

## 2.5 Pfaffsche Formen

### Definition

Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  offen. Eine **Pfaffsche Form** oder **Differentialform vom Grad 1** auf  $B$  ist eine beliebig oft differenzierbare Funktion  $\omega : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die im zweiten Argument linear ist. (Gelegentlich lässt man auch zu, dass  $\omega$  nur eine  $\mathcal{C}^k$ -Funktion ist,  $k \geq 0$ ).

Durch  $\omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) := \omega(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  definiert eine Pfaffsche Form  $\omega$  auf  $B$  in jedem Punkt  $\mathbf{x} \in B$  ein Element  $\omega_{\mathbf{x}}$  des Dualraumes  $(\mathbb{R}^n)^* = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ .

Pfaffsche Formen können addiert und mit (beliebig oft) differenzierbaren Funktionen multipliziert werden:

$$\begin{aligned}(\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) &:= \omega_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \omega_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \\(f \cdot \omega)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) &:= f(\mathbf{x}) \cdot \omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}).\end{aligned}$$

Ist  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebig oft differenzierbare Funktion, so wird das **totale Differential**  $df : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$df(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := Df(\mathbf{x})(\mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_{\nu}}(\mathbf{x}) v_{\nu}.$$

**Bemerkung:** Setzt man  $f$  nur als  $k$ -mal stetig differenzierbar voraus, so ist  $df$  nur  $(k-1)$ -mal stetig differenzierbar.

Speziell ist  $dx_i$  für  $i = 1, \dots, n$  eine Pfaffsche Form, mit  $dx_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = v_i$ .

Ist  $\mathbf{F} : B \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine beliebig oft differenzierbare Abbildung, so nennt man  $\mathbf{F}$  auch ein **Vektorfeld** auf  $B$ . Diesem Vektorfeld wird durch

$$\omega_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$$

eine Pfaffsche Form  $\omega_{\mathbf{F}}$  zugeordnet.

### 5.1. Satz

Sei  $\omega$  eine Pfaffsche Form auf  $B$ . Dann gibt es eindeutig bestimmte, beliebig oft differenzierbare Funktionen  $\omega_1, \dots, \omega_n$  auf  $B$ , so dass gilt:

$$\omega = \omega_1 \cdot dx_1 + \dots + \omega_n \cdot dx_n.$$

**BEWEIS:** a) Existenz: Durch  $\omega_i(\mathbf{x}) := \omega(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)$  wird eine beliebig oft differenzierbare Funktion  $\omega_i : B \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. Sei  $\varphi := \omega_1 dx_1 + \dots + \omega_n dx_n$ . Dann gilt für  $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in B \times \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}) &= \omega_1(\mathbf{x}) \cdot dx_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \cdots + \omega_n(\mathbf{x}) \cdot dx_n(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \\
&= \omega(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1)v_1 + \cdots + \omega(\mathbf{x}, \mathbf{e}_n)v_n \\
&= \omega(\mathbf{x}, v_1\mathbf{e}_1 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n) = \omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}).
\end{aligned}$$

Also ist  $\omega = \varphi$ .

b) Eindeutigkeit: Ist  $\omega_1 dx_1 + \cdots + \omega_n dx_n = 0$ , so gilt für jedes  $\mathbf{x} \in B$  und jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$ :

$$\begin{aligned}
0 &= (\omega_1 dx_1 + \cdots + \omega_n dx_n)(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) \\
&= \omega_1(\mathbf{x}) \cdot dx_1(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) + \cdots + \omega_n(\mathbf{x}) \cdot dx_n(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) \\
&= \omega_1(\mathbf{x}) \cdot \delta_{1i} + \cdots + \omega_n(\mathbf{x}) \cdot \delta_{ni} = \omega_i(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Daraus folgt: Ist  $\omega_1 dx_1 + \cdots + \omega_n dx_n = \omega_1^* dx_1 + \cdots + \omega_n^* dx_n$ , so muss  $\omega_i = \omega_i^*$  für  $i = 1, \dots, n$  gelten. ■

Speziell gilt:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n,$$

denn es ist  $df(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_i = f_{x_i}(\mathbf{x})$ .

Und wenn  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$  ein Vektorfeld auf  $B$  ist, dann ist  $\omega_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_i = F_i$ , also

$$\omega_{\mathbf{F}} = F_1 \cdot dx_1 + \cdots + F_n \cdot dx_n.$$

Deshalb ist tatsächlich **jede** Pfaffsche Form auf  $B$  von der Gestalt  $\omega = \omega_{\mathbf{F}}$ .

