# 2 Differentialgleichungen

## 2.1 Beispiele und Methoden

Was ist eine Differentialgleichung?

Ist $k \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1}$ ein Gebiet und $F : G \to \mathbb{R}$ eine (zunächst beliebige) Funktion, so nennt man

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}) = 0 \quad (*)$$

eine ***gewöhnliche Differentialgleichung*** $k$***-ter Ordnung***.

Diese Definition wird erst klar, wenn wir sagen, was eine Lösung einer solchen Gleichung ist.

Eine ***Lösung*** der DGL (*) ist eine Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $I \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall und $\varphi$ ist $k$-mal differenzierbar.

2. Für alle $x \in I$ ist $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(k)}(x)) \in G$ und

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(k)}(x)) = 0.$$

Ein Satz Anfangsbedingungen für die DGL (*) besteht aus einem Punkt $x_0 \in I$ und einem Vektor $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$. Eine Lösung $\varphi$ erfüllt die Anfangsbedingungen, wenn gilt:

$$\varphi(x_0) = c_0,\ \varphi'(x_0) = c_1,\ \dots, \varphi^{(k-1)}(x_0) = c_{k-1}.$$

Hauptproblem der Theorie der DGLn ist die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Dabei beschränkt man sich meist auf sogenannte ***explizite Differentialgleichungen*** der Form

$$y^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}).$$

### 1.1. Beispiele

**A.** Die DGL $y' = ay$ (mit positiver Konstante $a$) tritt auf, wenn Wachstumsprozesse beschrieben werden sollen.

Offensichtlich ist die Funktion $\varphi_0(x) \equiv 0$ eine Lösung. Ist $\varphi$ eine beliebige Lösung, so setzen wir $\Phi(x) := \varphi(x)e^{-ax}$. Dann ist

$$\Phi'(x) = (\varphi'(x) - a \cdot \varphi(x))e^{-ax} \equiv 0,$$

also $\Phi(x) \equiv c$ konstant und $\varphi(x) = c \cdot e^{ax}$. Die Probe zeigt, dass dies tatsächlich eine Lösung ist. Gleichzeitig ergibt sich aus unserer Argumentation, dass jede Lösung so aussehen muss. Dabei ist $c = \varphi(0)$, insbesondere kann auch $c = 0$ sein.

Zu jeder Anfangsbedingung gibt es genau eine Lösung.

**B.** Die Gleichung $y' = \sqrt{y}$ ist nicht eindeutig lösbar. Neben der Lösung $\varphi_0(x) \equiv 0$ ist auch jede der Funktionen

$$\varphi_\alpha(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq \alpha, \\ (x-\alpha)^2/4 & \text{für } x > \alpha, \end{cases}$$

für jedes $\alpha \geq 0$ eine Lösung mit $\varphi_\alpha(0) = 0$.

Bevor wir weitere Beispiele betrachten, wollen wir sehen, dass es reicht, Systeme von expliziten DGLn 1. Ordnung zu betrachten. Ein System von DGLn 1. Ordnung sieht i.a. folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

Eine Lösung eines solchen Systems ist ein System von differenzierbaren Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ mit $\varphi_j'(x) = f_j(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ für $j = 1, \ldots, n$.

Man kann nun folgendermaßen einen direkten Zusammenhang zwischen (expliziten) gewöhnlichen DGLn n–ter Ordnung und Systemen von $n$ expliziten DGLn erster Ordnung herstellen:

Ist eine DGL

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (*)$$

gegeben, so ordnen wir ihr folgendes System zu:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned} \qquad (**)$$

Ist $\varphi$ eine Lösung der DGL $(*)$, so ist $\varphi$ $n$-mal differenzierbar und $\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x))$. Wir setzen

$$\varphi_1 := \varphi, \quad \varphi_2 := \varphi', \quad \ldots, \quad \varphi_n := \varphi^{(n-1)}.$$

Dann sind alle $\varphi_\nu$ mindestens einmal differenzierbar, und es ist

$$\begin{aligned}
\varphi_1'(x) &= \varphi_2(x), \\
&\vdots \\
\varphi_{n-1}'(x) &= \varphi_n(x) \\
\text{und} \qquad \varphi_n'(x) &= \varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)),
\end{aligned}$$

d.h., $\boldsymbol{\varphi} := (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ist eine Lösung des Systems (**).

Ist umgekehrt eine Lösung $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ des Systems gegeben, so setze man $\varphi := \varphi_1$. Dann ist $\varphi$ differenzierbar, $\varphi' = \varphi_2$ ebenfalls differenzierbar u.s.w., und schließlich auch $\varphi^{(n-1)} = \varphi_n$ differenzierbar. Also ist $\varphi$ $n$-mal differenzierbar und

$$\varphi^{(n)}(x) = \varphi_n'(x) = f(x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)),$$

also $\varphi$ Lösung von $(*)$.

Eine Anfangsbedingung für ein System von $n$ DGLn hat die Gestalt

$$\varphi_\nu(x_0) = y_\nu^{(0)},\ \nu = 1, \ldots, n.$$

Über die Formel

$$(y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) = \mathbf{y}_0 = \mathbf{c} = (c_0, \ldots, c_{n-1})$$

erhält man daraus eine Anfangsbedingung für die DGL $n$-ter Ordnung, und umgekehrt.

Man benutzt gerne die Vektorschreibweise:

**Definition**

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Unter einer ***Lösung der Differentialgleichung***

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$$

versteht man eine Abbildung $\boldsymbol{\varphi} : I \to \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $I \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall, und der Graph $\{(t, \boldsymbol{\varphi}(t)) \,:\, t \in I\}$ liegt in $G$.

2. $\boldsymbol{\varphi}$ ist differenzierbar, und es ist $\boldsymbol{\varphi}'(t) = F(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ auf $I$.

Ist $n = 1$, so spricht man von einer ***gewöhnlichen Differentialgleichung***.

Ist $\boldsymbol{\varphi}$ eine Lösung von $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ und $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$, so sagt man, $\boldsymbol{\varphi}$ erfüllt die ***Anfangsbedingung*** $(t_0, \mathbf{y}_0)$. Die Lösung heißt ***maximal***, wenn sie sich nicht zu einer Lösung mit größerem Definitionsbereich fortsetzen lässt.

### 1.2. Satz

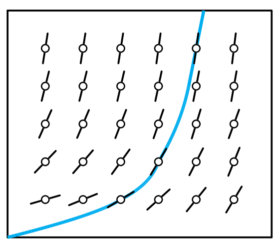
*Ist $\boldsymbol{\varphi}$ Lösung der DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ und $\mathbf{F}$ $r$-mal (stetig) differenzierbar, so ist $\boldsymbol{\varphi}$ $(r+1)$-mal (stetig) differenzierbar.*

BEWEIS: Definitionsgemäß ist $\boldsymbol{\varphi}$ einmal differenzierbar. Ist $\mathbf{F}$ stetig, so folgt aus der Gleichung $\boldsymbol{\varphi}'(t) = \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$, dass $\boldsymbol{\varphi}$ sogar stetig differenzierbar ist.

Ist $\mathbf{F}$ differenzierbar, so folgt aus der selben Gleichung, dass $\boldsymbol{\varphi}'$ differenzierbar, also $\boldsymbol{\varphi}$ zweimal differenzierbar ist, u.s.w. ∎

Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung lassen sich besonders gut veranschaulichen. Die durch die DGL $y' = f(t, y)$ induzierte Zuordnung $(t, y) \mapsto f(t, y) \in \mathbb{R}$ liefert für jeden Punkt $(t, y) \in G$ eine Richtung, beschrieben durch ihre Steigung $f(t, y)$. Zeichnet man an der Stelle $(t, y)$ einen kleinen Vektor mit der angegebenen Richtung, so erhält man ein „Richtungsfeld“ auf $G$.

Der Graph einer Lösungsfunktion ist eine Kurve, die sich dem Richtungsfeld anschmiegt.



Es gilt also, eine Kurve zu finden, deren Tangente an jeder Stelle mit dem gegebenen Richtungsfeld übereinstimmt. Ist $\varphi$ eine Lösung der DGL, so bezeichnet man die Kurve $\Phi(t) := (t, \varphi(t))$ als ***Integralkurve***.

