. $X_0 := (\boldsymbol{\varphi}_1^\top, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n^\top)$ ist dann die (eindeutig bestimmte) Fundamentalmatrix mit $X_0(t_0) = E_n$.

2) Da $X_0(t) = C(t, t_0)$ eine Fundamentalmatrix ist, erfüllt $\boldsymbol{\varphi}(t) := \mathbf{y}_0 \cdot C(t, t_0)^\top$ die DGL. Es ist nämlich

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = \mathbf{y}_0 \cdot \big(X_0^\top(t)\big)' = \mathbf{y}_0 \cdot \big(X_0^\top(t) \cdot A^\top(t)\big) = \boldsymbol{\varphi}(t) \cdot A^\top(t).$$

Nach Konstruktion ist $C(t_0, t_0) = E_n$, also $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$.

3) Weil $W(t) = \det C(t, t_0)$ nirgends verschwindet, ist $C(t, t_0)$ immer invertierbar. Sei $\mathbf{y}$ beliebig, $t, u \in I$ beliebig, aber fest, sowie $s \in I$ beliebig (variabel). Wir setzen $\boldsymbol{\varphi}(s) := \mathbf{y} \cdot C(s, u)^\top$ und $\boldsymbol{\psi}(s) := \boldsymbol{\varphi}(t) \cdot C(s, t)^\top$. Dann ist $\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$, also auch $\boldsymbol{\psi}(s) = \boldsymbol{\varphi}(s)$ für alle $s \in I$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} \cdot C(s,u)^\top &= \boldsymbol{\varphi}(s) \;=\; \boldsymbol{\psi}(s) \\
&= \boldsymbol{\varphi}(t) \cdot C(s,t)^\top \\
&= \mathbf{y} \cdot C(t,u)^\top \cdot C(s,t)^\top \\
&= \mathbf{y} \cdot \big(C(s,t) \cdot C(t,u)\big)^\top .
\end{aligned}$$

Weil $C(s,u)$ invertierbar ist, folgt die Gleichung $C(s,u) = C(s,t) \cdot C(t,u)$.

4) ist trivial. ■

Leider ist es im allgemeinen nicht möglich, die Lösungen eines homogenen linearen Systems explizit anzugeben! In Einzelfällen kann es aber durchaus Lösungsmethoden geben.

Wir betrachten nun den ***inhomogenen Fall*** $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A(t)^\top + \mathbf{b}(t)$. Wie im homogenen Fall kann man zeigen, dass alle Lösungen über ganz I definiert sind. Da die Differenz zweier Lösungen der inhomogenen Gleichung eine Lösung der homogenen Gleichung ist, bilden die Lösungen der inhomogenen Gleichung einen affinen Raum, und es genügt, eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems zu finden. Wir benutzen hier wieder (wie im Falle einer Gleichung erster Ordnung) die Methode der ***Variation der Kostanten***.

Ist $X(t) = (\boldsymbol{\varphi}_1^\top(t), \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n^\top(t))$ eine Fundamentalmatrix, so ist die Lösungsgesamtheit des homogenen Systems die Menge der Linearkombinationen

$$c_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_1(t) + \cdots + c_n \cdot \boldsymbol{\varphi}_n(t).$$

Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz

$$\boldsymbol{\varphi}_p(t) := c_1(t) \cdot \boldsymbol{\varphi}_1(t) + \cdots + c_n(t) \cdot \boldsymbol{\varphi}_n(t) = \mathbf{c}(t) \cdot X(t)^\top .$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}_p'(t) &= \mathbf{c}'(t) \cdot X(t)^\top + \mathbf{c}(t) \cdot \big(X'(t)\big)^\top \\
&= \mathbf{c}'(t) \cdot X(t)^\top + \mathbf{c}(t) \cdot \big(A(t) \cdot X(t)\big)^\top \\
&= \mathbf{c}'(t) \cdot X(t)^\top + \boldsymbol{\varphi}_p(t) \cdot A(t)^\top .
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}_p(t) \text{ ist Lösung} \quad &\iff \quad \boldsymbol{\varphi}_p'(t) = \boldsymbol{\varphi}_p(t) \cdot A(t)^\top + \mathbf{b}(t) \\
&\iff \quad \mathbf{c}'(t) \cdot X(t)^\top = \mathbf{b}(t) \\
&\iff \quad \mathbf{c}'(t) = \mathbf{b}(t) \cdot (X(t)^\top)^{-1} \\
&\iff \quad \mathbf{c}(t) = \mathbf{c}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{b}(s) \cdot (X(s)^\top)^{-1}\, ds \,.
\end{aligned}$$

Ist $X(t) = C(t,t_0)$, also $X(t_0) = E_n$, so ist

$$\boldsymbol{\varphi}_p(t) = \mathbf{c}(t) \cdot X(t)^\top = \left(\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{b}(s) \cdot C(t_0, s)^\top \, ds\right) \cdot C(t, t_0)^\top$$

die partikuläre Lösung $\boldsymbol{\varphi}_p$ mit $\boldsymbol{\varphi}_p(t_0) = \mathbf{y}_0$.

Eine ***homogene lineare DGL n-ter Ordnung*** hat die Gestalt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0\,.$$

Das zugeordnete lineare System hat dann – in Spaltenschreibweise – die Form

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\,.$$

Ist $\{f_1, \ldots, f_n\}$ eine Basis des Lösungsraumes der DGL n-ter Ordnung, so erhalten wir für das System die Fundamentalmatrix

$$X(t) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}\,.$$

1.3.7. Beispiel

Wir betrachten eine gewöhnliche inhomogene lineare DGL 2. Grades,

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x).$$

Dem entspricht das lineare System $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A(t)^\top + \mathbf{b}(t)$ mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}(t) = (0, r(t)).$$

Eine Fundamentalmatrix hat die Gestalt

$$X(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}\,.$$

Dann ist $W(t) = \det X(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$ die Wronski-Determinante, und die Matrix $X(t)^{-1}$ kann durch die Formel

$$X(t)^{-1} = \frac{1}{W(t)} \cdot \begin{pmatrix} y_2'(t) & -y_2(t) \\ -y_1'(t) & y_1(t) \end{pmatrix}$$

berechnet werden. Also ist

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(s)\cdot(X(s)^\top)^{-1} &= \frac{1}{W(s)}(0,r(s))\cdot\begin{pmatrix} y_2'(s) & -y_1'(s)\\ -y_2(s) & y_1(s)\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{W(s)}\big(-y_2(s)r(s),y_1(s)r(s)\big),\end{aligned}$$

und $\boldsymbol{\varphi}_p(t) = \left(\int_{t_0}^t \mathbf{b}(s)\cdot(X(s)^\top)^{-1}\,ds\right)\cdot X(t)^\top$ ist eine partikuläre Lösung des (inhomogenen) Systems mit $\boldsymbol{\varphi}_p(t_0) = 0$. Die 1. Komponente davon ist Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung. Das ist

$$\varphi(t) = y_1(t)\cdot\int_{t_0}^t \frac{-y_2(s)r(s)}{W(s)}\,ds + y_2(t)\cdot\int_{t_0}^t \frac{y_1(s)r(s)}{W(s)}\,ds\,,$$

und $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi,\varphi')$ ist Lösung des Systems.

Die Funktion $G(s,t) := \big(y_2(t)y_1(s) - y_1(t)y_2(s)\big)W(s)^{-1}$ bezeichnet man auch als ***Green'sche Funktion***. Offensichtlich ist $\varphi(t) = \int_{t_0}^t G(s,t)r(s)\,ds$.

Im Falle der konkreten DGL $y''+y'-2y = e^x$ lösen $\varphi_1(x) := e^x$ und $\varphi_2(x) := e^{-2x}$ die zugehörige homogene Gleichung. Weil $W(x) = \det\begin{pmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x)\end{pmatrix} = -3e^{-x} \neq 0$ ist, bilden φ_1 und φ_2 sogar eine Basis des Lösungsraumes. Man berechnet dann

$$G(s,t) = \frac{1}{3}\big(e^te^{-s} - e^{-2t}e^{2s}\big)$$

und erhält als Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t G(s,t)r(s)\,ds = \frac{1}{3}\int_{t_0}^t\big(e^t - e^{-2t}e^{3s}\big)\,ds = \frac{1}{3}\,te^t - \frac{1}{9}\,e^t.$$

Eine Anwendung der linearen Systeme ist die Untersuchung der Abhängigkeit der Lösungen einer DGL von den Anfangsbedingungen.

1.3.8. Existenz und Stetigkeit des lokalen Flusses

Sei $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t,\mathbf{y})$ eine DGL über $G \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $\mathbf{F}$ genüge lokal einer Lipschitz-Bedingung. Weiter sei $(t_0,\mathbf{y}_0) \in G$.

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $r > 0$, so dass $(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\times B_r(\mathbf{y}_0)$ in G enthalten ist und zu jedem $\mathbf{y} \in B = B_r(\mathbf{y}_0)$ eine Lösung $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}} : J = (t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ der DGL mit $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}(t_0) = \mathbf{y}$ existiert.