Sei  $U \subset \mathbb{R}^p$  offen und  $\Phi : U \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$  eine (beliebig oft) differenzierbare Abbildung und  $\omega$  eine Pfaffsche Form auf  $B$ . Dann kann man  $\omega$  mit Hilfe von  $\Phi$  zurückholen, zur Pfaffschen Form  $\Phi^*\omega$  auf  $U$ , durch

$$\Phi^*\omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := \omega(\Phi(\mathbf{x}), D\Phi(\mathbf{x})(\mathbf{v})).$$

Dabei benutzen wir die totale Ableitung von  $\Phi$  in  $\mathbf{x}$ , die ja als eine lineare Abbildung  $D\Phi(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert wurde. So ist auch  $\Phi^*\omega$  im zweiten Argument linear.

## 5.2. Satz

Das Zurückholen von Pfaffschen Formen genügt den folgenden Regeln:

1.  $\Phi^*(\omega_1 + \omega_2) = \Phi^*\omega_1 + \Phi^*\omega_2$  und  $\Phi^*(f \cdot \omega) = (f \circ \Phi) \cdot \Phi^*\omega$ .
2.  $\Phi^*(df) = d(f \circ \Phi)$ , insbesondere  $\Phi^*(dx_i) = d\Phi_i$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ .
3. Ist  $V \subset \mathbb{R}^k$  offen und  $\Psi : V \rightarrow U$  eine weitere differenzierbare Abbildung, so ist

$$(\Phi \circ \Psi)^*\omega = \Psi^*(\Phi^*\omega).$$

BEWEIS: 1) Die Linearität ist trivial, für Funktionen  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

$$\Phi^*(f \cdot \omega)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = (f \cdot \omega)(\Phi(\mathbf{x}), D\Phi(\mathbf{x})\mathbf{v}) = (f \circ \Phi(\mathbf{x})) \cdot \Phi^*\omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

2) Nach Kettenregel ist

$$\begin{aligned} \Phi^*(df)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) &= df(\Phi(\mathbf{x}), D\Phi(\mathbf{x})\mathbf{v}) = Df(\Phi(\mathbf{x})) \circ D\Phi(\mathbf{x})\mathbf{v} \\ &= D(f \circ \Phi)(\mathbf{x})\mathbf{v} = d(f \circ \Phi)(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

3) Schließlich ist

$$\begin{aligned} ((\Phi \circ \Psi)^*\omega)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) &= \omega((\Phi \circ \Psi)(\mathbf{x}), D(\Phi \circ \Psi)(\mathbf{x})\mathbf{v}) \\ &= \omega(\Phi(\Psi(\mathbf{x})), D\Phi(\Psi(\mathbf{x}))(D\Psi(\mathbf{x})\mathbf{v})) \\ &= (\Phi^*\omega)(\Psi(\mathbf{x}), D\Psi(\mathbf{x})\mathbf{v}) = (\Psi^*(\Phi^*\omega))(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. ■

### 5.3. Beispiele

A. Ist  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, so ist

$$df = a dt, \quad \text{mit } a(t) = df(t, 1) = f'(t) \cdot 1 = f'(t).$$

Die Gleichung  $df = f' dt$  bringt zum Ausdruck, dass die beiden vektoriel-  
len Größen  $df$  und  $dt$  linear abhängig sind. Physiker machen daraus durch  
Division die Gleichung  $f' = \frac{df}{dt}$ . Damit folgen sie der Tradition von Leibniz.

B. Die Abbildung  $\Phi : \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei gegeben durch

$$\Phi(r, \theta) := (\Phi_1(r, \theta), \Phi_2(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (\text{ebene Polarkoordinaten})$$

Ist  $\omega = y dx - x dy$ , so ist

$$\begin{aligned} \Phi^*\omega &= (y \circ \Phi) d\Phi_1 - (x \circ \Phi) d\Phi_2 \\ &= \Phi_2((\Phi_1)_r dr + (\Phi_1)_\theta d\theta) - \Phi_1((\Phi_2)_r dr + (\Phi_2)_\theta d\theta) \\ &= r \sin \theta (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) - r \cos \theta (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \\ &= -r^2 d\theta. \end{aligned}$$

