

3.3 Integration auf Hyperflächen

Wir brauchen zunächst etwas Lineare Algebra:

Seien $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ irgendwelche Vektoren ($n \geq 3$). Durch

$$\lambda(\mathbf{w}) := \det(\mathbf{w}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1})$$

wird eine Linearform λ auf dem \mathbb{R}^n definiert. Daher gibt es genau einen Vektor \mathbf{z} (der mit $\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}$ bezeichnet wird), so dass $\lambda(\mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{z}$ ist. Also gilt:

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}) = \det(\mathbf{w}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}).$$

Insbesondere ist dann $\mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}) = 0$ für $i = 1, \dots, n-1$, und $\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1} = \mathbf{0}$, falls die Vektoren linear abhängig sind.

Wir benutzen die \mathbf{a}_i als Spalten einer $n \times (n-1)$ -Matrix:

$$A := (\mathbf{a}_1^\top, \dots, \mathbf{a}_{n-1}^\top).$$

Für $k = 1, \dots, n$ sei A_k die quadratische Matrix, die aus A entsteht, indem man die k -te Zeile streicht. Der Laplace'sche Entwicklungssatz besagt dann:

$$\det(\mathbf{w}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} w_k \cdot \det(A_k).$$

Setzt man für \mathbf{w} die Basisvektoren $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ ein, so gewinnt man die Komponenten von $\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1})_i &= \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \delta_{ik} \cdot \det(A_k) = (-1)^{i+1} \det(A_i). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\|\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}\|^2 = \sum_{i=1}^n (\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1})_i^2 = \sum_{i=1}^n (\det A_i)^2.$$

Im Falle $n = 3$ gewinnt man wieder das im vorigen Abschnitt eingeführte Vektorprodukt.

Definition

Ist $A := (\mathbf{a}_1^\top, \dots, \mathbf{a}_{n-1}^\top) \in M_{n,n-1}(\mathbb{R})$, so heißt

$$G_A = G(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) := \det(A^\top \cdot A) = \det(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \mid i, j = 1, \dots, n-1)$$

die **Gram'sche Determinante** von A bzw. von $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$.

3.1. Satz

$$G_A = \|\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}\|^2.$$

BEWEIS: Wenn die Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ linear abhängig sind, verschwindet die rechte Seite. Ist etwa $\mathbf{a}_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-2} \lambda_j \mathbf{a}_j$, so ist auch $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-2} \lambda_j \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ für $i = 1, \dots, n-2$, also $G_A = 0$.

Seien nun die Vektoren linear unabhängig und

$$\mathbf{N} := \frac{\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}}{\|\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}\|}$$

der Einheitsvektor, der auf dem von ihnen erzeugten Unterraum senkrecht steht. Dann ist

$$\begin{aligned} |\det(\mathbf{N}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1})| &= |\mathbf{N} \cdot (\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1})| \\ &= \|\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}\|. \end{aligned}$$

Ist $B := (\mathbf{N}^\top, \mathbf{a}_1^\top, \dots, \mathbf{a}_{n-1}^\top) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, so ist

$$B^\top B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^\top A \end{pmatrix}$$

und daher

$$\|\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}\|^2 = \det(B)^2 = \det(B^\top B) = \det(A^\top A) = G_A.$$

■

3.2. Satz

1. Sei $A \in M_{n,n-1}(\mathbb{R})$ und $B \in M_{n-1}(\mathbb{R})$. Dann ist $G_{A \cdot B} = \det(B)^2 \cdot G_A$.
2. Seien $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig und $\angle(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ der (positive) Winkel zwischen \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 . Dann ist

$$\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\| = \|\mathbf{a}_1\| \cdot \|\mathbf{a}_2\| \cdot \sin(\angle(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2))$$

der Flächeninhalt des von \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 aufgespannten Parallelogramms.

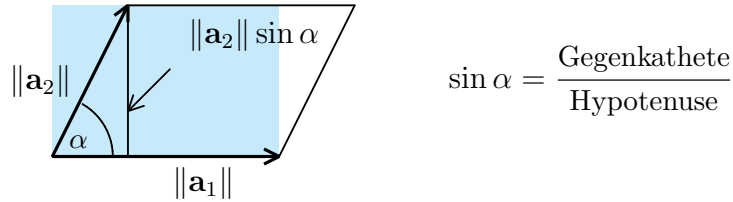
BEWEIS: 1) Es ist

$$\begin{aligned} G_{A \cdot B} &= \det((AB)^\top \cdot (AB)) = \det(B^\top \cdot (A^\top \cdot A) \cdot B) \\ &= \det(B) \cdot \det(A^\top \cdot A) \cdot \det(B) = \det(B)^2 \cdot G_A. \end{aligned}$$

2) Sei $\alpha = \angle(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|^2 &= G_A = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \|\mathbf{a}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{a}_2\|^2 - (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)^2 \\ &= \|\mathbf{a}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{a}_2\|^2 (1 - \cos^2 \alpha) = \|\mathbf{a}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{a}_2\|^2 \sin^2 \alpha,\end{aligned}$$

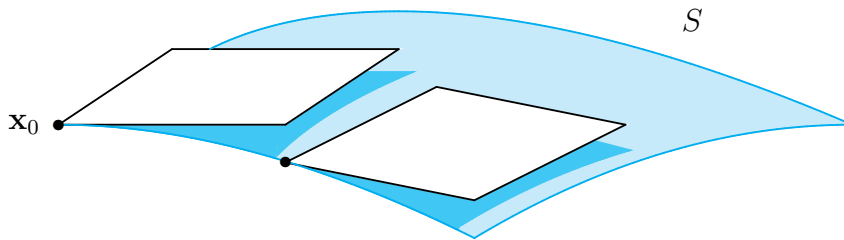
also $\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\| = \|\mathbf{a}_1\| \cdot \|\mathbf{a}_2\| \cdot \sin \alpha$ (weil $\sin \alpha > 0$ für $0 < \alpha < \pi$ ist). Aus der folgenden Skizze ersieht man, dass es sich um den Flächeninhalt des von \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 aufgespannten Parallelogramms handelt.



Wir wollen uns jetzt mit dem Problem der Flächenberechnung beschäftigen. Zunächst betrachten wir nur den Fall $n = 3$ und versuchen es mit einer Approximation! Es sei ein Quader $Q \subset \mathbb{R}^3$ und eine Parametrisierung $\varphi : Q \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ gegeben. Wir zerlegen Q in viele kleine Teilquader. $\mathbf{u}_0 \in Q$ sei ein Gitterpunkt. Dann gibt es Zahlen s und t , so dass

$$\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0 + s\mathbf{e}_1, \mathbf{u}_0 + t\mathbf{e}_2 \text{ und } \mathbf{u}_0 + s\mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2$$

die Ecken eines Teilquaders sind. Die Bilder dieser vier Ecken auf der Fläche liegen leider nicht unbedingt in einer Ebene!



