2.3 Lineare Systeme

Wir wollen Systeme von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung über einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ untersuchen:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A(t)^\top + \mathbf{b}(t),$$

mit stetigen Abbildungen $A : I \to M_{n,n}(\mathbb{R})$ und $\mathbf{b} : I \to \mathbb{R}^n$. Wie im Falle linearer Gleichungen beginnt man mit dem **homogenen** Fall $\mathbf{b}(t) \equiv \mathbf{0}$. Die stetige Abbildung

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}) := \mathbf{y} \cdot A(t)^\top$$

ist auf ganz $I \times \mathbb{R}^n$ definiert und genügt dort lokal einer Lipschitz-Bedingung, denn es ist

$$\|\mathbf{F}(t, \mathbf{y}_1) - \mathbf{F}(t, \mathbf{y}_2)\| = \|(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \cdot A(t)^\top\| \le \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \cdot \|A(t)\|_{\text{op}}.$$

3.1. Der Lösungsraum einer homogenen linearen DGL

Ist die lineare DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ über $I = (a, b)$ definiert, so ist auch jede maximale Lösung über I definiert, und die Menge aller maximalen Lösungen bildet einen reellen Vektorraum.

BEWEIS: Sei $J = (t_-, t_+) \subset I$, $t_0 \in J$ und $\boldsymbol{\varphi} : J \to \mathbb{R}^n$ eine maximale Lösung mit $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$. Wir nehmen an, es sei $t_+ < b$. Dann ist $\|A(t)\|_{\text{op}}$ auf $[t_0, t_+]$ beschränkt, etwa durch eine Zahl $k > 0$. Wir wenden die fundamentale Abschätzung auf die beiden Lösungen $\boldsymbol{\varphi}$ und $\boldsymbol{\psi}(x) \equiv \mathbf{0}$ an. Damit ist $\|\boldsymbol{\varphi}(t)\| \le \|\mathbf{y}_0\| \cdot e^{k(t_+ - t_0)}$, bleibt also auf $[t_0, t_+)$ beschränkt. Das bedeutet, dass die Integralkurve $t \mapsto (t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ im Innern von $I \times \mathbb{R}^n$ endet, und das kann nicht sein. Also muss $t_+ = b$ (und entsprechend dann auch $t_- = a$) sein.

Dass die Menge aller (maximalen) Lösungen dann einen Vektorraum bildet, ist trivial. ∎

Sei $\mathcal{L}$ der (reelle) Vektorraum aller Lösungen über I. Für ein festes $t_0 \in I$ sei $E : \mathcal{L} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $E(\boldsymbol{\varphi}) := \boldsymbol{\varphi}(t_0)$. [1] Dann ist E offensichtlich linear, und aus dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz und dem obigen Resultat folgt, dass E bijektiv ist, also ein Isomorphismus von $\mathcal{L}$ auf $\mathbb{R}^n$. Daraus folgt:

> *Der Lösungsraum $\mathcal{L}$ eines homogenen linearen Systems $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A(t)^\top$ in $I \times \mathbb{R}^n$ ist ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.*

Eine Basis $\{\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n\}$ von $\mathcal{L}$ bezeichnet man auch als ***Fundamentalsystem*** (von Lösungen), die Matrix

[1] „E“ steht für *evaluate* (auswerten).

$$X(t) := \big(\boldsymbol{\varphi}_1^\top(t), \dots, \boldsymbol{\varphi}_n^\top(t)\big)$$

nennt man ***Fundamentalmatrix***. Sie erfüllt die Gleichung

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t).$$

Wir erinnern uns an einige Tatsachen aus der Determinantentheorie. Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ und $S_{ij}(A)$ die Streichungsmatrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte aus A entsteht. Dann wird die Zahl $A_{ij} := (-1)^{i+j} \det S_{ij}(A)$ als ***Cofaktor***, *algebraisches Komplement* oder ***Adjunkte*** bezeichnet, und der Laplace'sche Entwicklungssatz besagt: Für beliebiges k und beliebiges l ist

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{il} \cdot A_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj}.$$

Man beachte: Sind $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ die Zeilen der Matrix A, so ist

$$A_{ij} = \det\big(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{e}_j, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n\big),$$

und die Koeffizienten $a_{i1}, \dots, a_{in}$ kommen in A_{ij} nicht vor.

Die Matrix $\operatorname{ad}(A) := \left(A_{ij} \;\middle|\; \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{matrix} \right)$ heißt ***adjungierte Matrix*** zu A.

3.2. Hilfssatz

1. *Ist* $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, *so ist* $(\det A) \cdot E_n = A \cdot \operatorname{ad}(A)^\top$.
2. *Ist* $t \mapsto A(t) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ *differenzierbar, so ist*

$$(\det \circ A)'(t) = \sum_{i,j} a'_{ij}(t) \cdot A_{ij}(t).$$

BEWEIS: 1) Seien $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ die Zeilen der Matrix A. Dann ist

$$\begin{aligned}
\big(A \cdot \operatorname{ad}(A)^\top\big)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{e}_k, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n) \\
&= \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \mathbf{e}_k, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n) \\
&= \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n) \\
&= \delta_{ij} \cdot \det A.
\end{aligned}$$

2) Weil A_{ij} von a_{ij} nicht abhängt, folgt mit dem Entwicklungssatz

$$\frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A) = \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj} \right) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} A_{kj} = A_{ij},$$

nach Kettenregel also

$$(\det \circ A)'(t) = \sum_{i,j} \frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A(t)) \cdot a'_{ij}(t) = \sum_{i,j} a'_{ij}(t) \cdot A_{ij}(t).$$

■

Definition

Sind $\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n : I \to \mathbb{R}^n$ irgendwelche (differenzierbare) Funktionen, so nennt man

$$W(\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n)(t) := \det(\boldsymbol{\varphi}_1(t), \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n(t))$$

die ***Wronski-Determinante*** von $\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n$.