#### Definition

Sei  $\alpha : [a, b] \rightarrow B$  ein stetig differenzierbarer Weg und  $\omega$  eine Pfaffsche Form auf  $B$ . Dann definiert man das Integral von  $\omega$  über  $\alpha$  durch

$$\int_{\alpha} \omega := \int_a^b \omega(\alpha(t), \alpha'(t)) dt.$$

Ist  $\alpha(t) = t$  die identische Abbildung von  $[a, b]$  nach  $\mathbb{R}$  und  $\omega = f dt$  eine Pfaffsche Form auf  $\mathbb{R}$ , so ist  $\omega(\alpha(t), \alpha'(t)) = \omega(t, 1) = f(t)$ , also  $\int_{\alpha} \omega = \int_a^b f(t) dt$  das gewöhnliche Integral.

Im allgemeinen Fall ist  $\alpha^* \omega(t, 1) = \omega(\alpha(t), D\alpha(t)(1)) = \omega(\alpha(t), \alpha'(t))$ , also

$$\alpha^* \omega = \omega(\alpha(t), \alpha'(t)) dt \quad \text{und} \quad \int_{\alpha} \omega = \int_{\text{id}_{[a,b]}} \alpha^* \omega.$$

Ist  $\omega = \omega_{\mathbf{F}}$ , für ein differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{F}$ , so ist  $\alpha^* \omega_{\mathbf{F}} = \mathbf{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$ , also

$$\int_{\alpha} \omega_{\mathbf{F}} = \int_a^b \mathbf{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt.$$

In der älteren Literatur nennt man so ein Integral auch ein **Kurvenintegral 2. Art** (im Gegensatz zu dem bei der Berechnung der Bogenlänge auftretenden *Kurvenintegral 1. Art*).

Ist  $\omega = df$  ein totales Differential, so ist  $\alpha^* \omega = d(f \circ \alpha) = (f \circ \alpha)' dt$  und

$$\int_{\alpha} df = \int_a^b (f \circ \alpha)'(t) dt = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

Ist  $\alpha$  ein Integrationsweg, also stückweise stetig differenzierbar, so gibt es eine Zerlegung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ , so dass die Einschränkung  $\alpha_i$  von  $\alpha$  auf das Teilintervall  $[t_{i-1}, t_i]$  stetig differenzierbar ist, für  $i = 1, \dots, N$ . Dann setzt man

$$\int_{\alpha} \omega := \sum_{i=1}^N \int_{\alpha_i} \omega.$$

## 5.4. Eigenschaften des Kurvenintegrals

Sei  $\alpha : [a, b] \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$  ein Integrationsweg.

- $$\int_{\alpha} (c_1 \cdot \omega_1 + c_2 \cdot \omega_2) = c_1 \cdot \int_{\alpha} \omega_1 + c_2 \cdot \int_{\alpha} \omega_2,$$

für Pfaffsche Formen  $\omega_1, \omega_2$  und Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

- Ist  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  eine Parametertransformation (also differenzierbar und bijektiv), so ist

$$\int_{\alpha \circ \varphi} \omega = \pm \int_{\alpha} \omega,$$

je nachdem, ob  $\varphi'(x) > 0$  oder  $< 0$  für alle  $x \in [c, d]$  ist.

BEWEIS: 1) ist trivial.

2) Ist  $\varphi' > 0$ , so ist

$$\begin{aligned} \int_{\alpha \circ \varphi} \omega &= \int_c^d \omega(\alpha \circ \varphi(t), (\alpha \circ \varphi)'(t)) dt \\ &= \int_c^d \omega(\alpha(\varphi(t)), \alpha'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)) dt \\ &= \int_a^b \omega(\alpha(s), \alpha'(s)) ds = \int_{\alpha} \omega. \end{aligned}$$

Ist dagegen  $\varphi' < 0$ , so ist  $\varphi$  streng monoton fallend und vertauscht die Integralgrenzen. Dann erhält man das zusätzliche Minuszeichen. ■

## 5.5. Beispiele

A. Ist  $\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$  und  $\alpha(t) := (R \cos t, R \sin t)$  für  $0 \leq t \leq 2\pi$ , so ist

$$\begin{aligned} \alpha^* \omega &= \frac{-R \sin t}{R^2} (-R \sin t) dt + \frac{R \cos t}{R^2} (R \cos t) dt \\ &= (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = dt, \end{aligned}$$

$$\text{also } \int_{\alpha} \omega = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