Wir können Genaueres über die Lage der Bilder der Ecken herausbekommen, wenn wir die Differenzierbarkeit von φ in \mathbf{u}_0 ausnutzen: Es gibt eine (matrixwertige) Funktion Δ , so dass gilt:

1. $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}_0) + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \cdot J_\varphi(\mathbf{u}_0)^\top + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \cdot \Delta(\mathbf{u})^\top$.
2. $\lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_0} \Delta(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

Dabei ist $J_\varphi(\mathbf{u}_0) = (\varphi_u(\mathbf{u}_0)^\top, \varphi_v(\mathbf{u}_0)^\top)$. Näherungsweise ist also

$$\varphi(\mathbf{u}_0 + s\mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2) \approx \varphi(\mathbf{u}_0) + (s\mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2) \cdot J_\varphi(\mathbf{u}_0)^\top = \varphi(\mathbf{u}_0) + s\varphi_u(\mathbf{u}_0) + t\varphi_v(\mathbf{u}_0),$$

und näherungsweise werden dann die Ecken des Teilquaders auf die Punkte $\varphi(\mathbf{u}_0)$, $\varphi(\mathbf{u}_0) + s\varphi_u(\mathbf{u}_0)$, $\varphi(\mathbf{u}_0) + t\varphi_v(\mathbf{u}_0)$ und $\varphi(\mathbf{u}_0) + s\varphi_u(\mathbf{u}_0) + t\varphi_v(\mathbf{u}_0)$ abgebildet. Das sind jetzt die Ecken eines Parallelogramms, und je kleiner s und t sind, desto besser wird die Approximation.

Die Fläche des Parallelogramms ist durch $\|s\varphi_u(\mathbf{u}_0) \times t\varphi_v(\mathbf{u}_0)\| = st\|\varphi_u(\mathbf{u}_0) \times \varphi_v(\mathbf{u}_0)\|$ gegeben. Deshalb liegt es nahe, den Flächeninhalt $A(S)$ durch „Riemann'schen Summen“ der Gestalt

$$\sum_{i,j} \|\varphi_u(s_i, t_j) \times \varphi_v(s_i, t_j)\| \cdot \Delta s_i \Delta t_j$$

zu approximieren und den Flächeninhalt selbst deshalb durch

$$A(S) := \int_Q \|\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)\| \, du \, dv$$

zu definieren. Dabei stimmt $\|\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)\|$ mit der Wurzel aus der Gram'schen Determinante der Funktionalmatrix $J_\varphi(u, v)$ überein. Das sollte als Motivation für die folgende Definition reichen:

Definition

Sei $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein Parametergebiet und $\varphi : P \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$ die Parametrisierung eines glatten Hyperflächenstücks. Ist $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so bezeichnet man

$$\int_S f \, do := \int_P f(\varphi(\mathbf{u})) \sqrt{G_\varphi(\mathbf{u})} \, d\mu_{n-1}$$

als das **(Oberflächen-)Integral** der Funktion f über das Flächenstück S . Dabei sei $G_\varphi := \det(J_\varphi^\top \cdot J_\varphi)$ die Gram'sche Determinante von J_φ .

Bemerkungen:

1. Sei $\varphi(\mathbf{u}) := (\mathbf{u}, 0)$, also S ein Gebiet im \mathbb{R}^{n-1} .

Dann ist $J_\varphi = \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ und $G_\varphi(\mathbf{u}) \equiv \det E_{n-1} = 1$, also $\int_S f \, do = \int_P f(\mathbf{u}, 0) \, d\mu_{n-1}$ das gewöhnliche Integral.

2. Wir wollen zeigen, dass das Oberflächenintegral nicht von der Parametrisierung abhängt. Ist $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein weiteres Parametergebiet und $\Phi : Q \rightarrow P$ ein Diffeomorphismus, so ist auch $\psi := \varphi \circ \Phi$ eine Parametrisierung von S , und mit der Kettenregel folgt:

$$J_\psi = (J_\varphi \circ \Phi) \cdot J_\Phi.$$

Dann ist

$$\sqrt{G_\psi} = \sqrt{\det(J_\Phi)^2 \cdot G_\varphi \circ \Phi} = |\det(J_\Phi)| \cdot \sqrt{G_\varphi \circ \Phi},$$

und mit der Transformationsformel folgt:

$$\begin{aligned} & \int_Q f(\psi(\mathbf{v})) \sqrt{G_\psi(\mathbf{v})} d\mu_{n-1} \\ &= \int_Q f(\varphi \circ \Phi(\mathbf{v})) |\det(J_\Phi(\mathbf{v}))| \cdot \sqrt{G_\varphi \circ \Phi(\mathbf{v})} d\mu_{n-1} \\ &= \int_P f(\varphi(\mathbf{u})) \sqrt{G_\varphi(\mathbf{u})} d\mu_{n-1}. \end{aligned}$$

3. Das Bild einer Nullmenge $N \subset P$ unter φ spielt bei der Berechnung des Integrals keine Rolle. Das rechtfertigt die folgende Definition, und wir können bei den folgenden Beispielen die „Klebekanten“ ignorieren.

Definition

Ist S ein (durch $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametrisiertes) Hyperflächenstück und $K \subset S$ kompakt, so nennt man

$$A_{n-1}(K) := \int_S \chi_K d\sigma = \int_{\varphi^{-1}(K)} \sqrt{G_\varphi(\mathbf{u})} d\mu_{n-1}$$

den **Flächeninhalt** von K .

3.3. Beispiele

- A.** Wir beginnen mit der Fläche eines Zylinders. Dabei handelt es sich um den besonders einfachen Fall einer „abwickelbaren“ Fläche. Man kann sich vorstellen, dass ein rechteckiges Blatt Papier mit den Abmessungen $2r\pi \times 2h$ zu einem Zylinder zusammengerollt wird. Der Flächeninhalt $2r\pi \cdot 2h$ sollte sich dabei nicht ändern.

Wir benutzen die Parametrisierung $\varphi : Q = (0, 2\pi) \times (-h, h) \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(u, v) := (r \cos u, r \sin u, v).$$

Dann ist

$$J_\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} -r \sin u & 0 \\ r \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{also } J_\varphi(u, v)^\top \cdot J_\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Gramsche Determinante

$$G_\varphi := \det(J_\varphi^\top \cdot J_\varphi) = r^2,$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_Q \sqrt{G_\varphi(u, v)} \, dudv = \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h r \, dv \, du \\ &= r \cdot 2h \cdot \int_0^{2\pi} du = 2r\pi \cdot 2h, \end{aligned}$$

ganz so, wie man es erwartet. Die Klebekante spielt dabei keine Rolle.