3.3. Die Formel von Liouville

Die Wronski-Determinante $W(t)$ eines Systems von Lösungen der DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A(t)^\top$ erfüllt die gewöhnliche Differentialgleichung

$$z' = z \cdot \mathrm{Spur} A(t)\,.$$

Ist $W(t)$ sogar die Wronski-Determinante einer Fundamentalmatrix, so ist $W(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, und für beliebiges (festes) $t_0 \in \mathbb{R}$ ist

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Spur} A(s)\, ds \right).$$

BEWEIS: Sei $X(t) = (x_{ij}(t)) = (\boldsymbol{\varphi}_1^\top(t), \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n^\top(t))$ und $W(t) = \det X(t)$. Dann ist

$$\begin{aligned} W'(t) &= (\det \circ X)'(t) \\ &= \sum_{i,j} x'_{ij}(t) \cdot (\mathrm{ad}(X))_{ij}(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (X'(t) \cdot \mathrm{ad}(X)^\top(t))_{ii} \\ &= \mathrm{Spur}\big(X'(t) \cdot \mathrm{ad}(X)^\top(t)\big). \end{aligned}$$

Da die Spalten von $X(t)$ Lösungen der DGL sind, ist

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t),$$

also

$$\begin{aligned} W'(t) &= \operatorname{Spur}\big(A(t)\cdot X(t)\cdot \operatorname{ad}(X)^\top(t)\big) \\ &= \operatorname{Spur}\big(A(t)\cdot(\det X(t)\cdot E_n)\big) \\ &= W(t)\cdot \operatorname{Spur} A(t). \end{aligned}$$

Sei $X(t) = \big(\boldsymbol{\varphi}_1^\top(t),\dots,\boldsymbol{\varphi}_n^\top(t)\big)$ eine Fundamentalmatrix. Gibt es ein $t_0 \in I$ mit $W(t_0) = 0$, so gibt es reelle Zahlen c_ν, nicht alle $= 0$, so dass $\sum_\nu c_\nu \boldsymbol{\varphi}_\nu(t_0) = \mathbf{0}$ ist. Die Funktion $\boldsymbol{\varphi} := \sum_\nu c_\nu \boldsymbol{\varphi}_\nu$ ist Lösung der DGL und verschwindet in t_0. Nach dem Eindeutigkeitssatz muss dann $\boldsymbol{\varphi}(t) \equiv \mathbf{0}$ sein. Also sind $\boldsymbol{\varphi}_1,\dots,\boldsymbol{\varphi}_n$ linear abhängig und können kein Fundamentalsystem sein. Widerspruch!

Also ist $W(t) \neq 0$ und $X(t)$ invertierbar für alle $t \in I$. Außerdem ist

$$(\ln \circ W)'(t) = \frac{W'(t)}{W(t)} = \operatorname{Spur} A(t),$$

also

$$\ln\Big(\frac{W(t)}{W(t_0)}\Big) = \ln W(t) - \ln W(t_0) = \int_{t_0}^{t} \operatorname{Spur} A(s)\,ds.$$

Wendet man exp an, so erhält man die Liouville-Formel. ■

3.4. Die Fundamentallösung

Sei $A : I \to M_{n,n}(\mathbb{R})$ stetig.

1. *Zu jedem $t_0 \in I$ gibt es genau eine Fundamentalmatrix X_0 der DGL*

   $$\mathbf{y}' = \mathbf{y}\cdot A(t)^\top \quad \text{mit} \quad X_0(t_0) = E_n \quad (= n\text{-reihige Einheitsmatrix}).$$

   Für $\mathbf{t} \in \mathbf{I}$ wird dann $\mathbf{C}(\mathbf{t}, \mathbf{t_0}) := \mathbf{X_0}(\mathbf{t}) \in \mathbf{M_{n,n}}(\mathbb{R})$ gesetzt.

2. *Ist $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, so ist $\boldsymbol{\varphi}(t) := \mathbf{y}_0 \cdot C(t,t_0)^\top$ die eindeutig bestimmte Lösung mit $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$.*

3. *Die Matrix $C(t,t_0)$ ist stets invertierbar, und für $s,t,u \in I$ gilt:*

   (a) $C(s,t)\cdot C(t,u) = C(s,u)$.

   (b) $C(t,t) = E_n$,

   (c) $C(s,t)^{-1} = C(t,s)$.

4. *Ist $\{\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$, so wird durch $\boldsymbol{\varphi}_\nu(t) := \mathbf{a}_\nu \cdot C(t,t_0)^\top$ ein Fundamentalsystem von Lösungen mit $\boldsymbol{\varphi}_\nu(t_0) = \mathbf{a}_\nu$ definiert.*

Beweis: 1) Es gibt eindeutig bestimmte Lösungen $\boldsymbol{\varphi}_1,\dots,\boldsymbol{\varphi}_n$, so dass $\boldsymbol{\varphi}_\nu(t_0) = \mathbf{e}_\nu$ der ν-te Einheitsvektor ist. Da die Einheitsvektoren eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden und die Evaluationsabbildung E ein Isomorphismus ist, bilden die $\boldsymbol{\varphi}_\nu$ eine Basis des Lösungsraumes. $X_0 := (\boldsymbol{\varphi}_1^\top, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n^\top)$ ist dann die (eindeutig bestimmte) Fundamentalmatrix mit $X_0(t_0) = E_n$.