B. Auf der rechten Halbebene  $H_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$  ist  $\omega = df$ , mit  $f(x, y) := \arctan(y/x)$ . Nun sei  $\beta(t) := (2 + \cos t, \sin t)$ . Weil die Spur von  $\beta$  in  $H_+$  liegt, ist

$$\int_{\beta} \omega = \int_{\beta} df = \int_0^{2\pi} (f \circ \beta)'(t) dt = f(3, 0) - f(3, 0) = 0.$$

## 5.6. Hauptsatz über Kurvenintegrale

Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $\omega$  eine Pfaffsche Form auf  $G$ . Dann sind die folgenden Aussagen über  $\omega$  äquivalent:

1.  $\omega$  ist ein Differential, d.h. es gibt eine differenzierbare Funktion  $f$  auf  $G$ , so dass  $\omega = df$  ist.

2. Ist  $\alpha : [a, b] \rightarrow G$  ein **geschlossener** Integrationsweg, so ist  $\int_{\alpha} \omega = 0$ .

Der Beweis verläuft genauso wie beim entsprechenden Satz über komplexe Kurvenintegrale. Der Vollständigkeit halber sei er hier aber noch einmal ausgeführt.

BEWEIS:

1  $\implies$  2: Ist  $\omega = df$ , so gilt:

$$\int_{\alpha} \omega = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = 0.$$

3  $\implies$  1: Sei  $\mathbf{p} \in G$  ein fest gewählter Punkt. Ist  $\mathbf{x} \in G$ , so gibt es einen Integrationsweg  $\alpha$ , der  $\mathbf{p}$  innerhalb von  $G$  mit  $\mathbf{x}$  verbindet. Wir setzen  $f(\mathbf{x}) := \int_{\alpha} \omega$ .

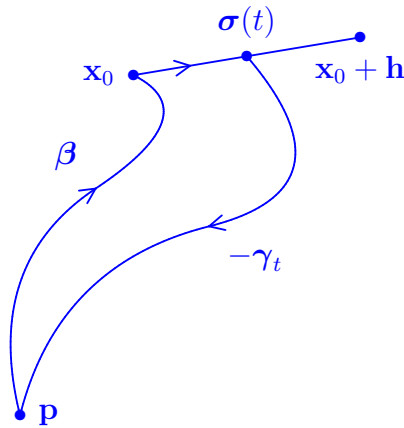
Ist  $\beta$  ein weiterer Weg von  $\mathbf{p}$  nach  $\mathbf{x}$ , so stellt  $\alpha - \beta$  einen geschlossenen Integrationsweg dar, der bei  $\mathbf{p}$  beginnt und endet. Nach Voraussetzung ist

$$\int_{\alpha - \beta} \omega = 0, \text{ also } \int_{\alpha} \omega = \int_{\beta} \omega.$$

Damit ist die Funktion  $f$  auf  $G$  „wohldefiniert“, d.h. unabhängig vom benutzten Weg  $\alpha$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $df = \omega$  ist.

Sei  $\mathbf{x}_0 \in G$  beliebig und  $\mathbf{h}$  irgend ein Richtungsvektor. Weiter sei  $\sigma(s) := \mathbf{x}_0 + s\mathbf{h}$  (für  $s \in [0, 1]$ ) die Verbindungsstrecke von  $\mathbf{x}_0$  nach  $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$ ,  $\sigma_t := \sigma|_{[0,t]}$  die Verbindungsstrecke von  $\mathbf{x}_0$  und  $\sigma(t)$ ,  $\beta$  ein Weg von  $\mathbf{p}$  nach  $\mathbf{x}_0$  und  $\gamma_t$  ein Weg von  $\mathbf{p}$  nach  $\sigma(t)$ . Dann ist  $\beta + \sigma_t - \gamma_t$  für jedes  $t \in [0, 1]$  geschlossen, und es gilt:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) &= \int_{\gamma_t} \omega - \int_{\beta} \omega \\ &= \int_{\sigma_t} \omega = \int_0^t \sigma_t^* \omega. \end{aligned}$$



Schreiben wir  $\sigma_t^* \omega = g(s) ds$ , so ist

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \int_0^t g(s) ds,$$

und nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein  $c = c(t) \in [0, t]$ , so dass gilt:

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = g(c) \cdot (t - 0) = (\sigma_t^* \omega)(c, 1) = \omega(\mathbf{x}_0 + c\mathbf{h}, \mathbf{h}) \cdot t,$$

also

$$\begin{aligned} df(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) &= Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = D_{\mathbf{h}}f(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \omega(\mathbf{x}_0 + c(t) \cdot \mathbf{h}, \mathbf{h}) = \omega(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}). \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass  $df = \omega$  ist. ■

**Definition**

Ist  $\mathbf{F}$  ein Vektorfeld auf  $B \subset \mathbb{R}^n$  und  $f$  eine Funktion auf  $B$  mit  $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  für alle  $\mathbf{x} \in B$ , so nennt man  $f$  ein **Potential** für  $\mathbf{F}$ .

Ein Vektorfeld  $\mathbf{F}$  besitzt genau dann ein Potential, wenn die zugehörige Pfaffsche Form  $\omega_{\mathbf{F}}$  ein totales Differential ist.

**Definition**

Eine stetige Pfaffsche Form  $\omega = f dx + g dy$  auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^2$  heißt **singulär** in  $(x_0, y_0)$ , falls  $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$  ist. Andernfalls heißt  $\omega$  in  $(x_0, y_0)$  **regulär**.

**Definition**

Ein glatter, stetig differenzierbarer Weg  $\alpha : I \rightarrow G$  heißt **Lösung** der Gleichung  $\omega = 0$ , wenn  $\alpha^* \omega = 0$  ist.

„glatt“ bedeutet:  $\alpha'(t) \neq 0$  für alle  $t$ . Ob  $\alpha$  Lösung ist, hängt nicht von der Parametrisierung ab.

Sei nun  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet und  $y' = f(x, y)$  eine Differentialgleichung auf  $G$ . Dann liegt es nahe, der DGL die Pfaffsche Form  $\omega = dy - f(x, y) dx$  zuzuordnen. Ist  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung der Differentialgleichung, so ist die zugehörige Integralkurve gegeben durch  $\alpha(t) := (t, \varphi(t))$ . Offensichtlich ist  $\alpha$  glatt und  $\alpha^* \omega = (\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))) dt = 0$ , also  $\alpha$  eine Lösung der Gleichung  $\omega = 0$ .

Sei umgekehrt  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : I \rightarrow G$  eine Lösung von  $\omega = 0$ , also

$$\gamma_2'(t) - f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_1'(t) \equiv 0.$$

Wäre  $\gamma_1'(t_0) = 0$ , so wäre auch  $\gamma_2'(t_0) = 0$ . Das steht aber im Widerspruch dazu, dass  $\gamma$  glatt sein soll. Also ist  $\gamma_1'(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$ . Damit ist  $\gamma_1 : I \rightarrow J := \gamma_1(I)$  umkehrbar stetig differenzierbar (und  $J$  wieder ein Intervall). Wir schreiben

$$\gamma \circ \gamma_1^{-1}(s) = (s, \psi(s)), \text{ für } s \in J.$$

Weil  $(\psi'(s) - f(s, \psi(s))) ds = (\gamma \circ \gamma_1^{-1})^* \omega = (\gamma_1^{-1})^* (\gamma^* \omega) = 0$  ist, ist  $\psi$  eine Lösung der Differentialgleichung.

**5.7. Satz**

Sei  $\omega$  eine stetige Pfaffsche Form auf  $G \subset \mathbb{R}^2$  und  $h : G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und ohne Nullstellen. Dann haben die Gleichungen  $\omega = 0$  und  $h \cdot \omega = 0$  die gleichen Lösungen.

BEWEIS: Ist  $\alpha$  Lösungskurve der Gleichung  $\omega = 0$ , so ist  $\alpha^*\omega = 0$  und daher auch  $\alpha^*(h\omega) = (h \circ \alpha) \cdot \alpha^*\omega = 0$ . In der anderen Richtung schließt man analog, unter Verwendung von  $1/h$ . ■

## 5.8. Beispiele

- A. Sei  $\omega := (x-1)dy + (y+1)dx$ . Die Kurven  $\alpha(t) := (1, t)$  und  $\beta(t) := (t, -1)$  sind offensichtlich Lösungen von  $\omega = 0$ . Man beachte, dass die senkrechte Gerade  $\alpha$  keine Lösung einer DGL sein kann.

