2 Differentialgleichungen

2.1 Beispiele und Methoden

Was ist eine Differentialgleichung?

Ist $k \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1}$ ein Gebiet und $F : G \to \mathbb{R}$ eine (zunächst beliebige) Funktion, so nennt man

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}) = 0 \quad (*)$$

eine ***gewöhnliche Differentialgleichung*** k***-ter Ordnung***.

Diese Definition wird erst klar, wenn wir sagen, was eine Lösung einer solchen Gleichung ist.

Eine ***Lösung*** der DGL (*) ist eine Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $I \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall und φ ist k-mal differenzierbar.
2. Für alle $x \in I$ ist $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(k)}(x)) \in G$ und

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(k)}(x)) = 0.$$

Ein Satz Anfangsbedingungen für die DGL (*) besteht aus einem Punkt $x_0 \in I$ und einem Vektor $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$. Eine Lösung φ erfüllt die Anfangsbedingungen, wenn gilt:

$$\varphi(x_0) = c_0,\ \varphi'(x_0) = c_1,\ \dots, \varphi^{(k-1)}(x_0) = c_{k-1}.$$

Hauptproblem der Theorie der DGLn ist die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Dabei beschränkt man sich meist auf sogenannte ***explizite Differentialgleichungen*** der Form

$$y^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}).$$

1.1. Beispiele

A. Die DGL $y' = ay$ (mit positiver Konstante a) tritt auf, wenn Wachstumsprozesse beschrieben werden sollen.

Offensichtlich ist die Funktion $\varphi_0(x) \equiv 0$ eine Lösung. Ist φ eine beliebige Lösung, so setzen wir $\Phi(x) := \varphi(x)e^{-ax}$. Dann ist

$$\Phi'(x) = (\varphi'(x) - a \cdot \varphi(x))e^{-ax} \equiv 0,$$

also $\Phi(x) \equiv c$ konstant und $\varphi(x) = c \cdot e^{ax}$. Die Probe zeigt, dass dies tatsächlich eine Lösung ist. Gleichzeitig ergibt sich aus unserer Argumentation, dass jede Lösung so aussehen muss. Dabei ist $c = \varphi(0)$, insbesondere kann auch $c = 0$ sein.

Zu jeder Anfangsbedingung gibt es genau eine Lösung.

B. Die Gleichung $y' = \sqrt{y}$ ist nicht eindeutig lösbar. Neben der Lösung $\varphi_0(x) \equiv 0$ ist auch jede der Funktionen

$$\varphi_\alpha(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq \alpha, \\ (x-\alpha)^2/4 & \text{für } x > \alpha, \end{cases}$$

für jedes $\alpha \geq 0$ eine Lösung mit $\varphi_\alpha(0) = 0$.

Bevor wir weitere Beispiele betrachten, wollen wir sehen, dass es reicht, Systeme von expliziten DGLn 1. Ordnung zu betrachten. Ein System von DGLn 1. Ordnung sieht i.a. folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_k(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

Eine Lösung eines solchen Systems ist ein System von differenzierbaren Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ mit $\varphi_j'(x) = f_j(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ für $j = 1, \ldots, n$.

Man benutzt gerne die Vektorschreibweise:

Definition

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Unter einer ***Lösung der Differentialgleichung***

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$$

versteht man eine Abbildung $\boldsymbol{\varphi} : I \to \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $I \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall, und der Graph $\{(t, \boldsymbol{\varphi}(t)) \,:\, t \in I\}$ liegt in G.
2. $\boldsymbol{\varphi}$ ist differenzierbar, und es ist $\boldsymbol{\varphi}'(t) = F(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ auf I.

Ist $n = 1$, so spricht man von einer ***gewöhnlichen Differentialgleichung***.

Ist $\boldsymbol{\varphi}$ eine Lösung von $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ und $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$, so sagt man, $\boldsymbol{\varphi}$ erfüllt die ***Anfangsbedingung*** $(t_0, \mathbf{y}_0)$. Die Lösung heißt ***maximal***, wenn sie sich nicht zu einer Lösung mit größerem Definitionsbereich fortsetzen lässt.

1.2. Satz

Ist $\boldsymbol{\varphi}$ Lösung der DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ und $\mathbf{F}$ r-mal (stetig) differenzierbar, so ist $\boldsymbol{\varphi}$ $(r+1)$-mal (stetig) differenzierbar.

Beweis: Definitionsgemäß ist $\boldsymbol{\varphi}$ einmal differenzierbar. Ist $\mathbf{F}$ stetig, so folgt aus der Gleichung $\boldsymbol{\varphi}'(t) = \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$, dass $\boldsymbol{\varphi}$ sogar stetig differenzierbar ist.