2) Da $X_0(t) = C(t, t_0)$ eine Fundamentalmatrix ist, erfüllt $\boldsymbol{\varphi}(t) := \mathbf{y}_0 \cdot C(t, t_0)^\top$ die DGL. Es ist nämlich

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = \mathbf{y}_0 \cdot \big(X_0^\top(t)\big)' = \mathbf{y}_0 \cdot \big(X_0^\top(t) \cdot A^\top(t)\big) = \boldsymbol{\varphi}(t) \cdot A^\top(t).$$

Nach Konstruktion ist $C(t_0, t_0) = E_n$, also $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$.

3) Weil $W(t) = \det C(t, t_0)$ nirgends verschwindet, ist $C(t, t_0)$ immer invertierbar. Sei $\mathbf{y}$ beliebig, $t, u \in I$ beliebig, aber fest, sowie $s \in I$ beliebig (variabel). Wir setzen $\boldsymbol{\varphi}(s) := \mathbf{y} \cdot C(s, u)^\top$ und $\boldsymbol{\psi}(s) := \boldsymbol{\varphi}(t) \cdot C(s, t)^\top$. Dann ist $\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$, also auch $\boldsymbol{\psi}(s) = \boldsymbol{\varphi}(s)$ für alle $s \in I$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} \cdot C(s, u)^\top &= \boldsymbol{\varphi}(s) = \boldsymbol{\psi}(s) \\
&= \boldsymbol{\varphi}(t) \cdot C(s, t)^\top \\
&= \mathbf{y} \cdot C(t, u)^\top \cdot C(s, t)^\top \\
&= \mathbf{y} \cdot \big(C(s, t) \cdot C(t, u)\big)^\top.
\end{aligned}$$

Weil $C(s, u)$ invertierbar ist, folgt die Gleichung $C(s, u) = C(s, t) \cdot C(t, u)$.

4) ist trivial. ■

Leider ist es im allgemeinen nicht möglich, die Lösungen eines homogenen linearen Systems explizit anzugeben! In Einzelfällen kann es aber durchaus Lösungsmethoden geben.

Wir betrachten nun den ***inhomogenen Fall*** $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A(t)^\top + \mathbf{b}(t)$. Wie im homogenen Fall kann man zeigen, dass alle Lösungen über ganz I definiert sind. Da die Differenz zweier Lösungen der inhomogenen Gleichung eine Lösung der homogenen Gleichung ist, bilden die Lösungen der inhomogenen Gleichung einen affinen Raum, und es genügt, eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems zu finden. Wir benutzen hier wieder (wie im Falle einer Gleichung erster Ordnung) die Methode der ***Variation der Kostanten***.

Ist $X(t) = (\boldsymbol{\varphi}_1^\top(t), \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n^\top(t))$ eine Fundamentalmatrix, so ist die Lösungsgesamtheit des homogenen Systems die Menge der Linearkombinationen

$$c_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_1(t) + \cdots + c_n \cdot \boldsymbol{\varphi}_n(t).$$

Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz

$$\boldsymbol{\varphi}_p(t) := c_1(t) \cdot \boldsymbol{\varphi}_1(t) + \cdots + c_n(t) \cdot \boldsymbol{\varphi}_n(t) = \mathbf{c}(t) \cdot X(t)^\top.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}_p'(t) &= \mathbf{c}'(t) \cdot X(t)^\top + \mathbf{c}(t) \cdot \big(X'(t)\big)^\top \\
&= \mathbf{c}'(t) \cdot X(t)^\top + \mathbf{c}(t) \cdot \big(A(t) \cdot X(t)\big)^\top \\
&= \mathbf{c}'(t) \cdot X(t)^\top + \boldsymbol{\varphi}_p(t) \cdot A(t)^\top.
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_p(t) \text{ ist Lösung} \quad &\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\varphi}_p'(t) = \boldsymbol{\varphi}_p(t) \cdot A(t)^\top + \mathbf{b}(t)\\ &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{c}'(t) \cdot X(t)^\top = \mathbf{b}(t)\\ &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{c}'(t) = \mathbf{b}(t) \cdot (X(t)^\top)^{-1}\\ &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{c}(t) = \mathbf{c}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{b}(s) \cdot (X(s)^\top)^{-1}\, ds\,.\end{aligned}$$

Ist $X(t) = C(t, t_0)$, also $X(t_0) = E_n$, so ist

$$\boldsymbol{\varphi}_p(t) = \mathbf{c}(t) \cdot X(t)^\top = \left(\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{b}(s) \cdot C(t_0, s)^\top\, ds\right) \cdot C(t, t_0)^\top$$

die partikuläre Lösung $\boldsymbol{\varphi}_p$ mit $\boldsymbol{\varphi}_p(t_0) = \mathbf{y}_0$.