Wir untersuchen jetzt einige spezielle Typen von Differentialgleichungen.

## Differentialgleichungen mit getrennten Variablen:

Unter einer *Differentialgleichung mit getrennten Variablen* versteht man eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f(x)g(y),$$

wobei $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf geeigneten Intervallen sind.

Wir wollen das Anfangswertproblem lösen, d.h., wir suchen eine Funktion $\varphi$ mit $\varphi(x_0) = y_0$ und $\varphi'(x) = f(x) \cdot g(\varphi(x))$.

**1. Fall:** Ist $g(y_0) = 0$, so ist für jedes $x_0 \in I$ die konstante Funktion $\varphi(x) \equiv y_0$ eine Lösung mit $\varphi(x_0) = y_0$.

**2. Fall:** Sei $J_0 \subset J$ ein offenes Intervall, auf dem $g$ keine Nullstellen hat, und $y_0 \in J_0$. Ist $\varphi$ eine Lösung auf $I$ mit $\varphi(x_0) = y_0$, so ist $g(\varphi(x)) \neq 0$ nahe $x_0$ und

$$\frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = f(x).$$

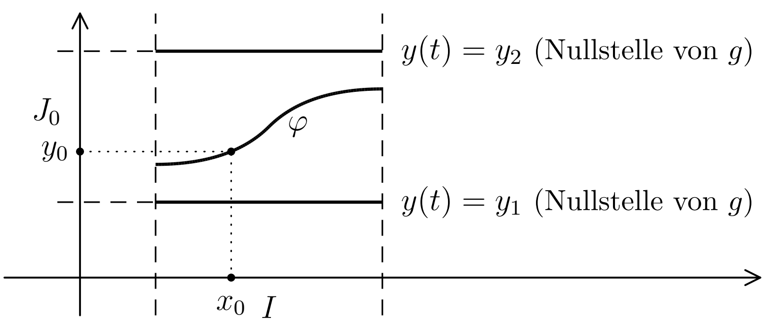
Also ist

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))}\,dt = \int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{1}{g(u)}\,du.$$

Sei nun $F$ eine Stammfunktion von $f$ auf $I$ und $G$ eine Stammfunktion von $1/g$ auf $J_0$. Dann ist $F(x) - F(x_0) = G(\varphi(x)) - G(y_0)$. Außerdem ist $G'(x) = 1/g(x) \neq 0$ für $x \in J_0$, also $G$ dort streng monoton. Damit ist $G$ umkehrbar und

$$\varphi(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0)).$$

Die Probe zeigt sofort, dass $\varphi$ tatsächlich die DGL löst.




**Bemerkung:** Die Physiker haben – wie immer – eine suggestive Schreibweise dafür:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad &\Longrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \\
&\Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx \\
&\Longrightarrow \quad G(y) = F(x) + c \\
&\Longrightarrow \quad y = G^{-1}(F(x) + c).
\end{aligned}$$

Damit $y(x_0) = y_0$ ist, muss man $c = G(y_0) - F(x_0)$ wählen.

Als konkretes **Beispiel** nehmen wir die DGL $\quad y' = xy.$

Hier sind $f(x) = x$ und $g(y) = y$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Als Stammfunktionen können wir

$$F(x) := \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{auf } \mathbb{R}$$

und

$$G(y) := \ln|y| \qquad \text{auf jedem Intervall } J\text{, das nicht die Null enthält,}$$

nehmen. Dann ist

$$G^{-1}(z) = \begin{cases} e^z & \text{falls } J \subset \mathbb{R}_+, \\ -e^z & \text{sonst,} \end{cases}$$

also

$$\begin{aligned} y(x) &= G^{-1}(F(x) + c) \\ &= \pm\exp(\frac{1}{2}x^2 + c) \\ &= C \cdot \exp(\frac{1}{2}x^2), \text{ mit } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Das schließt insbesondere die Lösung $y(x) \equiv 0$ mit ein. Liegt $J$ in $\mathbb{R}_+$, so muss $C > 0$ gewählt werden, sonst $C < 0$.

Als zweites **Beispiel** betrachten wir die DGL

$$y' = xy^2.$$

Hier ist $f(x) = x$, also $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, wie oben, sowie $g(y) = y^2$, also $G(y) = -\frac{1}{y}$ (auf jedem Intervall $J$, das nicht die Null enthält). Nach dem obigen Verfahren erhalten wir die Lösungen

$$y_c(x) = G^{-1}(F(x) + c) = -\frac{1}{x^2/2 + c} = -\frac{2}{2c + x^2}.$$

Hinzu kommt die konstante Lösung $y(x) \equiv 0$, die sich aus der einzigen Nullstelle von $g(y)$ ergibt.

## Lineare Differentialgleichungen:

Eine allgemeine lineare DGL 1. Ordnung über einem Intervall $I$ hat folgende Gestalt:

$$y' + a(x)y = r(x), \text{ mit stetigen Funktionen } a, r : I \to \mathbb{R}.$$

Ist $r(x) \equiv 0$, so spricht man vom ***homogenen*** Fall. Dann ist auf jeden Fall die Funktion $y(x) \equiv 0$ eine Lösung. Suchen wir nach weiteren Lösungen, so können wir voraussetzen, dass $y(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ ist, und es gilt:

$$(\ln|y|)'(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x).$$

Ist $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$ über $I$, so ist

$$y(x) = c \cdot e^{-A(x)},$$

mit einer Integrationskonstanten $c$, die auch $\leq 0$ sein darf.

Nun betrachten wir den ***inhomogenen*** Fall ($r(x) \not\equiv 0$): Sind $\varphi_1, \varphi_2$ zwei Lösungen, so ist

$$(\varphi_1 - \varphi_2)'(t) + a(t)(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) = r(t) - r(t) = 0,$$

also unterscheiden sich je zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung um eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung hat demnach die Gestalt

$$\varphi(t) = \varphi_p(t) + c \cdot e^{-A(t)},$$

mit einer „partikulären Lösung“ $\varphi_p(t)$ der inhomogenen Gleichung. Die müssen wir noch finden.

Meistens findet man spezielle Lösungen über einen geeigneten Ansatz. So geht man auch hier vor. Wir benutzen die Methode der ***Variation der Konstanten***.

**Ansatz:** $\quad y_p(x) = c(x) \cdot e^{-A(x)}.$

Durch Differenzieren und Einsetzen in die DGL versucht man, Bedingungen für $c(x)$ zu erhalten:

$$y_p'(x) = (c'(x) - c(x) \cdot A'(x)) \cdot e^{-A(x)} = (c'(x) - c(x)a(x)) \cdot e^{-A(x)}.$$

Da $y_p'(x) + a(x)y_p(x) = r(x)$ sein soll, erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$c'(x) \cdot e^{-A(x)} = r(x),$$

und setzt daher

$$c(x) := \int_{x_0}^{x} r(t)e^{A(t)}\,dt.$$

Die Probe zeigt, dass $y_p$ tatsächlich die inhomogene DGL löst.

Die allgemeine Lösung hat somit die Gestalt

$$y(x) = y_p(x) + c \cdot e^{-A(x)} = \left(\int_{x_0}^{x} r(t)e^{A(t)}\,dt + c\right) \cdot e^{-A(x)}.$$

## Transformationen:

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $F : G \to \mathbb{R}$ stetig. Die DGL $y' = F(x, y)$ lässt sich manchmal besser lösen, wenn man sie transformiert.

Sei $T : G \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus auf ein Gebiet $D$, mit $T(t, y) = (t, \widetilde{T}(t, y))$.

Die Integralkurven $\boldsymbol{\alpha}(t) = (t, \varphi(t))$ der ursprünglichen DGL werden auf Kurven

$$T \circ \boldsymbol{\alpha}(t) = T(t, \varphi(t)) = (t, \widetilde{T}(t, \varphi(t))) =: (t, \psi(t)) \qquad (*)$$

abgebildet, und wir versuchen, diese Kurven als Integralkurven einer neuen DGL aufzufassen. Wie sieht diese DGL aus?