Ist $\mathbf{F}$ differenzierbar, so folgt aus der selben Gleichung, dass $\boldsymbol{\varphi}'$ differenzierbar, also $\boldsymbol{\varphi}$ zweimal differenzierbar ist, u.s.w. ∎

Es besteht nun ein direkter Zusammenhang zwischen (expliziten) gewöhnlichen DGLn k–ter Ordnung und den Systemen von k expliziten DGLn erster Ordnung:

Ist eine DGL

$$y^{(k)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}) \qquad (*)$$

gegeben, so ordnen wir ihr folgendes System zu:

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & y_2 \\ & \vdots & \\ y_{k-1}' & = & y_k \\ y_k' & = & f(x, y_1, \ldots, y_k) \end{array} \qquad (**)$$

Ist φ eine Lösung der DGL $(*)$, so ist φ k-mal differenzierbar und $\varphi^{(k)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(k-1)}(x))$. Wir setzen

$$\varphi_1 := \varphi, \quad \varphi_2 := \varphi', \quad \ldots, \quad \varphi_k := \varphi^{(k-1)}.$$

Dann sind alle φ_ν mindestens einmal differenzierbar, und es ist

$$\begin{array}{rrcl} & \varphi_1'(x) & = & \varphi_2(x), \\ & & \vdots & \\ & \varphi_{k-1}'(x) & = & \varphi_k(x) \\ \text{und} & \varphi_k'(x) & = & \varphi^{(k)}(x) = f(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)), \end{array}$$

d.h., $\boldsymbol{\varphi} := (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ ist eine Lösung des Systems $(**)$.

Ist umgekehrt eine Lösung $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ des Systems gegeben, so setze man $\varphi := \varphi_1$. Dann ist φ differenzierbar, $\varphi' = \varphi_2$ ebenfalls differenzierbar u.s.w., und schließlich auch $\varphi^{(k-1)} = \varphi_k$ differenzierbar. Also ist φ k-mal differenzierbar und

$$\varphi^{(k)}(x) = \varphi_k'(x) = f(x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{(k-1)}(x)),$$

also φ Lösung von $(*)$.

Eine Anfangsbedingung für ein System von k DGLn hat die Gestalt

$$\varphi_\nu(x_0) = y_\nu^{(0)},\ \nu = 1, \dots, k.$$

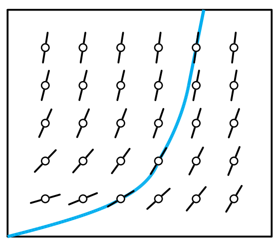
Über die Formel

$$(y_1^{(0)}, \dots, y_k^{(0)}) = \mathbf{y}_0 = \mathbf{c} = (c_0, \dots, c_{k-1})$$

erhält man daraus eine Anfangsbedingung für die DGL k-ter Ordnung, und umgekehrt.

Gewöhnliche Differentialgleichungen lassen sich besonders gut veranschaulichen. Die durch die DGL $y' = f(t, y)$ induzierte Zuordnung $(t, y) \mapsto f(t, y) \in \mathbb{R}$ liefert für jeden Punkt $(t, y) \in G$ eine Richtung, beschrieben durch ihre Steigung $f(t, y)$. Zeichnet man an der Stelle (t, y) einen kleinen Vektor mit der angegebenen Richtung, so erhält man ein „Richtungsfeld" auf G.

Der Graph einer Lösungsfunktion ist eine Kurve, die sich dem Richtungsfeld anschmiegt.



Es gilt also, eine Kurve zu finden, deren Tangente an jeder Stelle mit dem gegebenen Richtungsfeld übereinstimmt.

Ist $G_0 \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, so verstehen wir unter einem ***(stetigen, differenzierbaren, etc.) Vektorfeld*** auf G_0 eine (stetige, differenzierbare, etc.) Abbildung $\mathbf{F} : G_0 \to \mathbb{R}^n$. Wir stellen uns dabei vor, dass auf diese Weise in jedem Punkt $\mathbf{y} \in G_0$ ein Vektor $\mathbf{F}(\mathbf{y})$ angeheftet wird. Man beachte, dass dies eine neue Interpretation einer Abbildung $\mathbf{F} : G_0 \to \mathbb{R}^n$ ist, im Gegensatz zu der bisherigen Interpretation als Koordinatentransformation.

Definition

Ist $\mathbf{F} : G_0 \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, so bezeichnet man die zeitunabhängige Differentialgleichung $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(\mathbf{y})$ (auf $G := \mathbb{R} \times G_0$) auch als ***autonomes System (von Differentialgleichungen)***.

Unter einer ***Integralkurve*** des Vektorfeldes $\mathbf{F}$ versteht man eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte, stetig differenzierbare Kurve $\boldsymbol{\varphi} : I \to G$ mit $\boldsymbol{\varphi}'(t) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}(t))$ (also eine Lösung der autonomen DGL).

Die Spur $|\boldsymbol{\varphi}|$ einer Integralkurve bezeichnet man als ***Bahn*** oder ***Trajektorie***.