- B.** Als nächstes wollen wir den Inhalt der Oberfläche einer Kugel vom Radius r berechnen. Dazu benutzen wir die Parametrisierung

$$\varphi(u, v) := (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dann ist

$$J_\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v & -r \cos u \sin v \\ r \cos u \cos v & -r \sin u \sin v \\ 0 & r \cos v \end{pmatrix}$$

und daher

$$G_\varphi(u, v) = \det(J_\varphi(u, v)^\top \cdot J_\varphi(u, v)) = \det \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 v & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos v \, dv \, du = r^2 \int_0^{2\pi} \left(\sin v \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) du \\ &= 2r^2 \int_0^{2\pi} du = 4r^2\pi. \end{aligned}$$

- C.** Sei $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein Parametergebiet, $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $S := \{(\mathbf{x}, z) \in P \times \mathbb{R} : z = f(\mathbf{x})\}$ ihr Graph. Dann ist $\varphi : P \rightarrow S$ mit $\varphi(\mathbf{u}) := (\mathbf{u}, f(\mathbf{u}))$ eine Parametrisierung von S .

Sei $A := J_\varphi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \nabla f(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$ und A_k die quadratische Matrix, die aus A entsteht, indem man die k -te Zeile streicht. Berechnet man die Determinante von A_k durch Entwicklung nach der letzten Zeile, so liefert im Falle $k < n$ nur das k -te Element einen Beitrag, und man erhält

$$\det A_k = \pm f_{u_k}(\mathbf{u}) \quad \text{für } k = 1, \dots, n-1 \quad \text{und} \quad \det A_n = 1.$$

Daraus folgt, dass $G_\varphi(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^n (\det A_k)^2 = 1 + \|\nabla f(\mathbf{u})\|^2$ ist, also

$$A_{n-1}(S) = \int_P \sqrt{1 + \|\nabla f(\mathbf{u})\|^2} \, d\mu_{n-1}.$$

Ist $S \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte glatte Hyperfläche (z.B. der Rand eines Gebietes), so kommt man eventuell nicht mit einer einzigen Parametrisierung aus. Dann brauchen wir ein neues Hilfsmittel, eine sogenannte „Teilung der Eins“. Dazu muss man etwas weiter ausholen.

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ irgendeine Funktion, so nennt man die Menge

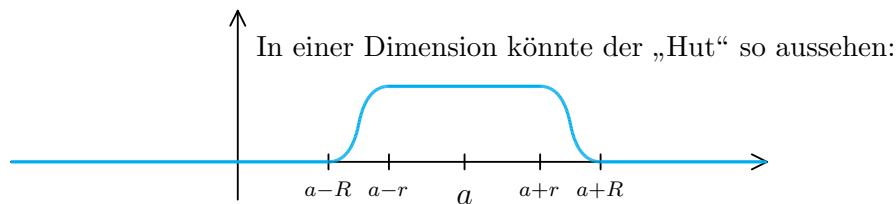
$$\text{Tr}(f) := \overline{\{\mathbf{x} \in M : f(\mathbf{x}) \neq 0\}}$$

den **Träger** von f . Wir verstehen ab sofort unter einer **differenzierbaren Funktion** eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Die Menge aller differenzierbaren Funktionen auf M wird dann mit $C^\infty(M)$ bezeichnet, die Menge aller Funktionen $f \in C^\infty(M)$ mit kompaktem Träger mit $C_c^\infty(M)$.

3.4. Satz vom „Hut“

Sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $0 < r < R$. Dann gibt es eine C^∞ -Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, so dass gilt:

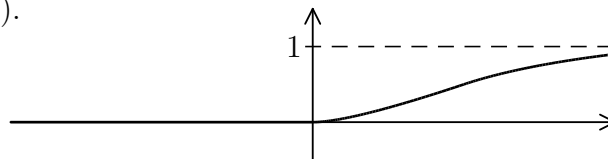
1. $f(\mathbf{x}) \equiv 1$ auf $B_r(\mathbf{a})$,
2. $f(\mathbf{x}) \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_R(\mathbf{a})$,
3. $0 \leq f(\mathbf{x}) \leq 1$ überall sonst.



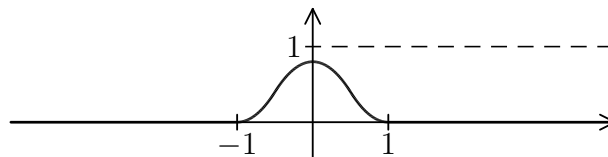
BEWEIS: Durch

$$g(t) := \begin{cases} \exp(-1/t^2) & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

wird eine C^∞ -Funktion auf \mathbb{R} definiert, die genau für $x > 0$ Werte > 0 annimmt (Beweis in Analysis 1).



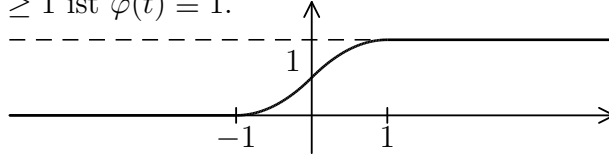
Dann ist $h(t) := g(1+t)g(1-t)$ genau auf dem Intervall $(-1, 1)$ positiv und überall sonst $= 0$.



Die Funktion

$$\varphi(t) := \left(\int_{-1}^t h(\tau) d\tau \right) / \left(\int_{-1}^1 h(\tau) d\tau \right)$$

ist wieder eine C^∞ -Funktion, die nur Werte zwischen 0 und 1 annimmt. Für $t \leq -1$ ist $\varphi(t) \equiv 0$ und für $t \geq 1$ ist $\varphi(t) \equiv 1$.



Schließlich setzen wir

$$f(\mathbf{x}) := \varphi\left(\frac{R+r-2\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}{R-r}\right).$$

Diese Funktion nimmt auch nur Werte zwischen 0 und 1 an. Für $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \geq R$ ist $f(\mathbf{x}) \equiv 0$, und für $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \leq r$ ist $f(\mathbf{x}) \equiv 1$. ■

3.5. Lemma

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $C \subset U$ kompakt. Dann gibt es offene Mengen V, W mit $C \subset V \subset\subset W \subset U$ und eine C^∞ -Funktion f auf dem \mathbb{R}^n mit $0 \leq f \leq 1$, $f(\mathbf{x}) = 1$ auf V und $\text{Tr}(f) \subset W$.

BEWEIS: Zu jedem Punkt $\mathbf{x} \in C$ gibt es ein $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x}) > 0$, so dass die Kugel $B_{2\varepsilon}(\mathbf{x})$ noch ganz in U enthalten ist. Die offenen Kugeln $B_\varepsilon(\mathbf{x})$ überdecken die kompakte Menge C , und dafür reichen natürlich schon endlich viele Kugeln $B_{\varepsilon_1}(\mathbf{x}_1), \dots, B_{\varepsilon_r}(\mathbf{x}_r)$. Sei

$$V := B_{\varepsilon_1}(\mathbf{x}_1) \cup \dots \cup B_{\varepsilon_r}(\mathbf{x}_r) \quad \text{und} \quad W := B_{2\varepsilon_1}(\mathbf{x}_1) \cup \dots \cup B_{2\varepsilon_r}(\mathbf{x}_r).$$

Offensichtlich ist $C \subset V \subset\subset W \subset U$.