Hat die transformierte DGL die Gestalt $v' = \widetilde{F}(t,v)$, so muss gelten:

$$\psi'(t) = \widetilde{F}(t,\psi(t)) \quad \text{und } \psi(t) = \widetilde{T}(t,\varphi(t)).$$

Dann ist

$$\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t}(t,\varphi(t)) + \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial y}(t,\varphi(t))\varphi'(t) = \psi'(t) = \widetilde{F}(t,\psi(t))$$

und (wegen (*))

$$(t,\varphi(t)) = T^{-1}(t,\psi(t)), \text{ sowie } \varphi'(t) = F(t,\varphi(t)),$$

also

$$\widetilde{F}(t,v) = \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t}(T^{-1}(t,v)) + \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial y}(T^{-1}(t,v)) \cdot F(T^{-1}(t,v)).$$

Ein Anwendungsbeispiel ist die ***Bernoulli'sche DGL*** :

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha},$$

wobei $\alpha$ reell, $\neq 0$ und $\neq 1$ sein soll.

Wir verwenden die Transformation $T(t,y) := (t, y^{1-\alpha})$. Dann ist

$$T^{-1}(t,v) = (t, v^{1/(1-\alpha)}), \quad \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t}(t,y) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial y}(t,y) = (1-\alpha)y^{-\alpha}.$$

Weil $F(t,y) = a(t)y + b(t)y^{\alpha}$ ist, folgt: Die transformierten Integralkurven genügen der DGL $v' = \widetilde{F}(t,v)$, mit

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}(t,v) &= \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t}(t, v^{1/(1-\alpha)}) + \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial y}(t, v^{1/(1-\alpha)}) \cdot F(t, v^{1/(1-\alpha)}) \\
&= (1-\alpha)v^{-\alpha/(1-\alpha)} \cdot \big(a(t)v^{1/(1-\alpha)} + b(t)v^{\alpha/(1-\alpha)}\big) \\
&= (1-\alpha) \cdot (a(t)v + b(t)).
\end{aligned}$$

Die transformierte DGL $v' = (1-\alpha) \cdot \big(a(t)v + b(t)\big)$ ist linear und daher sicher einfacher zu behandeln als die Ausgangsgleichung.

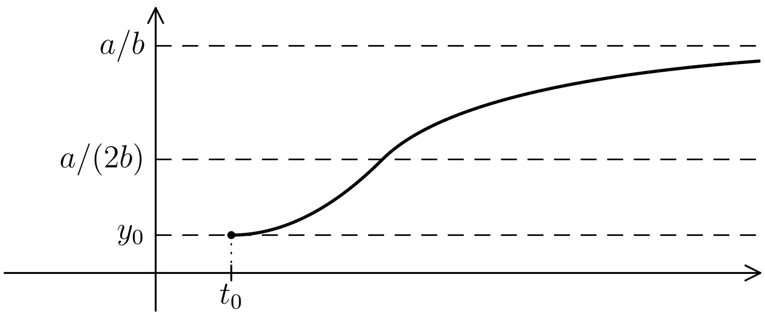
Ein Spezialfall ist die ***logistische Gleichung*** (oder ***Gleichung des beschränkten Wachstums***)

$$y' = ay - by^2, \quad \text{mit } a,b \in \mathbb{R}_+ \text{ und } y > 0$$

ist vom Bernoulli'schen Typ (mit $\alpha = 2$). Bevor wir sie transformieren, noch ein paar Anmerkungen:

Es ist $y' = y(a - by)$. Ist $\varphi$ eine Lösung und $0 < \varphi(t) < a/b$, so ist $a - b \cdot \varphi(t) > 0$, also $\varphi'(t) > 0$. Der „Bestand" wächst! Ist dagegen $\varphi(t) > a/b$, so ist $\varphi'(t) < 0$ und der Bestand nimmt ab.

Weiter ist $\varphi''(t) = a\varphi'(t) - 2b\varphi(t)\varphi'(t) = (a - 2b\varphi(t))\varphi'(t)$. Ist also $0 < \varphi(t) < a/(2b)$, so ist $\varphi'(t) > 0$ und $\varphi''(t) > 0$. Das ist der Bereich „beschleunigten Wachstums“, der Graph beschreibt eine Linkskurve. Ist dagegen $a/(2b) < \varphi(t) < a/b$, so ist $\varphi''(t) < 0$. Hier beschreibt der Graph eine Rechtskurve, das Wachstum wird gebremst.




Nun wenden wir unsere Transformation an. Suchen wir eine Lösung von $y' = ay - by^2$ zum Anfangswert $(t_0, y_0)$, so können wir genauso gut eine Lösung von $v' = -av + b$ suchen, zum Anfangswert $(t_0, y_0^{-1})$. Das ist eine inhomogene DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Eine partikuläre Lösung ist die konstante Funktion $v_p(t) \equiv b/a$, und die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist gegeben durch $v_c(t) := c \cdot e^{-at}$, $c \in \mathbb{R}$.

Die allgemeine Lösung der Ausgangsgleichung ist dann gegeben durch

$$y_c(t) = (v_p(t) + v_c(t))^{-1} = \frac{a}{b + ac \cdot e^{-at}}.$$

Für alle diese Lösungen gilt:

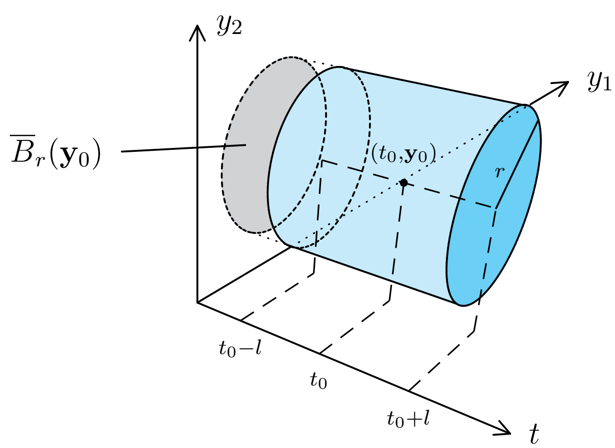
$$y_c(t) \to \frac{a}{b} \quad \text{für } t \to \infty.$$

## 2.2 Existenz- und Eindeutigkeit von Lösungen

### Definition

Sei $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Die ***Tonne*** mit *Radius* $r$ und *Länge* $2l$ um $(t_0, \mathbf{y}_0)$ ist die Menge

$$T := [t_0 - l, t_0 + l] \times \overline{B}_r(\mathbf{y}_0).$$




**Bemerkung:** Ist $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, so gibt es zu jeder Tonne $T \subset G$ eine Zahl $M > 0$, so dass gilt: $\sup_T \|\mathbf{F}(t, \mathbf{y})\| \le M$.

### Definition

Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine stückweise stetig differenzierbare Funktion $\boldsymbol{\varphi} : J \to \mathbb{R}^n$ heißt eine $\varepsilon$***-Näherungslösung*** der auf $G$ definierten DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$, falls gilt:

1. $(t, \boldsymbol{\varphi}(t)) \in G$ für $t \in J$.
2. $\|\boldsymbol{\varphi}'(t) - \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))\| \le \varepsilon$ für $t \in J$.

In den Punkten, in denen $\boldsymbol{\varphi}$ nicht differenzierbar ist, soll die Ungleichung für die beiden einseitigen Grenzwerte gelten.

Wir wollen solche Näherungen konstruieren. Sei $T_0$ eine Tonne mit Radius $r$ und Länge $2l$ um $(t_0, \mathbf{y}_0)$, auf der $\mathbf{F}$ definiert ist, sowie $M := \sup_T \|\mathbf{F}\| \ge 0$.

Die Tonne $T_0$ heißt eine ***Sicherheitstonne*** (bezüglich $\mathbf{F}$), falls $M \le r/l$ ist. Ist dies nicht erfüllt, so setzen wir

$$\sigma := \begin{cases} l & \text{falls } M = 0, \\ \min(l, r/M) & \text{falls } M > 0. \end{cases}$$

Dann ist $\sigma \le l$, also $T := [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma] \times \overline{B}_r(\mathbf{y}_0) \subset T_0$, und im Falle $M > 0$ ist $r/\sigma \ge M$. Das bedeutet, dass $T$ eine Sicherheitstonne ist. Wir können hier voraussetzen, dass schon $T_0$ diese Eigenschaften besitzt. Sei $J := [t_0 - l, t_0 + l]$ und $B = \overline{B}_r(\mathbf{y}_0)$, also $T = T_0 = J \times B$.

