3 Der Divergenzsatz

3.1 Integration im $\mathbb{R}^n$

Ein ***Quader*** im $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge vom Typ

$$Q := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n].$$

Die Zahl $\mathrm{vol}_n(Q) := \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ ist das n-dimensionale ***Volumen*** von Q.

Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist eine abzählbare Vereinigung von Quadern. Bildet man also beliebige (abzählbare) Vereinigungen, Durchschnitte und Differenzen, ausgehend vom System aller Quader, so erhält man ein sehr großes Mengensystem, das System der ***Borelmengen***.

Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt ***(Lebesgue-)Nullmenge***, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge (Q_i) von Quadern gibt, so dass gilt:

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(Q_i) < \varepsilon.$$

Beispiele von Nullmengen sind Hyperebenen, Graphen stetiger Funktionen, Teilmengen von Nullmengen und abzählbare Vereinigungen von Nullmengen.

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt ***(Lebesgue-)messbar***, falls es eine Borelmenge B und eine Nullmenge N gibt, so dass $M = B \cup N$ ist. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt ***messbar***, falls f fast überall endlich und jede Menge $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) > c\}$ messbar ist.

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt ***(Lebesgue-)integrierbar***, falls f messbar und $\int |f|\, d\mu_n < \infty$ ist. Auf die Definition des Integrals soll hier nicht näher eingegangen werden.

Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, so heißt eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ ***Riemann-integrierbar***, falls es eine Nullmenge N gibt, so dass f in allen Punkten $\mathbf{x} \in Q \setminus N$ stetig ist. Jede Riemann-integrierbare Funktion ist auch Lebesgue-integrierbar.

Es gilt der

1.1. Satz von Fubini

Ist $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ integrierbar, so ist für fast alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ die Funktion $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ integrierbar und

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mu_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mu_n(\mathbf{x})\, d\mu_m(\mathbf{y}).$$

Der folgende Satz spielt eine Rolle, wenn man über Flächen integriert:

1.2. Bilder von Nullmengen

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $A \subset B$ eine (Lebesgue-)Nullmenge und $\mathbf{f} : B \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann ist auch $\mathbf{f}(A)$ eine Nullmenge.

Beweis: Es reicht, für jeden abgeschlossenen Quader $Q \subset B$ zu zeigen, dass $\mathbf{f}(A \cap Q)$ eine Nullmenge ist (denn man kann B durch abzählbar viele solcher Quader überdecken). Da $\mathbf{f}$ stetig differenzierbar ist, gibt es zu jedem kompakten Quader $Q \subset B$ eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\|D\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_{\text{op}} := \sup\{\|D\mathbf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{v})\| \,:\, \|\mathbf{v}\| \le 1\} \le C$$

für alle $\mathbf{x} \in Q$ ist. Wir halten einen Quader Q und die zugehörige Konstante C fest. Da Q konvex ist, gehört zu je zwei Punkten $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$ auch die ganze Verbindungsstrecke zu Q (und damit zu B). Aus dem Mittelwertsatz folgt, dass es einen Punkt $\mathbf{z}$ auf der Verbindungsstrecke mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}(\mathbf{z})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

gibt. Dann ist aber

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \le C \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt eine Folge (W_k) von Würfeln mit

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(W_k) < \varepsilon.$$

Sei $\mathbf{a}_k$ der Mittelpunkt von $W_k = \{\mathbf{x} \,:\, |\mathbf{x} - \mathbf{a}_k| < d_k/2\}$, also d_k seine Kantenlänge. Dann ist $\mu_n(W_k) = d_k^n$ und $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^n < \varepsilon$.

Sei $|\ldots|$ die Maximumsnorm und $\|\ldots\|$ die euklidische Norm. Für $\mathbf{x} \in W_k$ ist

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}_k)| &\le \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}_k)\| \le C \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_k\| \\ &\le C \cdot \sqrt{n} \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{a}_k| < C \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{d_k}{2}. \end{aligned}$$

Also liegt $\mathbf{f}(W_k)$ in einem Würfel W_k' mit Mittelpunkt $\mathbf{f}(\mathbf{a}_k)$ und Seitenlänge $\le C \cdot \sqrt{n} \cdot d_k$. Das bedeutet, dass $\mu_n(W_k') \le (C \cdot \sqrt{n} \cdot d_k)^n$ ist.

Dann liegt $\mathbf{f}(A)$ in $\bigcup_k W_k'$ und es ist $\mu_n(\mathbf{f}(A)) \le (C\sqrt{n})^n \cdot \varepsilon$. Weil ε beliebig klein gewählt werden kann, muss $\mathbf{f}(A)$ eine Nullmenge sein. ∎

Aus der Integralrechnung in einer Veränderlichen kennt man die **Substitutionsregel**: Ist $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\varphi([\alpha, \beta]) \subset I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, so ist

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

Dabei muss man beachten, dass auf der linken Seite der Substitutionsformel die natürliche Integrationsrichtung je nach Vorzeichen von φ' beibehalten oder umgekehrt wird, dass aber $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ ist. Ist $J = [\alpha, \beta]$, so muss man also schreiben:

$$\int_{\varphi(J)} f\,d\mu_1 = \int_J (f \circ \varphi)|\varphi'|\,d\mu_1.$$

Die Verallgemeinerung dieser Formel auf Funktionen von mehreren Veränderlichen ergibt die

1.3. Die Transformationsformel

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\boldsymbol{\varphi} : U \to V$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$.