Nach dem Satz vom Hut gibt es für jedes $\varrho \in \{1, \dots, r\}$ eine C^∞ -Funktion g_ϱ auf dem \mathbb{R}^n , so dass überall $0 \leq g_\varrho \leq 1$ ist, $g_\varrho(\mathbf{x}) \equiv 1$ auf $B_{\varepsilon_\varrho}(\mathbf{x}_\varrho)$ und $g_\varrho(\mathbf{x}) \equiv 0$ außerhalb $B_{2\varepsilon_\varrho}(\mathbf{x}_\varrho)$. Für $\mathbf{x} \in U$ sei

$$g(\mathbf{x}) := \prod_{\varrho=1}^r (1 - g_\varrho(\mathbf{x})).$$

Ist $\mathbf{x} \in V$, so gibt es ein ϱ mit $g_\varrho(\mathbf{x}) = 1$, und es ist $g(\mathbf{x}) = 0$. Ist $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus W$, so ist $g_\varrho(\mathbf{x}) = 0$ für alle ϱ und daher $g(\mathbf{x}) = 1$.

Nun sei $f_\varrho := \frac{g_\varrho}{g + g_1 + \dots + g_r}$.

Offensichtlich ist der Nenner überall positiv (weil g nur dort verschwindet, wo wenigstens ein $g_\varrho = 1$ ist), und daher ist f_ϱ eine C^∞ -Funktion auf dem \mathbb{R}^n mit $0 \leq f_\varrho \leq 1$. Setzt man schließlich $f := f_1 + \dots + f_r$, so ist $f = 1$ auf V und $f = 0$ außerhalb von W . Dazwischen ist $0 \leq f \leq 1$. ■

3.6. Existenz einer „Teilung der Eins“

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\{U_1, \dots, U_N\}$ eine offene Überdeckung von K . Dann gibt es \mathcal{C}^∞ -Funktionen φ_i auf dem \mathbb{R}^n , so dass gilt:

1. $0 \leq \varphi_i(\mathbf{x}) \leq 1$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $i = 1, \dots, N$.

2. $\sum_{i=1}^N \varphi_i(\mathbf{x}) = 1$ für $\mathbf{x} \in K$.

3. Für jedes i hat φ_i kompakten Träger in U_i .

Man nennt das System der φ_i eine **Teilung der Eins** auf K zur Überdeckung $\{U_1, \dots, U_N\}$.

BEWEIS: 1) Sei $\{U_1, \dots, U_N\}$ die gegebene offene Überdeckung von K . Wir konstruieren induktiv eine neue Überdeckung.

Anfang: Die Menge

$$C_1 := K \setminus (U_2 \cup U_3 \cup \dots \cup U_N)$$

ist (als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge) kompakt und in U_1 enthalten. Nach dem Lemma gibt es offene Mengen V_1, W_1 mit $C_1 \subset V_1 \subset\subset W_1 \subset U_1$. Also ist auch $\{V_1, U_2, \dots, U_N\}$ eine Überdeckung von K .

Induktionsschritt: Für $i = 1, \dots, k$ seien schon offene Mengen $V_i \subset\subset W_i \subset U_i$ konstruiert, so $\{V_1, \dots, V_k, U_{k+1}, \dots, U_N\}$ eine offene Überdeckung von K ist. Nun sei

$$C_{k+1} := K \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_k \cup U_{k+2} \cup \dots \cup U_N).$$

Dann ist C_{k+1} kompakt und in U_{k+1} enthalten. Wieder findet man offene Mengen $V_{k+1} \subset\subset W_{k+1} \subset U_{k+1}$ mit $C_{k+1} \subset V_{k+1}$ ist. Dann kann man U_{k+1} durch V_{k+1} ersetzen.

2) Nach dem Lemma gibt es \mathcal{C}^∞ -Funktionen ψ_i auf dem \mathbb{R}^n , die $= 1$ auf V_i und $= 0$ außerhalb von W_i sind und sonst überall Werte zwischen 0 und 1 annehmen.

Dann ist

$$\psi := \prod_{i=1}^N (1 - \psi_i) + \psi_1 + \dots + \psi_N$$

eine überall positive \mathcal{C}^∞ -Funktion, und wir setzen $\varphi_i := \frac{\psi_i}{\psi}$, für $i = 1, \dots, N$. Dann ist φ_i eine \mathcal{C}^∞ -Funktion mit $\text{Tr}(\varphi_i) \subset U_i$, $0 \leq \varphi_i \leq 1$ und $\varphi_1 + \dots + \varphi_N = 1$ auf K . ■

Sei nun $S \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte glatte Hyperfläche. Dann gibt es eine offene Überdeckung $\{U_1, \dots, U_N\}$ von S und parametrisierte Flächenstücke $\varphi_j : P_j \rightarrow S_j :=$

$S \cap U_j$, $j = 1, \dots, N$. Ist (e_j) eine Teilung der Eins zu der Überdeckung (U_j) und $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so setzen wir

$$\int_S f \, do := \sum_{j=1}^N \int_{S_j} e_j f \, do.$$

Der Träger von $e_j f$ liegt in S_j , deshalb ist diese Definition sinnvoll.

Ist S nur ein parametrisiertes Flächenstück, so ist $\int_{S_j} e_j f \, do = \int_S e_j f \, do$, und man kann Summation und Integral vertauschen. Weil $\sum_j e_j f = f$ ist, kommt in diesem Fall nichts Neues heraus.

Wir müssen aber im allgemeinen Fall zeigen, dass die Definition nicht von der Überdeckung, den Parametrisierungen und der Teilung der Eins abhängt.

Sei $\{V_1, \dots, V_M\}$ eine zweite Überdeckung von S , (ψ_i) ein System von Parametrisierungen $\psi_i : Q_i \rightarrow \tilde{S}_i := V_i \cap S$ und (g_i) eine Teilung der Eins zur Überdeckung (V_i) . Dann ist

$$\sum_{j=1}^N e_j g_i = g_i, \quad \sum_{i=1}^M g_i e_j = e_j$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \int_{\tilde{S}_i} g_i f \, do &= \sum_{i=1}^M \int_{\tilde{S}_i} \sum_{j=1}^N e_j g_i f \, do = \sum_{i,j} \int_{\tilde{S}_i \cap S_j} e_j g_i f \, do \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{S_j} \sum_{i=1}^M g_i e_j f \, do = \sum_{j=1}^N \int_{S_j} e_j f \, do. \end{aligned}$$

Für die praktische Berechnung von Oberflächenintegralen ist der Einsatz einer Teilung der Eins meistens nicht zu gebrauchen, aber in Beweisen ist sie oft sehr nützlich.

3.4 Der Satz von Gauß

Definition

Sei $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes parametrisiertes Hyperflächenstück mit Spur S ,

$$\mathbf{N} := \frac{\varphi_{u_1} \times \dots \times \varphi_{u_{n-1}}}{\|\varphi_{u_1} \times \dots \times \varphi_{u_{n-1}}\|}$$

das durch φ bestimmte Einheits-Normalenfeld und \mathbf{F} ein stetiges Vektorfeld auf einer offenen Umgebung U von S im \mathbb{R}^n . Dann bezeichnet man das Integral

$$\int_{\varphi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do := \int_P \mathbf{F}(\varphi(\mathbf{u})) \cdot (\varphi_{u_1}(\mathbf{u}) \times \dots \times \varphi_{u_{n-1}}(\mathbf{u})) \, d\mu_{n-1}$$

als den **Fluss** des Vektorfeldes \mathbf{F} durch die Fläche S .