Wir betrachten Zerlegungen $\mathfrak{Z} = (t_0, \dots, t_N)$ des Intervalls $I := [t_0, t_0 + l]$. Bei fester Zerlegung sei $J_i := [t_{i-1}, t_i]$, für $i = 1, \dots, N$. Dann wird wie folgt ein Streckenzug $\boldsymbol{\varphi} : I \to B$ konstruiert:

Auf $J_1$ sei $\boldsymbol{\varphi}(t) := \mathbf{y}_0 + (t - t_0)\mathbf{F}(t_0, \mathbf{y}_0)$. An der Stelle $t_0$ hat $\boldsymbol{\varphi}$ die richtige Steigung, und außerdem ist

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t) - \mathbf{y}_0\| = |t - t_0| \cdot \|\mathbf{F}(t_0, \mathbf{y}_0)\| \le l \cdot M \le r.$$

Der Graph von $\boldsymbol{\varphi}$ verläuft also über $J_1$ ganz in $T \subset G$, und es ist $\|\boldsymbol{\varphi}(t_1) - \mathbf{y}_0\| \le |t_1 - t_0| \cdot M$.

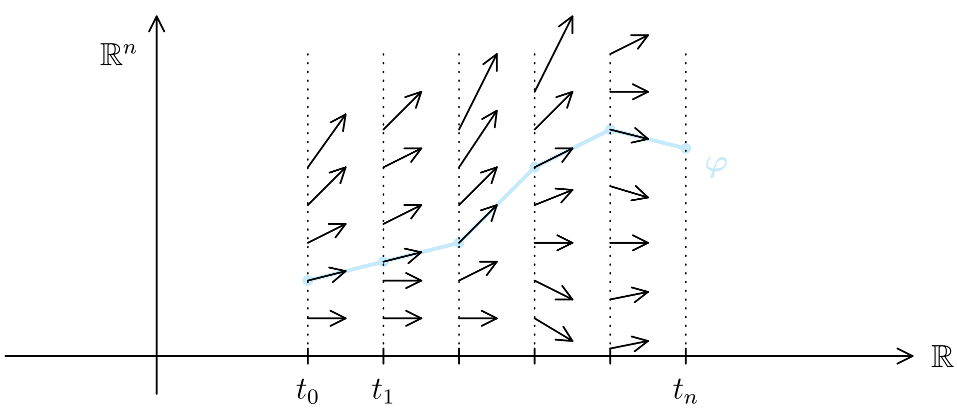
Auf $J_2 = \{t \,:\, t_1 < t < t_2\}$ sei

$$\boldsymbol{\varphi}(t) := \boldsymbol{\varphi}(t_1) + (t - t_1)\mathbf{F}(t_1, \boldsymbol{\varphi}(t_1)),$$

und so fährt man fort. Der Streckenzug, der so entsteht, wird ***Euler-Polygonzug*** genannt. Er ist Graph einer stetigen und sogar stückweise stetig differenzierbaren Abbildung und verläuft ganz in $T$. Ist nämlich $\|\boldsymbol{\varphi}(t_{i-1}) - \mathbf{y}_0\| \le |t_{i-1} - t_0| \cdot M$, so gilt für $t \in J_i$:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\varphi}(t) - \mathbf{y}_0\| &= \|\boldsymbol{\varphi}(t_{i-1}) + (t - t_{i-1}) \cdot \mathbf{F}(t_{i-1}, \boldsymbol{\varphi}(t_{i-1})) - \mathbf{y}_0\| \\ &\le |t_{i-1} - t_0| \cdot M + |t - t_{i-1}| \cdot M \\ &= (t - t_0) \cdot M \;\le\; l \cdot M \;\le\; r, \end{aligned}$$

insbesondere ist $\|\boldsymbol{\varphi}(t_i) - \mathbf{y}_0\| \le (t_i - t_0) \cdot M$. In den Punkten $(t_i, \boldsymbol{\varphi}(t_i))$ hat der Polygonzug jeweils rechtsseitig die richtige Steigung.




**2.1. Existenzsatz für Näherungslösungen**

*Sei $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, \mathbf{y}_0) \in G$ und $T = J \times B \subset G$ eine Sicherheitstonne um $(t_0, \mathbf{y}_0)$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $\varepsilon$-Näherungslösung $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon : J \to B$ der DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ mit $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t_0) = \mathbf{y}_0$.*

Beweis: Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $(t, \mathbf{x}), (s, \mathbf{y}) \in T$ gilt:

$$(*) \qquad \text{Ist } |t - s| < \delta \text{ und } \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta, \text{ so ist } \|\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{F}(s, \mathbf{y})\| < \varepsilon,$$

denn die stetige Abbildung $\mathbf{F}$ ist auf der kompakten Tonne gleichmäßig stetig.

Sei $n = n(\varepsilon)$ so groß gewählt, dass $0 < l/n < \min(\delta, \delta/M)$ ist, und

$$t_j := t_0 + j \cdot \frac{l}{n} \text{ und } \mathbf{y}_j := \mathbf{y}_{j-1} + \frac{l}{n} \cdot \mathbf{F}(t_{j-1}, \mathbf{y}_{j-1}), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Durch

$$\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t_0) := \mathbf{y}_0 \text{ und } \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t) := \mathbf{y}_j + (t - t_j)\mathbf{F}(t_j, \mathbf{y}_j) \text{ für } t_j \le t \le t_{j+1} \text{ und } j \ge 0$$

wird ein Euler'scher Polygonzug auf $[t_0, t_0 + l]$ definiert.

**Behauptung:** $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ ist eine $\varepsilon$-Näherungslösung auf $[t_0, t_0 + l]$.

Beweis dafür: Für $t \in [t_j, t_{j+1}]$ ist $|t - t_j| < |t_{j+1} - t_j| = l/n < \delta$ und

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}_j\| &= |t - t_j| \cdot \|\mathbf{F}(t_j, \mathbf{y}_j)\| \\ &\le \frac{l}{n} \cdot \|\mathbf{F}(t_j, \mathbf{y}_j)\| \le \frac{l}{n} \cdot M < \frac{\delta}{M} \cdot M = \delta. \end{aligned}$$

Da $\boldsymbol{\varphi}'_\varepsilon(t) = \mathbf{F}(t_j, \mathbf{y}_j)$ für $t_j \le t \le t_{j+1}$ und $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t_j) = \mathbf{y}_j$ ist, folgt mit $(*)$:

$$\|\boldsymbol{\varphi}'_\varepsilon(t) - \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t))\| = \|\mathbf{F}(t_j, \mathbf{y}_j) - \mathbf{F}(t, \mathbf{y}_j)\| < \varepsilon \quad \text{auf } [t_0, t_0 + l].$$

Auf $[t_0 - l, t_0]$ argumentiert man analog. ■

Wir wollen nun eine exakte Lösung als Grenzwert einer Folge von immer besser approximierenden Näherungslösungen konstruieren. Dazu müssen wir einen Abstecher in die Theorie unendlich-dimensionaler Vektorräume machen.

Ein ***normierter Vektorraum*** ist ein (reeller) Vektorraum $E$ mit einer „Norm“, also einer Funktion $N : E \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

1. $N(x) \ge 0$ für alle $x \in E$, und $(\, N(x) = 0 \iff x = 0 \,)$.
2. $N(x + y) \le N(x) + N(y)$ für $x, y \in E$.
3. $N(\lambda x) = |\lambda| \cdot N(x)$ für $x \in E$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

## 2.2. Beispiele

**A.** $E := \mathbb{R}^n$, $N(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ (euklidische Norm).

**B.** $E := \mathbb{R}^n$, $N(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| := \max_{i=1,\ldots,n}|x_i|$ (Betrags- oder Supremumsnorm).

**C.** $E := \mathscr{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ der Raum der stetigen Funktionen auf $[a,b]$, $N(f) := \sup_[ a,b]|f(t)|$.

