

---

## 3 Der Divergenzsatz

### 3.1 Die Transformationsformel

**Zur Motivation:** Aus der Integralrechnung in einer Veränderlichen kennt man die **Substitutionsregel:** Ist  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar,  $\varphi([\alpha, \beta]) \subset I$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Dabei muss man beachten, dass auf der linken Seite der Substitutionsformel die natürliche Integrationsrichtung je nach Vorzeichen von  $\varphi'$  beibehalten oder umgekehrt wird, dass aber  $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$  ist. Ist  $J = [\alpha, \beta]$ , so muss man also schreiben:

$$\int_{\varphi(J)} f d\mu_1 = \int_J (f \circ \varphi) |\varphi'| d\mu_1.$$

Diese Formel soll auf Funktionen von mehreren Veränderlichen verallgemeinert werden.

Als erstes wollen wir sicherstellen, dass Nullmengen bei einer stetig differenzierbaren Transformation keine Rolle spielen.<sup>1</sup>

#### 1.1. Bilder von Nullmengen

*Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $A \subset B$  eine (Lebesgue-)Nullmenge und  $\mathbf{f} : B \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar. Dann ist auch  $\mathbf{f}(A)$  eine Nullmenge.*

**BEWEIS:** Es reicht, für jeden abgeschlossenen Quader  $Q \subset B$  zu zeigen, dass  $\mathbf{f}(A \cap Q)$  eine Nullmenge ist (denn man kann  $B$  durch abzählbar viele solcher Quader überdecken). Da  $\mathbf{f}$  stetig differenzierbar ist, gibt es zu jedem kompakten Quader  $Q \subset B$  eine Konstante  $C > 0$ , so dass

$$\|D\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_{\text{op}} := \sup\{\|D\mathbf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{v})\| : \|\mathbf{v}\| \leq 1\} \leq C$$

für alle  $\mathbf{x} \in Q$  ist. Wir halten einen Quader  $Q$  und die zugehörige Konstante  $C$  fest. Da  $Q$  konvex ist, gehört zu je zwei Punkten  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$  auch die ganze Verbindungsstrecke zu  $Q$  (und damit zu  $B$ ). Aus dem Mittelwertsatz folgt, dass es einen Punkt  $\mathbf{z}$  auf der Verbindungsstrecke mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}(\mathbf{z})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

gibt. Dann ist aber

---

<sup>1</sup>Dieser Satz wurde nicht in der Vorlesung bewiesen!

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq C \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Es gibt eine Folge  $(W_k)$  von Würfeln mit

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(W_k) < \varepsilon.$$

Sei  $\mathbf{a}_k$  der Mittelpunkt von  $W_k = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{a}_k| < d_k/2\}$ , also  $d_k$  seine Kantenlänge. Dann ist  $\mu_n(W_k) = d_k^n$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^n < \varepsilon$ .

Sei  $|\dots|$  die Maximumsnorm und  $\|\dots\|$  die euklidische Norm. Für  $\mathbf{x} \in W_k$  ist

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}_k)| &\leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}_k)\| \leq C \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_k\| \\ &\leq C \cdot \sqrt{n} \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{a}_k| < C \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{d_k}{2}. \end{aligned}$$

Also liegt  $\mathbf{f}(W_k)$  in einem Würfel  $W'_k$  mit Mittelpunkt  $\mathbf{f}(\mathbf{a}_k)$  und Seitenlänge  $\leq C \cdot \sqrt{n} \cdot d_k$ . Das bedeutet, dass  $\mu_n(W'_k) \leq (C \cdot \sqrt{n} \cdot d_k)^n$  ist.

Dann liegt  $\mathbf{f}(A)$  in  $\bigcup_k W'_k$  und es ist  $\mu_n(\mathbf{f}(A)) \leq (C\sqrt{n})^n \cdot \varepsilon$ . Weil  $\varepsilon$  beliebig klein gewählt werden kann, muss  $\mathbf{f}(A)$  eine Nullmenge sein. ■

Unser Ziel ist der Beweis des folgenden Satzes:

## 1.2. Die Transformationsformel

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\varphi : U \rightarrow V$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus auf eine offene Menge  $V \subset \mathbb{R}^n$ .

1. Eine Funktion  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann integrierbar, wenn

$$(f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi| : U \rightarrow \mathbb{R}$$

integrierbar ist.

2. Ist  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, so ist

$$\int_V f(\mathbf{y}) d\mu_n = \int_U f \circ \varphi(\mathbf{x}) |\det D\varphi(\mathbf{x})| d\mu_n.$$

Zunächst betrachten wir die folgende

## 1.3. Spezielle Transformationsformel

Wie oben sei  $\varphi : U \rightarrow V$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus. Ist  $Q \subset V$  ein abgeschlossener Quader, so ist  $\varphi^{-1}(Q)$  endlich messbar und

$$\mu_n(Q) = \int_{\varphi^{-1}(Q)} |\det D\varphi(\mathbf{x})| d\mu_n.$$

**Bemerkung:** Da  $\varphi$  ein Homöomorphismus ist, ist  $\varphi^{-1}(Q)$  kompakt und damit endlich messbar. Die stetige Funktion  $|\det D\varphi(\mathbf{x})|$  ist natürlich über  $\varphi^{-1}(Q)$  integrierbar. Es bleibt also nur die Formel zu zeigen.

#### 1.4. Äquivalenz von allgemeiner und spezieller Formel

Sei  $\varphi$  ein fester  $C^1$ -Diffeomorphismus. Die Transformationsformel gilt genau dann für jede integrierbare Funktion  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn die spezielle Transformationsformel für jeden Quader  $Q \subset V$  gilt.

BEWEIS: <sup>2</sup> Gilt die allgemeine Transformationsformel, so ergibt sich die spezielle, indem man  $f = \chi_Q$  setzt.

Sei umgekehrt die spezielle Transformationsformel für jeden abgeschlossenen Quader  $Q \subset V$  (und damit die allgemeine Formel für  $f = \chi_Q$ ) bewiesen. Da in der allgemeinen Formel beide Seiten linear in  $f$  sind, folgt sie sofort für Treppenfunktionen  $\tau$ , die außerhalb von  $V$  verschwinden.

Ist  $g \in \mathcal{L}^+$ ,  $g \geq 0$  und  $g = 0$  außerhalb von  $V$ , so gibt es eine Folge  $(\tau_\nu)$  von Treppenfunktionen, die fast überall monoton wachsend gegen  $g$  konvergiert, so dass

$$\int g d\mu_n = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int \tau_\nu d\mu_n$$

ist. Wir können annehmen, dass  $0 \leq \tau_\nu \leq g$  für alle  $\nu$  gilt. Dann verschwinden auch alle  $\tau_\nu$  außerhalb von  $V$ .

Wir haben schon gezeigt, dass  $\int_V \tau_\nu(\mathbf{y}) d\mu_n = \int_U \tau_\nu \circ \varphi(\mathbf{x}) |\det D\varphi(\mathbf{x})| d\mu_n$  ist. Die Folge der integrierbaren Funktionen  $g_\nu := (\tau_\nu \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|$  konvergiert fast überall monoton wachsend gegen  $(g \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|$ . Da die Folge der Integrale wegen der schon bewiesenen Transformationsformel für Treppenfunktionen gegen  $\int g d\mu_n$  konvergiert und damit insbesondere beschränkt bleibt, folgt aus Levi's Satz von der monotonen Konvergenz, dass  $(g \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|$  über  $U$  integrierbar ist und die Integrale  $\int_U g_\nu(\mathbf{x}) d\mu_n$  gegen  $\int_U g \circ \varphi(\mathbf{x}) |\det D\varphi(\mathbf{x})| d\mu_n$  konvergieren. Damit ist die allgemeine Transformationsformel für  $g$  bewiesen.

Da jede integrierbare Funktion in der Form  $f = f^+ - f^-$  als Differenz von zwei positiven integrierbaren Funktionen geschrieben werden kann, brauchen wir im allgemeinen Fall nur eine integrierbare Funktion  $f \geq 0$  zu betrachten, die außerhalb von  $V$  verschwindet. Dann gibt es Funktionen  $g, h \in \mathcal{L}^+$ , die  $\geq 0$  sind und außerhalb von  $V$  verschwinden, so dass  $f = g - h$  ist. Die allgemeine Transformationsformel folgt nun für  $f$  aus der Linearität des Integrals. Und dass aus der Integrierbarkeit der Funktion  $(f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi|$  auch die Integrierbarkeit von  $f$  folgt, erhält man aus den obigen Betrachtungen, indem man  $\varphi$  durch  $\varphi^{-1}$  ersetzt. ■

<sup>2</sup>Auch dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt!

### 1.5. Gültigkeit für Permutationen der Koordinaten

Ist  $\varphi$  eine Permutation der Koordinaten, so gilt die spezielle (und damit auch die allgemeine) Transformationsformel.

BEWEIS: Sei  $\sigma \in S_n$  eine Permutation und  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ . Dann ist  $|\det D\varphi(\mathbf{x})| \equiv 1$ . Es ist also nur zu zeigen, dass  $\mu_n(Q) = \mu_n(\varphi^{-1}(Q))$  für jeden Quader  $Q$  gilt. Das ist aber trivial. ■

### 1.6. Verkettung von Transformationen

Gilt die spezielle Transformationsformel für  $\varphi : U \rightarrow V$  und für  $\psi : V \rightarrow W$ , so gilt sie auch für  $\psi \circ \varphi : U \rightarrow W$ .

BEWEIS: Es wurde schon gezeigt, dass aus der speziellen auch die allgemeine Transformationsformel folgt. Ist  $Q \subset W$  ein abgeschlossener Quader, so ist  $A := \psi^{-1}(Q)$  eine endlich messbare kompakte Teilmenge von  $V$ . Die stetige Funktion  $|\det D\psi(\mathbf{y})|$  ist über  $A$  integrierbar, also auch  $\chi_A \cdot |\det D\psi|$  über  $\mathbb{R}^n$ , und es gilt:

$$\begin{aligned} \mu_n(Q) &= \int_{\psi^{-1}(Q)} |\det D\psi(\mathbf{y})| d\mu_n = \int_V \chi_A(\mathbf{y}) |\det D\psi(\mathbf{y})| d\mu_n \\ &= \int_U \chi_A \circ \varphi(\mathbf{x}) |\det D\psi(\varphi(\mathbf{x}))| \cdot |\det D\varphi(\mathbf{x})| d\mu_n \\ &= \int_U \chi_Q \circ (\psi \circ \varphi)(\mathbf{x}) |\det D(\psi \circ \varphi)(\mathbf{x})| d\mu_n \\ &= \int_{(\psi \circ \varphi)^{-1}(Q)} |\det D(\psi \circ \varphi)(\mathbf{x})| d\mu_n \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. ■

Schließlich brauchen wir noch die folgende Aussage:

### 1.7. Vom Lokalen zum Globalen

Jeder Punkt  $\mathbf{x} \in U$  besitze eine offene Umgebung  $W \subset U$ , so dass die spezielle Transformationsformel für  $\varphi|_W : W \rightarrow \varphi(W)$  gilt. Dann gilt die spezielle Transformationsformel auch für  $\varphi : U \rightarrow V$ .

BEWEIS: Das System  $\mathcal{W}$  aller offenen Kugeln in  $U$  mit rationalem Mittelpunkt und rationalem Radius ist abzählbar, und jede offene Teilmenge  $W \subset U$  ist Vereinigung solcher Kugeln. Nun sei  $\mathcal{W}_0 = \{W_j : j \in \mathbb{N}\}$  das Teilsystem derjenigen Kugeln aus  $\mathcal{W}$ , die in einer offenen Menge  $W$  enthalten sind, auf der die spezielle (und damit auch die allgemeine) Transformationsformel gilt. Dann ist  $\mathcal{W}_0$  eine abzählbare offene Überdeckung von  $U$ , und die Transformationsformel gilt auch

für alle Einschränkungen  $\varphi|_{W_j}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Weil  $\varphi$  ein Diffeomorphismus ist, stellen die Mengen  $V_j := \varphi(W_j)$  eine Überdeckung von  $V$  dar.

Sei  $Q \subset V$  ein abgeschlossener Quader. Wir setzen  $A_1 := Q \cap V_1$  und  $A_{j+1} := (Q \cap V_{j+1}) \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_j)$ . Dann sind alle Mengen  $A_j$  messbar, und  $Q$  ist disjunkte Vereinigung der  $A_j$ .

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi^{-1}(Q)} |\det D\varphi(\mathbf{x})| d\mu_n &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\varphi^{-1}(A_j)} |\det D\varphi(\mathbf{x})| d\mu_n \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{W_j} \chi_{A_j} \circ \varphi(\mathbf{x}) |\det D\varphi(\mathbf{x})| d\mu_n \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\varphi(W_j)} \chi_{A_j}(\mathbf{y}) d\mu_n = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(A_j) = \mu_n(Q). \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. ■

Beim **Beweis der Transformationsformel** setzen wir nun alle Bausteine zusammen:

Sei  $\mathbf{x}_0 \in U$ . Es genügt zu zeigen, dass es eine offene Umgebung  $U_0$  von  $\mathbf{x}_0$  in  $U$  gibt, so dass die spezielle Formel für  $\varphi|_{U_0}$  gilt. Wir führen Induktion nach  $n$ . Der Induktionsanfang ergibt sich aus der Substitutionsregel (mit  $U_0 = U$ ).