Nun betrachten wir die Gleichung  $\omega = 0$  auf

$$G := \{(x, y) : x > 1 \text{ und } y > -1\}.$$

Dort ist  $x-1 \neq 0$ , wir können also auch nach Lösungen von  $(x-1)^{-1}\omega = 0$  fragen. Aber die sind zugleich die Lösungen der DGL

$$y' = -\frac{y+1}{x-1} = f(x)g(y) \text{ mit } f(x) := 1/(x-1) \text{ und } g(y) := -(y+1).$$

$F(x) = \ln(x-1)$  ist Stammfunktion von  $f(x)$ ,  $G(y) := -\ln(y+1)$  Stammfunktion von  $1/g(y)$ . Daher ist  $y(x) = G^{-1}(F(x) + c) = e^{-(F(x)+c)} - 1 = \frac{C}{x-1} - 1$  die allgemeine Lösung.

In der mehr ingenieurwissenschaftlich geprägten Literatur löst man das Problem gerne wie folgt: Aus der Gleichung  $(x-1)dy + (y+1)dx = 0$  wird  $\frac{dy}{-(y+1)} = \frac{dx}{x-1}$ , also

$$-\ln(y+1) = \int \frac{dy}{-(y+1)} = \int \frac{dx}{x-1} + c = \ln(x-1) + c$$

und damit  $\ln((x-1)(y+1)) + c = 0$ . Das führt zur Gleichung  $(x-1)(y+1) = C$ . Die Auflösung nach  $y$  ergibt die Lösung.

- B. Sei  $\omega = xdx + ydy$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Ist  $\alpha(t) := (r \cos t, r \sin t)$  für  $t \in [0, 2\pi]$ , so ist  $\alpha^*\omega = -r^2 \cos t \sin t + r^2 \cos t \sin t = 0$ , also  $\alpha$  eine Lösung der Gleichung  $\omega = 0$ . Alle diese Lösungen sind geschlossene Kurven und können daher nicht Integralkurven einer Differentialgleichung sein.

Auf  $G := \{(x, y) : y > 0\}$  erhält man die DGL  $y' = -x/y$ , also wieder eine DGL mit getrennten Variablen. Die wird gelöst durch  $\varphi_{\pm}(t) := \pm\sqrt{r^2 - x^2}$  (mit  $\varphi(r) = 0$ ). Offensichtlich parametrisieren die Lösungen  $\varphi_{\pm}$  jeweils ein maximales Stück einer Lösungskurve von  $\omega = 0$ , das man noch als Graph auffassen kann.



Ist die Pfaffsche Form  $\omega = a dx + b dy$  regulär in  $(x_0, y_0)$ , so kann man die Gleichung  $\omega = 0$  in einer Umgebung von  $(x_0, y_0)$  umformen zu  $dy + (a/b) dx = 0$ , und dieser Gleichung kann man wieder eine Differentialgleichung zuordnen. In der Nähe von Singularitäten muss man gesonderte Betrachtungen anstellen, aber das wollen wir hier nicht weiter verfolgen.

### Definition

$\omega$  heißt **exakt**, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion  $f$  mit  $df = \omega$  gibt. Die Funktion  $f$  nennt man eine **Stammfunktion** von  $\omega$ .

$f$  ist genau dann Stammfunktion von  $\omega = a dx + b dy$ , wenn  $a = f_x$  und  $b = f_y$  ist. Dann muss gelten:

$$a_y = f_{xy} = f_{yx} = b_x \quad (\text{Integrabilitätsbedingung}).$$

Ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt, so versucht man  $f$  folgendermaßen zu bestimmen:

- Suche Stammfunktion  $f(x, y) = \int a(x, y) dx + c(y)$ .
- Dann muss  $b(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int a(x, y) dy + c'(y)$  gelten.
- Bestimme  $c(y)$  durch Integration.

Ist die Stammfunktion  $f$  ermittelt und ein Anfangswert  $(x_0, y_0)$  vorgegeben, so versucht man, eine Lösung  $\alpha$  der Gleichung  $\omega = 0$  durch Auflösung der Gleichung  $f(x, y) = f(x_0, y_0)$  zu bestimmen. Ist nämlich  $\alpha(t_0) = (x_0, y_0)$  und  $f(\alpha(t)) = f(\alpha(t_0))$  für alle  $t$  aus einem Intervall  $I$ , so ist  $\alpha^*\omega = \alpha^*(df) = d(f \circ \alpha) = d(\text{Konstante}) = 0$ .