**D.** $E := \mathscr{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ und $N(f) := \int_a^b |f(t)|\,dt$.

**E.** $E := M_{n,n}(\mathbb{R})$. Hier bieten sich mehrere Normen an. Wie im $\mathbb{R}^n$ hat man die euklidische Norm $\|\ldots\|$ und die Maximumsnorm $|\ldots|$. Es gibt aber auch noch die „Operatornorm“:

$$\|A\|_{\text{op}} := \sup\{\|A \cdot \mathbf{x}^\top\| \,:\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ und } \|\mathbf{x}\| \leq 1\}.$$

Man sieht sofort, dass für beliebige Vektoren $\mathbf{v}$ die Ungleichung

$$\|A \cdot \mathbf{v}^\top\| \leq \|A\|_{\text{op}} \cdot \|\mathbf{v}\|$$

gilt. Außerdem kann man zeigen: $|A| \leq \|A\|_{\text{op}} \leq \|A\|$.

Sei nun $E$ ein normierter Vektorraum (mit Norm $\|\ldots\|$). Eine Folge $(f_n)$ ***konvergiert*** in $E$ gegen ein Element $f$, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0, \text{ so dass für } n \geq n_0 \text{ gilt: } \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Die Folge $(f_n)$ heißt eine ***Cauchy-Folge***, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0, \text{ so dass für alle } n, m \geq n_0 \text{ gilt: } \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Dann gilt der

### 2.3. Satz

*Wenn $(f_n)$ in $E$ konvergiert, dann ist $(f_n)$ eine Cauchy-Folge.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Man kann ein $n_0$ finden, so dass $\|f_n - f\| < \varepsilon/2$ für $n \geq n_0$ ist. Dann gilt für $n, m \geq n_0$ :

$$\|f_n - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f - f_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

### Definition

$E$ heißt ***vollständig*** oder ein ***Banachraum***, falls in $E$ jede Cauchyfolge konvergiert.

## 2.4. Beispiele

**A.** Alle endlich-dimensionalen normierten $\mathbb{R}$-Vektorräume sind vollständig.

**B.** Sei $E := \mathscr{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ und $\|f\| := \sup_[ a,b]|f(t)|$. Gegeben sei eine Cauchyfolge in $E$. Dann ist für jedes $x \in I := [a,b]$ auch $\big(f_n(x)\big)$ eine Cauchyfolge. Weil $\mathbb{R}$ vollständig ist, konvergiert $(f_n)$ punktweise auf $I$ gegen eine Funktion $f$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Weil $(f_n)$ eine Cauchyfolge in $E$ ist, gibt es ein $n_0$, so dass $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ für $n, m \geq n_0$ ist. Dann ist auch

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \text{ für } n, m \geq n_0 \text{ und alle } x \in I.$$

Wir halten ein $n \geq n_0$ fest und lassen $m$ gegen Unendlich gehen. Dann erhalten wir:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ für alle } x \in I.$$

Weil das für alle $n \geq n_0$ gilt, konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)$ gleichmäßig auf $I$ gegen $f$. Und weil alle $f_n$ stetig sind, ist auch die Grenzfunktion $f$ stetig. Das bedeutet, dass $f$ in $E$ liegt und dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0$ existiert, so dass $\|f_n - f\| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ ist. Also ist $E$ vollständig.

Man kann dieses Ergebnis verallgemeinern. Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so ist auch der Raum der stetigen Abbildungen von $K$ nach $\mathbb{R}^m$ vollständig.

Man kann auch unendliche Reihen in Banachräumen betrachten. Ist $(f_n)$ eine Folge in einem Banachraum $E$, so konvergiert die unendliche Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gegen ein Element $f \in E$, wenn die Folge der Partialsummen $S_N := \displaystyle\sum_{n=1}^{N} f_n$ gegen $f$ konvergiert.

Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert ***normal*** (oder ***absolut***), falls $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Weil $S_{N+k} - S_N = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{N+k} f_n$ ist, folgt: Ist die Reihe normal konvergent, so ist $(S_N)$ eine Cauchyfolge in $E$. Da $E$ vollständig ist, konvergiert die Reihe in $E$.

## Definition

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine stetige Abbildung $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ genügt auf $G$ einer ***Lipschitz-Bedingung*** mit Lipschitz-Konstante $k > 0$, falls gilt:

$$\|\mathbf{F}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_2)\| \leq k \cdot \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \text{ für alle Punkte } (t, \mathbf{x}_1), (t, \mathbf{x}_2) \in G.$$

$\mathbf{F}$ genügt *lokal* der *Lipschitz-Bedingung*, falls es zu jedem $(t_0, \mathbf{x}_0) \in G$ eine Umgebung $U = U(t_0, \mathbf{x}_0) \subset G$ gibt, so dass $\mathbf{F}$ auf $U$ einer Lipschitz-Bedingung genügt.

## 2.5. Satz

*Ist $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, x_1, \ldots, x_n)$ auf $G$ stetig und nach den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ stetig partiell differenzierbar, so genügt $\mathbf{F}$ auf jeder Tonne $T \subset G$ einer Lipschitz-Bedingung.*

Beweis: Sei $T = I \times B \subset G$ eine beliebige Tonne. Die partiellen Ableitungen $\mathbf{F}_{x_i}(t, \mathbf{x})$ sind auf $T$ stetig und damit beschränkt, etwa durch $M > 0$. Hält man $t \in I$ fest und definiert man $\mathbf{f}_t : B \to \mathbb{R}^n$ durch $\mathbf{f}_t(\mathbf{x}) := \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$, so ist $\mathbf{f}_t$ (total) stetig differenzierbar, und es gilt:

$$\|D\mathbf{f}_t(\mathbf{x})(\mathbf{h})\| = \|J_{\mathbf{f}_t}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}^\top\| \leq \|J_{\mathbf{f}_t}(\mathbf{x})\|_{\text{op}} \cdot \|\mathbf{h}\| \leq \|J_{\mathbf{f}_t}(\mathbf{x})\| \cdot \|\mathbf{h}\| \leq n \cdot M \cdot \|\mathbf{h}\|.$$

Sind $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B$, so setze man $\varphi(s) := \mathbf{f}_t\big(\mathbf{x}_1 + s\mathbf{h}\big)$ für $0 \leq s \leq 1$ und $\mathbf{h} := \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$. Die Kettenregel ergibt dann (für alle $t$):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}(t, \mathbf{x}_2) - \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_1)\| &= \|\varphi(1) - \varphi(0)\| = \|\int_0^1 \varphi'(s)\, ds\| \\ &= \|\int_0^1 D\mathbf{f}_t(\mathbf{x}_1 + s\mathbf{h})(\mathbf{h})\, ds\| \leq n \cdot M \cdot \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|. \end{aligned}$$

Das ist die gesuchte Lipschitz-Bedingung. ∎

Genügt die rechte Seite einer DGL einer Lipschitz-Bedingung, so kann man die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zeigen. Dafür sind aber noch ein paar Vorbereitungen nötig.

## 2.6. Lemma von Gronwall

*Sei $t_0 < t_1 \leq \infty$, $g : [t_0, t_1) \to \mathbb{R}$ stetig, $\alpha \geq 0$ und $\beta \geq 0$. Ist*

$$0 \leq g(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^t g(\tau)\, d\tau \qquad \textit{für } t \in [t_0, t_1),$$

*so ist*

$$g(t) \leq \alpha \cdot e^{\beta(t - t_0)} \qquad \textit{für } t \in [t_0, t_1).$$

Beweis: Sei $G(t) := \alpha + \beta \int_{t_0}^t g(\tau)\, d\tau$. Dann ist $G(t_0) = \alpha$ und $G'(t) = \beta g(t) \leq \beta G(t)$, also $(\ln G)'(t) \leq \beta$. Daraus folgt, dass $\ln G(t) - \beta t$ monoton fällt, Für $t > t_0$ ist dann

$$\ln G(t) - \beta t \leq \ln G(t_0) - \beta t_0 = \ln \alpha - \beta t_0$$

und

$$g(t) \leq G(t) \leq \alpha e^{\beta(t - t_0)}.$$

∎

## 2.7. Fundamentale Abschätzung

*Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet und $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, die auf der Tonne $T := J \times B$ einer Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstante $k$ genügt. Über dem Intervall $J$ sei $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ eine $\varepsilon$-Näherungslösung und $\boldsymbol{\varphi}_\delta$ eine $\delta$-Näherungslösung der Differentialgleichung $\mathbf{y}' = F(t, \mathbf{y})$. Dann ist*