Wir nehmen nun an, dass  $n \geq 2$  und die Behauptung schon für  $n - 1$  bewiesen ist. Weil  $D\varphi(\mathbf{x}_0) \neq 0$  ist und eine Permutation der Koordinaten nichts ausmacht, können wir annehmen, dass  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \neq 0$  ist. Wir setzen dann

$$\psi(x_1, \dots, x_n) := (\varphi_1(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n).$$

Weil  $\det J_\psi(\mathbf{x}_0) \neq 0$  ist, ist  $\psi$  lokal invertierbar. Nach Übergang zu geeigneten kleineren Umgebungen (die wir wieder mit  $U$  und  $V$  bezeichnen) setzen wir

$$\varrho(\mathbf{y}) := \varphi \circ \psi^{-1}(\mathbf{y})$$

und erhalten folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ \psi \searrow & & \nearrow \varrho = \varphi \circ \psi^{-1} \\ & & W \end{array}$$

Dabei ist  $W$  eine geeignete offene Menge. Weil einerseits  $\varrho \circ \psi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_n) = (\varphi_1(\mathbf{x}), \dots, \varphi_n(\mathbf{x}))$  und andererseits

$$\varrho \circ \psi(x_1, \dots, x_n) = \varrho(\varphi_1(\mathbf{x}), x_2, \dots, x_n)$$

ist, folgt:

$$\varrho(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \varrho_2(\mathbf{y}), \dots, \varrho_n(\mathbf{y})).$$

$\varphi = \varrho \circ \psi$  setzt sich also aus Abbildungen zusammen, von denen jede mindestens eine Komponente festlässt. Weil Permutationen der Koordinaten keine Rolle spielen, können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_n(\mathbf{x}))$  ist. Wir schreiben:

$$\varphi(t, \mathbf{z}) = (t, \varphi_t(\mathbf{z})),$$

wobei  $\varphi_t$  eine Abbildung von  $U_t := \{\mathbf{z} : (t, \mathbf{z}) \in U\}$  nach  $\mathbb{R}^{n-1}$  ist. Für die Funktionalmatrix von  $\varphi$  gilt dann:

$$J_\varphi(t, \mathbf{z}) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & J_{\varphi_t}(\mathbf{z}) & \\ * & & & \end{array} \right).$$

Also ist  $\det J_\varphi(t, \mathbf{z}) = \det J_{\varphi_t}(\mathbf{z})$ . Nun sei  $Q \subset V$  ein abgeschlossener Quader. Für  $A := \varphi^{-1}(Q)$  gilt dann:

$$\begin{aligned} Q_t &= (\varphi A)_t = \{\mathbf{y} : (t, \mathbf{y}) \in \varphi(A)\} \\ &= \{\mathbf{y} : \exists \mathbf{z} \text{ mit } (t, \mathbf{z}) \in A \text{ und } \varphi(t, \mathbf{z}) = (t, \mathbf{y})\} \\ &= \{\mathbf{y} : \exists \mathbf{z} \in A_t \text{ mit } \varphi_t(\mathbf{z}) = \mathbf{y}\} = \varphi_t(A_t). \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\mu_{n-1}(\varphi_t(A_t)) = \int_{\varphi_t(A_t)} 1 d\mu_{n-1} = \int_{A_t} |\det D\varphi_t(\mathbf{z})| d\mu_{n-1}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \mu_n(Q) &= \int_{\mathbb{R}} \mu_{n-1}(Q_t) dt \quad (\text{Cavalieri}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mu_{n-1}(\varphi_t(A_t)) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{A_t} |\det D\varphi_t(\mathbf{z})| d\mu_{n-1}(\mathbf{z}) \right) dt \\ &= \int_A |\det D\varphi(\mathbf{z}, t)| d\mu_n \quad (\text{Cavalieri}) \\ &= \int_{\varphi^{-1}(Q)} |\det D\varphi(\mathbf{z}, t)| d\mu_n. \end{aligned}$$

Damit ist die Transformationsformel bewiesen. ■

## 1.8. Beispiele

### A. Ebene Polarkoordinaten

Die ebenen Polarkoordinaten sind durch die Abbildung  $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$(x, y) = \mathbf{f}(r, \varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

gegeben. Bekanntlich ist  $\det J_{\mathbf{f}}(r, \varphi) = r$ .

Ist nun etwa  $K := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : a \leq r \leq b \text{ und } \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$ , mit  $0 < a < b$  und  $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ , sowie  $g$  stetig auf  $\mathbf{f}(K)$ , so ist

$$\int_{\mathbf{f}(K)} g(x, y) d\mu_2(x, y) = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Wir können natürlich auch über Mengen integrieren, die die positive  $x$ -Achse treffen, denn diese Achse ist eine Nullmenge.

### B. Räumliche Polarkoordinaten

Für  $r > 0$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$  und  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$  sind die räumlichen Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten, sphärische Koordinaten) gegeben durch

$$\mathbf{F}_{\text{sph}}(r, \varphi, \theta) := (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta).$$

Hier ist  $\varphi$  der Winkel gegenüber der positiven  $x$ -Achse (in der  $x$ - $y$ -Ebene gemessen) und  $\theta$  der Winkel gegen die  $x$ - $y$ -Ebene.<sup>3</sup> Als Funktionaldeterminante erhalten wir  $\det J_{\mathbf{F}_{\text{sph}}}(r, \varphi, \theta) = r^2 \cos \theta$ . Offensichtlich ist  $r^2 \cos \theta > 0$  im ganzen Definitionsbereich von  $\mathbf{F}_{\text{sph}}$ .

Ist  $K = \{(r, \varphi, \theta) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \varphi \leq \beta \text{ und } \gamma \leq \theta \leq \delta\}$ , so ist

$$\int_{\mathbf{F}_{\text{sph}}(K)} g(x, y, z) d\mu_3(x, y, z) = \int_{\gamma}^{\delta} \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b g(r, \varphi, \theta) r^2 \cos \theta dr d\varphi d\theta.$$

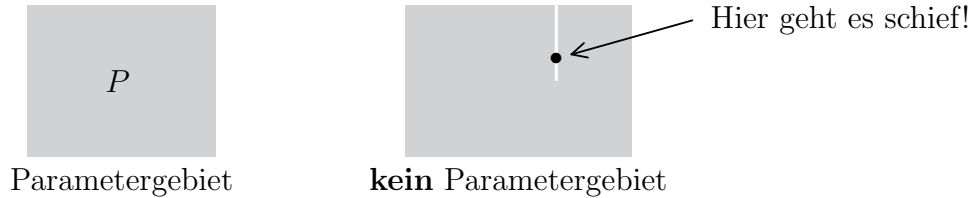
Als Volumen der 3-dimensionalen Einheitskugel erhalten wir z.B.:

$$\begin{aligned} \mu_3(B_1(\mathbf{0})) &= \int_{B_1(\mathbf{0})} 1 d\mu_3 = \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \cos \theta d\varphi d\theta dr \\ &= 2\pi \cdot \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos \theta d\theta dr = 4\pi \cdot \int_0^1 r^2 dr = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Es sei auch hier noch einmal daran erinnert, dass die Kugelkoordinaten in der Literatur nicht einheitlich definiert werden!

## 3.2 Glatte Hyperflächen

Unter einem **Parametergebiet** verstehen wir ein beschränktes Gebiet  $P \subset \mathbb{R}^k$ , bei dem jeder Randpunkt von  $P$  auch ein Randpunkt von  $\bar{P}$  ist. Durch die Randbedingung werden gewisse pathologische Fälle ausgeschlossen:



### Definition

Sei  $n \geq 2$  und  $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$  ein Parametergebiet. Unter einem (**glatten**) **parametrisierten Hyperflächenstück** über  $P$  verstehen wir eine stetig differenzierbare Abbildung  $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ , für die gilt:

1.  $\varphi$  ist injektiv.
2.  $\text{rg } J_\varphi(\mathbf{u}) = n - 1$  für alle  $\mathbf{u} \in P$ .
3. Ist  $\mathbf{u}_0 \in P$  und  $\mathbf{u}_\nu \in P$  eine Folge mit  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi(\mathbf{u}_\nu) = \varphi(\mathbf{u}_0)$ , so ist auch  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathbf{u}_\nu = \mathbf{u}_0$ .

### Bemerkungen:

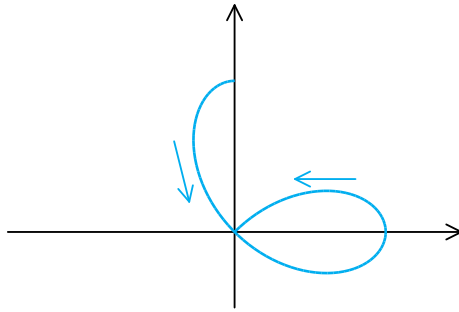
1. Die Menge  $S := \varphi(P)$  heißt die **Spur** des Flächenstücks. Manchmal begeht man aus Bequemlichkeit etwas Notationsmissbrauch und nennt  $S$  ein Flächenstück. Damit verzichtet man natürlich auf Information.
2. Ist  $n = 2$ , so ist  $P = I$  ein offenes Intervall und es liegt ein stetig differenzierbarer, ebener Weg  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  vor. Es ist  $\varphi$  injektiv,  $\varphi(t) \neq \mathbf{0}$  für alle  $t \in I$ . Man spricht dann von einem **glatten Weg**. Durch die dritte Bedingung werden Situationen wie die folgende ausgeschlossen:

Sei  $\varphi : (-\pi/2, +\pi/4) \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$\varphi(t) := (\cos(2t) \cos t, \cos(2t) \sin t).$$

Im Parameterintervall ist  $\varphi$  injektiv, der Nullpunkt ist das Bild von  $t = -\pi/4$ . Außerdem kann man leicht nachrechnen, dass  $\varphi'(t)$  nirgends verschwindet. Setzen wir aber  $t_0 := -\pi/4$  und  $t_\nu := \pi/4 - 1/\nu$ , so konvergiert  $\varphi(t_\nu)$  gegen  $(0, 0) = \varphi(t_0)$ , nicht aber  $(t_\nu)$  gegen  $t_0$ .





### Definition

Eine Menge  $H \subset \mathbb{R}^n$  heißt eine **glatte Hyperfläche**, falls es zu jedem Punkt  $\mathbf{x}_0 \in H$  eine Umgebung  $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ , ein Parametergebiet  $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ , ein glattes parametrisiertes Hyperflächenstück  $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi(P) = H \cap U$  und einen Parameter  $\mathbf{u}_0 \in P$  mit  $\varphi(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$  gibt.

Ist  $H$  eine glatte Hyperfläche und  $\varphi : P \rightarrow H \cap U$  eine lokale Parametrisierung, so ist  $S := \varphi(P) = H \cap U$  eine offene Teilmenge von  $H$  in der vom  $\mathbb{R}^n$  auf  $H$  induzierten Relativtopologie, und  $\varphi^{-1} : S \rightarrow P$  stetig, also  $\varphi$  ein Homöomorphismus: Ist nämlich  $(\mathbf{x}_\nu)$  eine Folge in  $S$ , die gegen einen Punkt  $\mathbf{x}_0 \in S$  konvergiert, so gibt es Parameter  $\mathbf{u}_\nu, \mathbf{u}_0 \in P$  mit  $\varphi(\mathbf{u}_\nu) = \mathbf{x}_\nu$  und  $\varphi(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$ . Die Bedingung (3) für parametrisierte Flächenstücke hat zur Folge, dass  $\varphi^{-1}(\mathbf{x}_\nu) = \mathbf{u}_\nu$  gegen  $\varphi^{-1}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}_0$  konvergiert.

Die Stetigkeit von  $\varphi^{-1}$  bedeutet, dass  $\varphi$  offene Teilmengen von  $P$  auf offene Teilmengen von  $S$  abbildet.

### 2.1. Satz (Niveaumengen sind glatte Hyperflächen)

Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion und  $M = \{\mathbf{x} \in B : f(\mathbf{x}) = 0\}$ . Ist  $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$  in jedem Punkt  $\mathbf{x} \in M$ , so ist  $M$  eine glatte Hyperfläche.

BEWEIS: Sei  $\mathbf{x}_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in M$ . O.B.d.A. sei  $f_{x_n}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ . Dann gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen Umgebungen  $U = U(x_1^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}) \subset \mathbb{R}^{n-1}$  und  $V = V(x_n^{(0)}) \subset \mathbb{R}$  und eine stetig differenzierbare Funktion  $g : U \rightarrow V$ , so dass  $(U \times V) \cap M = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in U \times V : x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})\}$  ist. Dann wird durch

$$\varphi(u_1, \dots, u_{n-1}) := (u_1, \dots, u_{n-1}, g(u_1, \dots, u_{n-1}))$$

eine lokale Parametrisierung  $\varphi : U \rightarrow (U \times V) \cap M$  definiert. Es ist offensichtlich, dass  $\varphi$  die Eigenschaften eines parametrisierten Flächenstücks erfüllt. ■

Es gilt in gewisser Weise auch die Umkehrung:

## 2.2. Jede glatte Hyperfläche ist lokal eine Niveaulfläche

Sei  $H \subset \mathbb{R}^n$  eine glatte Hyperfläche. Dann gibt es zu jedem Punkt  $\mathbf{x}_0 \in H$  eine offene Umgebung  $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$  und eine stetig differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass gilt:

1.  $U \cap H = f^{-1}(0)$ .
2.  $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$  für  $\mathbf{x} \in U \cap H$ .

BEWEIS: Sei  $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Umgebung und  $\varphi : P \rightarrow S = U \cap H$  eine Parametrisierung mit  $\varphi(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$ . Weil  $\text{rg } J_\varphi(\mathbf{u}_0) = n - 1$  ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass die ersten  $n - 1$  Zeilen der  $n \times (n - 1)$ -Matrix  $J_\varphi(\mathbf{u}_0)$  linear unabhängig sind.

Wir benutzen nun die Projektionen  $\pi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  und  $\pi_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\pi_1(x_1, \dots, x_n) := (x_1, \dots, x_{n-1}) \quad \text{und} \quad \pi_2(x_1, \dots, x_n) := x_n.$$

Dann ist offensichtlich  $\det J_{\pi_1 \circ \varphi}(\mathbf{u}_0) \neq 0$ . Nach dem Satz von der Umkehrabbildung gibt es also offene Umgebungen  $U_1(\mathbf{u}_0) \subset P \subset \mathbb{R}^{n-1}$  und  $U_2(\pi_1 \circ \varphi(\mathbf{u}_0)) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ , so dass  $\pi_1 \circ \varphi : U_1 \rightarrow U_2$  ein Diffeomorphismus ist.