Eine ***homogene lineare DGL n-ter Ordnung*** hat die Gestalt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0\,.$$

Das zugeordnete lineare System hat dann – in Spaltenschreibweise – die Form

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\,.$$

Ist $\{f_1, \ldots, f_n\}$ eine Basis des Lösungsraumes der DGL n-ter Ordnung, so erhalten wir für das System die Fundamentalmatrix

$$X(t) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}\,.$$

3.5. Beispiel

Wir betrachten eine gewöhnliche inhomogene lineare DGL 2. Grades,

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x).$$

Dem entspricht das lineare System $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A(t)^\top + \mathbf{b}(t)$ mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}(t) = (0, r(t)).$$

Eine Fundamentalmatrix hat die Gestalt

$$X(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $W(t) = \det X(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$ die Wronski-Determinante, und die Matrix $X(t)^{-1}$ kann durch die Formel

$$X(t)^{-1} = \frac{1}{W(t)} \cdot \begin{pmatrix} y_2'(t) & -y_2(t) \\ -y_1'(t) & y_1(t) \end{pmatrix}$$

berechnet werden. Also ist

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(s) \cdot (X(s)^\top)^{-1} &= \frac{1}{W(s)}(0, r(s)) \cdot \begin{pmatrix} y_2'(s) & -y_1'(s) \\ -y_2(s) & y_1(s) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{W(s)}\big(-y_2(s)r(s), y_1(s)r(s)\big), \end{aligned}$$

und $\boldsymbol{\varphi}_p(t) = \left(\int_{t_0}^t \mathbf{b}(s) \cdot (X(s)^\top)^{-1}\, ds\right) \cdot X(t)^\top$ ist eine partikuläre Lösung des (inhomogenen) Systems mit $\boldsymbol{\varphi}_p(t_0) = 0$. Die 1. Komponente davon ist Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung. Das ist

$$\varphi(t) = y_1(t) \cdot \int_{t_0}^t \frac{-y_2(s)r(s)}{W(s)}\, ds + y_2(t) \cdot \int_{t_0}^t \frac{y_1(s)r(s)}{W(s)}\, ds\,,$$

und $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi, \varphi')$ ist Lösung des Systems.

Die Funktion $G(s,t) := \big(y_2(t)y_1(s) - y_1(t)y_2(s)\big)W(s)^{-1}$ bezeichnet man auch als ***Green'sche Funktion***. Offensichtlich ist $\varphi(t) = \int_{t_0}^t G(s,t)r(s)\, ds$.

Im Falle der konkreten DGL $y'' + y' - 2y = e^x$ lösen $\varphi_1(x) := e^x$ und $\varphi_2(x) := e^{-2x}$ die zugehörige homogene Gleichung. Weil

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{pmatrix} = -3e^{-x} \neq 0$$

ist, bilden φ_1 und φ_2 sogar eine Basis des Lösungsraumes. Man berechnet dann

$$G(s,t) = \frac{1}{3}\big(e^t e^{-s} - e^{-2t}e^{2s}\big)$$

und erhält als Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t G(s,t)r(s)\, ds = \frac{1}{3}\int_{t_0}^t \big(e^t - e^{-2t}e^{3s}\big)\, ds = \frac{1}{3}\, te^t - \frac{1}{9}\, e^t.$$

2.4 Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir erinnern uns: Ist (X_n) eine Folge von Matrizen in $M_{n,n}(\mathbb{R})$, so gilt:

$$\text{Ist } \sum_{n=0}^{\infty} \|X_n\|_{\text{op}} < \infty, \text{ so konvergiert } \sum_{n=0}^{\infty} X_n \text{ in } M_{n,n}(\mathbb{R}).$$

4.1. Beispiel

Sei $A \in M := M_{n,n}(\mathbb{R})$. Dann ist $A^0 := E_n$ (= Einheitsmatrix) und $A^n := \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n\text{-mal}}$, und die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A\|_{\text{op}}^n$ konvergiert in $\mathbb{R}$ (gegen $e^{\|A\|_{\text{op}}}$). Daher konvergiert auch die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ in M.

$$\textbf{Den Grenzwert der Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \textbf{ bezeichnen wir mit } e^A.$$

Sei nun $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $F_n : I \to M$ eine stetige Funktion. Gibt es eine Folge positiver reeller Zahlen (a_n), so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ und $\|F_n(t)\|_{\text{op}} \le a_n$ für alle n und alle $t \in I$ ist, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$ auf I gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $F(t)$.

4.2. Satz

Ist $A \in M$, so ist $f : \mathbb{R} \to M$ mit $f(t) := e^{At}$ eine differenzierbare Funktion und $f'(t) = A \cdot e^{At}$.

Beweis: Es sei $S_N(t) := \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} (At)^n$. Dann konvergiert die Folge der S_N auf jedem abgeschlossenen Intervall gleichmäßig gegen die Funktion $f(t)$. Weiter ist S_N differenzierbar und

$$S_N'(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!} A^n t^{n-1} = A \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} A^n t^n.$$

Offensichtlich konvergiert die Folge der Funktionen $S_N'(t)$ (gleichmäßig auf I) gegen $A \cdot e^{At}$. Aber dann ist f differenzierbar und $f'(t) = \lim_{N \to \infty} S_N'(t) = A \cdot e^{At}$. ∎

Ist $A \in M$, so nennt man die DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A^\top$ ein ***lineares System mit konstanten Koeffizienten***. Es gilt dafür alles, was wir über lineare Systeme gelernt haben, und noch viel mehr.