Wir untersuchen die Abhängigkeit des Integrals von der Parametrisierung. Dazu betrachten wir eine Parametertransformation $\Phi : Q \rightarrow P$ und die Parametrisierung $\psi = \varphi \circ \Phi$. Nach der Kettenregel ist $J_{\psi} = (J_{\varphi} \circ \Phi) \cdot J_{\Phi}$.

Sei $A := J_{\Phi}^{\top} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\psi_{s_j} = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ji} \cdot (\varphi_{u_i} \circ \Phi) \text{ für } j = 1, \dots, n-1,$$

also

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{z}, \psi_{s_1}, \dots, \psi_{s_{n-1}}) &= \det\left(\mathbf{z}, \sum_{i_1=1}^{n-1} a_{1,i_1} \varphi_{u_{i_1}}, \dots, \sum_{i_{n-1}=1}^{n-1} a_{n-1,i_{n-1}} \varphi_{u_{i_{n-1}}}\right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} a_{1,i_1} \dots a_{n-1,i_{n-1}} \det(\mathbf{z}, \varphi_{u_{i_1}}, \dots, \varphi_{u_{i_{n-1}}}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \text{sign } \sigma \, a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n-1,\sigma(n-1)} \det(\mathbf{z}, \varphi_{u_1}, \dots, \varphi_{u_{n-1}}) \\ &= \det(A) \cdot \det(\mathbf{z}, \varphi_{u_1}, \dots, \varphi_{u_{n-1}}) \end{aligned}$$

und

$$\psi_{s_1} \times \dots \times \psi_{s_{n-1}} = (\det J_{\Phi}) \cdot \varphi_{u_1} \times \dots \times \varphi_{u_{n-1}}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\int_{\psi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do &= \int_Q \mathbf{F}(\psi(\mathbf{s})) \cdot (\psi_{s_1}(\mathbf{s}) \times \dots \times \psi_{s_{n-1}}(\mathbf{s})) \, d\mu_{n-1} \\
&= \int_Q \mathbf{F}(\varphi \circ \Phi(\mathbf{s})) \cdot ((\varphi_{u_1} \circ \Phi)(\mathbf{s}) \times \dots \times (\varphi_{u_{n-1}} \circ \Phi)(\mathbf{s})) \cdot \det(J_{\Phi}) \, d\mu_{n-1} \\
&= \text{sign}(\det J_{\Phi}) \cdot \int_P \mathbf{F}(\varphi(\mathbf{u})) \cdot (\varphi_{u_1}(\mathbf{u}) \times \dots \times \varphi_{u_{n-1}}(\mathbf{u})) \, d\mu_{n-1} \\
&= \text{sign}(\det J_{\Phi}) \cdot \int_{\varphi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do.
\end{aligned}$$

Da Φ ein Diffeomorphismus ist, muss $\det(J_{\Phi}(\mathbf{s})) \neq 0$ für alle $\mathbf{s} \in Q$ sein. Da Q zusammenhängend ist, hat die Funktionaldeterminante konstantes Vorzeichen. Wir nennen Φ **orientierungstreu**, falls $\det(J_{\Phi}) > 0$ ist, und **orientierungsumkehrend**, falls $\det(J_{\Phi}) < 0$ ist.

Durch die Festlegung eines Einheitsnormalenvektors erhält eine Hyperfläche in einem Punkt ihre Orientierung. Bei einem durch φ parametrisierten Hyperflächenstück geschieht das mittels

$$\mathbf{N} := \frac{\varphi_{u_1} \times \dots \times \varphi_{u_{n-1}}}{\|\varphi_{u_1} \times \dots \times \varphi_{u_{n-1}}\|}.$$

Beim glatten Rand eines Gebietes haben wir die äußere Normale auf andere Weise festgelegt. Im Folgenden müssen Parametrisierungen des Randes immer so gewählt werden, dass beide Orientierungen übereinstimmen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$ ein (stetig) differenzierbares Vektorfeld auf Ω . Dann versteht man unter der **Divergenz** von \mathbf{F} die Funktion

$$\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \text{Spur}(J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})).$$

4.1. Beispiele

A. Sei $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x}$ auf dem \mathbb{R}^n . Dann ist $\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv n$.

B. Sei $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Schreibt man als Abkürzung $r := \|\mathbf{x}\|$, so ist

$$r_{x_\nu} = x_\nu/r \quad \text{und} \quad (x_\nu \cdot r^{-2})_{x_\nu} = r^{-2} - 2x_\nu^2 \cdot r^{-4} \quad \text{für } \nu = 1, \dots, n,$$

also

$$\text{div } \mathbf{F} = r^{-4} \cdot \sum_{\nu=1}^n (r^2 - 2x_\nu^2) = r^{-4} \cdot (nr^2 - 2r^2) = (n-2)r^{-2}.$$

Ist speziell $n = 2$, so ist $\text{div } \mathbf{F} = 0$.

C. Sei $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_i$. Dann ist $\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$.

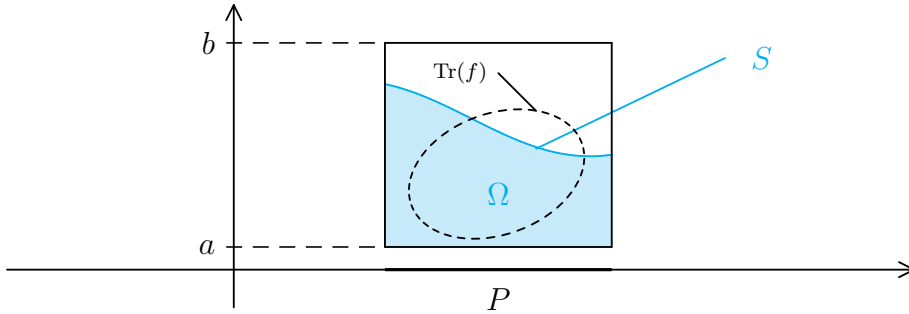
4.2. Satz

Sei $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein Parametergebiet, $g : P \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $a < g(\mathbf{u}) < b$ für alle $\mathbf{u} \in P$. Weiter sei

$$\Omega := \{(\mathbf{u}, u_n) \in P \times (a, b) : a < u_n < g(\mathbf{u})\},$$

\mathbf{N} das äußere Normalenfeld auf $S := \partial\Omega \cap (P \times (a, b))$ und $f : P \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger. Für $\mathbf{F}_i := f \cdot \mathbf{e}_i$ und $i = 1, \dots, n$ gilt dann:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F}_i \, d\mu_n = \int_S \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{N} \, d\sigma.$$



BEWEIS:

1. Schritt (Berechnung der Normalen-Komponenten):

Sei $I := (a, b)$ und $\gamma(\mathbf{u}, u_n) := u_n - g(\mathbf{u})$. Dann ist

$$\Omega = \{(\mathbf{u}, u_n) \in P \times I : \gamma(\mathbf{u}, u_n) < 0\},$$

$$\text{also } \mathbf{N}(\mathbf{u}, u_n) = \frac{\nabla \gamma(\mathbf{u}, u_n)}{\|\nabla \gamma(\mathbf{u}, u_n)\|} = \frac{(-\nabla g(\mathbf{u}), 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla g(\mathbf{u})\|^2}} \text{ für } (\mathbf{u}, u_n) \in \partial\Omega \cap (P \times I).$$

Für $i = 1, \dots, n-1$ ist $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{N} = f \cdot N_i = -(1 + \|\nabla g\|^2)^{-1/2} \cdot f \cdot \frac{\partial g}{\partial u_i}$, außerdem ist $\mathbf{F}_n \cdot \mathbf{N} = f \cdot N_n = (1 + \|\nabla g\|^2)^{-1/2} \cdot f$.

2. Schritt (Integration von f entlang der Fasern):

Für $(\mathbf{u}, t) \in P \times I$ sei $F(\mathbf{u}, t) := \int_a^t f(\mathbf{u}, u_n) \, du_n$. Dann ist

$$\frac{\partial F}{\partial u_i}(\mathbf{u}, t) = \int_a^t \frac{\partial f}{\partial u_i}(\mathbf{u}, u_n) \, du_n, \text{ für } i = 1, \dots, n-1, \text{ und } \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{u}, t) = f(\mathbf{u}, t).$$

Durch $\varphi(\mathbf{u}) := (\mathbf{u}, g(\mathbf{u}))$ (für $\mathbf{u} \in P$) wird der obere Rand von Ω parametrisiert, und mit $h(\mathbf{u}) := F \circ \varphi(\mathbf{u}) = \int_a^{g(\mathbf{u})} f(\mathbf{u}, u_n) \, du_n$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u_i} \int_a^{g(\mathbf{u})} f(\mathbf{u}, u_n) du_n &= h_{u_i}(\mathbf{u}) = \frac{\partial(F \circ \varphi)}{\partial u_i}(\mathbf{u}) \\
&= \frac{\partial F}{\partial u_i}(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) + \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) \frac{\partial g}{\partial u_i}(\mathbf{u}) \\
&= \int_a^{g(\mathbf{u})} \frac{\partial f}{\partial u_i}(\mathbf{u}, u_n) du_n + f(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) \frac{\partial g}{\partial u_i}(\mathbf{u}).
\end{aligned}$$

Diese Gleichung brauchen wir weiter unten, bei Schritt 4.

3. Schritt (Verschwinden eines Integrals):

Sei $\pi_1(\mathbf{u}, u_n) := \mathbf{u}$. Die Menge $\pi_1(\text{Tr}(f)) \subset P$ ist kompakt, und für $\mathbf{u} \in P \setminus \pi_1(\text{Tr}(f))$ und $a < u_n < b$ ist $f(\mathbf{u}, u_n) = 0$. Also hat die Funktion h kompakten Träger in P , und man kann deshalb so tun, als wäre h auf einem Quader $Q := [-R, R]^{n-1} \supset P$ definiert und $\equiv 0$ auf $Q \setminus P$. Für $i = 1, \dots, n-1$ ist deshalb

$$\begin{aligned}
\int_P \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\int_a^{g(\mathbf{u})} f(\mathbf{u}, u_n) du_n \right) d\mu_{n-1} &= \int_P \frac{\partial h}{\partial u_i}(\mathbf{u}) du_1 \dots du_{n-1} \\
&= \int_{-R}^R \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R \left(\frac{\partial h}{\partial u_i}(\mathbf{u}) du_i \right) du_1 \dots \widehat{du}_i \dots du_{n-1} \\
&= \int_{-R}^R \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R \left[h(u_1, \dots, R, \dots, u_{n-1}) - h(\dots, -R, \dots) \right] du_1 \dots \widehat{du}_i \dots du_{n-1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(Dabei bedeutet das Dach ($\widehat{}$) über du_i , dass dieser Term weggelassen werden soll).

Auch dieses Ergebnis brauchen wir bei Schritt 4.

4. Schritt (Beweis der Gleichung für $i = 1, \dots, n-1$):

Wir benutzen die Tatsache, dass $G_\varphi(\mathbf{u}) = 1 + \|\nabla f(\mathbf{u})\|^2$ ist, also

$$\frac{\sqrt{G_\varphi(\mathbf{u})}}{\sqrt{1 + \|\nabla g(\mathbf{u})\|^2}} = 1.$$

Für $i = 1, \dots, n-1$ folgt dann:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial u_i}(\mathbf{u}, u_n) d\mu_n &= \int_P \left(\int_a^{g(\mathbf{u})} \frac{\partial f}{\partial u_i}(\mathbf{u}, u_n) du_n \right) d\mu_{n-1} \\
&= \int_P \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \int_a^{g(\mathbf{u})} f(\mathbf{u}, u_n) du_n - f(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) \frac{\partial g}{\partial u_i}(\mathbf{u}) \right) d\mu_{n-1} \text{ (nach (2))} \\
&= - \int_P f(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) \frac{\partial g}{\partial u_i}(\mathbf{u}) d\mu_{n-1} \text{ (nach (3))} \\
&= - \int_P f(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) \frac{\partial g}{\partial u_i}(\mathbf{u}) \frac{\sqrt{G_\varphi(\mathbf{u})}}{\sqrt{1 + \|\nabla g(\mathbf{u})\|^2}} d\mu_{n-1} \\
&= \int_P f(\varphi(\mathbf{u})) \cdot N_i(\varphi(\mathbf{u})) \sqrt{G_\varphi(\mathbf{u})} d\mu_{n-1} = \int_S \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{N} \, do.
\end{aligned}$$

5. Schritt (Beweis der Gleichung für $i = n$):

Für jedes $\mathbf{u} \in P$ hat die Funktion $u_n \mapsto f(\mathbf{u}, u_n)$ kompakten Träger in (a, b) . Also ist

$$\int_a^{g(\mathbf{u})} \frac{\partial f}{\partial u_n}(\mathbf{u}, u_n) du_n = f(\mathbf{u}, g(\mathbf{u}))$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial u_n}(\mathbf{u}, u_n) d\mu_n &= \int_P \int_a^{g(\mathbf{u})} \frac{\partial f}{\partial u_n}(\mathbf{u}, u_n) du_n d\mu_{n-1} \\ &= \int_P f(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) d\mu_{n-1} \\ &= \int_P f(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) \frac{\sqrt{G_{\varphi}(\mathbf{u})}}{\sqrt{1 + \|\nabla g(\mathbf{u})\|^2}} d\mu_{n-1} \\ &= \int_P f(\varphi(\mathbf{u})) \cdot N_n(\varphi(\mathbf{u})) \sqrt{G_{\varphi}(\mathbf{u})} d\mu_{n-1} = \int_S \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{N} do. \end{aligned}$$

■

Mit diesem Satz haben wir die Hauptarbeit für den Gauß'schen Satz schon erledigt. Der lautet nun folgendermaßen.