1. *Eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn*

   $$(f \circ \boldsymbol{\varphi}) \cdot |\det D\boldsymbol{\varphi}| : U \to \mathbb{R}$$

   integrierbar ist.

2. *Ist $f : V \to \mathbb{R}$ integrierbar, so ist*

   $$\int_V f(\mathbf{y})\,d\mu_n = \int_U f \circ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})|\det D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})|\,d\mu_n\,.$$

1.4. Beispiele

A. Ebene Polarkoordinaten

Die ebenen Polarkoordinaten sind durch die Abbildung $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$(x, y) = \mathbf{f}(r, \varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

gegeben. Bekanntlich ist $\det J_{\mathbf{f}}(r, \varphi) = r$.

Ist nun etwa $K := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \le r \le b \text{ und } \alpha \le \varphi \le \beta\}$, mit $0 < a < b$ und $0 < \alpha < \beta < 2\pi$, sowie g stetig auf $\mathbf{f}(K)$, so ist

$$\int_{\mathbf{f}(K)} g(x, y)\,d\mu_2(x, y) = \int_\alpha^\beta \int_a^b g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr\,d\varphi.$$

Wir können natürlich auch über Mengen integrieren, die die positive x-Achse treffen, denn diese Achse ist eine Nullmenge.

B. Räumliche Polarkoordinaten

Für $r > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$ und $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ sind die räumlichen Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten, sphärische Koordinaten) gegeben durch

$$\mathbf{F}_{\text{sph}}(r, \varphi, \theta) := (r \cos\varphi \cos\theta, r \sin\varphi \cos\theta, r \sin\theta).$$

Hier ist φ der Winkel gegenüber der positiven x-Achse (in der x-y-Ebene gemessen) und θ der Winkel gegen die x-y-Ebene.[1] Als Funktionaldeterminante erhalten wir $\det J_{\mathbf{F}_{\text{sph}}}(r, \varphi, \theta) = r^2 \cos\theta$. Offensichtlich ist $r^2 \cos\theta > 0$ im ganzen Definitionsbereich von $\mathbf{F}_{\text{sph}}$.

Ist $K = \{(r, \varphi, \theta) \,:\, a \le r \le b,\ \alpha \le \varphi \le \beta \text{ und } \gamma \le \theta \le \delta\}$, so ist

$$\int_{\mathbf{F}_{\text{sph}}(K)} g(x, y, z)\, d\mu_3(x, y, z) = \int_\gamma^\delta \int_\alpha^\beta \int_a^b g(r, \varphi, \theta) r^2 \cos\theta \, dr \, d\varphi \, d\theta.$$

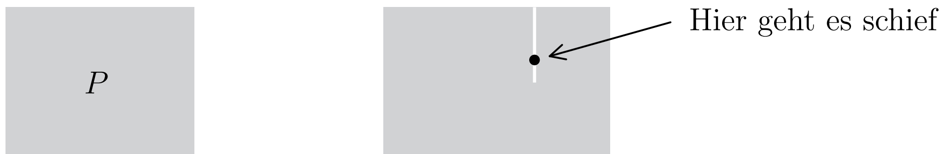
Als Volumen der 3-dimensionalen Einheitskugel erhalten wir z.B.:

$$\begin{aligned} \mu_3(B_1(\mathbf{0})) &= \int_{B_1(\mathbf{0})} 1 \, d\mu_3 \;=\; \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \cos\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr \\ &= 2\pi \cdot \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos\theta \, d\theta \, dr \;=\; 4\pi \cdot \int_0^1 r^2 \, dr \;=\; \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

[1] Es sei darauf hingewiesen, dass die Kugelkoordinaten in der Literatur nicht einheitlich definiert werden!

3.2 Glatte Hyperflächen

Unter einem ***Parametergebiet*** verstehen wir ein beschränktes Gebiet $P \subset \mathbb{R}^k$, bei dem jeder Randpunkt von P auch ein Randpunkt von $\overline{P}$ ist. Durch die Randbedingung werden gewisse pathologische Fälle ausgeschlossen:



Parametergebiet **kein** Parametergebiet

Definition

Sei $n \geq 2$ und $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein Parametergebiet. Unter einem ***(glatten) parametrisierten Hyperflächenstück*** über P verstehen wir eine stetig differenzierbare Abbildung $\boldsymbol{\varphi} : P \to \mathbb{R}^n$, für die gilt:

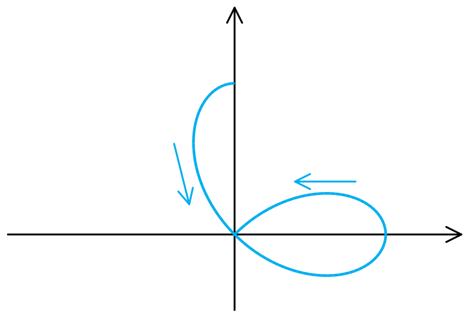
1. $\boldsymbol{\varphi}$ ist injektiv.
2. $\operatorname{rg} J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}) = n - 1$ für alle $\mathbf{u} \in P$.
3. Ist $\mathbf{u}_0 \in P$ und $\mathbf{u}_\nu \in P$ eine Folge mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_\nu) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0)$, so ist auch $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mathbf{u}_\nu = \mathbf{u}_0$.