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t) - \boldsymbol{\varphi}_\delta(t)\| \le \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t_0) - \boldsymbol{\varphi}_\delta(t_0)\| \cdot e^{k|t-t_0|} + \frac{\varepsilon + \delta}{k} \cdot (e^{k|t-t_0|} - 1)$$

*für alle $t \in J$.*

Beweis: Sei

$$\mathbf{A}_\varepsilon(t, t_0) := \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t) - \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t_0) - \int_{t_0}^t \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(u))\, du = \int_{t_0}^t \Big[\boldsymbol{\varphi}'_\varepsilon(u) - \mathbf{F}\big(u, \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(u)\big)\Big]\, du.$$

Weil $\|\boldsymbol{\varphi}'_\varepsilon(t) - \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t))\| \le \varepsilon$ ist, folgt:

$$\|\mathbf{A}_\varepsilon(t, t_0)\| \le \varepsilon|t - t_0|, \quad \text{und analog} \quad \|\mathbf{A}_\delta(t, t_0)\| \le \delta|t - t_0|.$$

Dann ist $\|\mathbf{A}_\varepsilon(t, t_0) - \mathbf{A}_\delta(t, t_0)\| \le (\varepsilon + \delta) \cdot |t - t_0|$ und

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t) - \boldsymbol{\varphi}_\delta(t)\| = \\
&= \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t_0) - \boldsymbol{\varphi}_\delta(t_0) + \mathbf{A}_\varepsilon(t, t_0) - \mathbf{A}_\delta(t, t_0) + \int_{t_0}^t \big(\mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(u)) - \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}_\delta(u))\big)\, du\| \\
&\le \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t_0) - \boldsymbol{\varphi}_\delta(t_0)\| + (\varepsilon + \delta)|t - t_0| + \|\int_{t_0}^t \big(\mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(u)) - \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}_\delta(u))\big)\, du\|.
\end{aligned}$$

Nun setzen wir $\omega(t) := \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t) - \boldsymbol{\varphi}_\delta(t)\|$. Für $t \ge t_0$ und $\eta := \varepsilon + \delta$ haben wir gezeigt:

$$\begin{aligned}
\omega(t) &\le \omega(t_0) + \eta(t - t_0) + k \cdot \int_{t_0}^t \omega(u)\, du \\
&= \omega(t_0) + k \cdot \int_{t_0}^t \Big[\omega(u) + \frac{\eta}{k}\Big]\, du.
\end{aligned}$$

Setzen wir $g(t) := \omega(t) + \eta/k$, so ist $g(t) \le g(t_0) + k \cdot \int_{t_0}^t g(u)\, du$, und das Lemma von Gronwall ergibt:

$$\omega(t) + \frac{\eta}{k} = g(t) \le g(t_0) e^{k(t-t_0)} = \Big(\omega(t_0) + \frac{\eta}{k}\Big) \cdot e^{k(t-t_0)},$$

also

$$\omega(t) \le \omega(t_0) \cdot e^{k(t-t_0)} + \frac{\eta}{k}\big(e^{k(t-t_0)} - 1\big).$$

Damit ist der Satz für $t \ge t_0$ bewiesen. Ist $t < t_0$, so ersetze man oben überall $t$ durch $-t$ und $t_0$ durch $-t_0$. Dann kann der Beweis analog geführt werden. ∎

**Bemerkung:** Sind $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ und $\boldsymbol{\varphi}_\delta$ zwei Näherungslösungen mit $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t_0) = \boldsymbol{\varphi}_\delta(t_0)$, so gilt die Abschätzung:

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t) - \boldsymbol{\varphi}_\delta(t)\| \le (\varepsilon + \delta) \cdot \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}.$$

### 2.8. Folgerung 1

*Sind – unter den obigen Voraussetzungen –* $\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2 : J \to B$ *zwei (exakte) Lösungen der DGL* $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ *mit Anfangsbedingungen* $\boldsymbol{\varphi}_1(t_0) = \mathbf{y}_1$ *und* $\boldsymbol{\varphi}_2(t_0) = \mathbf{y}_2$*, so ist*

$$\|\boldsymbol{\varphi}_1(t) - \boldsymbol{\varphi}_2(t)\| \le \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \cdot e^{k \cdot |t-t_0|} \text{ für } t \in J.$$

*Dabei ist* $k$ *die Lipschitz-Konstante.*

Beweis: Setze in der fundamentalen Abschätzung $\varepsilon = 0$. ∎

### 2.9. Folgerung 2

*Sind – unter den obigen Voraussetzungen –* $\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2 : J \to B$ *zwei (exakte) Lösungen der DGL* $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ *mit Anfangsbedingungen* $\boldsymbol{\varphi}_1(t_0) = \boldsymbol{\varphi}_2(t_0) = \mathbf{y}_0$*, so ist* $\boldsymbol{\varphi}_1(t) = \boldsymbol{\varphi}_2(t)$ *für alle* $t \in J$*. Die Lösung ist also bei gegebener Anfangsbedingung eindeutig bestimmt.*

### 2.10. Lemma

*Sei* $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet,* $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ *eine stetige Abbildung und* $T = J \times B \subset G$ *eine Sicherheitstonne mit Radius* $r$ *und Länge* $2l$ *um* $(t_0, \mathbf{y}_0)$ *für* $\mathbf{F}$*. Eine stetige Funktion* $\boldsymbol{\varphi} : J \to \mathbb{R}^n$ *ist genau dann eine stetig differenzierbare Lösung der DGL* $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ *mit* $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$*, wenn für* $t \in J$ *gilt:*

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}(u))\, du.$$

Beweis: Sei $\boldsymbol{\varphi} : J \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion.

a) Ist $\boldsymbol{\varphi}$ stetig differenzierbar, $\boldsymbol{\varphi}'(t) = \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ und $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$, so ist

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}(u))\, du = \boldsymbol{\varphi}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\varphi}(t) - \mathbf{y}_0.$$

b) Sei umgekehrt $\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}(u))\, du$. Dann ist offensichtlich $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$, $\boldsymbol{\varphi}$ stetig differenzierbar und $\boldsymbol{\varphi}'(t) = \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$, also $\boldsymbol{\varphi}$ eine Lösung der DGL. ∎

### 2.11. Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz

*$\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und erfülle auf der Sicherheitstonne $T = J \times B \subset G$ um $(t_0, \mathbf{y}_0)$ eine Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstante $k$.*

*Dann existiert auf $J$ genau eine exakte Lösung $\boldsymbol{\varphi}$ der Differentialgleichung $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ mit $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$.*

Beweis: Auf $J$ existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $\varepsilon$-Näherungslösung $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ mit $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t_0) = \mathbf{y}_0$. Sei nun $(\varepsilon_\nu)$ eine monoton fallende Nullfolge und $\boldsymbol{\varphi}_\nu : J \to B$ jeweils eine $\varepsilon_\nu$-Näherungslösung mit $\boldsymbol{\varphi}_\nu(t_0) = \mathbf{y}_0$.

Aus der fundamentalen Abschätzung folgt:

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\nu(t) - \boldsymbol{\varphi}_\mu(t)\| \le (\varepsilon_\nu + \varepsilon_\mu) \cdot K,$$

wobei $K > 0$ eine obere Schranke von $(e^{k|t-t_0|} - 1)/k$ auf $J$ ist. Also ist $(\boldsymbol{\varphi}_\nu)$ eine Cauchyfolge im Banachraum der stetigen Funktionen $\boldsymbol{\varphi} : J \to \mathbb{R}^n$. Sie konvergiert dann gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $\boldsymbol{\varphi}_0 : J \to \mathbb{R}^n$.

Alle $\boldsymbol{\varphi}_\nu$ verlaufen innerhalb der Tonne $T$, und da diese abgeschlossen ist, verläuft auch $\boldsymbol{\varphi}_0$ innerhalb $T$, und natürlich ist auch $\boldsymbol{\varphi}_0(t_0) = \mathbf{y}_0$.