4.3. Die Lösung eines Systems mit konstanten Koeffizienten

Sei $A \in M_{n,n}(K)$. Die eindeutig bestimmte Fundamentalmatrix $X(t)$ des linearen Systems

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A^\top \qquad \textit{mit } X(0) = E$$

ist gegeben durch $X(t) := e^{tA}$.

Beweis: Es ist $X'(t) = A \cdot X(t)$ und $X(0) = E$. Nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz ist damit schon alles bewiesen. ∎

4.4. Eigenschaften der Exponentialfunktion

1. *Für $s, t \in \mathbb{R}$ ist $e^{sA} \cdot e^{tA} = e^{(s+t)A}$.*
2. *Ist $A \cdot B = B \cdot A$, so ist $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.*
3. *Die Matrix e^A ist stets invertierbar. Insbesondere gilt:*

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{Spur}(A)}.$$

Beweis: Ist $A \cdot B = B \cdot A$, so ist

$$B \cdot \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(tA)^k = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B \cdot (tA)^k = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(tA)^k \cdot B,$$

also (nach Übergang zum Limes) $B \cdot e^{tA} = e^{tA} \cdot B$.

Wir setzen $F(t) := e^{t(A+B)} - e^{tA} \cdot e^{tB}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F'(t) &= (A+B) \cdot e^{t(A+B)} - A \cdot e^{tA} \cdot e^{tB} - e^{tA} \cdot B \cdot e^{tB} \\ &= (A+B) \cdot (e^{t(A+B)} - e^{tA} \cdot e^{tB}) \\ &= (A+B) \cdot F(t). \end{aligned}$$

$F(t)$ ist also die eindeutig bestimmte Fundamentalmatrix der DGL

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot (A+B)^\top \qquad \text{mit } F(0) = 0\,.$$

Daher muss $F(t) \equiv 0$ sein, d.h.

$$e^{t(A+B)} = e^{tA} \cdot e^{tB}.$$

2) Für $t = 1$ erhält man: $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

1) Die Matrizen sA und tA sind natürlich vertauschbar. Also ist

$$e^{(s+t)A} = e^{sA+tA} = e^{sA} \cdot e^{tA}.$$

3) Es ist $e^A \cdot e^{-A} = e^0 = E$, also e^A invertierbar, mit $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

$\det(e^{tA})$ ist die Wronski-Determinante der Fundamentalmatrix $X(t) := e^{tA}$. Aus der Liouville-Formel ergibt sich (mit $t_0 = 0$):

$$\det(e^{tA}) = \exp(\int_0^t \operatorname{Spur}(A)\, ds) = e^{t \cdot \operatorname{Spur}(A)}.$$

Mit $t = 1$ erhält man die gewünschte Formel. ∎

4.5. Folgerung

1. *Die Fundamentallösung $C(t, t_0)$ des Systems $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A^\top$ ist gegeben durch $C(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$.*

2. *Ist $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$, so bilden die Funktionen*

$$\boldsymbol{\varphi}_\nu(t) := \mathbf{y}_\nu \cdot e^{A^\top t}, \nu = 1, \ldots, n,$$

   ein Fundamentalsystem von Lösungen.

3. *Ist B invertierbar, so ist $B^{-1} \cdot e^A \cdot B = e^{B^{-1} \cdot A \cdot B}$.*

Beweis: 1) Setzt man $X(t) := e^{A(t-t_0)}$, so ist $X'(t) = A \cdot X(t)$ und $X(t_0) = E_n$. Also ist $C(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$.

2) Die Lösung $\boldsymbol{\varphi}_\nu$ mit $\boldsymbol{\varphi}_\nu(0) = \mathbf{y}_\nu$ ist gegeben durch $\boldsymbol{\varphi}_\nu(t) = \mathbf{y}_\nu \cdot C(t, 0)^\top = \mathbf{y}_\nu \cdot e^{A^\top t}$, denn es ist

$$(e^A)^\top = e^{A^\top}.$$

3) $X(t) := B^{-1} \cdot e^{At} \cdot B$ und $Y(t) := e^{(B^{-1} \cdot A \cdot B)t}$ sind beides Fundamental-Lösungen von $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot (B^{-1} \cdot A \cdot B)$ mit $X(0) = Y(0) = E_n$, denn es ist

$$X'(t) = B^{-1} \cdot A \cdot e^{At} \cdot B = (B^{-1} \cdot A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot e^{At} \cdot B) = (B^{-1} \cdot A \cdot B) \cdot X(t)$$

und

$$Y'(t) = (B^{-1} \cdot A \cdot B) \cdot e^{(B^{-1} \cdot A \cdot B)t} = (B^{-1} \cdot A \cdot B) \cdot Y(t)\,.$$

Aber dann muss $X(t) = Y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ sein, insbesondere $X(1) = Y(1)$. ∎

Wir versuchen nun, die Exponentialfunktion von Matrizen zu berechnen.

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall, mit Diagonalmatrizen. Für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ bezeichne $D = \Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ die aus den λ_i gebildete Diagonalmatrix. Dann ist $D^k = \Delta(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$ und

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} D^k = \Delta\Big(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} \lambda_1^k, \ldots, \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} \lambda_n^k\Big).$$

Lässt man nun N gegen Unendlich gehen, so erhält man

$$e^D = \Delta(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}).$$

Der nächst-einfache Fall ist der von diagonalisierbaren Matrizen. Eine Matrix A heißt diagonalisierbar, wenn es eine invertierbare Matrix P gibt, so dass $D := P^{-1} \cdot A \cdot P$ eine Diagonalmatrix ist. Dann ist $e^A = e^{P \cdot D \cdot P^{-1}} = P \cdot e^D \cdot P^{-1}$.