Bemerkungen:

1. Die Menge $S := \boldsymbol{\varphi}(P)$ heißt die ***Spur*** des Flächenstücks. Manchmal begeht man aus Bequemlichkeit etwas Notationsmissbrauch und nennt S ein Flächenstück. Damit verzichtet man natürlich auf Information.

2. Ist $n = 2$, so ist $P = I$ ein offenes Intervall und es liegt ein stetig differenzierbarer, ebener Weg $\boldsymbol{\varphi} : I \to \mathbb{R}^2$ vor. Es ist $\boldsymbol{\varphi}$ injektiv, $\boldsymbol{\varphi}(t) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in I$. Man spricht dann von einem ***glatten Weg***. Durch die dritte Bedingung werden Situationen wie die folgende ausgeschlossen:

   Sei $\boldsymbol{\varphi} : (-\pi/2, +\pi/4) \to \mathbb{R}^2$ definiert durch
   $$\boldsymbol{\varphi}(t) := (\cos(2t)\cos t, \cos(2t)\sin t).$$
   Im Parameterintervall ist $\boldsymbol{\varphi}$ injektiv, der Nullpunkt ist das Bild von $t = -\pi/4$. Außerdem kann man leicht nachrechnen, dass $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ nirgends verschwindet. Setzen wir aber $t_0 := -\pi/4$ und $t_\nu := \pi/4 - 1/\nu$, so konvergiert $\boldsymbol{\varphi}(t_\nu)$ gegen $(0,0) = \boldsymbol{\varphi}(t_0)$, nicht aber (t_ν) gegen t_0.



Definition

Eine Menge $H \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine ***glatte Hyperfläche***, falls es zu jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in H$ eine Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$, ein Parametergebiet $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$, ein glattes parametrisiertes Hyperflächenstück $\boldsymbol{\varphi} : P \to \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{\varphi}(P) = H \cap U$ und einen Parameter $\mathbf{u}_0 \in P$ mit $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$ gibt.

Ist H eine glatte Hyperfläche und $\boldsymbol{\varphi} : P \to H \cap U$ eine lokale Parametrisierung, so ist $S := \boldsymbol{\varphi}(P) = H \cap U$ eine offene Teilmenge von H in der vom $\mathbb{R}^n$ auf H induzierten Relativtopologie, und $\boldsymbol{\varphi}^{-1} : S \to P$ stetig, also $\boldsymbol{\varphi}$ ein Homöomorphismus: Ist nämlich $(\mathbf{x}_\nu)$ eine Folge in S, die gegen einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in S$ konvergiert, so gibt es Parameter $\mathbf{u}_\nu, \mathbf{u}_0 \in P$ mit $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_\nu) = \mathbf{x}_\nu$ und $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$. Die Bedingung (3) für parametrisierte Flächenstücke hat zur Folge, dass $\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{u}_\nu$ gegen $\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}_0$ konvergiert.

Die Stetigkeit von $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$ bedeutet, dass $\boldsymbol{\varphi}$ offene Teilmengen von P auf offene Teilmengen von S abbildet.

2.1. Satz (Niveaumengen sind glatte Hyperflächen)

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : B \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $M = \{\mathbf{x} \in B : f(\mathbf{x}) = 0\}$. Ist $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ in jedem Punkt $\mathbf{x} \in M$, so ist M eine glatte Hyperfläche.

BEWEIS: Sei $\mathbf{x}_0 = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in M$. O.B.d.A. sei $f_{x_n}(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Dann gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen Umgebungen $U = U(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und $V = V(x_n^{(0)}) \subset \mathbb{R}$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to V$, so dass $(U \times V) \cap M = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in U \times V : x_n = g(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$ ist. Dann wird durch

$$\boldsymbol{\varphi}(u_1, \ldots, u_{n-1}) := (u_1, \ldots, u_{n-1}, g(u_1, \ldots, u_{n-1}))$$

eine lokale Parametrisierung $\boldsymbol{\varphi} : U \to (U \times V) \cap M$ definiert. Es ist offensichtlich, dass $\boldsymbol{\varphi}$ die Eigenschaften eines parametrisierten Flächenstücks erfüllt. ∎

Es gilt in gewisser Weise auch die Umkehrung:

2.2. Jede glatte Hyperfläche ist lokal eine Niveaufläche

Sei $H \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Hyperfläche. Dann gibt es zu jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in H$ eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

1. $U \cap H = f^{-1}(0)$.
2. $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ *für* $\mathbf{x} \in U \cap H$.

Beweis: Sei $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung und $\boldsymbol{\varphi} : P \to S = U \cap H$ eine Parametrisierung mit $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$. Weil $\operatorname{rg} J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_0) = n-1$ ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass die ersten $n-1$ Zeilen der $n \times (n-1)$-Matrix $J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_0)$ linear unabhängig sind.