4.3. Gauß'scher Integralsatz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glatt berandetes, beschränktes Gebiet, \mathbf{N} das äußere Normalenfeld auf $\partial\Omega$, $U = U(\bar{\Omega})$ eine offene Umgebung und \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U . Dann ist

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} d\mu_n = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} do.$$

BEWEIS: Ist $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{e}_1 + \dots + F_n \mathbf{e}_n$, so ist

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} d\mu_n = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \operatorname{div}(F_i \mathbf{e}_i) d\mu_n \quad \text{und} \quad \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} do = \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} F_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{N} do.$$

Es reicht also, den Satz für ein Vektorfeld der Gestalt $\mathbf{F} = f \mathbf{e}_i$ zu beweisen. Dabei können wir o.B.d.A. annehmen, dass $i = 1$ ist.

1) Hat f kompakten Träger in Ω , so verschwindet natürlich das Randintegral. Andererseits ist $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x_1}$. Weil f auf den ganzen \mathbb{R}^n stetig differenzierbar (durch Null) fortgesetzt werden kann und Ω in einem Quader $Q = [-R, R]^n$ liegt, ist

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_1} d\mu_n = \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R [f(R, x_2, \dots, x_n) - f(-R, x_2, \dots, x_n)] dx_2 \dots dx_n = 0.$$

2) Ist $\Omega = \{(\mathbf{u}, u_n) \in P \times (a, b) : a < g(\mathbf{u}) < u_n\}$ und hat f kompakten Träger in $P \times (a, b)$, so folgt der Gauß'sche Satz aus dem vorigen Satz. Das bleibt auch richtig, wenn man die Koordinaten vertauscht.

3) Nun kommen wir zum allgemeinen Fall.

Ist $\mathbf{x} \in \Omega$, so gibt es eine Umgebung von \mathbf{x} , die ganz in Ω liegt. Ist $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, so gibt es – nach geeigneter Numerierung der Koordinaten – ein Parametergebiet $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$, ein Intervall $I = (a, b)$ und eine Funktion $g : P \rightarrow I$, so dass $\Omega \cap (P \times I) = \{(\mathbf{u}, u_n) \in P \times I : a < u_n < g(\mathbf{u})\}$ ist.

Da $\bar{\Omega}$ kompakt ist, kann man endlich viele Umgebungen U_ν finden, $\nu = 1, \dots, N$, die entweder ganz in Ω liegen oder von der Gestalt $U_\nu = P_\nu \times (a_\nu, b_\nu)$ mit $U_\nu \cap \Omega = \{(\mathbf{u}, u_n) \in P_\nu \times (a_\nu, b_\nu) : a_\nu < u_n < g_\nu(\mathbf{u})\}$ sind (letzteres evtl. nach Umm Nummerierung der Koordinaten).

Sei (ϱ_ν) eine passende Teilung der Eins zu der Überdeckung (U_ν) . Dann hat $\varrho_\nu f$ jeweils kompakten Träger in U_ν . Nach (1) und (2) gilt der Satz für jedes Vektorfeld $\varrho_\nu \mathbf{F} = (\varrho_\nu f) \mathbf{e}_1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mu_n &= \sum_{\nu=1}^N \int_{\Omega} \operatorname{div}(\varrho_\nu \mathbf{F}) \, d\mu_n \\ &= \sum_{\nu=1}^N \int_{\partial\Omega} \varrho_\nu \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do. \end{aligned}$$

■

4.4. Beispiel

Wir betrachten das Vektorfeld

$$\mathbf{F}(x, y, z) := (x^3 + (1+x)y^2 + (x-1)z^2, y^3 + y(x^2 + z^2) + e^{xz}, z^3 + z(x^2 + y^2) + \sin(xy))$$

und wollen $\int_{\partial B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do$ für $B := B_1(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^3$ berechnen.

Die direkte Berechnung dürfte in diesem Fall recht unangenehm werden. Deshalb benutzen wir den Gauß'schen Integralsatz: Es ist

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = (3x^2 + y^2 + z^2) + (3y^2 + x^2 + z^2) + (3z^2 + x^2 + y^2) = 5(x^2 + y^2 + z^2).$$

Zur Berechnung des Integrals verwenden wir Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do &= \int_B \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mu_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 5r^2 \cdot r^2 \cos \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta \\ &= 5 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^4 \cos \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta = 10\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{r^5}{5}\right) \Big|_0^1 \cos \theta \, d\theta \\ &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta = 4\pi. \end{aligned}$$

Definition

Sei $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein glatt berandetes Gebiet, $U = U(\overline{G})$ eine offene Umgebung und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung, so dass $\varphi|_G$ ein parametrisiertes Hyperflächenstück ist. Dann nennt man $S := \varphi(G)$ ein **(glattes) Hyperflächenstück mit Rand** und bezeichnet $bS := \varphi(\partial G)$ als den **Rand** von S . Außerdem sei $\overline{S} := \varphi(\overline{G})$.

Ist φ sogar auf \overline{G} injektiv und außerdem $\text{rg } J_\varphi(\mathbf{u}) = 2$ für alle $\mathbf{u} \in \overline{G}$, so spricht man von einem glatten Hyperflächenstück mit **glattem Rand**.

Jetzt kann man den Gauß'schen Integralsatz allgemeiner formulieren.

4.5. Gauß'scher Integralsatz für Gebiete mit stückweise glattem Rand

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Parametergebiet. Es gebe glatte parametrisierte Hyperflächenstücke S_1, \dots, S_N mit Rand, so dass gilt:

1. $\partial\Omega = \overline{S}_1 \cup \dots \cup \overline{S}_N$.
2. $\overline{S}_i \cap \overline{S}_j = bS_i \cap bS_j$ für $i \neq j$.

Ist dann \mathbf{F} ein auf $\overline{\Omega}$ stetiges und in Ω stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\int_\Omega |\text{div } \mathbf{F}| d\mu_n < +\infty$, so gilt:

$$\int_\Omega \text{div } \mathbf{F} d\mu_n = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma.$$

Der BEWEIS kann hier nicht ausgeführt werden. Man findet ihn – unter ähnlichen Voraussetzungen wie hier – in

- K. Königsberger: *Analysis 2*, Springer-Verlag,
- F. Sauvigny: *Partielle Differentialgleichungen der Geometrie und der Physik (nach Vorlesungen von E. Heinz)*, Band 1 (Grundlagen und Integraldarstellungen), Springer Verlag.