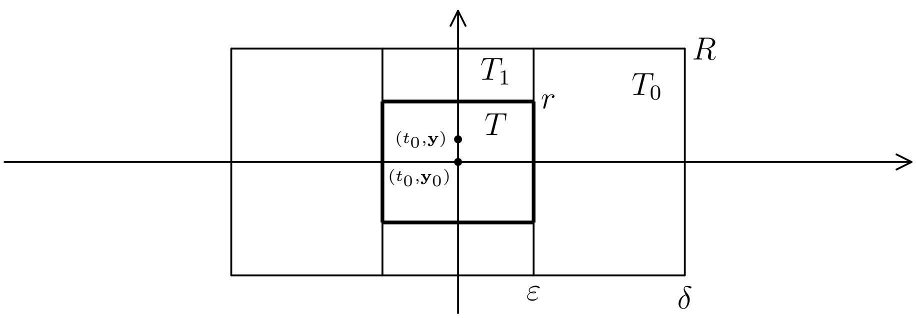
Die Abbildung $\boldsymbol{\Phi} : J\times B \to \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{\Phi}(t,\mathbf{y}) = \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}(t)$ ist stetig.

Bemerkung: Die Abbildung $\boldsymbol{\Phi}$ nennt man den ***lokalen Fluss*** für $\mathbf{F}$ in $(t_0,\mathbf{y}_0)$. Offensichtlich ist $\boldsymbol{\Phi}$ nach t partiell differenzierbar, und es gilt:

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial t}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{F}(t, \mathbf{\Phi}(t, \mathbf{y})) \;\text{ und }\; \mathbf{\Phi}(t_0, \mathbf{y}) = \mathbf{y}.$$

Beweis: Sei $T_0 := [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}_R(\mathbf{y}_0)$ eine Sicherheitstonne um $(t_0, \mathbf{y}_0)$, die noch ganz in G liegt. Dann ist $M_0 := \sup_{T_0} \|\mathbf{F}(t, \mathbf{y})\| \le \dfrac{R}{\delta}$. Wir können T_0 so klein wählen, dass $\mathbf{F}$ auf T_0 einer Lipschitz-Bedingung mit Konstante $k < 1/(2\delta)$ genügt.

Nun sei $\varepsilon := \delta/2$, $J_0 := [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ und $T_1 := J_0 \times \overline{B}_R(\mathbf{y}_0)$. Dann ist auch T_1 eine Sicherheitstonne und $\|F\| \le M_0 \le R/\delta = R/(2\varepsilon)$ auf T_1. Außerdem ist $2k\varepsilon < \varepsilon/\delta = 1/2$.



Sei $r := R/2$ und $T := J_0 \times \overline{B}_r(\mathbf{y}_0)$. Wir wollen das Verfahren von Picard-Lindelöf in T durchführen, wobei wir den Anfangswert $\mathbf{y} \in B := \overline{B}_r(\mathbf{y}_0)$ (für $t = t_0$) als Parameter mitführen. Entscheidend ist dabei, dass das Intervall J_0 simultan für alle $\mathbf{y} \in B$ verwendet werden kann.

Für $\mathbf{y} \in B$ sei $S_{\mathbf{y}} : \mathcal{C}^0(J_0, \overline{B}_R(\mathbf{y}_0)) \to \mathcal{C}^0(J_0, \overline{B}_R(\mathbf{y}_0))$ definiert durch

$$\big(S_{\mathbf{y}}\boldsymbol{\varphi}\big)(s) := \mathbf{y} + \int_{t_0}^{s} \mathbf{F}(\tau, \boldsymbol{\varphi}(\tau))\, d\tau \text{ für } s \in J_0.$$

Tatsächlich ist

$$\|\big(S_{\mathbf{y}}\boldsymbol{\varphi}\big)(s) - \mathbf{y}_0\| \le \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| + |s - t_0| \cdot M_0 \le \frac{R}{2} + \varepsilon \cdot R/(2\varepsilon) = R,$$

so dass $A_{\mathbf{y}} := \{\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^0(J_0, \overline{B}_R(\mathbf{y}_0)) \,:\, \boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}\}$ durch $S_{\mathbf{y}}$ auf sich abgebildet wird. Außerdem ist

$$\|S_{\mathbf{y}}\boldsymbol{\varphi}(s) - S_{\mathbf{y}}\boldsymbol{\psi}(s)\| = \sup_J \Big\| \int_{t_0}^{s} \big[\mathbf{F}(\tau, \boldsymbol{\varphi}(\tau)) - \mathbf{F}(\tau, \boldsymbol{\psi}(\tau))\big]\, d\tau \Big\| \le k \cdot \varepsilon \cdot \|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}\|.$$

Da $0 < k\varepsilon < 1/4$ ist, ist $S_{\mathbf{y}}$ kontrahierend. Es gibt jeweils einen Fixpunkt $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}$, der zugleich Lösung der DGL ist, mit $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}(t_0) = \mathbf{y}$.

Es sei $\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{y}) := \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}(t)$ auf $J \times B$. Dann ist

$$\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{y} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(\tau, \mathbf{\Phi}(\tau, \mathbf{y}))\, d\tau.$$

Sind $(t_1, \mathbf{y}_1), (t_2, \mathbf{y}_2) \in J \times B$ gegeben, so ist

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{\Phi}(t_1,\mathbf{y}_1)-\mathbf{\Phi}(t_2,\mathbf{y}_2)\| &\le \|\mathbf{\Phi}(t_1,\mathbf{y}_1)-\mathbf{\Phi}(t_1,\mathbf{y}_2)\| + \|\mathbf{\Phi}(t_1,\mathbf{y}_2)-\mathbf{\Phi}(t_2,\mathbf{y}_2)\| \\
&\le \|\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2\|\cdot e^{k|t_1-t_0|} + \|\int_{t_1}^{t_2} F(\tau,\mathbf{\Phi}(\tau,\mathbf{y}_2))\,d\tau\| \\
&\le \|\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2\|\cdot e^{k\varepsilon} + |t_1-t_2|\cdot M_0.
\end{aligned}$$

Das zeigt, daß $\mathbf{\Phi}$ stetig ist. ∎

Wir wollen jetzt untersuchen, ob der lokale Fluss auch differenzierbar von den Anfangsbedingungen abhängt, wenn nur die rechte Seite der DGL differenzierbar von $\mathbf{y}$ abhängt. Dazu wollen wir den Begriff der linearen Differentialgleichung noch etwas weiter fassen.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, sowie $A : I \times U \to M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine stetige Abbildung. Unter einer Lösung der ***parameterabhängigen linearen Differentialgleichung***

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z} \cdot A(t,\mathbf{y})^\top \qquad \text{(mit dem Parameter } \mathbf{y}\text{)}$$

verstehen wir eine Funktion $\boldsymbol{\lambda} : I \times U \to \mathbb{R}^n$ mit $\dfrac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial t}(t,\mathbf{y}) = \boldsymbol{\lambda}(t,\mathbf{y}) \cdot A(t,\mathbf{y})^\top$.

1.3.9. Satz

Zu jedem $t_0 \in I$ gibt es eine eindeutig bestimmte Fundamentalmatrix der DGL $\mathbf{z}' = \mathbf{z} \cdot A(t,\mathbf{y})^\top$, also eine Abbildung $Z : I \times U \to M_{n,n}(\mathbb{R})$ mit

$$\frac{\partial Z}{\partial t}(t,\mathbf{y}) = A(t,\mathbf{y}) \cdot Z(t,\mathbf{y}),$$

so dass $Z(t_0,\mathbf{y}) = E_n$ für alle $\mathbf{y} \in U$ gilt.

BEWEIS: Sei $t_0 \in I$ festgehalten. Dann gibt es zu jedem Parameterwert $\mathbf{y}$ eine eindeutig bestimmte Fundamentalmatrix $t \mapsto Z_{\mathbf{y}}(t)$ der linearen DGL $\mathbf{z}' = \mathbf{z} \cdot A(t,\mathbf{y})^\top$ mit $Z_{\mathbf{y}}(t_0) = E_n$. Wir setzen $Z(t,\mathbf{y}) := Z_{\mathbf{y}}(t)$. Das tut's! ∎

Wir kehren zurück zu unserer allgemeinen DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t,\mathbf{y})$ und nehmen an, dass $\mathbf{F}$ und (für den Augenblick) auch der lokale Fluss $\boldsymbol{\Phi}$ zweimal stetig differenzierbar sind. Wir definieren die Matrix $D_2\mathbf{F}(t,\mathbf{y}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ durch

$$D_2\mathbf{F}(t,\mathbf{y}) := \Big(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(t,\mathbf{y}) \,:\, i,j = 1,\dots,n\Big)$$

und die Matrix $D_2\boldsymbol{\Phi}(t,\mathbf{y})$ durch

$$D_2\boldsymbol{\Phi}(t,\mathbf{y}) := \Big(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_i}{\partial y_j}(t,\mathbf{y}) \,:\, i,j = 1,\dots,n\Big).$$

Es ist

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t}(t,\mathbf{y}) = \mathbf{F}(t,\boldsymbol{\Phi}(t,\mathbf{y})) \qquad \text{(„Originalgleichung“)}$$

und daher (mit dem Satz von Schwarz und der Kettenregel)

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(D_2\boldsymbol{\Phi}\big)(t,\mathbf{y}) = D_2\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t}\Big)(t,\mathbf{y}) = D_2\mathbf{F}(t,\boldsymbol{\Phi}(t,\mathbf{y})) \cdot D_2\boldsymbol{\Phi}(t,\mathbf{y}).$$

Also ist $D_2\boldsymbol{\Phi}$ eine Fundamentalmatrix für die sogenannte „Variationsgleichung“

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z} \cdot D_2\mathbf{F}(t,\mathbf{y})^\top,$$

eine parameterabhängige lineare Differentialgleichung.