Da $\|\boldsymbol{\varphi}_\nu'(t) - \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\varphi}_\nu(t))\| \le \varepsilon_\nu$ für alle $\nu$ gilt, folgt:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\varphi}_\nu(t) - \mathbf{y}_0 - \int_{t_0}^t \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}_\nu(u))\, du\| &= \|\int_{t_0}^t \big(\boldsymbol{\varphi}_\nu'(u) - \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}_\nu(u))\big)\, du\| \\ &\le \varepsilon_\nu \cdot |t - t_0|. \end{aligned}$$

Lässt man $\nu$ gegen Unendlich laufen, so erhält man die Gleichung

$$\boldsymbol{\varphi}_0(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}_0(u))\, du.$$

Das bedeutet, dass $\boldsymbol{\varphi}_0$ eine Lösung der DGL ist. Die Eindeutigkeit wurde schon mit Folgerung 2 erledigt. ∎

### 2.12. Erweiterter Existenzsatz

*$\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und erfülle lokal die Lipschitzbedingung. Dann gibt es um jeden Punkt $(t_0, \mathbf{y}_0) \in G$ eine Sicherheitstonne $T = J \times B \subset G$, so dass gilt:*

1. *$\mathbf{F}$ erfüllt auf $T$ eine Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstante $k$.*
2. *Zu jedem $\mathbf{y} \in B$ existiert auf $J$ genau eine exakte Lösung $\boldsymbol{\varphi}$ der Differentialgleichung $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ mit $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}$.*

Beweis: Sei $T_0 = J_0 \times B_0 \subset G$ eine Sicherheitstonne um $(t_0, \mathbf{y}_0)$ mit Radius $r_0$ und Länge $2l_0$. Ist $M := \sup_{T_0} \|\mathbf{F}\|$, so ist $M \le r_0/l_0$. Ist nun $r := r_0/2$, $l := l_0/2$ und $T := J \times B = [t_0 - l, t_0 + l] \times \overline{B_r(\mathbf{y}_0)}$, so ist $T$ wieder eine Sicherheitstonne, denn es ist $r/l = (r_0/2)/(l_0/2) = r_0/l_0 \ge M$.

Ist $\mathbf{y} \in B$, so ist $T_{\mathbf{y}} := J \times \overline{B_r(\mathbf{y})}$ eine Sicherheitstonne um $(t_0, \mathbf{y})$, die ganz in $T_0$ enthalten ist. Ist nämlich $\|\mathbf{u} - \mathbf{y}\| < r$, so ist $\|\mathbf{u} - \mathbf{y}_0\| \le \|\mathbf{u} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| \le 2r = r_0$, und außerdem ist $r/l \ge M$.

Nach dem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz gibt es über $J$ genau eine Lösung $\boldsymbol{\varphi}$ mit $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}$. ∎

### 2.13. Lemma

*Unter den obigen Voraussetzungen gilt: Ist $\boldsymbol{\varphi} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ Lösung der DGL, so gibt es ein $t_2 > t_1$ und eine Lösung $\widehat{\boldsymbol{\varphi}} : [t_0, t_2) \to \mathbb{R}^n$ mit $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}|_{[t_0,t_1]} = \boldsymbol{\varphi}$.*

Beweis: Nach dem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutig bestimmte Lösung $\boldsymbol{\psi} : (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{\psi}(t_1) = \boldsymbol{\varphi}(t_1)$. Außerdem ist $\boldsymbol{\psi}'(t_1) = \mathbf{F}(t_1, \boldsymbol{\psi}(t_1)) = \mathbf{F}(t_1, \boldsymbol{\varphi}(t_1)) = \boldsymbol{\varphi}'(t_1)$.

Also ist $\widehat{\boldsymbol{\varphi}} : [t_0, t_1 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(t) := \begin{cases} \boldsymbol{\varphi}(t) & \text{für } t_0 \le t \le t_1, \\ \boldsymbol{\psi}(t) & \text{für } t_1 < t < t_1 + \varepsilon. \end{cases}$$

stetig differenzierbar und damit eine Lösung über $[t_0, t_1 + \varepsilon)$. ∎

### 2.14. Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz

*Betrachtet werde die DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$, $\mathbf{F}$ sei stetig und erfülle lokal die Lipschitzbedingung. Dann gibt es zu vorgegebener Anfangsbedingung $(t_0, \mathbf{y}_0) \in G$ Zahlen $t_-, t_+ \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $t_- < t_0 < t_+$ und eine Lösung $\boldsymbol{\varphi} : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *$\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$.*
2. *$\boldsymbol{\varphi}$ lässt sich auf kein größeres Intervall fortsetzen.*
3. *Ist $\boldsymbol{\psi} : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ eine weitere Lösung mit $\boldsymbol{\psi}(t_0) = \mathbf{y}_0$, so ist $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi}$.*
4. *Die Integralkurve $\boldsymbol{\Phi}(t) := (t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ läuft in $G$ „von Rand zu Rand“: Zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset G$ mit $(t_0, \mathbf{y}_0) \in K$ gibt es Zahlen $t_1, t_2$ mit*
$$t_- < t_1 < t_0 < t_2 < t_+,$$
*so dass $\boldsymbol{\Phi}((t_-, t_1)) \subset G \setminus K$ und $\boldsymbol{\Phi}((t_2, t_+)) \subset G \setminus K$ ist.*

Beweis: (1)+(2): Wir beschränken uns auf die Konstruktion von $t_+$, die von $t_-$ kann dann analog durchgeführt werden. Es sei

$$\varepsilon_+ := \sup\{\varepsilon > 0 \,:\, \exists \text{ Lösung } \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon : [t_0, t_0+\varepsilon] \to \mathbb{R}^n \text{ mit } \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t_0) = \mathbf{y}_0\}$$

und

$$t_+ := t_0 + \varepsilon_+.$$

Ist nun $t \in [t_0, t_+)$, so gibt es ein $\varepsilon$ mit $t - t_0 < \varepsilon < \varepsilon^+$, und wir setzen

$$\boldsymbol{\varphi}(t) := \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t).$$

Diese Definition ist wegen der globalen Eindeutigkeit unabhängig vom gewählten $\varepsilon$, und $\boldsymbol{\varphi}$ ist deshalb auch eine Lösung der DGL. Nach Konstruktion von $\varepsilon_+$ lässt sich $\boldsymbol{\varphi}$ nicht über $t_+$ hinaus zu einer erweiterten Lösung fortsetzen.

(3): Sei $\boldsymbol{\psi}$ eine weitere Lösung mit $\boldsymbol{\psi}(t_0) = \mathbf{y}_0$. Nach dem lokalen Eindeutigkeitssatz gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\psi}(t)$ für $t_0 \le t < t_0 + \varepsilon$ ist. Ist $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi}$ auf ganz $[t_0, t_+)$, so ist nichts mehr zu zeigen. Andernfalls sei

$$t^* := \inf\{t \in [t_0, t_+) \,:\, \boldsymbol{\varphi}(t) \ne \boldsymbol{\psi}(t)\}.$$

Dann ist $t_0 < t^* < t_+$, und es muss $\boldsymbol{\varphi}(t^*) = \boldsymbol{\psi}(t^*)$ sein, denn die Menge aller $t$ mit $\boldsymbol{\varphi}(t) \ne \boldsymbol{\psi}(t)$ ist offen. Wegen der lokalen Eindeutigkeit wäre dann aber auch noch in der Nähe von $t^*$ die Gleichheit von $\boldsymbol{\varphi}(t)$ und $\boldsymbol{\psi}(t)$ gegeben. Das ist ein Widerspruch zur Definition von $t^*$.

(4): Der Beweis der letzten Aussage ist etwas komplizierter.