Wir benutzen nun die Projektionen $\boldsymbol{\pi}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ und $\boldsymbol{\pi}_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\boldsymbol{\pi}_1(x_1, \ldots, x_n) := (x_1, \ldots, x_{n-1}) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\pi}_2(x_1, \ldots, x_n) := x_n.$$

Dann ist offensichtlich $\det J_{\boldsymbol{\pi}_1 \circ \boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_0) \neq 0$. Nach dem Satz von der Umkehrabbildung gibt es also offene Umgebungen $U_1(\mathbf{u}_0) \subset P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und $U_2(\boldsymbol{\pi}_1 \circ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0)) \subset \mathbb{R}^{n-1}$, so dass $\boldsymbol{\pi}_1 \circ \boldsymbol{\varphi} : U_1 \to U_2$ ein Diffeomorphismus ist.

Sei $\boldsymbol{\psi} := (\boldsymbol{\pi}_1 \circ \boldsymbol{\varphi})^{-1} : U_2 \to U_1$ die Umkehrabbildung. Wir können nun $g : U_2 \to \mathbb{R}$ definieren durch $g(\mathbf{y}') := \boldsymbol{\pi}_2 \circ \boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}')$, für $\mathbf{y}' = (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in U_2$.

Weil $\boldsymbol{\varphi} : P \to S$ ein Homöomorphismus ist, gibt es eine offene Menge $B \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\boldsymbol{\varphi}(U_1) = B \cap S$ ist. Für $\mathbf{y} = (\mathbf{y}', y_n) \in B$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} \in S \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{y} \in \boldsymbol{\varphi}(U_1) \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists\, \mathbf{u} \in U_1 \text{ mit } \mathbf{y}' = \boldsymbol{\pi}_1 \circ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) \text{ und } y_n = \boldsymbol{\pi}_2 \circ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists\, \mathbf{u} \in U_1 \text{ mit } \mathbf{y}' = \boldsymbol{\psi}^{-1}(\mathbf{u}) \text{ und } y_n = g(\boldsymbol{\psi}^{-1}(\mathbf{u})) \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathbf{y}' \in U_2 \text{ und } y_n = g(\mathbf{y}').
\end{aligned}$$

$\widetilde{U} := (U_2 \times \mathbb{R}) \cap B$ ist eine offene Umgebung von $\mathbf{x}_0 = (\boldsymbol{\pi}_1 \circ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0), \boldsymbol{\pi}_2(\mathbf{x}_0))$, und $f : \widetilde{U} \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{y}', y_n) := y_n - g(\mathbf{y}')$ ist eine stetig differenzierbare Funktion mit $\nabla f(\mathbf{y}', y_n) = \big(-\nabla g(\mathbf{y}'), 1\big) \neq (\mathbf{0}, 0)$. Außerdem ist

$$f^{-1}(0) = \{(\mathbf{y}', y_n) \in \widetilde{U} \,:\, y_n = g(\mathbf{y}')\} = \widetilde{U} \cap S.$$

∎

2.3. Beispiele

A. Sei $h > 0$, $r > 0$, $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, |z| < h\}$, $f : B \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) := x^2 + y^2 - r^2$ und $S := f^{-1}(0)$. Weil $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 0) \neq$

$(0,0,0)$ für $(x,y,z) \in S$ ist, ist S eine glatte (Hyper-)Fläche, ein ***Zylindermantel*** der Höhe $2h$ mit Radius r.

Ist $c \in \mathbb{R}$, so ist $P_c := (c, c+2\pi) \times (-h, h)$ ein Parametergebiet und $\boldsymbol{\varphi} : P_c \to \mathbb{R}^3$ mit

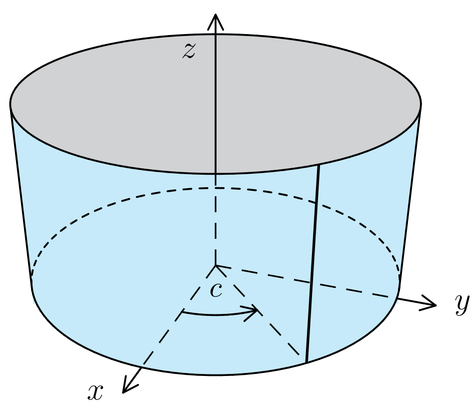
$$\boldsymbol{\varphi}(u,v) := (r\cos u, r\sin u, v)$$

eine glatte Parametrisierung, denn die Spalten von

$$J_{\boldsymbol{\varphi}}(u,v) = \begin{pmatrix} -r\sin u & 0 \\ r\cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

sind offensichtlich immer linear unabhängig. Dass $\boldsymbol{\varphi}$ die Bedingungen (1) und (3) der Definition eines parametrisierten Flächenstücks erfüllt, kann man sich leicht überlegen. Ist etwa $\boldsymbol{\varphi}(u_1,v_1) = \boldsymbol{\varphi}(u_2,v_2)$, so muss $v_1 = v_2$ und $(\cos u_1, \sin u_1) = (\cos u_2, \sin u_2)$ sein. Letzteres ist auf $(0,2\pi)$ nur möglich, wenn $u_1 = u_2$ ist.

Leider deckt eine einzelne derartige Parametrisierung nicht die ganze Fläche S ab, es fehlt immer ein Streckenstück, das man als „Klebekante“ interpretieren kann.