4.6. Satz von Green

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Sind f, g zwei stetig differenzierbare Funktionen auf einer Umgebung von $\overline{\Omega}$, so gilt:

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\mu_2 = \int_{\partial\Omega} (f dx + g dy).$$

BEWEIS: Das Vektorfeld $\mathbf{F} := (g, -f)$ ist auf einer Umgebung $U = U(\bar{\Omega})$ stetig differenzierbar. Der Gauß'sche Integralsatz besagt dann:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mu_2 = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do.$$

Dabei ist $\operatorname{div} \mathbf{F} = g_x - f_y$, was die gewünschte linke Seite ergibt.

Wir können annehmen, dass $\partial\Omega$ eine glatte Parametrisierung $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ besitzt. Dabei sei α so orientiert, dass $\mathbf{N} = \frac{(\alpha'_2, -\alpha'_1)}{\|\alpha'\|}$ das äußere Normaleneinheitsvektorfeld ist. Dann liegt Ω links vom Weg, und für jede stetige Funktion h auf $\partial\Omega$ ist

$$\int_{\partial\Omega} h \, do = \int_a^b h(\alpha(t)) \sqrt{G_{\alpha}(t)} \, dt = \int_a^b h(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| \, dt.$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do &= \int_a^b \frac{f(\alpha(t))\alpha'_1(t) + g(\alpha(t))\alpha'_2(t)}{\|\alpha'(t)\|} \cdot \|\alpha'(t)\| \, dt \\ &= \int_a^b \left(f(\alpha(t))\alpha'_1(t) + g(\alpha(t))\alpha'_2(t) \right) dt \\ &= \int_{\alpha} (f \, dx + g \, dy) = \int_{\partial\Omega} (f \, dx + g \, dy). \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. ■

4.7. Satz von Stokes

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ ein glattes Flächenstück mit glattem Rand, \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Umgebung von S und $\omega_{\mathbf{F}} = F_1 \, dx_1 + F_2 \, dx_2 + F_3 \, dx_3$. Außerdem sei \mathbf{N} das durch die Parametrisierung von S festgelegte Einheitsnormalenfeld, und bS sei dazu passend orientiert. Dann gilt:

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do = \int_{bS} \omega_{\mathbf{F}}.$$

Sei $\varphi : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Parametrisierung von S und $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung von ∂G , so dass G links vom Weg liegt. Dann ist $\beta := \varphi \circ \alpha$ eine passende Parametrisierung von bS .

Wir brauchen noch eine Hilfsaussage.

4.8. Lemma

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

Dann ist $\det(\mathbf{rot} \mathbf{F}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (J_{\mathbf{F}}^{\top} - J_{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{b}^{\top}$ für alle Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

BEWEIS: Es genügt, für \mathbf{a} und \mathbf{b} Einheitsvektoren einzusetzen. Ist (i, j, k) eine zyklische Vertauschung von $(1, 2, 3)$, so ist

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{rot} \mathbf{F}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) &= (\mathbf{rot} \mathbf{F}) \cdot (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) = (\mathbf{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_k \\ &= (\mathbf{rot} \mathbf{F})_k = (F_j)_{x_i} - (F_i)_{x_j} \end{aligned}$$

und andererseits

$$\mathbf{e}_i \cdot (J_{\mathbf{F}}^{\top} - J_{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{e}_j^{\top} = (J_{\mathbf{F}})_{ji} - (J_{\mathbf{F}})_{ij} = (F_j)_{x_i} - (F_i)_{x_j}.$$

■

Für später notieren wir noch:

$$\mathbf{a} \cdot (J_{\mathbf{F}}^{\top} - J_{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{b}^{\top} = \mathbf{b} \cdot J_{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{a}^{\top} - \mathbf{a} \cdot J_{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{b}^{\top} = \mathbf{b} \cdot (J_{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{a}^{\top}) - \mathbf{a} \cdot (J_{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{b}^{\top}).$$

Nun kommen wir zum

BEWEIS des Satzes von Stokes:

Nach Kettenregel ist $\beta'(t) = \varphi_u(\alpha(t)) \cdot \alpha'_1(t) + \varphi_v(\alpha(t)) \cdot \alpha'_2(t)$, also

$$\begin{aligned} \int_{bS} \omega_{\mathbf{F}} &= \int_a^b \mathbf{F}(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(\varphi \circ \alpha(t)) \cdot (\varphi_u(\alpha(t)) \cdot \alpha'_1(t) + \varphi_v(\alpha(t)) \cdot \alpha'_2(t)) dt \\ &= \int_a^b (X(\alpha(t)), Y(\alpha(t))) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= \int_{\partial G} (X(u, v) du + Y(u, v) dv) \\ &= \int_G (Y_u(u, v) - X_v(u, v)) du dv, \quad (\text{Green'scher Satz}) \end{aligned}$$

mit den durch

$$\begin{aligned} X(u, v) &:= (\mathbf{F} \circ \varphi(u, v)) \cdot \varphi_u(u, v) \\ \text{und } Y(u, v) &:= (\mathbf{F} \circ \varphi(u, v)) \cdot \varphi_v(u, v) \end{aligned}$$

definierten Funktionen $X, Y : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$.

Nach der Produktregel ist

$$\begin{aligned}
Y_u &= (\mathbf{F} \circ \varphi)_u \cdot \varphi_v + (\mathbf{F} \circ \varphi) \cdot \varphi_{uv} \\
\text{und } X_v &= (\mathbf{F} \circ \varphi)_v \cdot \varphi_u + (\mathbf{F} \circ \varphi) \cdot \varphi_{uv},
\end{aligned}$$

also

$$\int_{bS} \omega_{\mathbf{F}} = \int_G ((\mathbf{F} \circ \varphi)_u \cdot \varphi_v - (\mathbf{F} \circ \varphi)_v \cdot \varphi_u) du dv.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
\int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} do &= \int_G ((\mathbf{rot} \mathbf{F}) \circ \varphi) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v) du dv \\
&= \int_G \det((\mathbf{rot} \mathbf{F}) \circ \varphi, \varphi_u, \varphi_v) du dv \\
&= \int_G \left(\varphi_v \cdot ((J_{\mathbf{F}} \circ \varphi) \cdot \varphi_u^\top) - \varphi_u \cdot ((J_{\mathbf{F}} \circ \varphi) \cdot \varphi_v^\top) \right) du dv \\
&= \int_G \left(\varphi_v \cdot (\mathbf{F} \circ \varphi)_u - \varphi_u \cdot (\mathbf{F} \circ \varphi)_v \right) du dv.
\end{aligned}$$

Damit ist alles bewiesen. ■

4.9. Folgerung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein glatt berandetes Gebiet und \mathbf{F} ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer Umgebung von $\partial\Omega$. Dann ist $\int_{\partial\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} do = 0$.

BEWEIS: Sei $S := \partial\Omega$ und $S_0 \subset S$ ein kleines Flächenstück mit glattem Rand. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{S_0} \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} do &= \int_{bS_0} \omega_{\mathbf{F}} \\
\text{und } \int_{S \setminus S_0} \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} do &= - \int_{bS_0} \omega_{\mathbf{F}}.
\end{aligned}$$

Addiert man die beiden Gleichungen, so erhält man das gewünschte Ergebnis. ■