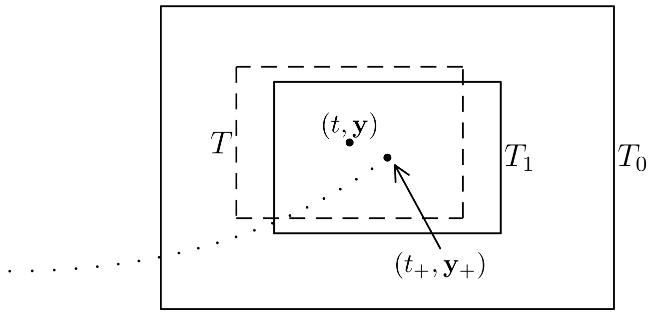
Sei $\mathbf{\Phi}(t) := (t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ für $t_0 \le t < t_+$ die zugehörige Integralkurve. Wenn die Behauptung falsch wäre, gäbe es eine kompakte Menge $K \subset G$ und eine monoton wachsende und gegen $t_+$ konvergente Folge $(t_\nu)$, so dass $\mathbf{\Phi}(t_\nu) \in K$ für $\nu \in \mathbb{N}$ gilt. Wir nehmen an, das sei der Fall. Da $K$ kompakt ist, muss dann die Folge $(t_\nu)$ beschränkt sein, also $t_+$ endlich. Außerdem muss es eine Teilfolge $(t_{\nu_i})$ geben, so dass $\mathbf{\Phi}(t_{\nu_i})$ gegen ein Element $(t_+, \mathbf{y}_+) \in K$ (und damit in $G$) konvergiert. Zur Vereinfachung der Schreibweise nehmen wir an, dass schon die Folge $(\mathbf{\Phi}(t_\nu))$ gegen $(t_+, \mathbf{y}_+)$ konvergiert.

Sei $T_0 = [t_+ - \varepsilon_0, t_+ + \varepsilon_0] \times \overline{B}_{r_0}(\mathbf{y}_+)$ eine Tonne, die noch ganz in $G$ liegt. Dabei seien $r_0$ und $\varepsilon_0$ so klein gewählt, dass $\mathbf{F}$ auf $T_0$ einer Lipschitzbedingung mit Konstante $k < 1/(2\varepsilon_0)$ genügt (durch Verkleinern von $\varepsilon_0$ ist das immer erreichbar). Weiter sei

$$M := \sup_{T_0} \|\mathbf{F}\|, \quad \varepsilon := \min\Big(\frac{\varepsilon_0}{2}, \frac{r_0}{2M}\Big) \quad \text{und} \quad r := \frac{r_0}{2},$$

sowie $T_1$ die Tonne mit Radius $r$ und Länge $2\varepsilon$ um $(t_+, \mathbf{y}_+)$. Für einen beliebigen Punkt $(t, \mathbf{y}) \in T_1$ ist die Tonne $T = T(t, \mathbf{y})$ mit Radius $r$ und Länge $2\varepsilon$ um $(t, \mathbf{y})$ eine in $T_0$ enthaltene Sicherheitstonne, denn es ist

$$\frac{r}{\varepsilon} = \max\Big(\frac{r_0}{\varepsilon_0}, M\Big), \text{ also } \sup_T \|\mathbf{F}\| \le \sup_{T_0} \|\mathbf{F}\| = M \le \frac{r}{\varepsilon}\,.$$




Außerdem erfüllt $F$ auch auf $T$ die Lipschitzbedingung mit der Konstanten $k$. Wir können das auf $T_\nu := T(t_\nu, \boldsymbol{\varphi}(t_\nu))$ anwenden, denn für genügend großes $\nu$ liegt $(t_\nu, \boldsymbol{\varphi}(t_\nu))$ in $T_1$. Dann ist $(t_+, \mathbf{y}_+)$ in $T_\nu$ enthalten. Nach dem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz gibt es genau eine Lösung $\boldsymbol{\psi} : [t_\nu - \varepsilon, t_\nu + \varepsilon] \to \overline{B}_r(\boldsymbol{\varphi}(t_\nu))$ mit $\boldsymbol{\psi}(t_\nu) = \boldsymbol{\varphi}(t_\nu)$.

Offensichtlich wird $\boldsymbol{\varphi}$ durch $\boldsymbol{\psi}$ fortgesetzt, und zwar über $t_+$ hinaus. Das ist ein Widerspruch! ■

Wir wollen noch zeigen, dass die Lösungen stetig von den Anfangswerten abhängen. Das erfordert als Vorbereitung eine genauere Untersuchung des Stetigkeitsbegriffs.

### Definition

Sei $I$ ein beliebiges Intervall und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $\mathbf{F} : I \times U \to \mathbb{R}^n$ heißt bei $\mathbf{u}_0$ ***gleichmäßig in*** $t \in I$ ***stetig in*** $\mathbf{u} \in U$, falls gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $\mathbf{u} \in U$ mit $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| < \delta$ und alle $t \in I$ die Ungleichung $\|\mathbf{F}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{F}(t, \mathbf{u}_0)\| < \varepsilon$ folgt.

### 2.15. Lemma

*Sei $I$ ein beliebiges Intervall und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.*

*Ist $\mathbf{F} : I \times U \to \mathbb{R}^n$ stetig in $t \in I$ und gleichmäßig in $t$ stetig in $\mathbf{u} \in U$, so ist $\mathbf{F}$ eine stetige Funktion von $(t, \mathbf{u}) \in I \times U$.*

Beweis: Sei $(t_0, \mathbf{u}_0) \in I \times U$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Voraussetzung existieren $\delta_1 > 0$ und $\delta_2 > 0$, so dass gilt: Ist $|t - t_0| < \delta_1$ und $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| < \delta_2$, so ist $\|\mathbf{F}(t, \mathbf{u}_0) - \mathbf{F}(t_0, \mathbf{u}_0)\| < \varepsilon/2$ und $\|\mathbf{F}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{F}(t, \mathbf{u}_0)\| < \varepsilon/2$ für alle $t \in I$.

Für $(t, \mathbf{u}) \in (t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1) \times B_{\delta_2}(\mathbf{u}_0)$ ist dann

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{F}(t_0, \mathbf{u}_0)\| &\leq \|\mathbf{F}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{F}(t, \mathbf{u}_0)\| + \|\mathbf{F}(t, \mathbf{u}_0) - \mathbf{F}(t_0, \mathbf{u}_0)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Das zeigt die Stetigkeit von $\mathbf{F}$ in $(t_0, \mathbf{u}_0)$. ■

Wir kehren zurück zur Differentialgleichung $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ über $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Es sei $J = [t_0 - l, t_0 + l]$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ offen, so dass $J \times A$ in $G$ liegt, $\mathbf{F}$ auf $J \times A$ eine $k$-Lipschitzbedingung erfüllt und zu jedem $\mathbf{u} \in A$ auf $J$ eine Lösung $\boldsymbol{\varphi}_\mathbf{u}$ der DGL mit $\boldsymbol{\varphi}_\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}$ existiert. Die fundamentale Abschätzung liefert dann für $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in A$:

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\mathbf{u}(t) - \boldsymbol{\varphi}_\mathbf{v}(t)\| \le \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \cdot e^{k|t-t_0|}.$$

Sei $\boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{u}) := \boldsymbol{\varphi}_\mathbf{u}(t)$. Dann nennt man $\boldsymbol{\Phi}$ den ***lokalen Fluss*** der DGL.

Ist $e^{k|t-t_0|} \le K$ auf $J$, so folgt:

$$\|\boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{u}) - \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{v})\| \le K \cdot \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad \text{für } t \in J \text{ und } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in A.$$

Das bedeutet, dass $\boldsymbol{\Phi}$ auf $J \times A$ eine $K$-Lipschitzbedingung erfüllt.

**2.16. Satz**

*Unter den obigen Voraussetzungen ist $\boldsymbol{\Phi}$ auf $J \times A$ stetig.*

BEWEIS: Für jedes $\mathbf{u} \in A$ ist die Abbildung $t \mapsto \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{u})$ als Lösung der DGL stetig.

Sei $\mathbf{u}_0 \in A$ beliebig, aber fest gewählt, sowie ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Ist $0 < \delta < \varepsilon / K$, so gilt für alle $t \in J$ und alle $\mathbf{u} \in A$ mit $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| < \delta$:

$$\|\boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{u}) - \boldsymbol{\Phi}(t, \mathbf{u}_0)\| \le K \cdot \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| < K \cdot \delta < \varepsilon.$$

Damit ist $\boldsymbol{\Phi}$ gleichmäßig in $t$ stetig in $\mathbf{u}_0$. Weil das für jedes $\mathbf{u}_0$ gilt, folgt aus dem Lemma, dass $\boldsymbol{\Phi}$ auf $J \times A$ stetig ist. ∎