Im Falle $c = 0$ wird der Zylinder entlang der Linie $\{(r,0,z) : |z| \le h\}$ zusammengeklebt. Zwar kann man $\boldsymbol{\varphi}$ auf $\overline{P}$ stetig differenzierbar fortsetzen, aber dort ist $\boldsymbol{\varphi}$ nicht mehr injektiv. Benutzt man eine zweite Parametrisierung mit dem Definitionsbereich P_c, $c \ne 0$, so wird S durch $\boldsymbol{\varphi}(P_0)$ und $\boldsymbol{\varphi}(P_c)$ überdeckt.

B. Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x_1,\ldots,x_n) := x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1$. Dann ist $S^{n-1} = f^{-1}(0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ die $(n-1)$-dimensionale Sphäre. Sie ist eine glatte Hyperfläche, weil $\nabla f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} \ne \mathbf{0}$ in jedem Punkt $\mathbf{x} \in S^{n-1}$ gilt. Im Falle $n = 2$ erhält man den Einheitskreis.

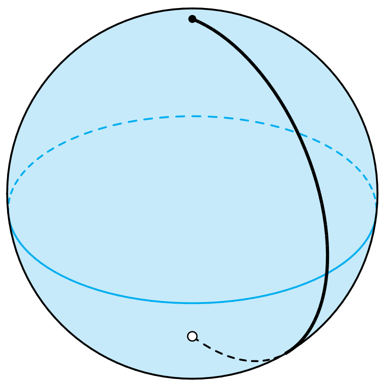
Im Falle $n = 3$ sei $P := (0,2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ und

$$\boldsymbol{\varphi}(u,v) := (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v).$$

Dann ist

$$\boldsymbol{\varphi}(u,v) = \cos v\,\mathbf{e}_u + \sin v\,\mathbf{e}_3, \qquad \text{mit } \mathbf{e}_u := (\cos u, \sin u, 0) \text{ und } \mathbf{e}_3 = (0,0,1).$$

Dabei ist $\|\mathbf{e}_u\| = \|\mathbf{e}_3\| = 1$ und $\mathbf{e}_u \bullet \mathbf{e}_3 = 0$.



Dies ist die von den räumlichen Polarkoordinaten herrührende Parametrisierung.

Die linke und die rechte Seite von P werden zu einem Längenkreis zusammengeklebt, die untere und die obere Seite von P ergeben den Südpol und den Nordpol.

Ist $\boldsymbol{\varphi}(u_1,v_1) = \boldsymbol{\varphi}(u_2,v_2)$, so bilde man zunächst auf beiden Seiten das Skalarprodukt mit $\mathbf{e}_3$. Dann erhält man $\sin v_1 = \sin v_2$. Subtrahiert man $\sin v_1\,\mathbf{e}_3 = \sin v_2\,\mathbf{e}_3$ auf beiden Seiten der Ausgangsgleichung, so erhält man die Gleichung $\cos v_1\,\mathbf{e}_{u_1} = \cos v_2\,\mathbf{e}_{u_2}$. Übergang zur Norm liefert $\cos v_1 = \cos v_2$ (weil der Cosinus auf $(-\pi/2, +\pi/2)$ positiv ist). Wie beim Zylinder folgt nun $v_1 = v_2$. Also muss auch $\mathbf{e}_{u_1} = \mathbf{e}_{u_2}$ und deshalb $u_1 = u_2$ sein. Das Folgenkriterium verifiziert man ähnlich.

Definition

Sei $H \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Hyperfläche, $\mathbf{x}_0 \in H$. Ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ heißt ***Tangentialvektor*** an H im Punkte $\mathbf{x}_0$, falls es ein $\varepsilon > 0$ und einen stetig differenzierbaren Weg $\boldsymbol{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ gibt, so dass gilt:

1. Die Spur von $\boldsymbol{\alpha}$ liegt ganz in H.
2. Es ist $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{x}_0$ und $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{v}$.

2.4. Charakterisierung von Tangentialvektoren

Sei $H \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Hyperfläche, $\mathbf{x}_0 \in H$. Es sei $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung, so dass gilt:

a) Es gibt eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $f^{-1}(\mathbf{0}) = U \cap H$ und $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{x} \in U \cap H$.

b) Es gibt ein Parametergebiet $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und eine stetig differenzierbare Parametrisierung $\boldsymbol{\varphi} : P \to \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$ und $\boldsymbol{\varphi}(P) = U \cap H$.

Dann sind die folgenden Aussagen über einen Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ äquivalent:

1. *$\mathbf{v}$ ist ein Tangentialvektor an H im Punkte $\mathbf{x}_0$.*
2. *$\mathbf{v} \bullet \nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$.*
3. *Es gibt einen Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n-1}$ mit $\mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_0)^\top$.*

BEWEIS: (1) $\Longrightarrow$ (2): Sei $\mathbf{v}$ ein Tangentialvektor an H in $\mathbf{x}_0$, also $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{x}_0$ und $\boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{v}$. Dann ist $f \circ \boldsymbol{\alpha}(t) \equiv 0$, also $0 = \nabla f(\mathbf{x}_0) \bullet \boldsymbol{\alpha}'(0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \bullet \mathbf{v}$.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Weil $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ ist, hat der Raum der zu $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ orthogonalen Vektoren die Dimension $n-1$. Und der Raum $\operatorname{Im} D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0)$ besitzt ebenfalls die Dimension $n-1$ $(= \operatorname{rg} J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_0))$.