Motiviert von dieser Entdeckung, versuchen wir – mit Hilfe des Verfahrens von Picard-Lindelöf – die Originalgleichung und die Variationsgleichung simultan (als entsprechend größeres System) zu lösen.

Es sei nur noch $\mathbf{F}$ als einmal stetig differenzierbar (und lokal Lipschitz-stetig) vorausgesetzt. Jedem Paar $(\mathbf{\Phi}, \Psi)$ von stetigen Abbildungen $\mathbf{\Phi} : T \to \overline{B}_R(\mathbf{y}_0))$ und $\Psi : T \to M_{n,n}(\mathbb{R})$ (so dass $\Psi(t,\mathbf{y})$ für $(t,\mathbf{y}) \in T$ nahe genug bei der Einheitsmatrix E_n liegt) wird ein Paar $(S\mathbf{\Phi}, S_*\Psi)$ zugeordnet, durch

$$\begin{aligned} (S\mathbf{\Phi})(t,\mathbf{y}) &:= \mathbf{y} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(\tau, \mathbf{\Phi}(\tau,\mathbf{y}))\,d\tau \\ \text{und} \quad S_*\Psi(t,\mathbf{y}) &:= E_n + \int_{t_0}^{t} D_2\mathbf{F}(\tau, \mathbf{\Phi}(\tau,\mathbf{y})) \cdot \Psi(\tau,\mathbf{y})\,d\tau. \end{aligned}$$

Man kann offensichtlich alle Bedingungen für die Konvergenz der Picard-Lindelöf-Iteration verifizieren. Bei S wissen wir das schon längst, und S_* dient der Approximation der Lösung einer linearen DGL. Setzen wir also $\mathbf{\Phi}_0(t,\mathbf{y}) := \mathbf{0}$ und $\Psi_0(t,\mathbf{y}) := E_n$, so wird durch

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_{\nu+1}(t,\mathbf{y}) &:= (S\mathbf{\Phi}_\nu)(t,\mathbf{y}) = \mathbf{y} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(\tau, \mathbf{\Phi}_\nu(\tau,\mathbf{y}))\,d\tau \\ \text{und} \quad \Psi_{\nu+1}(t,\mathbf{y}) &:= (S_*\Psi_\nu)(t,\mathbf{y}) = E_n + \int_{t_0}^{t} D_2\mathbf{F}(\tau, \mathbf{\Phi}_\nu(\tau,\mathbf{y})) \cdot \Psi_\nu(\tau,\mathbf{y})\,d\tau \end{aligned}$$

eine Folge von stetigen Funktionen definiert, die gleichmäßig gegen eine Lösung $\mathbf{\Phi}$ der Originalgleichung und eine Lösung Z der Variationsgleichung konvergiert.

Induktiv zeigt man, dass $D_2\mathbf{\Phi}_\nu(t,\mathbf{y}) = \Psi_\nu(t,\mathbf{y})$ ist, für alle ν. Der Induktionsanfang ist trivial. Ist die Behauptung für ein $\nu \ge 0$ bewiesen, so folgt:

$$\begin{aligned} D_2\mathbf{\Phi}_{\nu+1}(t,\mathbf{y}) &= E_n + \int_{t_0}^{t} D_2\mathbf{F}(\tau, \mathbf{\Phi}_\nu(\tau,\mathbf{y})) \cdot D_2\mathbf{\Phi}_\nu(\tau,\mathbf{y})\,d\tau \\ &= E_n + \int_{t_0}^{t} D_2\mathbf{F}(\tau, \mathbf{\Phi}_\nu(\tau,\mathbf{y})) \cdot \Psi_\nu(\tau,\mathbf{y})\,d\tau = \Psi_{\nu+1}(t,\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Aus dem Satz über die Vertauschbarkeit von Limes und Ableitung folgt nun, dass $\mathbf{\Phi}$ differenzierbar und $D_2\mathbf{\Phi} = Z$ ist. Weil alle $\mathbf{\Phi}_\nu$ stetig differenzierbar sind, sind die Ψ_ν und damit auch der Grenzwert Z stetig. Also ist $\mathbf{\Phi}$ stetig differenzierbar.

Es ist $\mathbf{\Phi}(t_0,\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ und $Z(t_0) = E_n$, also Z die Fundamentallösung.

Damit haben wir gezeigt:

1.3.10. Differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen

Sei $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ *eine Differentialgleichung über* $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ *nach den Variablen* $y_1, \ldots, y_n$ *stetig differenzierbar und* $(t_0, \mathbf{y}_0) \in G$.

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ *und ein* $r > 0$, *so dass* $T := (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times B_r(\mathbf{y}_0)$ *in* G *enthalten ist und der lokale Fluss* $\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{y})$ *auf* T *nach den Variablen* $y_1, \ldots, y_n$ *stetig differenzierbar ist.*

Mit anderen Worten: Die Lösungen einer stetig differenzierbaren Differentialgleichung hängen stetig differenzierbar von den Anfangsbedingungen ab.

1.3.11. Folgerung

Ist die rechte Seite $\mathbf{F}$ *einer Differentialgleichung* k*-mal stetig differenzierbar, so ist auch der lokale Fluss* k*-mal stetig differenzierbar.*

Beweis: Induktion nach k. Der Anfang ist im obigen Satz geschehen, nun setzen wir voraus, dass $k \geq 2$ und die Behauptung für $(k-1)$ schon bewiesen ist. Wir betrachten noch einmal das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= \mathbf{F}(t, \mathbf{y}) \\ \text{und} \quad \mathbf{z}' &= \mathbf{z} \cdot D_2\mathbf{F}(t, \mathbf{y})^\top. \end{aligned}$$

$\mathbf{\Phi}$ löst die erste Gleichung und $D_2\mathbf{\Phi}$ die zweite Gleichung. Nach Induktionsvoraussetzung ist $D_2\mathbf{\Phi}$ $(k-1)$-mal stetig differenzierbar. Aber dann ist $\mathbf{\Phi}$ selbst k-mal stetig differenzierbar. ∎

Im Folgenden soll noch ein alternativer Beweis vorgestellt werden.

Wir müssen zunächst den Begriff der Näherungslösung einführen.

Definition

Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine stetig differenzierbare Funktion $\boldsymbol{\varphi} : J \to \mathbb{R}^n$ heißt eine ε-***Näherungslösung*** der auf G definierten DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$, falls gilt:

1. $(t, \boldsymbol{\varphi}(t)) \in G$ für $t \in J$.
2. $\|\boldsymbol{\varphi}'(t) - \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))\| \leq \varepsilon$ für $t \in J$.

Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Kugel, so dass $J \times B$ in G enthalten ist und $\mathbf{F}$ auf $J \times B$ einer Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstante k genügt.

Für den Vergleich von exakten und Näherungslösungen mit gleichem Anfangswert hat man folgende fundamentale Abschätzung:

1.3.12. Satz

Über dem Intervall J sei $\boldsymbol{\varphi}$ eine exakte Lösung und $\boldsymbol{\psi}$ eine ε-Näherung. Außerdem sei $t_0 \in J$ und $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\psi}(t_0)$. Dann ist

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t) - \boldsymbol{\psi}(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{k} \cdot (e^{k(t-t_0)} - 1)$$

für alle $t \in J$, $t \geq t_0$.