## 5.9. Beispiel

Gesucht wird eine Lösung  $y(t)$  der impliziten DGL  $2xy + (2y + x^2)y' = 0$  mit  $y(0) = 1$ . Dem entspricht die Gleichung  $\omega = 0$ , mit  $\omega := 2xy dx + (2y + x^2) dy$ , also  $a = 2xy$  und  $b = 2y + x^2$ . Es ist  $a_y = 2x$  und auch  $b_x = 2x$ , d.h. die Integrabilitätsbedingung ist erfüllt.

Nun sei  $f(x, y) := \int a(x, y) dx + c(y) = x^2y + c(y)$ . Differentiation nach  $y$  ergibt  $f_y(x, y) = x^2 + c'(y)$ . Dies soll mit  $b(x, y) = 2y + x^2$  übereinstimmen, es muss also  $c'(y) = 2y$  sein. Deshalb setzen wir  $c(y) := y^2$ .

$f(x, y) = x^2y + y^2$  ist tatsächlich die gewünschte Stammfunktion, denn es ist  $df = 2xy dx + (x^2 + 2y) dy = \omega$ .

Die Lösung der Differentialgleichung ist nun implizit gegeben durch  $x^2y + y^2 = f(0, 1) = 1$ . Die Auflösung nach  $y$  ergibt

$$y(x) = \frac{-x^2 \pm \sqrt{x^4 + 4}}{2}.$$

Das Minuszeichen kann wegen der Anfangsbedingung ausgeschlossen werden.

**Bemerkung:** Die zu einer exakten Pfaffschen Form gehörige Differentialgleichung nennt man auch eine exakte Differentialgleichung.

Zum Beispiel kann man eine DGL mit getrennten Variablen,  $y' = f(x)g(y)$ , der exakten Pfaffschen Form

$$\omega := f(x) dx - \frac{1}{g(y)} dy$$

zuordnen. Eine Stammfunktion von  $\omega$  ist die Funktion

$$F(x, y) := \int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{y_0}^y \frac{ds}{g(s)}.$$

Das entspricht dem schon bekannten Lösungsverfahren. Allerdings bestimmt man so nur eine Gleichung, die die gesuchte Lösung als implizite Funktion enthält.

Die Pfaffsche Form  $f(x)g(y) dx - dy$  ist nicht exakt, aber sie unterscheidet sich von  $\omega$  nur um einen Faktor.

### Definition

Sei  $\omega$  eine stetige Pfaffsche Form auf  $G \subset \mathbb{R}^2$ . Ist  $h : G \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion ohne Nullstellen und  $h\omega$  exakt, so heißt  $h$  **Euler'scher Multiplikator** für  $\omega$ .

## 5.10. Beispiel

Wir betrachten die implizite DGL  $(3x + y) - xy' = 0$ . Ihr ist die Pfaffsche Form  $\omega := (3x + y) dx - x dy$  auf  $G := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  zugeordnet. Es ist  $(3x + y)_y = 1$  und  $(-x)_x = -1$ , die Integrabilitätsbedingung ist also **nicht** erfüllt. Wir versuchen, einen Euler'schen Multiplikator  $h$  zu finden. Es muss gelten:

$$\frac{\partial}{\partial y}(h(x, y) \cdot (3x + y)) = \frac{\partial}{\partial x}(h(x, y) \cdot (-x)),$$

also

$$h_y(x, y) \cdot (3x + y) + 2 \cdot h(x, y) + x \cdot h_x(x, y) = 0.$$

Die Suche nach  $h$  wird leichter, wenn man z.B. annimmt, dass  $h$  nur von  $x$  abhängt. Dann muss nur die DGL  $xh'(x) + 2h(x) = 0$  erfüllt werden. Dies ist eine DGL mit getrennten Variablen, und man sieht schnell, dass  $h(x) = x^{-2}$  eine Lösung ist. Allerdings muss  $x \neq 0$  sein. Tatsächlich gilt auf  $G^* := \{(x, y) : x \neq 0\}$ :

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^{-2} \cdot (3x + y)) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3}{x} + \frac{y}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x^{-2} \cdot (-x)).$$