Weil $f \circ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{0}$ ist, ist $\mathbf{0} = \nabla(f \circ \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{u}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_0)$ (Kettenregel). Ist also ein Element $\mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_0)^\top$ von $\operatorname{Im} D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0)$ gegeben, so ist

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) \bullet \mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}^\top = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{w}^\top = 0.$$

Daher sind die beiden betrachteten Vektorräume gleich und aus (2) folgt (3).

(3) $\Longrightarrow$ (1): Es gebe einen Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n-1}$ mit $\mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_0)^\top = D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0)(\mathbf{v})$. Dann definiere man $\boldsymbol{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ durch $\boldsymbol{\alpha}(t) := \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0 + t\mathbf{w})$. Offensichtlich liegt die Spur von $\boldsymbol{\alpha}$ in H, es ist $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{x}_0$ und $\boldsymbol{\alpha}'(0) = D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0)(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$. Also ist $\mathbf{v}$ ein Tangentialvektor an H in $\mathbf{x}_0$. ∎

Aus dem Satz ergibt sich, dass die Menge der Tangentialvektoren an eine glatte Hyperfläche $H \subset \mathbb{R}^n$ in einem Punkt $\mathbf{x}_0 \in H$ einen $(n-1)$-dimensionalen Vektorraum bildet.

Definition

Sei H eine glatte Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$. Den Vektorraum $T_{\mathbf{x}}(H)$ der Tangentialvektoren an H in $\mathbf{x}$ nennt man den ***Tangentialraum*** von H in $\mathbf{x}$.

Bemerkung: Die anschauliche „Tangentialebene“ in einem Punkt $\mathbf{x}_0 \in H$ ist der affine Raum $\mathbf{x}_0 + T_{\mathbf{x}_0}(H)$.

2.5. Beispiel

Die Sphäre $S^{n-1} = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ ist die Nullstellenmenge von

$$f(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x}\|^2 - 1 = \mathbf{x} \bullet \mathbf{x} - 1.$$

Für $\mathbf{x}_0 \in S^{n-1}$ ist

$$T_{\mathbf{x}_0}(S^{n-1}) = \operatorname{Ker} Df(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \nabla f(\mathbf{x}_0) \bullet \mathbf{v} = 0\} = \{\mathbf{v} : \mathbf{x}_0 \bullet \mathbf{v} = 0\}.$$

Definition

Unter einem ***glatt berandeten Gebiet*** verstehen wir ein **Parametergebiet** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dessen Rand eine **glatte Hyperfläche** ist.

2.6. Theorem

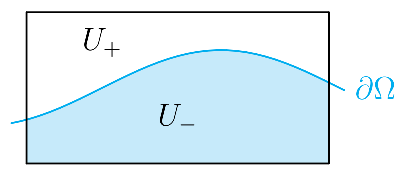
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glatt berandetes Gebiet. Dann gibt es zu jedem Punkt $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ eine zusammenhängende offene Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ und eine differenzierbare Funktion $h : U \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

1. $U \cap \Omega = \{\mathbf{x} \in U \,:\, h(\mathbf{x}) < 0\}$.
2. $\nabla h(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ *für* $\mathbf{x} \in U$.
3. $U \cap \partial\Omega = \{\mathbf{x} \in U \,:\, h(\mathbf{x}) = 0\}$.

Beweis: Sei $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$. Als glatte Hyperfläche sieht $\partial\Omega$ in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ wie ein Graph aus. O.B.d.A. kann man eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$, ein Gebiet $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$, ein offenes Intervall I und eine differenzierbare Funktion $g : V \to I$ finden, so dass gilt:

$$U \cap \partial\Omega = \{(\mathbf{y}', y_n) \in V \times I \,:\, y_n = g(\mathbf{y}')\}.$$

Sei $h : U \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(\mathbf{y}', y_n) := y_n - g(\mathbf{y}')$. Dann setzen wir



$$\begin{aligned} U_- &:= \{\mathbf{y} \in U \,:\, h(\mathbf{y}) < 0\}, \\ U_+ &:= \{\mathbf{y} \in U \,:\, h(\mathbf{y}) > 0\} \\ \text{und } U_0 &:= \{\mathbf{y} \in U \,:\, h(\mathbf{y}) = 0\} \;=\; U \cap \partial\Omega. \end{aligned}$$

Man kann annehmen, dass $I = (a, b)$ ist und dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $a + \varepsilon \leq g(\mathbf{y}') \leq b - \varepsilon$ für $\mathbf{y}' \in V$ gilt. Dann sind U_- und U_+ Gebiete, und wir haben eine disjunkte Zerlegung

$$U = U_- \cup U_+ \cup (U \cap \partial\Omega).$$

Indem man notfalls h durch $-h$ ersetzt, kann man annehmen, dass es einen Punkt $\mathbf{x}_1 \in U_- \cap \Omega$ gibt. Wir zeigen, dass dann $U_- \subset \Omega$ ist.

Sei $\mathbf{x}_2 \in U_-$ ein weiterer Punkt. Der kann nicht in $\partial\Omega$ liegen. Wir nehmen an, dass $\mathbf{x}_2$ in $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ liegt. Es gibt einen stetigen Weg $\boldsymbol{\alpha} : [0,1] \to U_-$, der $\mathbf{x}_1$ mit $\mathbf{x}_2$ innerhalb von U_- verbindet.