Sei  $\psi := (\pi_1 \circ \varphi)^{-1} : U_2 \rightarrow U_1$  die Umkehrabbildung. Wir können nun  $g : U_2 \rightarrow \mathbb{R}$  definieren durch  $g(\mathbf{y}') := \pi_2 \circ \varphi \circ \psi(\mathbf{y}')$ , für  $\mathbf{y}' = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in U_2$ .

Weil  $\varphi : P \rightarrow S$  ein Homöomorphismus ist, gibt es eine offene Menge  $B \subset \mathbb{R}^n$ , so dass  $\varphi(U_1) = B \cap S$  ist. Für  $\mathbf{y} = (\mathbf{y}', y_n) \in B$  gilt dann:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} \in S &\iff \mathbf{y} \in \varphi(U_1) \\ &\iff \exists \mathbf{u} \in U_1 \text{ mit } \mathbf{y}' = \pi_1 \circ \varphi(\mathbf{u}) \text{ und } y_n = \pi_2 \circ \varphi(\mathbf{u}) \\ &\iff \exists \mathbf{u} \in U_1 \text{ mit } \mathbf{y}' = \psi^{-1}(\mathbf{u}) \text{ und } y_n = g(\psi^{-1}(\mathbf{u})) \\ &\iff \mathbf{y}' \in U_2 \text{ und } y_n = g(\mathbf{y}'). \end{aligned}$$

$\tilde{U} := (U_2 \times \mathbb{R}) \cap B$  ist eine offene Umgebung von  $\mathbf{x}_0 = (\pi_1 \circ \varphi(\mathbf{u}_0), \pi_2(\mathbf{x}_0))$ , und  $f : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(\mathbf{y}', y_n) := y_n - g(\mathbf{y}')$  ist eine stetig differenzierbare Funktion mit  $\nabla f(\mathbf{y}', y_n) = (-\nabla g(\mathbf{y}'), 1) \neq (\mathbf{0}, 0)$ . Außerdem ist

$$f^{-1}(0) = \{(\mathbf{y}', y_n) \in \tilde{U} : y_n = g(\mathbf{y}')\} = \tilde{U} \cap S.$$

■

## 2.3. Beispiele

- A. Sei  $h > 0$ ,  $r > 0$ ,  $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |z| < h\}$ ,  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x, y, z) := x^2 + y^2 - r^2$  und  $S := f^{-1}(0)$ . Weil  $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 0) \neq$

$(0, 0, 0)$  für  $(x, y, z) \in S$  ist, ist  $S$  eine glatte (Hyper-)Fläche, ein **Zylindermantel** der Höhe  $2h$  mit Radius  $r$ .

Ist  $c \in \mathbb{R}$ , so ist  $P_c := (c, c + 2\pi) \times (-h, h)$  ein Parametergebiet und  $\varphi : P_c \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

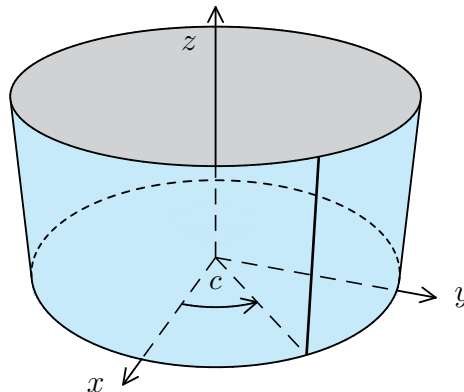
$$\varphi(u, v) := (r \cos u, r \sin u, v)$$

eine glatte Parametrisierung, denn die Spalten von

$$J_\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} -r \sin u & 0 \\ r \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

sind offensichtlich immer linear unabhängig. Dass  $\varphi$  die Bedingungen (1) und (3) der Definition eines parametrisierten Flächenstücks erfüllt, kann man sich leicht überlegen. Ist etwa  $\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2)$ , so muss  $v_1 = v_2$  und  $(\cos u_1, \sin u_1) = (\cos u_2, \sin u_2)$  sein. Letzteres ist auf  $(0, 2\pi)$  nur möglich, wenn  $u_1 = u_2$  ist.

Leider deckt eine einzelne derartige Parametrisierung nicht die ganze Fläche  $S$  ab, es fehlt immer ein Streckenstück, das man als „Klebekante“ interpretieren kann.



Im Falle  $c = 0$  wird der Zylinder entlang der Linie  $\{(r, 0, z) : |z| \leq h\}$  zusammengeklebt. Zwar kann man  $\varphi$  auf  $\overline{P}$  stetig differenzierbar fortsetzen, aber dort ist  $\varphi$  nicht mehr injektiv. Benutzt man eine zweite Parametrisierung mit dem Definitionsbereich  $P_c$ ,  $c \neq 0$ , so wird  $S$  durch  $\varphi(P_0)$  und  $\varphi(P_c)$  überdeckt.

- B.** Sei  $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x_1, \dots, x_n) := x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1$ . Dann ist  $S^{n-1} = f^{-1}(0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}$  die  $(n-1)$ -dimensionale Sphäre. Sie ist eine glatte Hyperfläche, weil  $\nabla f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  in jedem Punkt  $\mathbf{x} \in S^{n-1}$  gilt. Im Falle  $n = 2$  erhält man den Einheitskreis.

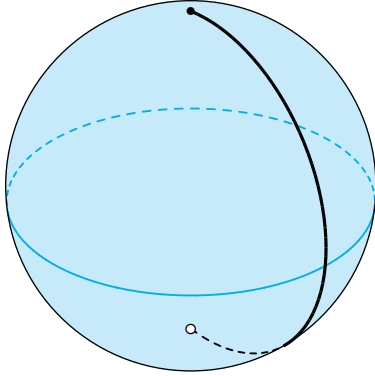
Im Falle  $n = 3$  sei  $P := (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$  und

$$\varphi(u, v) := (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v).$$

Dann ist

$$\varphi(u, v) = \cos v \mathbf{e}_u + \sin v \mathbf{e}_3, \quad \text{mit } \mathbf{e}_u := (\cos u, \sin u, 0) \text{ und } \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1).$$

Dabei ist  $\|\mathbf{e}_u\| = \|\mathbf{e}_3\| = 1$  und  $\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_3 = 0$ .



Dies ist die von den räumlichen Polarkoordinaten herrührende Parametrisierung.

Die linke und die rechte Seite von  $P$  werden zu einem Längengrad zusammengeklebt, die untere und die obere Seite von  $P$  ergeben den Südpol und den Nordpol.

Ist  $\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2)$ , so bilde man zunächst auf beiden Seiten das Skalarprodukt mit  $\mathbf{e}_3$ . Dann erhält man  $\sin v_1 = \sin v_2$ . Subtrahiert man  $\sin v_1 \mathbf{e}_3 = \sin v_2 \mathbf{e}_3$  auf beiden Seiten der Ausgangsgleichung, so erhält man die Gleichung  $\cos v_1 \mathbf{e}_{u_1} = \cos v_2 \mathbf{e}_{u_2}$ . Übergang zur Norm liefert  $\cos v_1 = \cos v_2$  (weil der Cosinus auf  $(-\pi/2, +\pi/2)$  positiv ist). Wie beim Zylinder folgt nun  $v_1 = v_2$ . Also muss auch  $\mathbf{e}_{u_1} = \mathbf{e}_{u_2}$  und deshalb  $u_1 = u_2$  sein. Das Folgenkriterium verifiziert man ähnlich.

- C. Sei  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine stetig differenzierbare Abbildung,  $\alpha(t) = (f(t), g(t))$ ,  $f(t) > 0$  auf  $(a, b)$ . Außerdem sei  $\alpha$  eine glatte Parametrisierung (im Sinne eines glatt parametrisierten Kurvenstücks). Dann wird durch

$$\varphi(u, v) := (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

ein glattes Flächenstück parametrisiert, die durch  $\alpha$  bestimmte **Rotationsfläche**. Die Überprüfung der Details sei dem Leser überlassen.

### Definition

Sei  $H \subset \mathbb{R}^n$  eine glatte Hyperfläche,  $\mathbf{x}_0 \in H$ . Ein Vektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  heißt **Tangentenvektor** an  $H$  im Punkte  $\mathbf{x}_0$ , falls es ein  $\varepsilon > 0$  und einen stetig differenzierbaren Weg  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  gibt, so dass gilt:

1. Die Spur von  $\alpha$  liegt ganz in  $H$ .
2. Es ist  $\alpha(0) = \mathbf{x}_0$  und  $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ .

## 2.4. Charakterisierung von Tangentialvektoren

Sei  $H \subset \mathbb{R}^n$  eine glatte Hyperfläche,  $\mathbf{x}_0 \in H$ . Es sei  $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Umgebung, so dass gilt:

- a) Es gibt eine stetig differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f^{-1}(\mathbf{0}) = U \cap H$  und  $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$  für alle  $\mathbf{x} \in U \cap H$ .
- b) Es gibt ein Parametergebiet  $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$  und eine stetig differenzierbare Parametrisierung  $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$  und  $\varphi(P) = U \cap H$ .

Dann sind die folgenden Aussagen über einen Vektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  äquivalent:

1.  $\mathbf{v}$  ist ein Tangentialvektor an  $H$  im Punkte  $\mathbf{x}_0$ .
2.  $\mathbf{v} \cdot \nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$ .
3. Es gibt einen Vektor  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n-1}$  mit  $\mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot J_\varphi(\mathbf{u}_0)^\top$ .

BEWEIS: (1)  $\implies$  (2): Sei  $\mathbf{v}$  ein Tangentialvektor an  $H$  in  $\mathbf{x}_0$ , also  $\alpha(0) = \mathbf{x}_0$  und  $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ . Dann ist  $f \circ \alpha(t) \equiv 0$ , also  $0 = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \alpha'(0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}$ .

(2)  $\implies$  (3): Weil  $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$  ist, hat der Raum der zu  $\nabla f(\mathbf{x}_0)$  orthogonalen Vektoren die Dimension  $n - 1$ . Und der Raum  $\text{Im } D\varphi(\mathbf{x}_0)$  besitzt ebenfalls die Dimension  $n - 1$  ( $= \text{rg } J_\varphi(\mathbf{u}_0)$ ).

Weil  $f \circ \varphi(\mathbf{u}) \equiv 0$  ist, ist  $\mathbf{0} = \nabla(f \circ \varphi)(\mathbf{u}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot J_\varphi(\mathbf{u}_0)$  (Kettenregel). Ist also ein Element  $\mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot J_\varphi(\mathbf{u}_0)^\top$  von  $\text{Im } D\varphi(\mathbf{u}_0)$  gegeben, so ist

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}^\top = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot J_\varphi(\mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{w}^\top = 0.$$

Daher sind die beiden betrachteten Vektorräume gleich und aus (2) folgt (3).

(3)  $\implies$  (1): Es gebe einen Vektor  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n-1}$  mit  $\mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot J_\varphi(\mathbf{u}_0)^\top = D\varphi(\mathbf{u}_0)(\mathbf{w})$ . Dann definiere man  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch  $\alpha(t) := \varphi(\mathbf{u}_0 + t\mathbf{w})$ . Offensichtlich liegt die Spur von  $\alpha$  in  $H$ , es ist  $\alpha(0) = \mathbf{x}_0$  und  $\alpha'(0) = D\varphi(\mathbf{u}_0)(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$ . Also ist  $\mathbf{v}$  ein Tangentialvektor an  $H$  in  $\mathbf{x}_0$ . ■

Aus dem Satz ergibt sich, dass die Menge der Tangentialvektoren an eine glatte Hyperfläche  $H \subset \mathbb{R}^n$  in einem Punkt  $\mathbf{x}_0 \in H$  einen  $(n - 1)$ -dimensionalen Vektorraum bildet.

### Definition

Sei  $H$  eine glatte Hyperfläche im  $\mathbb{R}^n$ . Den Vektorraum  $T_{\mathbf{x}}(H)$  der Tangentialvektoren an  $H$  in  $\mathbf{x}$  nennt man den **Tangentialraum** von  $H$  in  $\mathbf{x}$ .

**Bemerkung:** Die anschauliche „Tangentialebene“ in einem Punkt  $\mathbf{x}_0 \in H$  ist der affine Raum  $\mathbf{x}_0 + T_{\mathbf{x}_0}(H)$ .

## 2.5. Beispiel

Die Sphäre  $S^{n-1} = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$  ist die Nullstellenmenge von

$$f(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x}\|^2 - 1 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 1.$$

Für  $\mathbf{x}_0 \in S^{n-1}$  ist

$$T_{\mathbf{x}_0}(S^{n-1}) = \text{Ker } Df(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = 0\} = \{\mathbf{v} : \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{v} = 0\}.$$

### Definition

Unter einem **glatt berandeten Gebiet** verstehen wir ein **Parametergebiet**  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , dessen Rand eine **glatte Hyperfläche** ist.

### 2.6. Theorem

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein glatt berandetes Gebiet. Dann gibt es zu jedem Punkt  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$  eine zusammenhängende offene Umgebung  $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$  und eine differenzierbare Funktion  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass gilt:

1.  $U \cap \Omega = \{\mathbf{x} \in U : h(\mathbf{x}) < 0\}$ .
2.  $\nabla h(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$  für  $\mathbf{x} \in U$ .
3.  $U \cap \partial\Omega = \{\mathbf{x} \in U : h(\mathbf{x}) = 0\}$ .