Für den allgemeinen Fall müssen wir uns an die Eigenwert-Theorie erinnern.

Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ und $\mathbf{f}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der durch $\mathbf{f}_A(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \cdot A^\top$ definierte Endomorphismus. Eine reelle Zahl λ heißt ***Eigenwert*** von A, falls es einen Vektor $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ gibt, so dass $\mathbf{f}_A(\mathbf{x}_0) = \lambda \mathbf{x}_0$ ist. Der Vektor $\mathbf{x}_0$ heißt dann ***Eigenvektor*** von A zum Eigenwert λ. Er ist eine nichttriviale Lösung des Gleichungssystems $(A - \lambda \cdot E_n) \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{0}^\top$. Eine solche Lösung gibt es genau dann, wenn $\det(A - \lambda \cdot E_n) = 0$ ist.

Die Eigenwerte von A sind daher genau die Nullstellen des ***charakteristischen Polynoms*** $p_A(x) := \det(A - x \cdot E_n)$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt jedes Polynom über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren. Also besitzt jede Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ genau n „komplexe Eigenwerte“ (mit Vielfachheit gezählt). Die Eigenvektoren zu komplexen Eigenwerten sind dann allerdings Elemente des $\mathbb{C}^n$.

4.6. Lemma

Sei λ ein Eigenwert der Matrix A und $\mathbf{y}_0$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann ist $\boldsymbol{\varphi}(t) := e^{\lambda t}\mathbf{y}_0$ eine Lösung der DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A^\top$.

BEWEIS: Setzt man $\boldsymbol{\varphi}(t) := e^{\lambda t}\mathbf{y}_0$, so ist

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{y}_0 = e^{\lambda t}(\lambda \mathbf{y}_0) = e^{\lambda t}(\mathbf{y}_0 \cdot A^\top) = (e^{\lambda t}\mathbf{y}_0) \cdot A^\top = \boldsymbol{\varphi}(t) \cdot A^\top.$$

Also ist $\boldsymbol{\varphi}$ Lösung der DGL. ∎

Indem man über $\mathbb{C}$ arbeitet, kann man davon ausgehen, dass das charakteristische Polynom $p_A(x)$ in Linearfaktoren zerfällt. Wenn es eine Basis aus Eigenvektoren von A gibt, ist A diagonalisierbar. Das ist z.B. dann der Fall, wenn alle Nullstellen von $p_A(x)$ einfach sind. Allerdings ist diese Bedingung nicht notwendig.

Sei λ Eigenwert der Matrix A. Ein Vektor $\mathbf{v}$ heißt ***Hauptvektor*** von A zum Eigenwert λ, falls es ein $j \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt:

$$\mathbf{v} \in \operatorname{Ker}(\mathbf{f}_A - \lambda\,\mathrm{id})^j.$$

Die kleinste natürliche Zahl j mit dieser Eigenschaft nennt man die Stufe von $\mathbf{v}$. Der Nullvektor ist der einzige Hauptvektor der Stufe 0, die Eigenvektoren zum Eigenwert λ sind die Hauptvektoren der Stufe 1. Alle Hauptvektoren zum Eigenwert λ bilden den sogenannten ***Hauptraum*** $H_A(\lambda)$.

Ist $p_A(x) = (-1)^n(x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\cdots(x-\lambda_k)^{n_k}$, so ist $\dim H_A(\lambda_i) = n_i$, für $i = 1, \ldots, k$, sowie $\mathbb{R}^n = H_A(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus H_A(\lambda_k)$. Die Haupträume sind alle invariant unter $\mathbf{f}_A$: Ist nämlich $\mathbf{v} \in H_A(\lambda_i)$ und j die Stufe von $\mathbf{v}$, so ist

$$(\mathbf{f}_A - \lambda_i \,\mathrm{id})^j\big(\mathbf{f}_A(\mathbf{v})\big) = \mathbf{f}_A \circ (\mathbf{f}_A - \lambda_i \,\mathrm{id})^j \mathbf{v} = \mathbf{f}_A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Daraus ergibt sich der Satz von der Jordan'schen Normalform. Außerdem gilt:

Ist $\mathbf{g}_i := \big(\mathbf{f}_A - \lambda_i \,\mathrm{id}\big)|_{H_A(\lambda_i)}$, so ist $(\mathbf{g}_i)^{n_i} = 0$, also $\mathbf{g}_i$ „nilpotent".

4.7. Die Lösung linearer DGL-Systeme

1. *A besitze n verschiedene (reelle) Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (jeweils mit Vielfachheit 1), und $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ sei eine dazu passende Basis von Eigenvektoren von A. Dann bilden die n Funktionen $\boldsymbol{\varphi}_\nu(t) := e^{\lambda_\nu t} \cdot \mathbf{y}_\nu$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A^\top$.*

2. *Hat A nur k verschiedene (reelle) Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_k$, so gibt es ein Fundamentalsystem von Lösungen, welches für $\nu = 1, \ldots, k$ aus jeweils n_ν Funktionen der Gestalt $\mathbf{q}_{\nu\mu}(t) \cdot e^{\lambda_\nu t}$ besteht, $\mu = 1, \ldots, n_\nu$. Dabei ist $\mathbf{q}_{\nu\mu}(t)$ jeweils ein Vektor von Polynomen vom Grad $\leq n_\nu - 1$.*

BEWEIS: 1) Auf Grund des Lemmas ist klar, dass die $\boldsymbol{\varphi}_\nu$ Lösungen sind. Weil $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist, verschwindet die Wronski-Determinante $W(t) = W(\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n)(t)$ nicht in $t = 0$. Aber dann ist $W(t) \neq 0$ für alle t, und $\{\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n\}$ eine Basis des Lösungsraumes.