Sei

$$t_0 := \sup\{t \in [0,1] \,:\, \boldsymbol{\alpha}(t) \in \Omega\}.$$

Dann ist $0 < t_0 < 1$, und $\boldsymbol{\alpha}(t_0)$ muss in $\overline{\Omega}$ liegen. Weil der Weg in U_- verläuft, kann er $\partial\Omega$ nicht treffen, aber $\boldsymbol{\alpha}(t_0) \in \Omega$ kann auch nicht gelten. Das ist ein Widerspruch.

Analog zeigt man, dass $U_+ \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ ist. Aber dann ist $U_- = U \cap \Omega$. ∎

Man nennt h eine ***lokale Randfunktion***. Diese Randfunktion ist nicht eindeutig bestimmt.

2.7. Satz

Sei Ω ein glatt berandetes Gebiet. Sind h_1, h_2 zwei lokale Randfunktionen auf einer Umgebung U eines Punktes $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$, so gibt es eine differenzierbare Funktion λ auf U, so dass gilt:

1. *$\lambda > 0$ auf U.*
2. *$h_1 = \lambda \cdot h_2$ auf U.*
3. *$\nabla h_1(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) \cdot \nabla h_2(\mathbf{x})$ auf $U \cap \partial\Omega$.*

Beweis: Durch eine Koordinatentransformation kann man erreichen, dass $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ und $h_2 = x_n$ ist. Für festes $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ ist

$$g(t) := h_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$$

eine differenzierbare Funktion, die bei $t = 0$ verschwindet. Dann folgt:

$$\begin{aligned} h_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) &= g(x_n) - g(0) = \int_0^{x_n} g'(s)\,ds \\ &= x_n \int_0^1 g'(tx_n)\,dt \text{ (mit Substitution } \varphi(t) = tx_n) \\ &= h_2(x_1, \ldots, x_n) \cdot \lambda(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

wobei $\lambda(x_1, \ldots, x_n) := \int_0^1 \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, tx_n)\,dt$ eine differenzierbare Funktion ist (Satz über Parameterintegrale).

Offensichtlich ist $\lambda = h_1/h_2 > 0$ auf $U \setminus \partial\Omega$. Weil h_2 auf $\partial\Omega$ verschwindet und

$$\nabla h_1(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) \cdot \nabla h_2(\mathbf{x}) + h_2(\mathbf{x}) \cdot \nabla\lambda(\mathbf{x})$$

ist, ist sogar $\nabla h_1(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) \cdot \nabla h_2(\mathbf{x})$ auf $U \cap \partial\Omega$. Das zeigt aber, dass λ auf $\partial\Omega$ nicht verschwinden kann. Aus Stetigkeitsgründen muss $\lambda \geq 0$ auf ganz U gelten. Also ist $\lambda > 0$ auch auf $U \cap \partial\Omega$. ∎

2.8. Existenz (und Eindeutigkeit) der äußeren Normale

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glatt berandetes Gebiet und $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten normierten Vektor $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{x}_0)$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass gilt:

1. *$\mathbf{N} \bullet \mathbf{v} = 0$ für alle $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}_0}(\partial\Omega)$.*
2. *$\mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{N}$ liegt für $-\varepsilon < t < 0$ in Ω und für $0 < t < \varepsilon$ in $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.*

Beweis: Es gibt eine Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ und eine lokale Randfunktion auf U, also eine stetig differenzierbare Funktion $h : U \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$U \cap \partial\Omega = \{\mathbf{x} \in U \,:\, h(\mathbf{x}) = 0\} \quad \text{und} \quad U \cap \Omega = \{\mathbf{x} \in U \,:\, h(\mathbf{x}) < 0\}.$$

Außerdem kann man annehmen, dass $\nabla h(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ auf U ist.

Aus der Charakterisierung von Tangentialvektoren folgt, dass $\nabla h(\mathbf{x}_0)$ auf dem Tangentialraum senkrecht steht. Wir setzen

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}_0) := \frac{\nabla h(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla h(\mathbf{x}_0)\|}\,,$$

sowie $\varrho(t) := h(\mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}_0))$. Dann ist $\varrho(0) = h(\mathbf{x}_0) = 0$ und $\varrho'(0) = \nabla h(\mathbf{x}_0) \bullet \mathbf{N}(\mathbf{x}_0) = \|\nabla h(\mathbf{x}_0)\| > 0$. Also wächst ϱ in der Nähe von $t = 0$ streng monoton. Daraus folgt: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $\varrho(t) < 0$ für $-\varepsilon < t < 0$ und $\varrho(t) > 0$ für $0 < t < \varepsilon$ ist. Das bedeutet:

$$\mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}_0) \in \Omega \text{ für } -\varepsilon < t < 0 \text{ und } \mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \text{ für } 0 < t < \varepsilon.$$

Der Raum aller Vektoren $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, die in $\mathbf{x}_0$ auf $\partial\Omega$ senkrecht stehen, ist 1-dimensional. Weil der Vektor $\mathbf{N}(\mathbf{x}_0)$ normiert sein und nach außen zeigen soll, ist er eindeutig bestimmt. ∎

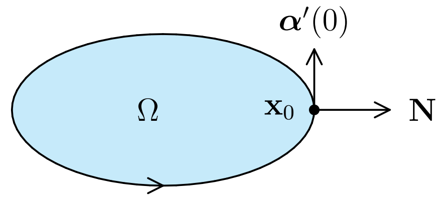
Wir nennen $\mathbf{N}(\mathbf{x}_0)$ den ***äußeren (Einheits-)Normalenvektor*** von $\partial\Omega$ in $\mathbf{x}_0$. Er legt eine „transversale Orientierung“ des Randes fest.