BEWEIS: Sei  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ . Als glatte Hyperfläche sieht  $\partial\Omega$  in der Nähe von  $\mathbf{x}_0$  wie ein Graph aus. O.B.d.A. kann man eine offene Umgebung  $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ , ein Gebiet  $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ , ein offenes Intervall  $I$  und eine differenzierbare Funktion  $g : V \rightarrow I$  finden, so dass gilt:

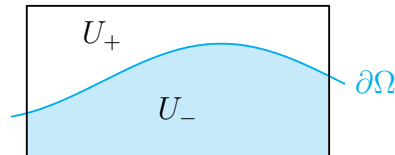
$$U \cap \partial\Omega = \{(\mathbf{y}', y_n) \in V \times I : y_n = g(\mathbf{y}')\}.$$

Sei  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $h(\mathbf{y}', y_n) := y_n - g(\mathbf{y}')$ . Dann setzen wir

$$U_- := \{\mathbf{y} \in U : h(\mathbf{y}) < 0\},$$

$$U_+ := \{\mathbf{y} \in U : h(\mathbf{y}) > 0\}$$

und  $U_0 := \{\mathbf{y} \in U : h(\mathbf{y}) = 0\} = U \cap \partial\Omega$ .



Man kann annehmen, dass  $I = (a, b)$  ist und dass es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass  $a + \varepsilon \leq g(\mathbf{y}') \leq b - \varepsilon$  für  $\mathbf{y}' \in V$  gilt. Dann sind  $U_-$  und  $U_+$  Gebiete, und wir haben eine disjunkte Zerlegung

$$U = U_- \cup U_+ \cup (U \cap \partial\Omega).$$

Indem man notfalls  $h$  durch  $-h$  ersetzt, kann man annehmen, dass es einen Punkt  $\mathbf{x}_1 \in U_- \cap \Omega$  gibt. Wir zeigen, dass dann  $U_- \subset \Omega$  ist.

Sei  $\mathbf{x}_2 \in U_-$  ein weiterer Punkt. Der kann nicht in  $\partial\Omega$  liegen. Wir nehmen an, dass  $\mathbf{x}_2$  in  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$  liegt. Es gibt einen stetigen Weg  $\alpha : [0, 1] \rightarrow U_-$ , der  $\mathbf{x}_1$  mit  $\mathbf{x}_2$  innerhalb von  $U_-$  verbindet.

Sei

$$t_0 := \sup\{t \in [0, 1] : \alpha(t) \in \Omega\}.$$

Dann ist  $0 < t_0 < 1$ , und  $\alpha(t_0)$  muss in  $\bar{\Omega}$  liegen. Weil der Weg in  $U_-$  verläuft, kann er  $\partial\Omega$  nicht treffen, aber  $\alpha(t_0) \in \Omega$  kann auch nicht gelten. Das ist ein Widerspruch.

Analog zeigt man, dass  $U_+ \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$  ist. Aber dann ist  $U_- = U \cap \Omega$ . ■

Man nennt  $h$  eine **lokale Randfunktion**. Diese Randfunktion ist nicht eindeutig bestimmt.

## 2.7. Satz

Sei  $\Omega$  ein glatt berandetes Gebiet. Sind  $h_1, h_2$  zwei lokale Randfunktionen auf einer Umgebung  $U$  eines Punktes  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ , so gibt es eine differenzierbare Funktion  $\lambda$  auf  $U$ , so dass gilt:

1.  $\lambda > 0$  auf  $U$ .
2.  $h_1 = \lambda \cdot h_2$  auf  $U$ .
3.  $\nabla h_1(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) \cdot \nabla h_2(\mathbf{x})$  auf  $U \cap \partial\Omega$ .

BEWEIS: Durch eine Koordinatentransformation kann man erreichen, dass  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  und  $h_2 = x_n$  ist. Für festes  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U$  ist

$$g(t) := h_1(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$$

eine differenzierbare Funktion, die bei  $t = 0$  verschwindet. Dann folgt:

$$\begin{aligned} h_1(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) &= g(x_n) - g(0) = \int_0^{x_n} g'(s) ds \\ &= x_n \int_0^1 g'(tx_n) dt \quad (\text{mit Substitution } \varphi(t) = tx_n) \\ &= h_2(x_1, \dots, x_n) \cdot \lambda(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

wobei  $\lambda(x_1, \dots, x_n) := \int_0^1 \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, tx_n) dt$  eine differenzierbare Funktion ist (Satz über Parameterintegrale).

Offensichtlich ist  $\lambda = h_1/h_2 > 0$  auf  $U \setminus \partial\Omega$ . Weil  $h_2$  auf  $\partial\Omega$  verschwindet und

$$\nabla h_1(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) \cdot \nabla h_2(\mathbf{x}) + h_2(\mathbf{x}) \cdot \nabla \lambda(\mathbf{x})$$

ist, ist sogar  $\nabla h_1(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) \cdot \nabla h_2(\mathbf{x})$  auf  $U \cap \partial\Omega$ . Das zeigt aber, dass  $\lambda$  auf  $\partial\Omega$  nicht verschwinden kann. Aus Stetigkeitsgründen muss  $\lambda \geq 0$  auf ganz  $U$  gelten. Also ist  $\lambda > 0$  auch auf  $U \cap \partial\Omega$ . ■

## 2.8. Existenz (und Eindeutigkeit) der äußeren Normale

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein glatt berandetes Gebiet und  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ . Dann gibt es einen eindeutig bestimmten normierten Vektor  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{x}_0)$  und ein  $\varepsilon > 0$ , so dass gilt:

1.  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{v} = 0$  für alle  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}_0}(\partial\Omega)$ .
2.  $\mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{N}$  liegt für  $-\varepsilon < t < 0$  in  $\Omega$  und für  $0 < t < \varepsilon$  in  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ .

BEWEIS: Es gibt eine Umgebung  $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$  und eine lokale Randfunktion auf  $U$ , also eine stetig differenzierbare Funktion  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass gilt:

$$U \cap \partial\Omega = \{\mathbf{x} \in U : h(\mathbf{x}) = 0\} \quad \text{und} \quad U \cap \Omega = \{\mathbf{x} \in U : h(\mathbf{x}) < 0\}.$$

Außerdem kann man annehmen, dass  $\nabla h(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$  auf  $U$  ist.

Ist  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}_0}(\partial\Omega)$  tangential zu  $\partial\Omega$ , so gibt es einen stetig differenzierbaren Weg  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \partial\Omega$  mit  $\alpha(0) = \mathbf{x}_0$  und  $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ . Dann ist  $h \circ \alpha(t) \equiv 0$ , also

$$0 = (h \circ \alpha)'(0) = \nabla h(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = \nabla h(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}.$$

Das bedeutet, dass  $\nabla h(\mathbf{x}_0)$  auf dem Tangentialraum senkrecht steht. Wir setzen

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}_0) := \frac{\nabla h(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla h(\mathbf{x}_0)\|},$$

sowie  $\varrho(t) := h(\mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}_0))$ . Dann ist  $\varrho(0) = h(\mathbf{x}_0) = 0$  und  $\varrho'(0) = \nabla h(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}_0) = \|\nabla h(\mathbf{x}_0)\| > 0$ . Also wächst  $\varrho$  in der Nähe von  $t = 0$  streng monoton. Daraus folgt: Es gibt ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $\varrho(t) < 0$  für  $-\varepsilon < t < 0$  und  $\varrho(t) > 0$  für  $0 < t < \varepsilon$  ist. Das bedeutet:

$$\mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}_0) \in \Omega \text{ für } -\varepsilon < t < 0 \text{ und } \mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \text{ für } 0 < t < \varepsilon.$$

Der Raum aller Vektoren  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , die in  $\mathbf{x}_0$  auf  $\partial\Omega$  senkrecht stehen, ist 1-dimensional. Weil der Vektor  $\mathbf{N}(\mathbf{x}_0)$  normiert sein und nach außen zeigen soll, ist er eindeutig bestimmt. ■

Wir nennen  $\mathbf{N}(\mathbf{x}_0)$  den **äußeren (Einheits-)Normalenvektor** von  $\partial\Omega$  in  $\mathbf{x}_0$ . Er legt eine „transversale Orientierung“ des Randes fest.

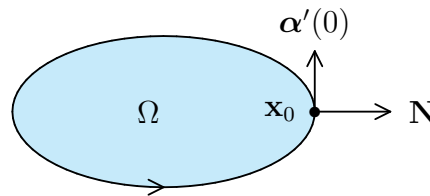
Die „innere Orientierung“ des Randes im Punkte  $\mathbf{x}_0$  wird durch die Anordnung der Elemente  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$  einer Basis von  $T_{\mathbf{x}_0}(\partial\Omega)$  festgelegt. Sie ist so zu wählen, dass  $\det(\mathbf{N}(\mathbf{x}_0), \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) > 0$  ist.



Eine Basis von  $T_{\mathbf{x}_0}(\partial\Omega)$ , also eine innere Orientierung des Randes, gewinnt man durch eine lokale Parametrisierung des Randes. Ist  $\varphi : P \rightarrow S \subset \partial\Omega$  eine solche Parametrisierung und  $\varphi(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$ , so ist  $\{\varphi_{u_1}(\mathbf{u}_0), \dots, \varphi_{u_{n-1}}(\mathbf{u}_0)\}$  eine Basis von  $T_{\mathbf{x}_0}(\partial\Omega)$ .

## 2.9. Beispiele

- A. Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein glatt berandetes Gebiet,  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$  und  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine lokale Parametrisierung des Randes in der Nähe von  $\mathbf{x}_0$  mit  $\alpha(0) = \mathbf{x}_0$ , sowie  $\mathbf{N}$  der äußere Normalenvektor in  $\mathbf{x}_0$ . Die Parametrisierung  $\alpha$  liefert die „richtige“ Orientierung des Randes, wenn  $\det(\mathbf{N}, \alpha'(0)) > 0$  ist. Das ist genau dann der Fall, wenn die Basis  $\{\mathbf{N}, \alpha'(0)/\|\alpha'(0)\|\}$  durch eine (positive) Drehung aus  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  hervorgeht. Und das ist wiederum genau dann der Fall, wenn das Gebiet  $\Omega$  „links“ vom Rand liegt und die äußere Normale  $\mathbf{N}$  nach „rechts“ zeigt.



- B. Im  $\mathbb{R}^3$  ist es nützlich, sich des Vektorproduktes zu bedienen.

Sind  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  zwei linear unabhängige Vektoren des  $\mathbb{R}^3$ , so ist die Zuordnung

$$\mathbf{a} \mapsto \det(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

eine Linearform  $\neq 0$ . Deshalb gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor  $\mathbf{u}$ , so dass  $\det(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$  für alle  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  gilt. Diesen Vektor  $\mathbf{u}$  nennt man das **Vektorprodukt** von  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  und bezeichnet ihn mit  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ . Allgemein ist also

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \text{für alle } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

Setzt man für  $\mathbf{a}$  nacheinander die Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  ein, so erhält man die drei Komponenten des Vektors  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$  und damit die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= (\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \det(\mathbf{e}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \det(\mathbf{e}_3, \mathbf{v}, \mathbf{w})) \\ &= (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1). \end{aligned}$$

Aus den Eigenschaften der Determinante folgt:

Das Vektorprodukt ist bilinear, es ist  $\mathbf{w} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{w}$  und  $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$ .

Ist  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^3$  (also eine ON-Basis mit  $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 1$ ), so gilt:

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \text{ und } \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2.$$

Das folgt daraus, dass  $\mathbf{v} = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}_2 + (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}_3$  für jeden Vektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  gilt.

Ist nun  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein glatt berandetes Gebiet,  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ ,  $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine lokale Parametrisierung des Randes und  $\varphi(\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0$ , so bilden die Vektoren  $\varphi_u(\mathbf{u}_0)$  und  $\varphi_v(\mathbf{u}_0)$  eine Basis von  $T_{\mathbf{x}_0}(\partial\Omega)$ . Das Vektorprodukt  $\varphi_u(\mathbf{u}_0) \times \varphi_v(\mathbf{u}_0)$  steht in  $\mathbf{x}_0$  auf  $\partial\Omega$  senkrecht. Kann man die Parametrisierung so wählen, dass  $\varphi_u(\mathbf{u}_0) \times \varphi_v(\mathbf{u}_0)$  und  $\mathbf{N}(\mathbf{x}_0)$  in die gleiche Richtung zeigen (was der Fall ist, wenn  $\det(\mathbf{N}, \varphi_u, \varphi_v) > 0$  ist), so ist

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}_0) = \frac{\varphi_u(\mathbf{u}_0) \times \varphi_v(\mathbf{u}_0)}{\|\varphi_u(\mathbf{u}_0) \times \varphi_v(\mathbf{u}_0)\|}.$$

Andernfalls unterscheiden sich die beiden Vektoren um das Vorzeichen.

### 3.3 Integration auf Hyperflächen

Wir brauchen zunächst etwas Lineare Algebra:

Seien  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$  irgendwelche Vektoren ( $n \geq 3$ ). Durch

$$\lambda(\mathbf{w}) := \det(\mathbf{w}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1})$$

wird eine Linearform  $\lambda$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  definiert. Daher gibt es genau einen Vektor  $\mathbf{z}$  (der mit  $\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}$  bezeichnet wird), so dass  $\lambda(\mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{z}$  ist. Also gilt:

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}) = \det(\mathbf{w}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}).$$

Insbesondere ist dann  $\mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}) = 0$  für  $i = 1, \dots, n-1$ , und  $\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1} = \mathbf{0}$ , falls die Vektoren linear abhängig sind.