2) Wir können annehmen, dass $k = 1$ ist, dass es also nur einen einzigen Eigenwert λ mit Vielfachheit n gibt. Dann ist $(A - \lambda \cdot E)^n = 0$, also $A = \lambda \cdot E + N$, mit der nilpotenten Matrix $N := A - \lambda \cdot E$.

Weil die Diagonalmatrix $(\lambda t)E$ mit jeder Matrix vertauscht werden kann, ist

$$e^{At} = e^{(\lambda t)E + Nt} = e^{(\lambda t)E} \cdot e^{Nt} = e^{\lambda t} \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\nu!} N^\nu t^\nu .$$

Nun sei $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ und $\mathbf{a}_{\nu\mu} := \mathbf{y}_\mu \cdot (N^\nu)^\top$ für $\nu = 0, \ldots, n-1$ und $\mu = 1, \ldots, n$. Dann ist

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_\mu(t) &:= \mathbf{y}_\mu \cdot e^{A^\top t} = e^{\lambda t} \cdot \mathbf{y}_\mu \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\nu!} (N^\nu)^\top t^\nu \\ &= e^{\lambda t} \cdot \mathbf{y}_\mu \cdot \big(E + t(A^\top - \lambda E) + \frac{t^2}{2}(A^\top - \lambda E)^2 + \cdots\big) = e^{\lambda t} \cdot \mathbf{q}_\mu(t), \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{q}_\mu(t) := \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{t^\nu}{\nu!} \cdot \mathbf{a}_{\nu\mu}$ ein Vektor von Polynomen vom Grad $\leq n-1$ ist. ∎

Eine Lösungsmethode besteht nun darin, die Polynome mit unbestimmten Koeffizienten anzusetzen, das Ergebnis in die DGL einzusetzen und auf den Koeffizientenvergleich zu hoffen.

4.8. Beispiel

Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Wir wollen die DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A^\top$ lösen.

Zunächst bestimmen wir die Eigenwerte von A als Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Nach Laplace ergibt die Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} p_A(t) = \det(A - tE) &= (-t)[(3-t)(1-t)+1] - [(-2)(1-t)-1] \\ &\quad - [-2 + (3-t)] \\ &= (-t)(t^2 - 4t + 4) - (2t-3) - (1-t) \\ &= -t^3 + 4t^2 - 5t + 2 = -(t-1)^2(t-2). \end{aligned}$$

Der Eigenwert $\lambda = 2$ hat die Vielfachheit 1. Man findet sofort einen Eigenvektor dazu, nämlich $\mathbf{u} := (0,1,1)$. Das ergibt die erste Lösung

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) := (0,1,1) \cdot e^{2t}.$$

Der Eigenwert $\lambda = 1$ hat die (algebraische) Vielfachheit 2, aber der Eigenraum hat nur die Dimension 1, eine Basis bildet der Eigenvektor $\mathbf{v} := (1,1,0)$. Das ergibt

$$\boldsymbol{\varphi}_2(t) := (1,1,0) \cdot e^{t}.$$

Da A nicht diagonalisierbar ist, machen wir für eine dritte Lösung den Ansatz

$$\boldsymbol{\varphi}_3(t) = (q_1 + p_1 t,\ q_2 + p_2 t,\ q_3 + p_3 t)e^t.$$

Weil mit $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2$ und $\boldsymbol{\varphi}_3$ auch die Lösungen $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2$ und $\boldsymbol{\varphi}_3 - c\boldsymbol{\varphi}_2$ eine Basis bilden, können wir annehmen, dass $q_1 = 0$ ist.

Setzt man $\boldsymbol{\varphi}_3(t)$ in die DGL ein, so erhält man die Beziehung

$$\begin{aligned} &\big(p_1 + p_1 t, (p_2 + q_2) + p_2 t, (p_3 + q_3) + p_3 t\big) = \\ &\quad = (p_1 t,\ q_2 + p_2 t,\ q_3 + p_3 t) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top \\ &\quad = \big((q_2 - q_3) + (p_2 - p_3)t, (3q_2 - q_3) + (-2p_1 + 3p_2 - p_3)t, (q_2 + q_3) + (-p_1 + p_2 + p_3)t\big), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} p_1 + p_1 t &= (q_2 - q_3) + (p_2 - p_3)t, \\ (q_2 + p_2) + p_2 t &= (3q_2 - q_3) + (-2p_1 + 3p_2 - p_3)t, \\ (q_3 + p_3) + p_3 t &= (q_2 + q_3) + (-p_1 + p_2 + p_3)t. \end{aligned}$$

Der Vergleich der Koeffizienten bei t liefert

$$p_1 = p_2 - p_3 \quad \text{und} \quad p_1 = p_2, \text{ also } p_3 = 0.$$

Setzen wir $\alpha := p_1 = p_2$, so ergibt der Vergleich der Koeffizienten bei 1:

$$q_2 - q_3 = \alpha, \quad 2q_2 - q_3 = \alpha \quad \text{und daher} \quad q_2 = 0 \text{ und } q_3 = -\alpha.$$

So erhalten wir

$$\boldsymbol{\varphi}_3(t) = \big(\alpha t,\ \alpha t,\ -\alpha\big)e^t.$$

Natürlich können wir jetzt $\alpha = 1$ setzen, also $\boldsymbol{\varphi}_3(t) := (t, t, -1)e^t$.