Beweis: Weil $\|\boldsymbol{\psi}'(t) - \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\psi}(t))\| \leq \varepsilon$ ist, folgt:

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{\psi}(t) - \boldsymbol{\psi}(t_0) - \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\psi}(u))\, du\| \\ = \quad &\|\int_{t_0}^{t} \Big(\boldsymbol{\psi}'(u) - \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\psi}(u))\Big)\, du\| \\ \leq \quad &\varepsilon|t - t_0|, \end{aligned}$$

also

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t) - \boldsymbol{\psi}(t)\| \leq \|\int_{t_0}^{t} \big(\mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}(u)) - \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\psi}(u))\big)\, du\| + \varepsilon|t - t_0|.$$

Nun setzen wir

$$\omega(t) := \|\boldsymbol{\varphi}(t) - \boldsymbol{\psi}(t)\|.$$

Wir haben gezeigt: Für $t \geq t_0$ ist

$$\omega(t) \leq \varepsilon(t - t_0) + k \cdot \int_{t_0}^{t} \omega(u)\, du = k \cdot \int_{t_0}^{t} \left[\omega(u) + \frac{\varepsilon}{k}\right] du.$$

Wenden wir das Lemma von Gronwall auf $g(t) := \omega(t) + \varepsilon/k$ an (nach Addition von ε/k auf beiden Seiten der obigen Ungleichung), so ergibt sich:

$$\omega(t) + \frac{\varepsilon}{k} \leq \frac{\varepsilon}{k} \cdot e^{k(t-t_0)}, \ \text{ also } \ \omega(t) \leq \frac{\varepsilon}{k}\big(e^{k(t-t_0)} - 1\big).$$

Damit ist der Satz für $t \geq t_0$ bewiesen. ■

1.3.13. Satz

Die Fundamentalmatrix $Z : I \times U \to M_{n,n}(\mathbb{R})$ einer parameterabhängigen DGL $\mathbf{z}' = \mathbf{z} \cdot A(t, \mathbf{y})^\top$ mit stetiger rechter Seite $A : I \times U \to \mathbb{R}^n$ und $Z(t_0, \mathbf{y}) = E_n$ (für alle $\mathbf{y} \in U$) ist stetig.

Beweis: Zu jedem Parameterwert $\mathbf{y}$ gibt es die eindeutig bestimmte Fundamentallösung $t \mapsto Z_{\mathbf{y}}(t)$ mit $Z_{\mathbf{y}}(t_0) = E_n$. Dann ist $Z(t, \mathbf{y}) := Z_{\mathbf{y}}(t)$.

Ist $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^n$, so ist $\boldsymbol{\lambda}(t, \mathbf{y}) := \mathbf{z}_0 \cdot Z(t, \mathbf{y})^\top$ eine Lösung mit $\boldsymbol{\lambda}(t_0, \mathbf{y}) = \mathbf{z}_0$, unabhängig von $\mathbf{y}$. Es reicht zu zeigen, dass $\boldsymbol{\lambda}$ auf $I \times U$ stetig ist.

1. Schritt: Als Lösung der DGL hängt $\boldsymbol{\lambda}$ bei festem $\mathbf{y}$ natürlich stetig von t ab.

2. Schritt: Wir zeigen, dass $\boldsymbol{\lambda}$ auch stetig von $\mathbf{y}$ abhängt, und zwar gleichmäßig in t. Dazu sei $\mathbf{y}_0 \in U$ beliebig vorgegeben. Wir wählen ein abgeschlossenes Intervall $J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ und eine offene Umgebung $V = V(\mathbf{y}_0) \subset U$, so dass A auf $J \times V$ gleichmäßig stetig und beschränkt ist.

Sei $(t, \mathbf{y}) \in J \times V$. Zur Abschätzung von $\|\boldsymbol{\lambda}(t, \mathbf{y}) - \boldsymbol{\lambda}(t, \mathbf{y}_0)\|$ benutzen wir den Satz über Näherungslösungen. Die Abbildung $t \mapsto \boldsymbol{\lambda}(t, \mathbf{y})$ ist sogar eine exakte Lösung der DGL $\mathbf{z}' = \mathbf{z} \cdot A(t, \mathbf{y})^\top$, und wir werden zeigen, dass man zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ die Umgebungen J und V so klein machen kann, dass $t \mapsto \boldsymbol{\lambda}(t, \mathbf{y}_0)$ dort eine ε-Näherungslösung ist. Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} \|\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial t}(t, \mathbf{y}_0) - \boldsymbol{\lambda}(t, \mathbf{y}_0) \cdot A(t, \mathbf{y})^\top\| &\leq \|\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial t}(t, \mathbf{y}_0) - \boldsymbol{\lambda}(t, \mathbf{y}_0) \cdot A(t, \mathbf{y}_0)^\top\| \\ &\quad + \|\boldsymbol{\lambda}(t, \mathbf{y}_0) \cdot A(t, \mathbf{y}_0)^\top - \boldsymbol{\lambda}(t, \mathbf{y}_0) \cdot A(t, \mathbf{y})^\top\| \\ &\leq \|A(t, \mathbf{y}_0) - A(t, \mathbf{y})\|_{\text{op}} \cdot \|\boldsymbol{\lambda}(t, \mathbf{y}_0)\|. \end{aligned}$$

Weil $\|\boldsymbol{\lambda}(t, \mathbf{y}_0)\|$ auf J beschränkt bleibt und $A(t, \mathbf{y})$ auf $J \times V$ gleichmäßig stetig ist, kann man durch Verkleinern von J und V erreichen, dass $t \mapsto \boldsymbol{\lambda}(t, \mathbf{y}_0)$ eine ε-Näherung ist, bei beliebig vorgegebenem ε. Weil außerdem $\boldsymbol{\lambda}(t_0, \mathbf{y}) = \boldsymbol{\lambda}(t_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{z}_0$ ist, ergibt die Formel für Näherungslösungen:

$$\|\boldsymbol{\lambda}(t, \mathbf{y}) - \boldsymbol{\lambda}(t, \mathbf{y}_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{k}(e^{k(t-t_0)} - 1) \leq \frac{\varepsilon}{k}(e^{k\delta} - 1) = \varepsilon \cdot k_0,$$

wobei k eine geeignete Lipschitz-Konstante und dann $k_0 > 0$ eine von ε unabhängige Konstante ist. Daraus folgt die in t gleichmäßige Stetigkeit von $\boldsymbol{\lambda}$ in $\mathbf{y}_0$.

3. Schritt: Ist jetzt $(t', \mathbf{y}_0) \in J \times V$ ein fester Punkt, so ist

$$\|\boldsymbol{\lambda}(t, \mathbf{y}) - \boldsymbol{\lambda}(t', \mathbf{y}_0)\| \leq \|\boldsymbol{\lambda}(t, \mathbf{y}) - \boldsymbol{\lambda}(t, \mathbf{y}_0)\| + \|\boldsymbol{\lambda}(t, \mathbf{y}_0) - \boldsymbol{\lambda}(t', \mathbf{y}_0)\| \text{ für alle } (t, \mathbf{y}) \in J \times V.$$

Wegen (2) strebt der erste Summand (gleichmäßig in t) für $\mathbf{y} \to \mathbf{y}_0$ gegen Null, wegen (1) tut dies auch der zweite Summand für $t \to t'$. Also ist $\boldsymbol{\lambda}$ stetig in $(t', \mathbf{y}_0)$, und dieser Punkt wurde beliebig ausgewählt. ■

1.3.14. Satz

Sei $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ eine (beliebige) Differentialgleichung über $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $(t_0, \mathbf{y}_0) \in G$.

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $r > 0$, so dass $J \times B$ mit $J := (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ und $B := B_r(\mathbf{y}_0)$ in G enthalten ist und der lokale Fluss $\boldsymbol{\Phi} : J \times B \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist.

Beweis: Weil $\mathbf{F}$ stetig differenzierbar ist, genügt $\mathbf{F}$ auch lokal einer Lipschitz-Bedingung. Der lokale Fluss ist definiert durch

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{y}) = \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}(t),$$

wobei $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}$ die eindeutig bestimmte Lösung über J mit $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}(t_0) = \mathbf{y}$ ist. Wir haben die Existenz und die Stetigkeit des lokalen Flusses schon an früherer Stelle gezeigt und wollen jetzt die Differenzierbarkeit in einem Punkt $\mathbf{y}_1 \in B$ beweisen.