Wir benutzen die  $\mathbf{a}_i$  als Spalten einer Matrix:

$$A := (\mathbf{a}_1^\top, \dots, \mathbf{a}_{n-1}^\top).$$

Für  $k = 1, \dots, n$  sei  $A_k$  die quadratische Matrix, die aus  $A$  entsteht, indem man die  $k$ -te Zeile streicht. Der Laplace'sche Entwicklungssatz besagt dann:

$$\det(\mathbf{w}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} w_k \cdot \det(A_k).$$

Setzt man für  $\mathbf{w}$  die Basisvektoren  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  ein, so gewinnt man die Komponenten von  $\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1})_i &= \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \delta_{ik} \cdot \det(A_k) = (-1)^{i+1} \det(A_i). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\|\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}\|^2 = \sum_{i=1}^n (\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1})_i^2 = \sum_{i=1}^n (\det A_i)^2.$$

Im Falle  $n = 3$  gewinnt man wieder das im vorigen Abschnitt eingeführte Vektorprodukt.

#### Definition

Ist  $A := (\mathbf{a}_1^\top, \dots, \mathbf{a}_{n-1}^\top) \in M_{n,n-1}(\mathbb{R})$ , so heißt

$$G_A = G(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) := \det(A^\top \cdot A) = \det(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \mid i, j = 1, \dots, n-1)$$

die **Gram'sche Determinante** von  $A$  bzw. von  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ .

**3.1. Satz**

$$G_A = \|\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}\|^2.$$

BEWEIS: Wenn die Vektoren  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$  linear abhängig sind, verschwindet die rechte Seite. Ist etwa  $\mathbf{a}_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-2} \lambda_j \mathbf{a}_j$ , so ist auch  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-2} \lambda_j \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$  für  $i = 1, \dots, n-2$ , also  $G_A = 0$ .

Seien nun die Vektoren linear unabhängig und

$$\mathbf{N} := \frac{\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}}{\|\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}\|}$$

der Einheitsvektor, der auf dem von ihnen erzeugten Unterraum senkrecht steht. Dann ist

$$\begin{aligned} |\det(\mathbf{N}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1})| &= |\mathbf{N} \cdot (\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1})| \\ &= \|\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}\|. \end{aligned}$$

Ist  $B := (\mathbf{N}^\top, \mathbf{a}_1^\top, \dots, \mathbf{a}_{n-1}^\top) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ , so ist

$$B^\top B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^\top A \end{pmatrix}$$

und daher

$$\|\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}\|^2 = \det(B)^2 = \det(B^\top B) = \det(A^\top A) = G_A.$$

■

**3.2. Satz**

1. Sei  $A \in M_{n,n-1}(\mathbb{R})$  und  $B \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ . Dann ist  $G_{A \cdot B} = \det(B)^2 \cdot G_A$ .
2. Seien  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^3$  linear unabhängig und  $\angle(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  der (positive) Winkel zwischen  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$ . Dann ist

$$\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\| = \|\mathbf{a}_1\| \cdot \|\mathbf{a}_2\| \cdot \sin(\angle(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2))$$

der Flächeninhalt des von  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$  aufgespannten Parallelogramms.

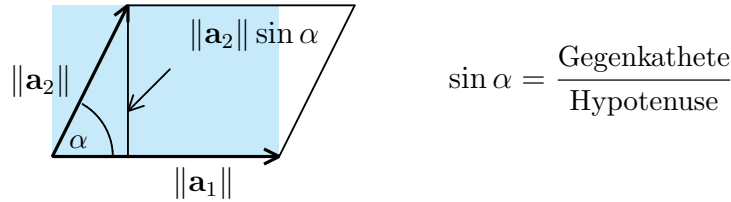
BEWEIS: 1) Es ist

$$\begin{aligned} G_{A \cdot B} &= \det((AB)^\top \cdot (AB)) = \det(B^\top \cdot (A^\top \cdot A) \cdot B) \\ &= \det(B) \cdot \det(A^\top \cdot A) \cdot \det(B) = \det(B)^2 \cdot G_A. \end{aligned}$$

2) Sei  $\alpha = \angle(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ . Dann ist

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|^2 &= G_A = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \|\mathbf{a}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{a}_2\|^2 - (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)^2 \\ &= \|\mathbf{a}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{a}_2\|^2 (1 - \cos^2 \alpha) = \|\mathbf{a}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{a}_2\|^2 \sin^2 \alpha,\end{aligned}$$

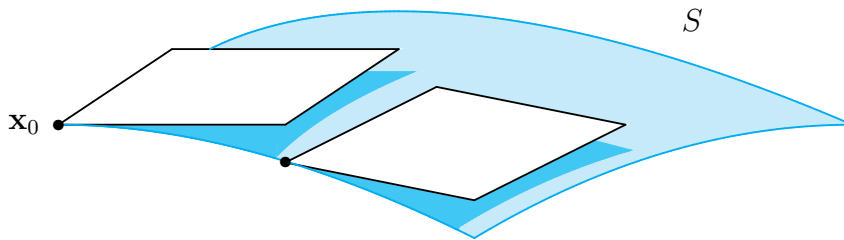
also  $\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\| = \|\mathbf{a}_1\| \cdot \|\mathbf{a}_2\| \cdot \sin \alpha$  (weil  $\sin \alpha > 0$  für  $0 < \alpha < \pi$  ist). Aus der folgenden Skizze ersieht man, dass es sich um den Flächeninhalt des von  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$  aufgespannten Parallelogramms handelt.



Wir wollen uns jetzt mit dem Problem der Flächenberechnung beschäftigen. Zunächst betrachten wir nur den Fall  $n = 3$  und versuchen es mit einer Approximation! Es sei ein Quader  $Q \subset \mathbb{R}^3$  und eine Parametrisierung  $\varphi : Q \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  gegeben. Wir zerlegen  $Q$  in viele kleine Teilquader.  $\mathbf{u}_0 \in Q$  sei ein Gitterpunkt. Dann gibt es Zahlen  $s$  und  $t$ , so dass

$$\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0 + s\mathbf{e}_1, \mathbf{u}_0 + t\mathbf{e}_2 \text{ und } \mathbf{u}_0 + s\mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2$$

die Ecken eines Teilquaders sind. Die Bilder dieser vier Ecken auf der Fläche liegen leider nicht unbedingt in einer Ebene!



Wir können Genaueres über die Lage der Bilder der Ecken herausbekommen, wenn wir die Differenzierbarkeit von  $\varphi$  in  $\mathbf{u}_0$  ausnutzen: Es gibt eine (matrixwertige) Funktion  $\Delta$ , so dass gilt:

1.  $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}_0) + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \cdot J_\varphi(\mathbf{u}_0)^\top + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \cdot \Delta(\mathbf{u})^\top$ .
2.  $\lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_0} \Delta(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ .

Dabei ist  $J_\varphi(\mathbf{u}_0) = (\varphi_u(\mathbf{u}_0)^\top, \varphi_v(\mathbf{u}_0)^\top)$ . Näherungsweise ist also

$$\varphi(\mathbf{u}_0 + s\mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2) \approx \varphi(\mathbf{u}_0) + (s\mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2) \cdot J_\varphi(\mathbf{u}_0)^\top = \varphi(\mathbf{u}_0) + s\varphi_u(\mathbf{u}_0) + t\varphi_v(\mathbf{u}_0),$$

und näherungsweise werden dann die Ecken des Teilquaders auf die Punkte  $\varphi(\mathbf{u}_0)$ ,  $\varphi(\mathbf{u}_0) + s\varphi_u(\mathbf{u}_0)$ ,  $\varphi(\mathbf{u}_0) + t\varphi_v(\mathbf{u}_0)$  und  $\varphi(\mathbf{u}_0) + s\varphi_u(\mathbf{u}_0) + t\varphi_v(\mathbf{u}_0)$  abgebildet. Das sind jetzt die Ecken eines Parallelogramms, und je kleiner  $s$  und  $t$  sind, desto besser wird die Approximation.

Die Fläche des Parallelogramms ist durch  $\|s\varphi_u(\mathbf{u}_0) \times t\varphi_v(\mathbf{u}_0)\| = st\|\varphi_u(\mathbf{u}_0) \times \varphi_v(\mathbf{u}_0)\|$  gegeben. Deshalb liegt es nahe, den Flächeninhalt  $A(S)$  durch „Riemann’schen Summen“ der Gestalt

$$\sum_{i,j} \|\varphi_u(s_i, t_j) \times \varphi_v(s_i, t_j)\| \cdot \Delta s_i \Delta t_j$$

zu approximieren und den Flächeninhalt selbst deshalb durch

$$A(S) := \int_Q \|\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)\| \, du \, dv$$

zu definieren. Dabei stimmt  $\|\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)\|$  mit der Wurzel aus der Gram’schen Determinante der Funktionalmatrix  $J_\varphi(u, v)$  überein. Das sollte als Motivation für die folgende Definition reichen:

### Definition

Sei  $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$  ein Parametergebiet und  $\varphi : P \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$  die Parametrisierung eines glatten Hyperflächenstücks. Ist  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, so bezeichnet man

$$\int_S f \, do := \int_P f(\varphi(\mathbf{u})) \sqrt{G_\varphi(\mathbf{u})} \, d\mu_{n-1}$$

als das **(Oberflächen-)Integral** der Funktion  $f$  über das Flächenstück  $S$ . Dabei sei  $G_\varphi := \det(J_\varphi^\top \cdot J_\varphi)$ .

### Bemerkungen:

1. Sei  $\varphi(\mathbf{u}) := (\mathbf{u}, 0)$ , also  $S$  ein Gebiet im  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Dann ist  $J_\varphi = \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$  und  $G_\varphi(\mathbf{u}) \equiv \det E_{n-1} = 1$ , also  $\int_S f \, do = \int_P f(\mathbf{u}, 0) \, d\mu_{n-1}$  das gewöhnliche Integral.

2. Wir wollen zeigen, dass das Oberflächenintegral nicht von der Parametrisierung abhängt. Ist  $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$  ein weiteres Parametergebiet und  $\Phi : Q \rightarrow P$  ein Diffeomorphismus, so ist auch  $\psi := \varphi \circ \Phi$  eine Parametrisierung von  $S$ , und mit der Kettenregel folgt:

$$J_\psi = (J_\varphi \circ \Phi) \cdot J_\Phi.$$

Dann ist

$$\sqrt{G_\psi} = \sqrt{\det(J_\Phi)^2 \cdot G_\varphi \circ \Phi} = |\det(J_\Phi)| \cdot \sqrt{G_\varphi \circ \Phi},$$

und mit der Transformationsformel folgt:

$$\begin{aligned} & \int_Q f(\psi(\mathbf{v})) \sqrt{G_\psi(\mathbf{v})} d\mu_{n-1} \\ &= \int_Q f(\varphi \circ \Phi(\mathbf{v})) |\det(J_\Phi(\mathbf{v}))| \cdot \sqrt{G_\varphi \circ \Phi(\mathbf{v})} d\mu_{n-1} \\ &= \int_P f(\varphi(\mathbf{u})) \sqrt{G_\varphi(\mathbf{u})} d\mu_{n-1}. \end{aligned}$$

3. An Stelle der Stetigkeit von  $f$  braucht man nur eine schwächere Bedingung. Es reicht, wenn die Funktion  $\mathbf{u} \mapsto f(\varphi(\mathbf{u})) \sqrt{G_\varphi(\mathbf{u})}$  im Lebesgue'schen Sinne integrierbar ist. Das Bild einer Nullmenge  $N \subset P$  unter  $\varphi$  spielt bei der Berechnung des Integrals keine Rolle. Das rechtfertigt die folgende Definition, und wir können bei den folgenden Beispielen die „Klebekanten“ ignorieren.

### Definition

Ist  $S$  ein (durch  $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$  parametrisiertes) Hyperflächenstück und  $K \subset S$  kompakt, so nennt man

$$A_{n-1}(K) := \int_S \chi_K d\sigma = \int_{\varphi^{-1}(K)} \sqrt{G_\varphi(\mathbf{u})} d\mu_{n-1}$$

den **Flächeninhalt** von  $K$ .

### 3.3. Beispiele

- A. Wir beginnen mit der Fläche eines Zylinders. Dabei handelt es sich um den besonders einfachen Fall einer „abwickelbaren“ Fläche. Man kann sich vorstellen, dass ein rechteckiges Blatt Papier mit den Abmessungen  $2r\pi \times 2h$  zu einem Zylinder zusammengerollt wird. Der Flächeninhalt  $2r\pi \cdot 2h$  sollte sich dabei nicht ändern.

Wir benutzen die Parametrisierung  $\varphi : Q = (0, 2\pi) \times (-h, h) \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  mit

$$\varphi(u, v) := (r \cos u, r \sin u, v).$$

Dann ist

$$J_\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} -r \sin u & 0 \\ r \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{also } J_\varphi(u, v)^\top \cdot J_\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Gramsche Determinante

$$G_\varphi := \det(J_\varphi^\top \cdot J_\varphi) = r^2,$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_Q \sqrt{G_\varphi(u, v)} \, dudv = \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h r \, dv \, du \\ &= r \cdot 2h \cdot \int_0^{2\pi} du = 2r\pi \cdot 2h, \end{aligned}$$

ganz so, wie man es erwartet. Die Klebekante spielt dabei keine Rolle.

- B.** Als nächstes wollen wir den Inhalt der Oberfläche einer Kugel vom Radius  $r$  berechnen. Dazu benutzen wir die Parametrisierung

$$\varphi(u, v) := (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dann ist

$$J_\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v & -r \cos u \sin v \\ r \cos u \cos v & -r \sin u \sin v \\ 0 & r \cos v \end{pmatrix}$$

und daher

$$G_\varphi(u, v) = \det(J_\varphi(u, v)^\top \cdot J_\varphi(u, v)) = \det \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 v & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos v \, dv \, du = r^2 \int_0^{2\pi} \left( \sin v \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) du \\ &= 2r^2 \int_0^{2\pi} du = 4r^2\pi. \end{aligned}$$

- C.** Sei  $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$  ein Parametergebiet,  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion und  $S := \{(\mathbf{x}, z) \in P \times \mathbb{R} : z = f(\mathbf{x})\}$  ihr Graph. Dann ist  $\varphi : P \rightarrow S$  mit  $\varphi(\mathbf{u}) := (\mathbf{u}, f(\mathbf{u}))$  eine Parametrisierung von  $S$ .