Eine weitere Methode benutzt direkt die Darstellung $A = \lambda E_n + N$:

Sei λ Eigenwert der Matrix A mit Vielfachheit k, der Eigenraum habe die Dimension 1, $\mathbf{v}_1$ sei ein Eigenvektor. Dann ist $\mathbf{v}_1 \cdot (A^\top - \lambda E_n) = \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{\varphi}_1(t) := e^{\lambda t}\mathbf{v}_1$ eine Lösung.

Ist $k > 1$, so muss es einen Vektor $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ mit

$$\mathbf{v}_2 \cdot (A^\top - \lambda E_n) \neq \mathbf{0}, \text{ aber } \mathbf{v}_2 \cdot (A^\top - \lambda E_n)^k = \mathbf{0}$$

geben. Natürlich ist auch $\boldsymbol{\varphi}_2(t) := \mathbf{v}_2 \cdot e^{A^\top t}$ eine Lösung (mit $\boldsymbol{\varphi}_2(0) = \mathbf{v}_2$). Dabei ist

$$e^{A^\top t} = e^{\lambda t} \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{t^\nu}{\nu!}(A^\top - \lambda E)^\nu.$$

Ist $\mathbf{v}_2 \cdot (A^\top - \lambda E_n)^2 = \mathbf{0}$, so ist

$$\boldsymbol{\varphi}_2(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}_2 \cdot e^{(A^\top - \lambda E)t} = e^{\lambda t}\big(\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_2 \cdot (A^\top - \lambda E_n)\big).$$

Ist $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ eine Basis des Raumes $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \,:\, \mathbf{v} \cdot (A^\top - \lambda E_n)^2 = \mathbf{0}\}$ und $k > 2$, so gibt es einen Vektor $\mathbf{v}_3 \neq \mathbf{0}$ mit

$$\mathbf{v}_3 \cdot (A^\top - \lambda E_n)^2 \neq \mathbf{0}, \text{ aber } \mathbf{v}_3 \cdot (A^\top - \lambda E_n)^k = \mathbf{0}.$$

Ist $\mathbf{v}_3 \cdot (A^\top - \lambda E_n)^3 = \mathbf{0}$, so ist

$$\boldsymbol{\varphi}_3(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}_3 \cdot e^{(A^\top - \lambda E_n)t} = e^{\lambda t}\Big(\mathbf{v}_3 + t\mathbf{v}_3 \cdot (A^\top - \lambda E_n) + \frac{t^2}{2}\mathbf{v}_3 \cdot (A^\top - \lambda E_n)^2\Big).$$

Bei 3×3-Matrizen kommt man damit immer aus.

4.9. Beispiele

A. Wir betrachten noch einmal die DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$.

Wir wissen schon, dass 2 ein Eigenwert der Vielfachheit 1 und 1 ein Eigenwert der Vielfachheit 2 ist, und dass

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) := e^{2t}(0,1,1) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\varphi}_2(t) := e^{t}(1,1,0)$$

Lösungen sind. Außerdem ist

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } (A - E_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\mathbf{v}_3 := (0,0,1)$ ist kein Eigenvektor, aber Lösung der Gleichung $\mathbf{v} \cdot (A^\top - E_3)^2 = \mathbf{0}$. Das liefert die Lösung

$$\boldsymbol{\varphi}_3(t) := e^t(\mathbf{v}_3 + t\mathbf{v}_3(A^\top - E_3)) = e^t(-t,-t,1),$$

und das ist – bis auf's Vorzeichen – die Lösung, die wir auch mit der Koeffizientenvergleichsmethode gefunden haben.

B. Bisher haben wir nur den Fall reeller Eigenwerte betrachtet. Den Fall komplexer Eigenwerte kann man aber auf den reellen Fall zurückführen. Ist $\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{g}(t) + \mathrm{i}\,\mathbf{h}(t)$ eine komplexe Lösung, so sind $\mathbf{g} = \mathrm{Re}(\boldsymbol{\varphi})$ und $\mathbf{h} = \mathrm{Im}(\boldsymbol{\varphi})$ reelle Lösungen, denn es ist

$$\mathbf{g}'(t) + \mathrm{i}\,\mathbf{h}'(t) = \boldsymbol{\varphi}'(t) = \boldsymbol{\varphi}(t) \cdot A^\top = \mathbf{g}(t) \cdot A^\top + \mathrm{i}\,\mathbf{h}(t) \cdot A^\top.$$

Sei $\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{z}$ komplexe Lösung einer DGL, mit $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$ und $\mathbf{z} = \mathbf{v} + \mathrm{i}\,\mathbf{w}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(t) &= e^{\alpha t}e^{\mathrm{i}\,\beta t}(\mathbf{v} + \mathrm{i}\,\mathbf{w}) \\ &= e^{\alpha t}\big[(\cos(\beta t)\mathbf{v} - \sin(\beta t)\mathbf{w}) + \mathrm{i}\,(\sin(\beta t)\mathbf{v} + \cos(\beta t)\mathbf{w})\big]. \end{aligned}$$

Real- und Imaginärteil sind reelle Lösungen.