Die Matrix $D_2\mathbf{F}(t, \mathbf{y}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ sei wieder definiert durch

$$D_2\mathbf{F}(t, \mathbf{y}) := \Big(\frac{\partial F_\nu}{\partial y_\mu}(t, \mathbf{y}) \,|\, \nu, \mu = 1, \ldots, n\Big).$$

Ist $\mathbf{y}$ ein weiterer Punkt von B, $t \in J$, $\mathbf{x} := \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{y})$ und $\mathbf{x}_1 := \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{y}_1)$, sowie

$$\mathbf{H}_t(\tau) := \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_1 + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)),$$

so ist

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_1) &= \mathbf{H}_t(1) - \mathbf{H}_t(0) = \int_0^1 \mathbf{H}_t'(\tau)\, d\tau \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \cdot \Big(\int_0^1 D_2\mathbf{F}(t, \mathbf{x}_1 + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1))\, d\tau \Big)^\top. \end{aligned}$$

Definiert man nun $A(t,\mathbf{y})$ (bei festgehaltenem $\mathbf{y}_1$ und unter Verwendung der obigen Abkürzungen) durch

$$A(t,\mathbf{y}) := \int_0^1 D_2\mathbf{F}(t,\mathbf{x}_1+\tau(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1))\,d\tau$$

und $\boldsymbol{\psi} : J\times B \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\boldsymbol{\psi}(t,\mathbf{y}) := \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}(t) - \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}(t),$$

so folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial t}(t,\mathbf{y}) &= \boldsymbol{\varphi}'_{\mathbf{y}}(t) - \boldsymbol{\varphi}'_{\mathbf{y}_1}(t)\\
&= \mathbf{F}(t,\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}(t)) - \mathbf{F}(t,\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}(t))\\
&= (\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}(t) - \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}(t))\cdot A(t,\mathbf{y})^\top\\
&= \boldsymbol{\psi}(t,\mathbf{y})\cdot A(t,\mathbf{y})^\top .
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\psi}$ ist also Lösung der parameter-abhängigen linearen DGL

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z}\cdot A(t,\mathbf{y})^\top$$

mit $\boldsymbol{\psi}(t_0,\mathbf{y}) = \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}}(t_0) - \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{y}_1}(t_0) = \mathbf{y}-\mathbf{y}_1$. Es gibt genau eine Fundamental-Lösung $Z(t,\mathbf{y})$ dieser DGL mit $Z(t_0,\mathbf{y}) = E_n$. Die Lösung $\boldsymbol{\varrho}(t,\mathbf{y}) := (\mathbf{y}-\mathbf{y}_1)\cdot Z(t,\mathbf{y})^\top$ hat den Anfangswert $\boldsymbol{\varrho}(t_0,\mathbf{y}) = \mathbf{y}-\mathbf{y}_1 = \boldsymbol{\psi}(t_0,\mathbf{y})$. Dann muss sogar $\boldsymbol{\varrho}(t,\mathbf{y}) = \boldsymbol{\psi}(t,\mathbf{y})$ für alle t gelten. Also ist

$$\boldsymbol{\Phi}(t,\mathbf{y}) - \boldsymbol{\Phi}(t,\mathbf{y}_1) = \boldsymbol{\psi}(t,\mathbf{y}) = \boldsymbol{\varrho}(t,\mathbf{y}) = (\mathbf{y}-\mathbf{y}_1)\cdot Z(t,\mathbf{y})^\top .$$

Weil $Z : J\times B \to M_{n,n}(\mathbb{R})$ stetig ist, ist $\boldsymbol{\Phi}$ in $(t,\mathbf{y}_1)$ nach $\mathbf{y}$ differenzierbar (siehe Grauert-Kriterium in K. Fritzsche: Grundkurs Analysis 2) und $D_2\boldsymbol{\Phi}(t,\mathbf{y}_1) = Z(t,\mathbf{y}_1)$.

Es ist $A(t,y_1) = D_2\mathbf{F}(t,\boldsymbol{\Phi}(t,\mathbf{y}_1))$. Als Fundamentalmatrix der DGL $\mathbf{z}' = \mathbf{z}\cdot D_2\mathbf{F}(t,\boldsymbol{\Phi}(t,\mathbf{y}))^\top$ ist $D_2\boldsymbol{\Phi}(t,\mathbf{y}) = Z(t,\mathbf{y})$ stetig. Also ist $\boldsymbol{\Phi}$ stetig differenzierbar. ∎

1.4 Systeme mit konstanten Koeffizienten

Es sei noch einmal an die (Operator-)Norm von Matrizen erinnert. Ist $A \in M := M_{n,n}(\mathbb{R})$, so ist

$$\|A\|_{\text{op}} := \sup_{\|\mathbf{x}\| \le 1} \|\mathbf{x} \cdot A^\top\|.$$

Dann gilt insbesondere die Ungleichung $\|A \cdot B\|_{\text{op}} \le \|A\|_{\text{op}} \cdot \|B\|_{\text{op}}$.

Mit der Operator-Norm wird M zu einem Banachraum, und die Konvergenz von Folgen ist wie üblich definiert. Eine Reihe $\sum_{n=0}^\infty X_n$ von Elementen von M heißt konvergent gegen ein $X \in M$, wenn die Folge der Partialsummen $S_N := \sum_{n=0}^N X_n$ gegen X konvergiert. Die Vollständigkeit von M bedeutet:

$$\text{Ist } \sum_{n=0}^\infty \|X_n\|_{\text{op}} < \infty, \text{ so konvergiert } \sum_{n=0}^\infty X_n \text{ in } M.$$

1.4.1. Beispiel

Ist $A \in M$, so ist $A^0 := E_n$ (= Einheitsmatrix) und $A^n := \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n\text{-mal}}$. Dann konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\|A\|_{\text{op}}^n$ in $\mathbb{R}$ (gegen $e^{\|A\|_{\text{op}}}$), und daher konvergiert auch die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}A^n$ in M. **Den Grenzwert bezeichnen wir mit** e^A.

Sei nun $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $F_n : I \to M$ eine stetige Funktion, für $n \in \mathbb{N}$. Gibt es eine Folge positiver reeller Zahlen (a_n), so dass $\sum_{n=0}^\infty a_n < \infty$ und $\|F_n(t)\|_{\text{op}} \le a_n$ für alle n und alle $t \in I$ ist, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^\infty F_n(t)$ auf I gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $F(t)$.

1.4.2. Satz

Ist $A \in M$, so ist $f : \mathbb{R} \to M$ mit $f(t) := e^{At}$ eine differenzierbare Funktion und $f'(t) = A \cdot e^{At}$.

Beweis: Es sei $S_N(t) := \displaystyle\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}(At)^n$. Dann konvergiert die Folge der S_N auf jedem abgeschlossenen Intervall gleichmäßig gegen die Funktion $f(t)$. Weiter ist S_N differenzierbar und

$$S_N'(t) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n-1)!}A^n t^{n-1} = A \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!}A^n t^n.$$

Offensichtlich konvergiert die Folge der Funktionen $S_N'(t)$ (gleichmäßig auf I) gegen $A \cdot e^{At}$. Aber dann ist f differenzierbar und $f'(t) = \lim_{N\to\infty} S_N'(t) = A \cdot e^{At}$. ∎

Ist $A \in M$, so nennt man die DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A^\top$ ein ***lineares System mit konstanten Koeffizienten***. Es gilt dafür alles, was wir über lineare Systeme gelernt haben, und noch viel mehr.

1.4.3. Die Lösung eines Systems mit konstanten Koeffizienten

Sei $A \in M_{n,n}(K)$. Die eindeutig bestimmte Fundamentalmatrix $X(t)$ des linearen Systems

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A^\top \qquad \textit{mit } X(0) = E$$

ist gegeben durch $X(t) := e^{tA}$.

Beweis: Es ist $X'(t) = A \cdot X(t)$ und $X(0) = E$. Nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz ist damit schon alles bewiesen. ∎

1.4.4. Eigenschaften der Exponentialfunktion

1. *Für $s, t \in \mathbb{R}$ ist $e^{sA} \cdot e^{tA} = e^{(s+t)A}$.*
2. *Ist $A \cdot B = B \cdot A$, so ist $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.*
3. *Die Matrix e^A ist stets invertierbar. Insbesondere gilt:*

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{Spur}(A)}.$$

Beweis: Ist $A \cdot B = B \cdot A$, so ist

$$B \cdot \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(tA)^k = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B \cdot (tA)^k = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(tA)^k \cdot B,$$

also (nach Übergang zum Limes) $B \cdot e^{tA} = e^{tA} \cdot B$.

Wir setzen $F(t) := e^{t(A+B)} - e^{tA} \cdot e^{tB}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F'(t) &= (A+B) \cdot e^{t(A+B)} - A \cdot e^{tA} \cdot e^{tB} - e^{tA} \cdot B \cdot e^{tB} \\ &= (A+B) \cdot (e^{t(A+B)} - e^{tA} \cdot e^{tB}) \\ &= (A+B) \cdot F(t). \end{aligned}$$

$F(t)$ ist also die eindeutig bestimmte Fundamentalmatrix der DGL

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot (A+B)^\top \qquad \text{mit } F(0) = 0\,.$$

Daher muss $F(t) \equiv 0$ sein, d.h.

$$e^{t(A+B)} = e^{tA} \cdot e^{tB}.$$

2) Für $t = 1$ erhält man: $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

1) Die Matrizen sA und tA sind natürlich vertauschbar. Also ist

$$e^{(s+t)A} = e^{sA+tA} = e^{sA} \cdot e^{tA}.$$

3) Es ist $e^A \cdot e^{-A} = e^0 = E$, also e^A invertierbar, mit $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

$\det(e^{tA})$ ist die Wronski-Determinante der Fundamentalmatrix $X(t) := e^{tA}$. Aus der Liouville-Formel ergibt sich (mit $t_0 = 0$):

$$\det(e^{tA}) = \exp(\int_0^t \mathrm{Spur}(A)\, ds) = e^{t \cdot \mathrm{Spur}(A)}.$$

Mit $t = 1$ erhält man die gewünschte Formel. ∎

1.4.5. Folgerung

1. *Die Fundamentallösung $C(t, t_0)$ des Systems $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A^\top$ ist gegeben durch $C(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$.*
2. *Ist $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$, so bilden die Funktionen*

$$\boldsymbol{\varphi}_\nu(t) := \mathbf{y}_\nu \cdot e^{A^\top t}\, , \nu = 1, \ldots, n,$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen.