Sei  $A := J_\varphi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \nabla f(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$  und  $A_k$  die quadratische Matrix, die aus  $A$  entsteht, indem man die  $k$ -te Zeile streicht. Berechnet man die Determinante von  $A_k$  durch Entwicklung nach der letzten Zeile, so liefert im Falle  $k < n$  nur das  $k$ -te Element einen Beitrag, und man erhält

$$\det A_k = \pm f_{u_k}(\mathbf{u}) \quad \text{für } k = 1, \dots, n-1 \quad \text{und} \quad \det A_n = 1.$$

Daraus folgt, dass  $G_\varphi(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^n (\det A_k)^2 = 1 + \|\nabla f(\mathbf{u})\|^2$  ist, also

$$A_{n-1}(S) = \int_P \sqrt{1 + \|\nabla f(\mathbf{u})\|^2} \, d\mu_{n-1}.$$



Ist  $S \subset \mathbb{R}^n$  eine kompakte glatte Hyperfläche (z.B. der Rand eines Gebietes), so kommt man eventuell nicht mit einer einzigen Parametrisierung aus. Dann brauchen wir ein neues Hilfsmittel, eine sogenannte „Teilung der Eins“. Dazu muss man etwas weiter ausholen.

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  offen. Ist  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  irgendeine Funktion, so nennt man die Menge

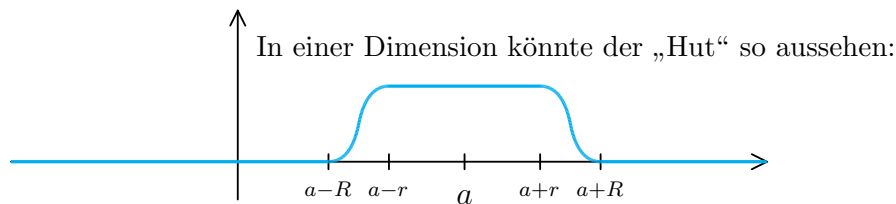
$$\text{Tr}(f) := \overline{\{\mathbf{x} \in M : f(\mathbf{x}) \neq 0\}}$$

den **Träger** von  $f$ . Wir verstehen ab sofort unter einer **differenzierbaren Funktion** eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Die Menge aller differenzierbaren Funktionen auf  $M$  wird dann mit  $C^\infty(M)$  bezeichnet, die Menge aller Funktionen  $f \in C^\infty(M)$  mit kompaktem Träger mit  $C_c^\infty(M)$ .

### 3.4. Satz vom „Hut“

Sei  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 < r < R$ . Dann gibt es eine  $C^\infty$ -Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass gilt:

1.  $f(\mathbf{x}) \equiv 1$  auf  $B_r(\mathbf{a})$ ,
2.  $f(\mathbf{x}) \equiv 0$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus B_R(\mathbf{a})$ ,
3.  $0 \leq f(\mathbf{x}) \leq 1$  überall sonst.



BEWEIS: Durch

$$g(t) := \begin{cases} \exp(-1/t^2) & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

wird eine  $C^\infty$ -Funktion auf  $\mathbb{R}$  definiert, die genau für  $x > 0$  Werte  $> 0$  annimmt (Beweis in Analysis 1). Dann ist  $h(t) := g(1+t)g(1-t)$  genau auf dem Intervall  $(-1, 1)$  positiv und überall sonst  $= 0$ .

Die Funktion

$$\varphi(t) := \left( \int_{-1}^t h(\tau) d\tau \right) / \left( \int_{-1}^1 h(\tau) d\tau \right)$$

ist wieder eine  $C^\infty$ -Funktion, die nur Werte zwischen 0 und 1 annimmt. Für  $t \leq -1$  ist  $\varphi(t) \equiv 0$  und für  $t \geq 1$  ist  $\varphi(t) \equiv 1$ . Schließlich setzen wir

$$f(\mathbf{x}) := \varphi\left(\frac{R+r-2\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}{R-r}\right).$$

Diese Funktion nimmt auch nur Werte zwischen 0 und 1 an. Für  $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \geq R$  ist  $f(\mathbf{x}) \equiv 0$ , und für  $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \leq r$  ist  $f(\mathbf{x}) \equiv 1$ . ■

Wir wollen den Satz vom Hut benutzen, um auf einer kompakten Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  zu jeder endlichen offenen Überdeckung  $\{U_1, \dots, U_N\}$  eine sogenannte **Teilung der Eins** zu konstruieren. Darunter versteht man ein System von  $C^\infty$ -Funktionen  $\varphi_i$  auf dem  $\mathbb{R}^n$ , so dass gilt:

1.  $0 \leq \varphi_i(\mathbf{x}) \leq 1$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und  $i = 1, \dots, N$ .
2.  $\sum_{i=1}^N \varphi_i(\mathbf{x}) \equiv 1$  auf  $K$ .
3. Für jedes  $i$  liegt der (kompakte) Träger von  $\varphi_i$  in  $U_i$ .

Wir benötigen einen Hilfssatz:

### 3.5. Lemma

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $C \subset U$  kompakt. Dann gibt es offene Mengen  $V, W$  mit  $C \subset V \subset\subset W \subset U$  und eine  $C^\infty$ -Funktion  $f$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  mit  $0 \leq f \leq 1$ ,  $f(\mathbf{x}) = 1$  auf  $V$  und  $\text{Tr}(f) \subset W$ .

BEWEIS: Zu jedem Punkt  $\mathbf{x} \in C$  gibt es ein  $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x}) > 0$ , so dass die Kugel  $B_{2\varepsilon}(\mathbf{x})$  noch ganz in  $U$  enthalten ist. Die offenen Kugeln  $B_\varepsilon(\mathbf{x})$  überdecken die kompakte Menge  $C$ , und dafür reichen natürlich schon endlich viele Kugeln  $B_{\varepsilon_1}(\mathbf{x}_1), \dots, B_{\varepsilon_r}(\mathbf{x}_r)$ . Sei

$$V := B_{\varepsilon_1}(\mathbf{x}_1) \cup \dots \cup B_{\varepsilon_r}(\mathbf{x}_r) \quad \text{und} \quad W := B_{2\varepsilon_1}(\mathbf{x}_1) \cup \dots \cup B_{2\varepsilon_r}(\mathbf{x}_r).$$

Offensichtlich ist  $C \subset V \subset\subset W \subset U$ .

Nach dem Satz vom Hut gibt es für jedes  $\varrho \in \{1, \dots, r\}$  eine  $C^\infty$ -Funktion  $g_\varrho$  auf dem  $\mathbb{R}^n$ , so dass überall  $0 \leq g_\varrho \leq 1$  ist,  $g_\varrho(\mathbf{x}) \equiv 1$  auf  $B_{\varepsilon_\varrho}(\mathbf{x}_\varrho)$  und  $g_\varrho(\mathbf{x}) \equiv 0$  außerhalb  $B_{2\varepsilon_\varrho}(\mathbf{x}_\varrho)$ . Für  $\mathbf{x} \in U$  sei

$$g(\mathbf{x}) := \prod_{\varrho=1}^r (1 - g_\varrho(\mathbf{x})).$$

Dann ist  $g(\mathbf{x}) = 0$  auf  $V$  und  $= 1$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus W$ .

Nun sei

$$f_\varrho := \frac{g_\varrho}{g + g_1 + \dots + g_r}.$$

Dann ist  $f_\varrho$  eine  $C^\infty$ -Funktion auf dem  $\mathbb{R}^n$  und  $0 \leq f_\varrho \leq 1$ . Setzt man schließlich  $f := f_1 + \dots + f_r$ , so ist  $f = 1$  auf  $V$  und  $f = 0$  außerhalb von  $W$ . Dazwischen ist  $0 \leq f \leq 1$ . ■

### 3.6. Existenz einer „Teilung der Eins“

Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $\{U_1, \dots, U_N\}$  eine offene Überdeckung von  $K$ . Dann gibt es  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionen  $\varphi_i$  auf dem  $\mathbb{R}^n$ , so dass gilt:

1.  $0 \leq \varphi_i(\mathbf{x}) \leq 1$  für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und  $i = 1, \dots, N$ .

2.  $\sum_{i=1}^N \varphi_i(\mathbf{x}) = 1$  für  $\mathbf{x} \in K$ .

3. Für jedes  $i$  hat  $\varphi_i$  kompakten Träger in  $U_i$ .

**BEWEIS:** 1) Sei  $\{U_1, \dots, U_N\}$  die gegebene offene Überdeckung von  $K$ . Wir konstruieren induktiv eine neue Überdeckung.

**Anfang:** Die Menge

$$C_1 := K \setminus (U_2 \cup U_3 \cup \dots \cup U_N)$$

ist (als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge) kompakt und in  $U_1$  enthalten. Nach dem Lemma gibt es offene Mengen  $V_1, W_1$  mit  $C_1 \subset V_1 \subset\subset W_1 \subset U_1$ . Also ist auch  $\{V_1, U_2, \dots, U_N\}$  eine Überdeckung von  $K$ .

**Induktionsschritt:** Für  $i = 1, \dots, k$  seien schon offene Mengen  $V_i \subset\subset W_i \subset U_i$  konstruiert, so  $\{V_1, \dots, V_k, U_{k+1}, \dots, U_N\}$  eine offene Überdeckung von  $K$  ist. Nun sei

$$C_{k+1} := K \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_k \cup U_{k+2} \cup \dots \cup U_N).$$

Dann ist  $C_{k+1}$  kompakt und in  $U_{k+1}$  enthalten. Wieder findet man offene Mengen  $V_{k+1} \subset\subset W_{k+1} \subset U_{k+1}$  mit  $C_{k+1} \subset V_{k+1}$  ist. Dann kann man  $U_{k+1}$  durch  $V_{k+1}$  ersetzen.

2) Nach dem Lemma gibt es  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionen  $\psi_i$  auf dem  $\mathbb{R}^n$ , die = 1 auf  $V_i$  und = 0 außerhalb von  $W_i$  sind und sonst überall Werte zwischen 0 und 1 annehmen.

Dann ist

$$\psi := \prod_{i=1}^N (1 - \psi_i) + \psi_1 + \dots + \psi_N$$

eine überall positive  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktion, und wir setzen  $\varphi_i := \frac{\psi_i}{\psi}$ , für  $i = 1, \dots, N$ . Dann ist  $\varphi_i$  eine  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktion mit  $\text{Tr}(\varphi_i) \subset U_i$ ,  $0 \leq \varphi_i \leq 1$  und  $\varphi_1 + \dots + \varphi_N = 1$  auf  $K$ . ■

Sei nun  $S \subset \mathbb{R}^n$  eine kompakte glatte Hyperfläche. Dann gibt es eine offene Überdeckung  $\{U_1, \dots, U_N\}$  von  $S$  und parametrisierte Flächenstücke  $\varphi_j : P_j \rightarrow S_j := S \cap U_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Ist  $(e_j)$  eine Teilung der Eins zu der Überdeckung  $(U_j)$  und  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so setzen wir

$$\int_S f \, do := \sum_{j=1}^N \int_{S_j} e_j f \, do.$$

Der Träger von  $e_j f$  liegt in  $S_j$ , deshalb ist diese Definition sinnvoll.

Ist  $S$  nur ein parametrisiertes Flächenstück, so ist  $\int_{S_j} e_j f \, do = \int_S e_j f \, do$ , und man kann Summation und Integral vertauschen. Weil  $\sum_j e_j f = f$  ist, kommt in diesem Fall nichts Neues heraus.

Wir müssen aber im allgemeinen Fall zeigen, dass die Definition nicht von der Überdeckung, den Parametrisierungen und der Teilung der Eins abhängt.

Sei  $\{V_1, \dots, V_M\}$  eine zweite Überdeckung von  $S$ ,  $(\psi_i)$  ein System von Parametrisierungen  $\psi_i : Q_i \rightarrow \tilde{S}_i := V_i \cap S$  und  $(g_i)$  eine Teilung der Eins zur Überdeckung  $(V_i)$ . Dann ist

$$\sum_{j=1}^N e_j g_i = g_i, \quad \sum_{i=1}^M g_i e_j = e_j$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \int_{\tilde{S}_i} g_i f \, do &= \sum_{i=1}^M \int_{\tilde{S}_i} \sum_{j=1}^N e_j g_i f \, do = \sum_{i,j} \int_{\tilde{S}_i \cap S_j} e_j g_i f \, do \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{S_j} \sum_{i=1}^M g_i e_j f \, do = \sum_{j=1}^N \int_{S_j} e_j f \, do. \end{aligned}$$

Für die praktische Berechnung von Oberflächenintegralen ist der Einsatz einer Teilung der Eins meistens nicht zu gebrauchen, aber in Beweisen ist sie oft sehr nützlich.

### 3.4 Die Sätze von Gauß und Stokes

#### Definition

Sei  $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein glattes parametrisiertes Hyperflächenstück mit Spur  $S$ ,

$$\mathbf{N} := \frac{\varphi_{u_1} \times \dots \times \varphi_{u_{n-1}}}{\|\varphi_{u_1} \times \dots \times \varphi_{u_{n-1}}\|}$$

das durch  $\varphi$  bestimmte Einheits-Normalenfeld und  $\mathbf{F}$  ein stetiges Vektorfeld auf einer offenen Umgebung  $U$  von  $S$  im  $\mathbb{R}^n$ . Dann bezeichnet man das Integral

$$\int_{\varphi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do := \int_P \mathbf{F}(\varphi(\mathbf{u})) \cdot (\varphi_{u_1}(\mathbf{u}) \times \dots \times \varphi_{u_{n-1}}(\mathbf{u})) \, d\mu_{n-1}$$

als den **Fluss** des Vektorfeldes  $\mathbf{F}$  durch die Fläche  $S$ .