Für die Stammfunktion  $f$  von  $h\omega$  setzen wir an:  $f(x, y) = \int \left(-\frac{1}{x}\right) dy + c(x) = -\frac{y}{x} + c(x)$ . Differentiation nach  $x$  ergibt:

$$\frac{3}{x} + \frac{y}{x^2} = f_x(x, y) = \frac{y}{x^2} + c'(x).$$

Daher kann man  $c(x) = 3 \ln|x|$  und  $f(x, y) = -\frac{y}{x} + 3 \ln|x|$  setzen. Die Lösungskurven von  $\omega = 0$  sind auch die von  $df = 0$ , also gegeben durch  $-y/x + 3 \ln|x| = c$ . Die Auflösung nach  $y$  ergibt die Funktion

$$y(x) = 3x \ln|x| - cx, \text{ für } x \neq 0.$$

Bisher ist es in jedem Fall, in dem die Integrabilitätsbedingung erfüllt war, gelungen, eine Stammfunktion zu finden. Das ist kein Zufall, und das wollen wir noch in einem etwas allgemeineren Kontext untersuchen.

Wir betrachten Pfaffsche Formen  $\omega = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$  im  $\mathbb{R}^n$ . Ist  $\omega = df$ , so ist  $a_i = f_{x_i}$  für  $i = 1, \dots, n$ , und es muss  $(a_i)_{x_j} = f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i} = (a_j)_{x_i}$  sein.

### 5.11. Satz

Das Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  sei sternförmig bezüglich eines Punktes  $\mathbf{x}_0 \in G$ . Erfüllt eine Pfaffsche Form  $\omega = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$  auf  $G$  die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(a_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}(a_j) \text{ für alle } i, j,$$

so ist  $\omega$  exakt, also ein totales Differential der Gestalt  $df$ .

BEWEIS: Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  ist. Dann setzen wir

$$f(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n \left( \int_0^1 a_i(t\mathbf{x}) dt \right) x_i.$$

Für die nachfolgende Rechnung beachten wir:

$$\frac{d}{dt}(ta_j(t\mathbf{x})) = a_j(t\mathbf{x}) + t \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(t\mathbf{x})x_i = a_j(t\mathbf{x}) + t \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(t\mathbf{x})x_i.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 a_i(t\mathbf{x}) dt \right) x_i + \delta_{ij} \int_0^1 a_i(t\mathbf{x}) dt \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left( \int_0^1 t \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(t\mathbf{x}) dt \right) x_i + \int_0^1 a_j(t\mathbf{x}) dt \\
&= \int_0^1 \left( t \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(t\mathbf{x}) x_i + a_j(t\mathbf{x}) \right) dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} (ta_j(t\mathbf{x})) dt = ta_j(t\mathbf{x}) \Big|_0^1 = a_j(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Damit ist  $df = \omega$ . ■

Im Falle  $n = 3$  gibt es genau **drei** Integrabilitätsbedingungen. Das motiviert die folgende

### Definition

Sei  $G \subset \mathbb{R}^3$  ein Gebiet und  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf  $G$ . Dann versteht man unter der **Rotation** von  $\mathbf{F}$  das Vektorfeld  $\mathbf{rot} \mathbf{F} = (\text{rot}_1(\mathbf{F}), \text{rot}_2(\mathbf{F}), \text{rot}_3(\mathbf{F}))$  mit

$$\text{rot}_i(\mathbf{F}) := \frac{\partial}{\partial x_j} F_k - \frac{\partial}{\partial x_k} F_j,$$

wenn  $(i, j, k)$  eine zyklische Vertauschung von  $(1, 2, 3)$  ist.

### 5.12. Folgerung

Ist  $G \subset \mathbb{R}^3$  ein sternförmiges Gebiet,  $\mathbf{F}$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf  $G$  und  $\mathbf{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ , so ist  $\omega_{\mathbf{F}}$  ein totales Differential.

### 5.13. Beispiel

Sei  $\mathbf{F}(x, y, z) := (x, y, z)$ . Dann ist offensichtlich  $\mathbf{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ . Die Stammfunktion  $f$  gewinnt man folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &:= \\
&= x \int_0^1 F_1(tx, ty, tz) dt + y \int_0^1 F_2(tx, ty, tz) dt + z \int_0^1 F_3(tx, ty, tz) dt \\
&= x \cdot \int_0^1 tx dt + y \cdot \int_0^1 ty dt + z \cdot \int_0^1 tz dt \\
&= (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).
\end{aligned}$$

Tatsächlich ist  $df = x dx + y dy + z dz = \omega_{\mathbf{F}}$ .