3. *Ist B invertierbar, so ist $B^{-1} \cdot e^A \cdot B = e^{B^{-1} \cdot A \cdot B}$.*

Beweis: 1) Setzt man $X(t) := e^{A(t-t_0)}$, so ist $X'(t) = A \cdot X(t)$ und $X(t_0) = E_n$. Also ist $C(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$.

2) Die Lösung $\boldsymbol{\varphi}_\nu$ mit $\boldsymbol{\varphi}_\nu(0) = \mathbf{y}_\nu$ ist gegeben durch $\boldsymbol{\varphi}_\nu(t) = \mathbf{y}_\nu \cdot C(t, 0)^\top = \mathbf{y}_\nu \cdot e^{A^\top t}$, denn es ist

$$(e^A)^\top = e^{A^\top}.$$

3) $X(t) := B^{-1} \cdot e^{At} \cdot B$ und $Y(t) := e^{(B^{-1} \cdot A \cdot B)t}$ sind beides Fundamental-Lösungen von $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot (B^{-1} \cdot A \cdot B)$ mit $X(0) = Y(0) = E_n$, denn es ist

$$X'(t) = B^{-1} \cdot A \cdot e^{At} \cdot B = (B^{-1} \cdot A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot e^{At} \cdot B) = (B^{-1} \cdot A \cdot B) \cdot X(t)$$

und

$$Y'(t) = (B^{-1} \cdot A \cdot B) \cdot e^{(B^{-1} \cdot A \cdot B)t} = (B^{-1} \cdot A \cdot B) \cdot Y(t)\,.$$

Aber dann muss $X(t) = Y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ sein, insbesondere $X(1) = Y(1)$. ∎

Wir versuchen nun, die Exponentialfunktion von Matrizen zu berechnen. Für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ bezeichne $D = \Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ die aus den λ_i gebildete Diagonalmatrix. Dann ist $D^k = \Delta(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$ und

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} D^k = \Delta\Big(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!}\lambda_1^k, \ldots, \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!}\lambda_n^k\Big).$$

Lässt man nun N gegen Unendlich gehen, so erhält man

$$e^D = \Delta(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}).$$

Ist A diagonalisierbar, so gibt es eine invertierbare Matrix P, so dass $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$ eine Diagonalmatrix ist. Dann ist $e^A = e^{P \cdot D \cdot P^{-1}} = P \cdot e^D \cdot P^{-1}$.

1.4.6. Lemma

Sei λ ein Eigenwert der Matrix A und $\mathbf{y}_0$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann ist $\boldsymbol{\varphi}(t) := e^{\lambda t}\mathbf{y}_0$ eine Lösung der DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A^\top$.

BEWEIS: Dass λ ein Eigenwert zum Eigenvektor $\mathbf{y}_0$ ist, bedeutet, dass $\mathbf{y}_0 \cdot A^\top = \lambda\mathbf{y}_0$ ist. Setzt man $\boldsymbol{\varphi}(t) := e^{\lambda t}\mathbf{y}_0$, so ist

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{y}_0 = e^{\lambda t}(\lambda\mathbf{y}_0) = e^{\lambda t}(\mathbf{y}_0 \cdot A^\top) = (e^{\lambda t}\mathbf{y}_0) \cdot A^\top = \boldsymbol{\varphi}(t) \cdot A^\top.$$

Also ist $\boldsymbol{\varphi}$ Lösung der DGL. ∎

1.4.7. Die Lösung linearer Systeme

1. *A besitze n verschiedene (reelle) Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (jeweils mit Vielfachheit 1), und $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ sei eine dazu passende Basis von Eigenvektoren von A. Dann bilden die n Funktionen $\boldsymbol{\varphi}_\nu(t) := e^{\lambda_\nu t} \cdot \mathbf{y}_\nu$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A^\top$.*

2. *Hat A nur k verschiedene (reelle) Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_k$, so gibt es ein Fundamentalsystem von Lösungen, welches für $\nu = 1, \ldots, k$ aus jeweils n_ν Funktionen der Gestalt $\mathbf{q}_{\nu\mu}(t) \cdot e^{\lambda_\nu t}$ besteht, $\mu = 1, \ldots, n_\nu$. Dabei ist $\mathbf{q}_{\nu\mu}(t)$ jeweils ein Vektor von Polynomen vom Grad $\leq n_\nu - 1$.*

BEWEIS: 1) Auf Grund des Lemmas ist klar, dass die $\boldsymbol{\varphi}_\nu$ Lösungen sind. Weil $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist, verschwindet die Wronski-Determinante $W(t) = W(\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n)(t)$ nicht in $t = 0$. Aber dann ist $W(t) \neq 0$ für alle t, und $\{\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n\}$ eine Basis des Lösungsraumes.

2) Wir können annehmen, dass $k = 1$ ist, dass es also nur einen einzigen Eigenwert λ mit Vielfachheit n gibt. Dann ist $(A - \lambda \cdot E)^n = 0$, also $A = \lambda \cdot E + N$, mit einer nilpotenten Matrix N. Der Beweis dafür wird in der Linearen Algebra bei der Herleitung der Jordanschen Normalform geführt.

Weil die Diagonalmatrix $(\lambda t)E$ mit jeder Matrix vertauscht werden kann, ist

$$e^{At} = e^{(\lambda t)E+Nt} = e^{(\lambda t)E} \cdot e^{Nt} = e^{\lambda t} \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\nu!} N^\nu t^\nu .$$

Nun sei $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ und $\mathbf{a}_{\nu\mu} := \mathbf{y}_\mu \cdot (N^\nu)^\top$ für $\nu = 0, \ldots, n-1$ und $\mu = 1, \ldots, n$. Dann ist

$$\boldsymbol{\varphi}_\mu(t) := \mathbf{y}_\mu \cdot e^{A^\top t} = e^{\lambda t} \cdot \mathbf{y}_\mu \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\nu!} (N^\nu)^\top t^\nu = e^{\lambda t} \cdot \mathbf{q}_\mu(t),$$

wobei $\mathbf{q}_\mu(t) := \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{t^\nu}{\nu!} \cdot \mathbf{a}_{\nu\mu}$ ein Vektor von Polynomen vom Grad $\le n-1$ ist. ∎

Eine Lösungsmethode besteht nun darin, die Polynome mit unbestimmten Koeffizienten anzusetzen, das Ergebnis in die DGL einzusetzen und auf den Koeffizientenvergleich zu hoffen.

1.4.8. Beispiel

Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Wir wollen die DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A^\top$ lösen.

Zunächst bestimmen wir die Eigenwerte von A als Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Nach Laplace ergibt die Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} p_A(t) \;=\; \det(A - tE) &= (-t)[(3-t)(1-t)+1] - [(-2)(1-t)-1] \\ &\quad - [-2 + (3-t)] \\ &= (-t)(t^2 - 4t + 4) - (2t-3) - (1-t) \\ &= -t^3 + 4t^2 - 5t + 2 \;=\; -(t-1)^2(t-2). \end{aligned}$$

Der Eigenwert $\lambda = 2$ hat die Vielfachheit 1. Man findet sofort einen Eigenvektor dazu, nämlich $\mathbf{u} := (0, 1, 1)$. Das ergibt die erste Lösung

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) := (0, 1, 1) \cdot e^{2t}.$$

Der Eigenwert $\lambda = 1$ hat die (algebraische) Vielfachheit 2, aber der Eigenraum hat nur die Dimension 1, eine Basis bildet der Eigenvektor $\mathbf{v} := (1, 1, 0)$. Das ergibt

$$\boldsymbol{\varphi}_2(t) := (1, 1, 0) \cdot e^t.$$

Da A nicht diagonalisierbar ist, machen wir für eine dritte Lösung den Ansatz

$$\boldsymbol{\varphi}_3(t) = (q_1 + p_1 t,\; q_2 + p_2 t,\; q_3 + p_3 t)e^t.$$

Weil mit $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2$ und $\boldsymbol{\varphi}_3$ auch die Lösungen $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2$ und $\boldsymbol{\varphi}_3 - c\boldsymbol{\varphi}_2$ eine Basis bilden, können wir annehmen, dass $q_1 = 0$ ist.