Bemerkung: Die „innere Orientierung“ des Randes im Punkte $\mathbf{x}_0$ wird durch die Anordnung der Elemente $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ einer Basis von $T_{\mathbf{x}_0}(\partial\Omega)$ festgelegt. Sie ist so zu wählen, dass $\det\big(\mathbf{N}(\mathbf{x}_0), \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}\big) > 0$ ist.

Eine Basis von $T_{\mathbf{x}_0}(\partial\Omega)$, also eine innere Orientierung des Randes, gewinnt man durch eine lokale Parametrisierung des Randes. Ist $\boldsymbol{\varphi} : P \to S \subset \partial\Omega$ eine solche Parametrisierung und $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$, so ist $\{\boldsymbol{\varphi}_{u_1}(\mathbf{u}_0), \ldots, \boldsymbol{\varphi}_{u_{n-1}}(\mathbf{u}_0)\}$ eine Basis von $T_{\mathbf{x}_0}(\partial\Omega)$.

2.9. Beispiele

A. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein glatt berandetes Gebiet, $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ und $\boldsymbol{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ eine lokale Parametrisierung des Randes in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ mit $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{x}_0$, sowie $\mathbf{N}$ der äußere Normalenvektor in $\mathbf{x}_0$. Die Parametrisierung $\boldsymbol{\alpha}$ liefert die „richtige“ Orientierung des Randes, wenn $\det(\mathbf{N}, \boldsymbol{\alpha}'(0)) > 0$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn die Basis $\{\mathbf{N}, \boldsymbol{\alpha}'(0)/\|\boldsymbol{\alpha}'(0)\|\}$ durch eine (positive) Drehung aus $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ hervorgeht. Und das ist wiederum genau dann der Fall, wenn das Gebiet Ω „links“ vom Rand liegt und die äußere Normale $\mathbf{N}$ nach „rechts“ zeigt.



B. Im $\mathbb{R}^3$ ist es nützlich, sich des Vektorproduktes zu bedienen.

Sind $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ zwei linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^3$, so ist die Zuordnung

$$\mathbf{a} \mapsto \det(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

eine Linearform $\neq 0$. Deshalb gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor $\mathbf{u}$, so dass $\det(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{a} \bullet \mathbf{u}$ für alle $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ gilt. Diesen Vektor $\mathbf{u}$ nennt man das ***Vektorprodukt*** von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ und bezeichnet ihn mit $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Allgemein ist also

$$\mathbf{a} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \text{für alle } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

Setzt man für $\mathbf{a}$ nacheinander die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ein, so erhält man die drei Komponenten des Vektors $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ und damit die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= \big(\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \det(\mathbf{e}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \det(\mathbf{e}_3, \mathbf{v}, \mathbf{w})\big) \\ &= (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1). \end{aligned}$$

Aus den Eigenschaften der Determinante folgt:

Das Vektorprodukt ist bilinear, es ist $\mathbf{w} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ und $\mathbf{v} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$.

Ist $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ (also eine ON-Basis mit $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 1$), so gilt:

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3,\ \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \text{ und } \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2.$$

Das folgt daraus, dass $\mathbf{v} = (\mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{v})\mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}_2 \bullet \mathbf{v})\mathbf{a}_2 + (\mathbf{a}_3 \bullet \mathbf{v})\mathbf{a}_3$ für jeden Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ gilt.

Ist nun $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein glatt berandetes Gebiet, $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$, $\boldsymbol{\varphi} : P \to \mathbb{R}^3$ eine lokale Parametrisierung des Randes und $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$, so bilden die Vektoren $\boldsymbol{\varphi}_u(\mathbf{u}_0)$ und $\boldsymbol{\varphi}_v(\mathbf{u}_0)$ eine Basis von $T_{\mathbf{x}_0}(\partial\Omega)$. Das Vektorprodukt $\boldsymbol{\varphi}_u(\mathbf{u}_0) \times \boldsymbol{\varphi}_v(\mathbf{u}_0)$ steht in $\mathbf{x}_0$ auf $\partial\Omega$ senkrecht. Kann man die Parametrisierung so wählen, dass $\boldsymbol{\varphi}_u(\mathbf{u}_0) \times \boldsymbol{\varphi}_v(\mathbf{u}_0)$ und $\mathbf{N}(\mathbf{x}_0)$ in die gleiche Richtung zeigen (was der Fall ist, wenn $\det(\mathbf{N}, \boldsymbol{\varphi}_u, \boldsymbol{\varphi}_v) > 0$ ist), so ist

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}_0) = \frac{\boldsymbol{\varphi}_u(\mathbf{u}_0) \times \boldsymbol{\varphi}_v(\mathbf{u}_0)}{\|\boldsymbol{\varphi}_u(\mathbf{u}_0) \times \boldsymbol{\varphi}_v(\mathbf{u}_0)\|}\,.$$

Andernfalls unterscheiden sich die beiden Vektoren um das Vorzeichen.