Wir untersuchen die Abhängigkeit des Integrals von der Parametrisierung. Dazu betrachten wir eine Parametertransformation  $\Phi : Q \rightarrow P$  und die Parametrisierung  $\psi = \varphi \circ \Phi$ . Nach der Kettenregel ist  $J_{\psi} = (J_{\varphi} \circ \Phi) \cdot J_{\Phi}$ .

Sei  $A := J_{\Phi}^{\top} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$ . Dann ist

$$\psi_{s_j} = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ji} \cdot (\varphi_{u_i} \circ \Phi) \text{ für } j = 1, \dots, n-1,$$

also

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{z}, \psi_{s_1}, \dots, \psi_{s_{n-1}}) &= \det\left(\mathbf{z}, \sum_{i_1=1}^{n-1} a_{1,i_1} \varphi_{u_{i_1}}, \dots, \sum_{i_{n-1}=1}^{n-1} a_{n-1,i_{n-1}} \varphi_{u_{i_{n-1}}}\right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} a_{1,i_1} \dots a_{n-1,i_{n-1}} \det(\mathbf{z}, \varphi_{u_{i_1}}, \dots, \varphi_{u_{i_{n-1}}}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \text{sign } \sigma \, a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n-1,\sigma(n-1)} \det(\mathbf{z}, \varphi_{u_1}, \dots, \varphi_{u_{n-1}}) \\ &= \det(A) \cdot \det(\mathbf{z}, \varphi_{u_1}, \dots, \varphi_{u_{n-1}}) \end{aligned}$$

und

$$\psi_{s_1} \times \dots \times \psi_{s_{n-1}} = (\det J_{\Phi}) \cdot \varphi_{u_1} \times \dots \times \varphi_{u_{n-1}}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\int_{\psi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do &= \int_Q \mathbf{F}(\psi(\mathbf{s})) \cdot (\psi_{s_1}(\mathbf{s}) \times \dots \times \psi_{s_{n-1}}(\mathbf{s})) \, d\mu_{n-1} \\
&= \int_Q \mathbf{F}(\varphi \circ \Phi(\mathbf{s})) \cdot ((\varphi_{u_1} \circ \Phi)(\mathbf{s}) \times \dots \times (\varphi_{u_{n-1}} \circ \Phi)(\mathbf{s})) \cdot \det(J_{\Phi}) \, d\mu_{n-1} \\
&= \text{sign}(\det J_{\Phi}) \cdot \int_P \mathbf{F}(\varphi(\mathbf{u})) \cdot (\varphi_{u_1}(\mathbf{u}) \times \dots \times \varphi_{u_{n-1}}(\mathbf{u})) \, d\mu_{n-1} \\
&= \text{sign}(\det J_{\Phi}) \cdot \int_{\varphi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do.
\end{aligned}$$

Da  $\Phi$  ein Diffeomorphismus ist, muss  $\det(J_{\Phi}(\mathbf{s})) \neq 0$  für alle  $\mathbf{s} \in Q$  sein. Da  $Q$  zusammenhängend ist, hat die Funktionaldeterminante konstantes Vorzeichen. Wir nennen  $\Phi$  **orientierungstreu**, falls  $\det(J_{\Phi}) > 0$  ist, und **orientierungsumkehrend**, falls  $\det(J_{\Phi}) < 0$  ist.

Durch die Festlegung eines Einheitsnormalenvektors erhält eine Hyperfläche in einem Punkt ihre Orientierung. Bei einem durch  $\varphi$  parametrisierten Hyperflächenstück geschieht das mittels

$$\mathbf{N} := \frac{\varphi_{u_1} \times \dots \times \varphi_{u_{n-1}}}{\|\varphi_{u_1} \times \dots \times \varphi_{u_{n-1}}\|}.$$

Beim glatten Rand eines Gebietes haben wir die äußere Normale auf andere Weise festgelegt. Im Folgenden müssen Parametrisierungen des Randes immer so gewählt werden, dass beide Orientierungen übereinstimmen.

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$  ein (stetig) differenzierbares Vektorfeld auf  $\Omega$ . Dann versteht man unter der **Divergenz** von  $\mathbf{F}$  die Funktion

$$\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \text{Spur}(J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})).$$

## 4.1. Beispiele

A. Sei  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x}$  auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist  $\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv n$ .

B. Sei  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}$  für  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Schreibt man als Abkürzung  $r := \|\mathbf{x}\|$ , so ist

$$r_{x_\nu} = x_\nu/r \quad \text{und} \quad (x_\nu \cdot r^{-2})_{x_\nu} = r^{-2} - 2x_\nu^2 \cdot r^{-4} \quad \text{für } \nu = 1, \dots, n,$$

also

$$\text{div } \mathbf{F} = r^{-4} \cdot \sum_{\nu=1}^n (r^2 - 2x_\nu^2) = r^{-4} \cdot (nr^2 - 2r^2) = (n-2)r^{-2}.$$

Ist speziell  $n = 2$ , so ist  $\text{div } \mathbf{F} = 0$ .

C. Sei  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_i$ . Dann ist  $\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ .

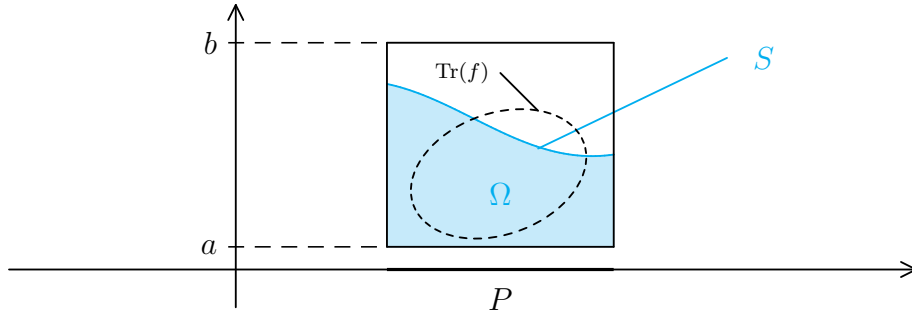
**4.2. Satz**

Sei  $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$  ein Parametergebiet,  $g : P \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion und  $a < g(\mathbf{u}) < b$  für alle  $\mathbf{u} \in P$ . Weiter sei

$$\Omega := \{(\mathbf{u}, u_n) \in P \times (a, b) : a < u_n < g(\mathbf{u})\},$$

$\mathbf{N}$  das äußere Normalenfeld auf  $S := \partial\Omega \cap (P \times (a, b))$  und  $f : P \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger. Für  $\mathbf{F}_i := f \cdot \mathbf{e}_i$  und  $i = 1, \dots, n$  gilt dann:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F}_i \, d\mu_n = \int_S \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{N} \, d\sigma.$$



BEWEIS: Sei  $I := (a, b)$  und  $\gamma(\mathbf{u}, u_n) := u_n - g(\mathbf{u})$ . Dann ist

$$\Omega = \{(\mathbf{u}, u_n) \in P \times I : \gamma(\mathbf{u}, u_n) < 0\},$$

$$\text{also } \mathbf{N}(\mathbf{u}, u_n) = \frac{\nabla \gamma(\mathbf{u}, u_n)}{\|\nabla \gamma(\mathbf{u}, u_n)\|} = \frac{(-\nabla g(\mathbf{u}), 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla g(\mathbf{u})\|^2}} \text{ für } (\mathbf{u}, u_n) \in \partial\Omega \cap (P \times I).$$

Für  $i = 1, \dots, n-1$  ist  $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{N} = f \cdot N_i = -(1 + \|\nabla g\|^2)^{-1/2} \cdot f \cdot \frac{\partial g}{\partial u_i}$ , außerdem ist  $\mathbf{F}_n \cdot \mathbf{N} = f \cdot N_n = (1 + \|\nabla g\|^2)^{-1/2} \cdot f$ .

Für  $(\mathbf{u}, z) \in P \times I$  sei  $F(\mathbf{u}, z) := \int_a^z f(\mathbf{u}, u_n) \, du_n$ . Dann ist

$$\frac{\partial F}{\partial u_i}(\mathbf{u}, z) = \int_a^z \frac{\partial f}{\partial u_i}(\mathbf{u}, u_n) \, du_n, \text{ für } i = 1, \dots, n-1, \text{ und } \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{u}, z) = f(\mathbf{u}, z).$$

Mit  $\varphi(\mathbf{u}) := (\mathbf{u}, g(\mathbf{u}))$  und  $h(\mathbf{u}) := \mathbf{F} \circ \varphi(\mathbf{u}) = \int_a^{g(\mathbf{u})} f(\mathbf{u}, u_n) \, du_n$  gilt dann

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u_i} \int_a^{g(\mathbf{u})} f(\mathbf{u}, u_n) du_n &= h_{u_i}(\mathbf{u}) = \frac{\partial(F \circ \varphi)}{\partial u_i}(\mathbf{u}) \\
&= \frac{\partial F}{\partial u_i}(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) + \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) \frac{\partial g}{\partial u_i}(\mathbf{u}) \\
&= \int_a^{g(\mathbf{u})} \frac{\partial f}{\partial u_i}(\mathbf{u}, u_n) du_n + f(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) \frac{\partial g}{\partial u_i}(\mathbf{u}).
\end{aligned}$$

Sei  $\pi_1(\mathbf{u}, u_n) := \mathbf{u}$ . Die Menge  $\pi_1(\text{Tr}(f)) \subset P$  ist kompakt, und für  $\mathbf{u} \in P \setminus \pi_1(\text{Tr}(f))$  und  $a < u_n < b$  ist  $f(\mathbf{u}, u_n) = 0$ . Also hat die Funktion  $h$  kompakten Träger in  $P$ , und man kann deshalb so tun, als wäre  $h$  auf einem Quader  $Q := [-R, R]^{n-1} \supset P$  definiert und  $\equiv 0$  auf  $Q \setminus P$ . Für  $i = 1, \dots, n-1$  ist deshalb

$$\begin{aligned}
\int_P \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \int_a^{g(\mathbf{u})} f(\mathbf{u}, u_n) du_n \right) d\mu_{n-1} &= \int_P \frac{\partial h}{\partial u_i}(\mathbf{u}) du_1 \dots du_{n-1} \\
&= \int_{-R}^R \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R \left( \frac{\partial h}{\partial u_i}(\mathbf{u}) du_i \right) du_1 \dots \widehat{du_i} \dots du_{n-1} \\
&= \int_{-R}^R \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R \left[ h(u_1, \dots, R, \dots, u_{n-1}) - h(\dots, -R, \dots) \right] du_1 \dots \widehat{du_i} \dots du_{n-1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Das Dach ( $\widehat{\phantom{x}}$ ) über  $du_i$  bedeutet, dass dieser Term weggelassen werden soll.

Im Folgenden benutzen wir die Tatsache, dass  $G_\varphi(\mathbf{u}) = 1 + \|\nabla f(\mathbf{u})\|^2$  ist. Für  $i = 1, \dots, n-1$  ist

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial u_i}(\mathbf{u}, u_n) d\mu_n &= \int_P \left( \int_a^{g(\mathbf{u})} \frac{\partial f}{\partial u_i}(\mathbf{u}, u_n) du_n \right) d\mu_{n-1} \\
&= \int_P \left( \frac{\partial}{\partial u_i} \int_a^{g(\mathbf{u})} f(\mathbf{u}, u_n) du_n - f(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) \frac{\partial g}{\partial u_i}(\mathbf{u}) \right) d\mu_{n-1} \\
&= - \int_P f(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) \frac{\partial g}{\partial u_i}(\mathbf{u}) d\mu_{n-1} \\
&= - \int_P f(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) \frac{\partial g}{\partial u_i}(\mathbf{u}) \frac{\sqrt{G_\varphi(\mathbf{u})}}{\sqrt{1 + \|\nabla g(\mathbf{u})\|^2}} d\mu_{n-1} \\
&= \int_P f(\varphi(\mathbf{u})) \cdot N_i(\varphi(\mathbf{u})) \sqrt{G_\varphi(\mathbf{u})} d\mu_{n-1} = \int_S \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{N} do.
\end{aligned}$$

Für jedes  $\mathbf{u} \in P$  hat die Funktion  $u_n \mapsto f(\mathbf{u}, u_n)$  kompakten Träger in  $(a, b)$ . Also ist

$$\int_a^{g(\mathbf{u})} \frac{\partial f}{\partial u_n}(\mathbf{u}, u_n) du_n = f(\mathbf{u}, g(\mathbf{u}))$$

und



$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial u_n}(\mathbf{u}, u_n) d\mu_n &= \int_P \int_a^{g(\mathbf{u})} \frac{\partial f}{\partial u_n}(\mathbf{u}, u_n) du_n d\mu_{n-1} \\
&= \int_P f(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) d\mu_{n-1} \\
&= \int_P f(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) \frac{\sqrt{G_{\varphi}(\mathbf{u})}}{\sqrt{1 + \|\nabla g(\mathbf{u})\|^2}} d\mu_{n-1} \\
&= \int_P f(\varphi(\mathbf{u})) \cdot N_n(\varphi(\mathbf{u})) \sqrt{G_{\varphi}(\mathbf{u})} d\mu_{n-1} = \int_S \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{N} do.
\end{aligned}$$

Mit diesem Satz haben wir die Hauptarbeit für den Gauß'schen Satz schon erledigt. Der lautet nun folgendermaßen.

### 4.3. Gauß'scher Integralsatz

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein glatt berandetes, beschränktes Gebiet,  $\mathbf{N}$  das äußere Normalenfeld auf  $\partial\Omega$ ,  $U = U(\bar{\Omega})$  eine offene Umgebung und  $\mathbf{F}$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf  $U$ . Dann ist

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} d\mu_n = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} do.$$

BEWEIS: Ist  $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{e}_1 + \dots + F_n \mathbf{e}_n$ , so ist

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} d\mu_n = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \operatorname{div}(F_i \mathbf{e}_i) d\mu_n \quad \text{und} \quad \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} do = \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} F_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{N} do.$$

Es reicht also, den Satz für ein Vektorfeld der Gestalt  $\mathbf{F} = f \mathbf{e}_i$  zu beweisen. Dabei können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $i = 1$  ist.