Setzt man $\boldsymbol{\varphi}_3(t)$ in die DGL ein, so erhält man die Beziehung

$$\begin{aligned}
&\big(p_1 + p_1 t, (p_2 + q_2) + p_2 t, (p_3 + q_3) + p_3 t\big) \;= \\
&= \;(p_1 t,\, q_2 + p_2 t,\, q_3 + p_3 t) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\top} \\
&= \;\big((q_2 - q_3) + (p_2 - p_3)t, (3q_2 - q_3) + (-2p_1 + 3p_2 - p_3)t, (q_2 + q_3) + (-p_1 + p_2 + p_3)t\big),
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
p_1 + p_1 t &= (q_2 - q_3) + (p_2 - p_3)t, \\
(q_2 + p_2) + p_2 t &= (3q_2 - q_3) + (-2p_1 + 3p_2 - p_3)t, \\
(q_3 + p_3) + p_3 t &= (q_2 + q_3) + (-p_1 + p_2 + p_3)t.
\end{aligned}$$

Der Vergleich der Koeffizienten bei t liefert

$$p_1 = p_2 - p_3 \quad \text{und} \quad p_1 = p_2, \text{ also } p_3 = 0.$$

Setzen wir $\alpha := p_1 = p_2$, so ergibt der Vergleich der Koeffizienten bei 1:

$$q_2 - q_3 = \alpha, \quad 2q_2 - q_3 = \alpha \quad \text{und daher} \quad q_2 = 0 \text{ und } q_3 = -\alpha.$$

So erhalten wir

$$\boldsymbol{\varphi}_3(t) = \big(\alpha t,\, \alpha t,\, -\alpha\big)e^t.$$

Natürlich können wir jetzt $\alpha = 1$ setzen, also $\boldsymbol{\varphi}_3(t) := (t, t, -1)e^t$.

Eine weitere Methode benutzt direkt die Darstellung $A = \lambda E_n + N$.

Sei λ Eigenwert der Matrix A mit Vielfachheit k, der Eigenraum habe die Dimension 1, $\mathbf{v}_1$ sei ein Eigenvektor. Dann ist $\mathbf{v}_1 \cdot (A^\top - \lambda E_n) = \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{\varphi}_1(t) := e^{\lambda t}\mathbf{v}_1$ eine Lösung. Ist $k > 1$, so muss es einen Vektor $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ mit $\mathbf{v}_2 \cdot (A^\top - \lambda E_n) \neq \mathbf{0}$ geben. Natürlich ist auch $\boldsymbol{\varphi}_2(t) := \mathbf{v}_2 \cdot e^{A^\top t}$ eine Lösung (mit $\boldsymbol{\varphi}_2(0) = \mathbf{v}_2$). Dabei ist

$$e^{A^\top t} = e^{\lambda t} \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{t^\nu}{\nu!}(A^\top - \lambda E)^\nu.$$

Ist $\mathbf{v}_2 \cdot (A^\top - \lambda E_n)^2 = \mathbf{0}$, so ist

$$\boldsymbol{\varphi}_2(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}_2 \cdot e^{(A^\top - \lambda E)t} = e^{\lambda t}\big(\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_2 \cdot (A^\top - \lambda E_n)\big).$$

Ist $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ eine Basis des Raumes $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \,:\, \mathbf{v} \cdot (A^\top - \lambda E_n)^2 = \mathbf{0}\}$ und $k > 2$, so gibt es einen Vektor $\mathbf{v}_3 \neq \mathbf{0}$ mit $\mathbf{v}_3 \cdot (A^\top - \lambda E_n)^2 \neq \mathbf{0}$.

Ist $\mathbf{v}_3 \cdot (A^\top - \lambda E_n)^3 = \mathbf{0}$, so ist

$$\boldsymbol{\varphi}_3(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}_3 \cdot e^{(A^\top - \lambda E_n)t} = e^{\lambda t}\Big(\mathbf{v}_3 + t\mathbf{v}_3 \cdot (A^\top - \lambda E_n) + \frac{t^2}{2}\mathbf{v}_3 \cdot (A^\top - \lambda E_n)^2\Big).$$

Bei 3×3-Matrizen kommt man damit immer aus.

1.4.9. Beispiel

Wir betrachten noch einmal die DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\top}$.

Wir wissen schon, dass 2 ein Eigenwert der Vielfachheit 1 und 1 ein Eigenwert der Vielfachheit 2 ist, und dass

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) := e^{-2t}(0,1,1) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\varphi}_2(t) := e^{-t}(1,1,0)$$

Lösungen sind. Außerdem ist

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } (A - E_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\mathbf{v}_3 := (0,0,1)$ ist kein Eigenvektor, aber Lösung der Gleichung $\mathbf{v} \cdot (A^{\top} - E_3)^2 = \mathbf{0}$. Das liefert die Lösung

$$\boldsymbol{\varphi}_3(t) := e^t(\mathbf{v}_3 + t\mathbf{v}_3(A^{\top} - E_3)) = e^t(-t,-t,1),$$

und das ist – bis auf's Vorzeichen – die Lösung, die wir auch mit der Koeffizientenvergleichsmethode gefunden haben.

Bisher haben wir nur den Fall reeller Eigenwerte betrachtet. Den Fall komplexer Eigenwerte kann man aber auf den reellen Fall zurückführen. Ist $\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{g}(t) + \mathrm{i}\,\mathbf{h}(t)$, so sind $\mathbf{g} = \mathrm{Re}(\boldsymbol{\varphi})$ und $\mathbf{h} = \mathrm{Im}(\boldsymbol{\varphi})$ reelle Lösungen, denn es ist

$$\mathbf{g}'(t) + \mathrm{i}\,\mathbf{h}'(t) = \boldsymbol{\varphi}'(t) = \boldsymbol{\varphi}(t) \cdot A^{\top} = \mathbf{g}(t) \cdot A^{\top} + \mathrm{i}\,\mathbf{h}(t) \cdot A^{\top}.$$

1.4.10. Beispiel

Sei $\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{z}$ komplexe Lösung einer DGL, mit $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$ und $\mathbf{z} = \mathbf{v} + \mathrm{i}\,\mathbf{w}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(t) &= e^{\alpha t} e^{\mathrm{i}\,\beta t}(\mathbf{v} + \mathrm{i}\,\mathbf{w}) \\ &= e^{\alpha t}\big[(\cos(\beta t)\mathbf{v} - \sin(\beta t)\mathbf{w}) + \mathrm{i}\,(\sin(\beta t)\mathbf{v} + \cos(\beta t)\mathbf{w})\big]. \end{aligned}$$

Real- und Imaginärteil sind reelle Lösungen.

Zum Schluss dieses Kapitels wollen wir uns noch mit zeitunabhängigen DGLn beschäftigen.

Im Folgenden sei stets $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Unter einem ***(stetigen, differenzierbaren, etc.) Vektorfeld*** auf G verstehen wir eine (stetige, differenzierbare, etc.) Abbildung $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$. Wir stellen uns dabei vor, dass auf diese Weise in jedem Punkt $\mathbf{x} \in G$ ein Vektor $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ angeheftet wird. Man beachte, dass dies eine neue Interpretation einer Abbildung $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ ist, im Gegensatz zu der bisherigen Interpretation als Koordinatentransformation.

Definition

Ist $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, so bezeichnet man die zeitunabhängige Differentialgleichung $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(\mathbf{y})$ (auf $\mathbb{R} \times G$) als ***autonomes System (von Differentialgleichungen)***.

Unter einer ***Integralkurve*** des Vektorfeldes $\mathbf{F}$ versteht man eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte, stetig differenzierbare Kurve $\boldsymbol{\varphi} : I \to G$ mit $\boldsymbol{\varphi}'(t) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}(t))$ (also eine Lösung der autonomen DGL).

Bemerkung: Ist $\boldsymbol{\varphi} : I \to G$ eine Integralkurve des Vektorfeldes $\mathbf{F}$ und $\widetilde{\mathbf{F}} : \mathbb{R} \times G \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\widetilde{\mathbf{F}}(t, \mathbf{y}) := \mathbf{F}(\mathbf{y})$, so ist

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}(t)) = \widetilde{\mathbf{F}}(t, \boldsymbol{\varphi}(t)),$$

also $\boldsymbol{\varphi}$ auch eine Lösung der zeitabhängigen DGL $\mathbf{y}' = \widetilde{\mathbf{F}}(t, \mathbf{y})$.

Ist umgekehrt $\widehat{G} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ eine zeitabhängige Differentialgleichung über $\widehat{G}$ und $\boldsymbol{\varphi}$ eine Lösung dieser Gleichung, so ist $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(t) := (t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ eine Lösung des autonomen Systems $\mathbf{z}' = \widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{z})$, mit $\widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{z}) := (1, \mathbf{F}(\mathbf{z}))$, denn es ist

$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}'(t) = (1, \boldsymbol{\varphi}'(t)) = (1, \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))) = \widehat{\mathbf{F}}(t, \boldsymbol{\varphi}(t)) = \widehat{\mathbf{F}}(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(t)).$$

Das zeigt, dass kein großer Unterschied zwischen autonomen und zeitabhängigen Systemen besteht.

1.4.11. Beispiel

Sei $\mathbf{F} : M \times M \to M \times M$ (mit $M := M_{n,n}(\mathbb{R})$) definiert durch $\mathbf{F}(U, V) := (V \cdot U, 0)$. Dann ist $\boldsymbol{\varphi}_A(t) := (e^{At}, A)$ eine Lösung der zeitunabhängigen DGL $\mathsf{Y}' = \mathbf{F}(\mathsf{Y})$ mit $\boldsymbol{\varphi}_A(0) = (E, A)$, denn es ist $\boldsymbol{\varphi}_A'(t) = (Ae^{At}, 0) = \mathbf{F}(e^{At}, A) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}_A(t))$. Weil $\mathbf{F}$ beliebig oft differenzierbar ist, erfüllt die DGL die Lipschitz-Bedingung. Also ist die Lösung eindeutig bestimmt, und sie hängt beliebig oft differenzierbar von den Anfangswerten ab, d.h., die Abbildung

$$(t, A) \mapsto \boldsymbol{\Phi}(t, A) := \boldsymbol{\varphi}_A(t)$$

ist (beliebig oft) differenzierbar.

Insbesondere ist dann auch die Abbildung $A \mapsto \boldsymbol{\Phi}(1, A) = (e^A, A)$ beliebig oft differenzierbar, und damit die Abbildung $A \mapsto e^A$. Die Exponentialabbildung für Matrizen spielt eine wichtige Rolle in manchen Gebieten der Reinen Mathematik (z.B. in der Theorie der Lie-Gruppen).

1.4.12. Satz (Translationsinvarianz)

Sei $\boldsymbol{\varphi} : I \to G$ eine Lösung des autonomen Systems $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(\mathbf{y})$. Dann ist für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ auch $\boldsymbol{\psi}(t) := \boldsymbol{\varphi}(t - t_0)$ eine Lösung.

BEWEIS: Zur Abkürzung setzen wir $s := t - t_0$. Dann ist $\boldsymbol{\psi}'(t) = \boldsymbol{\varphi}'(s) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}(s)) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\psi}(t))$. ∎

1.4.13. Konstante Lösungen autonomer Systeme

Die konstante Kurve $\boldsymbol{\varphi}(t) \equiv \mathbf{c}$ ist genau dann Lösung des autonomen Systems $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(\mathbf{y})$, wenn $\mathbf{F}(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$ ist.

BEWEIS: Ist $\boldsymbol{\varphi}(t) \equiv \mathbf{c}$ Lösung des autonomen Systems, so ist $\mathbf{F}(\mathbf{c}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}(t)) = \boldsymbol{\varphi}'(t) = \mathbf{0}$. Ist umgekehrt $\mathbf{F}(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{\varphi}(t) := \mathbf{c}$, so ist $\boldsymbol{\varphi}'(t) = \mathbf{0} = \mathbf{F}(\mathbf{c}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}(t))$. ∎

1.4.14. Satz

Sei I ein offenes Intervall und $\boldsymbol{\varphi} : I \to G$ maximale Lösung des autonomen Systems $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(\mathbf{y})$ auf G. Entweder ist $I = \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{\varphi}$ konstant, oder es ist $\boldsymbol{\varphi}'(t) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in I$, und dann ist genau eine der beiden folgenden Aussagen erfüllt:

1. *$\boldsymbol{\varphi}$ ist injektiv,*
2. *$I = \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{\varphi}$ ist periodisch.*

BEWEIS: Ist $\boldsymbol{\varphi}'(t_0) = \mathbf{0}$ für ein $t_0 \in I$ und ist $\mathbf{c} := \boldsymbol{\varphi}(t_0)$, so ist $\mathbf{F}(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$ und damit (wegen der Eindeutigkeit der Lösung) $\boldsymbol{\varphi}(t) \equiv \mathbf{c}$.

Sei nun $\boldsymbol{\varphi}'(t) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in I$. Wir nehmen an, dass $\boldsymbol{\varphi}$ nicht injektiv ist. Dann gibt es Zahlen $r < s$ in I, so dass $\boldsymbol{\varphi}(r) = \boldsymbol{\varphi}(s)$ ist. Sei $p := s - r$. Dann ist $\boldsymbol{\psi}(t) := \boldsymbol{\varphi}(t - p)$ ebenfalls eine Lösung (wegen der Translationsinvarianz autonomer Systeme). Es ist aber $\boldsymbol{\psi}(s) = \boldsymbol{\varphi}(s - (s - r)) = \boldsymbol{\varphi}(r) = \boldsymbol{\varphi}(s)$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung müssen $\boldsymbol{\varphi}$ und $\boldsymbol{\psi}$ beide auf I definiert sein und dort übereinstimmen. Das geht nur, wenn $I = \mathbb{R}$ ist. In diesem Fall ist $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}((t + p) - p) = \boldsymbol{\psi}(t + p) = \boldsymbol{\varphi}(t + p)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also $\boldsymbol{\varphi}$ periodisch. ∎

Bemerkung: Ist $\boldsymbol{\varphi}$ periodisch mit Periode p und $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig, so ist $\boldsymbol{\varphi}(\mathbb{R}) = \boldsymbol{\varphi}\big([t_0, t_0 + p]\big)$ kompakt. Das scheint auf den ersten Blick im Widerspruch zu der Tatsache zu stehen, dass eine maximale Lösung einer Differentialgleichung immer „von Rand zu Rand" laufen muss. Der Widerspruch löst sich aber leicht auf. Bei dem angesprochenen Satz geht es nicht um das Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$, sondern um das erweiterte Gebiet $\widehat{G} := \mathbb{R} \times G$ und die Lösungskurve $t \mapsto (t, \boldsymbol{\varphi}(t))$, die tatsächlich in $\widehat{G}$ von Rand zu Rand läuft. So wird etwa aus einer periodischen Kreisbewegung in $G = \mathbb{R}^2$ eine unendlich weit ausgedehnte Schraubenlinie in $\mathbb{R} \times G$.

Definition

Ist $\boldsymbol{\varphi} : I \to G$ eine Lösung des autonomen Systems $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(\mathbf{y})$, so nennt man die Bildmenge $\boldsymbol{\varphi}(I)$ eine ***Bahn*** oder ***Trajektorie*** des Systems. Die Gesamtheit aller Bahnen des Systems bezeichnet man als ***Phasenportrait*** des Systems.

Bemerkung: Wegen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes bilden die Bahnen des Phasenportraits eine disjunkte Zerlegung des „Phasenraumes“ G. Da die Bahn weniger Informationen als die Lösung selbst enthält, liefert das Studium des Phasenportraits nur eingeschränkte Erkenntnisse über das System. Gerade für qualitative Untersuchungen (z.B. der Stabilität eines Systems) reichen diese Erkenntnisse meistens aus. Es können nur drei Typen von Trajektorien auftreten:

1. Konstante Lösungen liefern einen Punkt als Trajektorie.

2. Periodische Lösungen führen zu (kompakten) geschlossenen Trajektorien, die homöomorphes Bild einer Kreislinie sind.

3. Nicht konstante und nicht periodische Lösungen ergeben als Trajektorie das stetige Bild eines offenen Intervalls (das auch $= \mathbb{R}$ sein kann).

Jede Nullstelle von $\mathbf{F}$ in G nennt man einen *Gleichgewichtspunkt* oder *stationären Punkt*, die zugehörige Lösung eine *Gleichgewichtslösung* oder *stationäre Lösung*. Eine stationäre Lösung mit Trajektorie $\mathbf{x}_0$ heißt ***stabil***, falls jede andere Lösung, die für $t = 0$ genügend nahe bei $\mathbf{x}_0$ startet, auch in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ bleibt. Die stationäre Lösung heißt ***asymptotisch stabil*** oder ein ***Attraktor***, falls jede genügend nahe bei $\mathbf{x}_0$ startende Lösung zusätzlich für $t \to \infty$ gegen $\mathbf{x}_0$ strebt.

Ein typisches Beispiel eines autonomen Systems sind die „Lotka-Volterra-Gleichungen“, die ein Räuber-Beute-Modell beschreiben.

Es sei y_1 der Bestand an Beutetieren (z.B. Hasen) und y_2 der Bestand an Räubern (z.B. Füchse). Bei Abwesenheit von Füchsen vermehren sich die Hasen proportional zum Bestand, d.h. es gilt die Gleichung $y_1' = \alpha y_2$, falls $y_2 = 0$ ist. Bei Abwesenheit von Hasen verringert sich die Zahl der Füchse proportional zum Bestand, es gilt $y_2' = -\delta y_2$, falls $y_1 = 0$ ist. Sind Hasen und Füchse vorhanden, so ist die Anzahl der Begegnungen proportional zum Produkt der Bestände. Bei diesen Begegnungen gewinnen die Füchse, während die Hasen verlieren. Das führt zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= \alpha y_1 - \beta y_1 y_2 = y_1(\alpha - \beta y_2) \\ \text{und } y_2' &= -\delta y_2 + \gamma y_1 y_2 = y_2(\gamma y_1 - \delta). \end{aligned}$$

Aus Zeitgründen können wir dieses Beispiel nicht ausführlicher behandeln. Man kann zeigen, dass jede Lösung, die im ersten Quadranten startet, eine geschlossene Trajektorie bildet.