1) Hat  $f$  kompakten Träger in  $\Omega$ , so verschwindet natürlich das Randintegral. Andererseits ist  $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x_1}$ . Weil  $f$  auf den ganzen  $\mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar (durch Null) fortgesetzt werden kann und  $\Omega$  in einem Quader  $Q = [-R, R]^n$  liegt, ist

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_1} d\mu_n = \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R [f(R, x_2, \dots, x_n) - f(-R, x_2, \dots, x_n)] dx_2 \dots dx_n = 0.$$

2) Ist  $\Omega = \{(\mathbf{u}, u_n) \in P \times (a, b) : a < g(\mathbf{u}) < u_n\}$  und hat  $f$  kompakten Träger in  $P \times (a, b)$ , so folgt der Gauß'sche Satz aus dem vorigen Satz. Das bleibt auch richtig, wenn man die Koordinaten vertauscht.

3) Nun kommen wir zum allgemeinen Fall.

Ist  $\mathbf{x} \in \Omega$ , so gibt es eine Umgebung von  $\mathbf{x}$ , die ganz in  $\Omega$  liegt. Ist  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ , so gibt es – nach geeigneter Numerierung der Koordinaten – ein Parametergebiet  $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ,

ein Intervall  $I = (a, b)$  und eine Funktion  $g : P \rightarrow I$ , so dass  $\Omega \cap (P \times I) = \{(\mathbf{u}, u_n) \in P \times I : a < u_n < g(\mathbf{u})\}$  ist.

Da  $\bar{\Omega}$  kompakt ist, kann man endlich viele Umgebungen  $U_\nu$  finden,  $\nu = 1, \dots, N$ , die entweder ganz in  $\Omega$  liegen oder von der Gestalt  $U_\nu = P_\nu \times (a_\nu, b_\nu)$  mit  $U_\nu \cap \Omega = \{(\mathbf{u}, u_n) \in P_\nu \times (a_\nu, b_\nu) : a_\nu < u_n < g_\nu(\mathbf{u})\}$  sind (letzteres evtl. nach Ummummerierung der Koordinaten).

Sei  $(\varrho_\nu)$  eine passende Teilung der Eins zu der Überdeckung  $(U_\nu)$ . Dann hat  $\varrho_\nu f$  jeweils kompakten Träger in  $U_\nu$ . Nach (1) und (2) gilt der Satz für jedes Vektorfeld  $\varrho_\nu \mathbf{F} = (\varrho_\nu f) \mathbf{e}_1$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} d\mu_n &= \sum_{\nu=1}^N \int_{\Omega} \operatorname{div}(\varrho_\nu \mathbf{F}) d\mu_n \\ &= \sum_{\nu=1}^N \int_{\partial\Omega} \varrho_\nu \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} do = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} do. \end{aligned}$$

■

#### 4.4. Anwendung

Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein glatt berandetes, beschränktes Gebiet, so ist

$$\mu_n(\Omega) = \frac{1}{n} \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \cdot \mathbf{N} do.$$

Speziell besteht zwischen dem Volumen der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel und dem Flächeninhalt ihres Randes die Beziehung  $\mu_n(B_1(\mathbf{0})) = \frac{1}{n} A_{n-1}(S^{n-1})$ .

BEWEIS: 1) Wir benutzen das Vektorfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \mathbf{x}$ . Dann ist  $\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv n$ , also

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} d\mu_n = n \cdot \mu_n(\Omega).$$

Damit folgt die erste Behauptung sofort aus dem Gauß'schen Integralsatz.

Ist  $\Omega = B_1(\mathbf{0})$  (und damit  $\partial\Omega = S^{n-1}$ ), so ist  $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  auf dem gesamten Rand, also  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 \equiv 1$  und

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \cdot \mathbf{N} do = \int_{\partial\Omega} do = A_{n-1}(S^{n-1}).$$

■

## 4.5. Beispiel

Wir betrachten das Vektorfeld

$$\mathbf{F}(x, y, z) := (x^3 + (1+x)y^2 + (x-1)z^2, y^3 + y(x^2 + z^2) + e^{xz}, z^3 + z(x^2 + y^2) + \sin(xy))$$

und wollen  $\int_{\partial B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do$  für  $B := B_1(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^3$  berechnen.

Die direkte Berechnung dürfte in diesem Fall recht unangenehm werden. Deshalb benutzen wir den Gauß'schen Integralsatz: Es ist

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = (3x^2 + y^2 + z^2) + (3y^2 + x^2 + z^2) + (3z^2 + x^2 + y^2) = 5(x^2 + y^2 + z^2).$$

Zur Berechnung des Integrals verwenden wir Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do &= \int_B \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mu_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 5r^2 \cdot r^2 \cos \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta \\ &= 5 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^4 \cos \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta = 10\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{r^5}{5} \right) \Big|_0^1 \cos \theta \, d\theta \\ &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta = 4\pi. \end{aligned}$$

Das erwies sich als unerwartet einfach.

Ein Spezialfall des Gauß'schen Satzes ist der Satz von Green.

## 4.6. Satz von Green

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Sind  $f, g$  zwei stetig differenzierbare Funktionen auf einer Umgebung von  $\overline{\Omega}$ , so gilt:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\mu_2 = \int_{\partial\Omega} (f \, dx + g \, dy).$$

BEWEIS: Das Vektorfeld  $\mathbf{F} := (g, -f)$  ist auf einer Umgebung  $U = U(\overline{\Omega})$  stetig differenzierbar. Der Gauß'sche Integralsatz besagt dann:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mu_2 = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do.$$

Dabei ist  $\operatorname{div} \mathbf{F} = g_x - f_y$ , was die gewünschte linke Seite ergibt.

Wir können annehmen, dass  $\partial\Omega$  eine glatte Parametrisierung  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  besitzt. Dabei sei  $\alpha$  so orientiert, dass  $\mathbf{N} = \frac{(\alpha'_2, -\alpha'_1)}{\|\alpha'\|}$  das äußere Normaleneinheitsvektorfeld ist. Dann liegt  $\Omega$  links vom Weg, und für jede stetige Funktion  $h$  auf  $\partial\Omega$  ist

$$\int_{\partial\Omega} h \, do = \int_a^b h(\boldsymbol{\alpha}(t)) \sqrt{G_{\boldsymbol{\alpha}}(t)} \, dt = \int_a^b h(\boldsymbol{\alpha}(t)) \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| \, dt.$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do &= \int_a^b \frac{f(\boldsymbol{\alpha}(t))\alpha'_1(t) + g(\boldsymbol{\alpha}(t))\alpha'_2(t)}{\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|} \cdot \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| \, dt \\ &= \int_a^b \left( f(\boldsymbol{\alpha}(t))\alpha'_1(t) + g(\boldsymbol{\alpha}(t))\alpha'_2(t) \right) \, dt \\ &= \int_{\boldsymbol{\alpha}} (f \, dx + g \, dy) = \int_{\partial\Omega} (f \, dx + g \, dy). \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. ■

### Definition

Sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein glatt berandetes Gebiet,  $U = U(\overline{G})$  eine offene Umgebung und  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine stetig differenzierbare Abbildung, so dass  $\varphi|_G : G \rightarrow S$  ein parametrisiertes Flächenstück ist.

Ist  $\varphi$  auf  $\overline{G}$  injektiv und außerdem  $\text{rg } J_{\varphi}(\mathbf{u}) = 2$  für alle  $\mathbf{u} \in \overline{G}$ , so nennen wir  $S$  ein **(glattes) Flächenstück mit glattem Rand**.

Die Menge  $bS := \varphi(\partial G)$  bezeichnen wir als den **Rand** von  $S$ .

### 4.7. Satz von Stokes

Sei  $S \subset \mathbb{R}^3$  ein glattes Flächenstück mit glattem Rand,  $\mathbf{F}$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Umgebung von  $S$  und  $\omega_{\mathbf{F}} = F_1 \, dx_1 + F_2 \, dx_2 + F_3 \, dx_3$ . Außerdem sei  $\mathbf{N}$  das durch die Parametrisierung von  $S$  festgelegte Einheitsnormalenfeld, und  $bS$  sei dazu passend orientiert. Dann gilt:

$$\int_S \mathbf{rot} \, \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do = \int_{bS} \omega_{\mathbf{F}}.$$

Sei  $\varphi : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Parametrisierung von  $S$  und  $\boldsymbol{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Parametrisierung von  $\partial G$ , so dass  $G$  links vom Weg liegt. Dann ist  $\boldsymbol{\beta} := \varphi \circ \boldsymbol{\alpha}$  eine passende Parametrisierung von  $bS$ .

Wir brauchen noch eine Hilfsaussage.

### 4.8. Lemma

Sei  $U \subset \mathbb{R}^3$  offen und  $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

Dann ist  $\det(\mathbf{rot} \, \mathbf{F}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (J_{\mathbf{F}}^{\top} - J_{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{b}^{\top}$  für alle Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ .

BEWEIS: Es genügt, für  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  Einheitsvektoren einzusetzen. Ist  $(i, j, k)$  eine zyklische Vertauschung von  $(1, 2, 3)$ , so ist

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{rot} \mathbf{F}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) &= (\mathbf{rot} \mathbf{F}) \cdot (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) = (\mathbf{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_k \\ &= (\mathbf{rot} \mathbf{F})_k = (F_j)_{x_i} - (F_i)_{x_j} \end{aligned}$$

und andererseits

$$\mathbf{e}_i \cdot (J_{\mathbf{F}}^{\top} - J_{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{e}_j^{\top} = (J_{\mathbf{F}})_{ji} - (J_{\mathbf{F}})_{ij} = (F_j)_{x_i} - (F_i)_{x_j}.$$

■

Für später notieren wir noch:

$$\mathbf{a} \cdot (J_{\mathbf{F}}^{\top} - J_{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{b}^{\top} = \mathbf{b} \cdot J_{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{a}^{\top} - \mathbf{a} \cdot J_{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{b}^{\top} = \mathbf{b} \cdot (J_{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{a}^{\top}) - \mathbf{a} \cdot (J_{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{b}^{\top}).$$

Nun kommen wir zum

BEWEIS des Satzes von Stokes:

Nach Kettenregel ist  $\beta'(t) = \varphi_u(\alpha(t)) \cdot \alpha'_1(t) + \varphi_v(\alpha(t)) \cdot \alpha'_2(t)$ , also

$$\begin{aligned} \int_{bS} \omega_{\mathbf{F}} &= \int_a^b \mathbf{F}(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(\varphi \circ \alpha(t)) \cdot (\varphi_u(\alpha(t)) \cdot \alpha'_1(t) + \varphi_v(\alpha(t)) \cdot \alpha'_2(t)) dt \\ &= \int_a^b (X(\alpha(t)), Y(\alpha(t))) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= \int_{\partial G} (X(u, v) du + Y(u, v) dv) \\ &= \int_G (Y_u(u, v) - X_v(u, v)) du dv, \quad (\text{Green'scher Satz}) \end{aligned}$$

mit den durch

$$\begin{aligned} X(u, v) &:= (\mathbf{F} \circ \varphi(u, v)) \cdot \varphi_u(u, v) \\ \text{und } Y(u, v) &:= (\mathbf{F} \circ \varphi(u, v)) \cdot \varphi_v(u, v) \end{aligned}$$

definierten Funktionen  $X, Y : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Nach der Produktregel ist

$$\begin{aligned} Y_u &= (\mathbf{F} \circ \varphi)_u \cdot \varphi_v + (\mathbf{F} \circ \varphi) \cdot \varphi_{uv} \\ \text{und } X_v &= (\mathbf{F} \circ \varphi)_v \cdot \varphi_u + (\mathbf{F} \circ \varphi) \cdot \varphi_{uv}, \end{aligned}$$

also

$$\int_{bS} \omega_{\mathbf{F}} = \int_G ((\mathbf{F} \circ \varphi)_u \cdot \varphi_v - (\mathbf{F} \circ \varphi)_v \cdot \varphi_u) du dv.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
 \int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do &= \int_G ((\mathbf{rot} \mathbf{F}) \circ \varphi) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v) \, du \, dv \\
 &= \int_G \det((\mathbf{rot} \mathbf{F}) \circ \varphi, \varphi_u, \varphi_v) \, du \, dv \\
 &= \int_G \left( \varphi_v \cdot ((J_{\mathbf{F}} \circ \varphi) \cdot \varphi_u^\top) - \varphi_u \cdot ((J_{\mathbf{F}} \circ \varphi) \cdot \varphi_v^\top) \right) \, du \, dv \\
 &= \int_G \left( \varphi_v \cdot (\mathbf{F} \circ \varphi)_u - \varphi_u \cdot (\mathbf{F} \circ \varphi)_v \right) \, du \, dv.
 \end{aligned}$$

Damit ist alles bewiesen. ■

#### 4.9. Folgerung

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein glatt berandetes Gebiet und  $\mathbf{F}$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer Umgebung von  $\partial\Omega$ . Dann ist  $\int_{\partial\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do = 0$ .

BEWEIS: Sei  $S := \partial\Omega$  und  $S_0 \subset S$  ein kleines Flächenstück mit glattem Rand. Dann ist

$$\begin{aligned}
 \int_{S_0} \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do &= \int_{bS_0} \omega_{\mathbf{F}} \\
 \text{und} \quad \int_{S \setminus S_0} \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, do &= - \int_{bS_0} \omega_{\mathbf{F}}.
 \end{aligned}$$

Addiert man die beiden Gleichungen, so erhält man das gewünschte Ergebnis. ■