1.3. Satz

Sei $\boldsymbol{\varphi} : I \to G_0$ *eine Lösung des autonomen Systems* $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(\mathbf{y})$*. Dann ist für jedes* $t_0 \in \mathbb{R}$ *auch* $\boldsymbol{\psi}(t) := \boldsymbol{\varphi}(t - t_0)$ *eine Lösung.*

BEWEIS: Zur Abkürzung setzen wir $s := t - t_0$. Dann ist $\boldsymbol{\psi}'(t) = \boldsymbol{\varphi}'(s) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}(s)) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\psi}(t))$. ∎

Wir betrachten nun den Zusammenhang zwischen zeitabhängigen und zeitunabhängigen Differentialgleichungen.

a) Ist $\boldsymbol{\varphi} : I \to G_0$ eine Integralkurve des Vektorfeldes $\mathbf{F}$ auf G_0 und $\widetilde{\mathbf{F}} : \mathbb{R} \times G_0 \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\widetilde{\mathbf{F}}(t, \mathbf{y}) := \mathbf{F}(\mathbf{y})$, so ist

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}(t)) = \widetilde{\mathbf{F}}(t, \boldsymbol{\varphi}(t)),$$

also $\boldsymbol{\varphi}$ auch eine Lösung der zeitabhängigen DGL $\mathbf{y}' = \widetilde{\mathbf{F}}(t, \mathbf{y})$. Ist andererseits eine Lösung $\boldsymbol{\varphi} : I \to \mathbb{R}^n$ der zeitabhängigen Lösung gegeben, so liegt $(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ in $I \times G_0$, also $\boldsymbol{\varphi}(t) \in G_0$ für alle $t \in I$. Das bedeutet, dass $\boldsymbol{\varphi}$ auch Lösung des autonomen Systems ist.

b) Ist umgekehrt $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ eine zeitabhängige Differentialgleichung über G und $\boldsymbol{\varphi} : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung dieser Gleichung, so ist $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(t) := (t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ eine Lösung des autonomen Systems $\mathbf{z}' = \widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{z})$, mit $\widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{z}) := (1, \mathbf{F}(\mathbf{z}))$, denn es ist

$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}'(t) = (1, \boldsymbol{\varphi}'(t)) = (1, \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))) = \widehat{\mathbf{F}}(t, \boldsymbol{\varphi}(t)) = \widehat{\mathbf{F}}(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(t)).$$

Ist dagegen $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \boldsymbol{\psi}_2) : I \to G$ eine Lösung des autonomen Systems $\mathbf{z}' = \widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{z})$, so ist $\psi_1'(t) \equiv 1$ und $\boldsymbol{\psi}_2'(t) = \mathbf{F}(\psi_1(t), \boldsymbol{\psi}_2(t))$. Es gibt also eine Konstante c, so dass $\psi_1(t) = t + c$ ist. Setzen wir $\boldsymbol{\varphi}(s) := \boldsymbol{\psi}_2(s - c)$, so folgt:

$$\boldsymbol{\varphi}'(s) = \boldsymbol{\psi}_2'(s - c) = \mathbf{F}(\psi_1(s - c), \boldsymbol{\psi}_2(s - c)) = \mathbf{F}(s, \boldsymbol{\varphi}(s)).$$

Also ist $\boldsymbol{\varphi}$ eine Lösung des zeitabhängigen Systems $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(s, \mathbf{y})$.

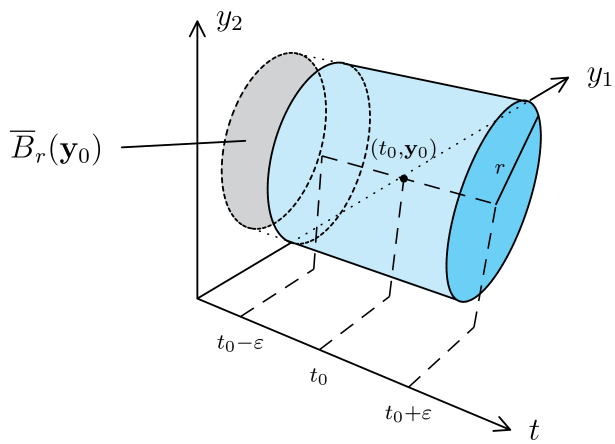
Wir kehren zu den allgemeinen Systemen zurück und zeigen, dass man eine Lösung $\boldsymbol{\varphi}$ der Differentialgleichung $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ unter der Anfangsbedingung $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$ findet.

Definition

Sei $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Die ***Tonne*** mit *Radius* r und *Länge* 2ε um $(t_0, \mathbf{y}_0)$ ist die Menge

$$T := [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}_r(\mathbf{y}_0).$$

Ist $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, so nennt man eine Tonne $T \subset G$ mit Radius r und Länge 2ε eine ***Sicherheitstonne*** für $\mathbf{F}$, falls gilt: $\sup_T \|\mathbf{F}(t, \mathbf{y})\| \le r/\varepsilon$.



1.4. Existenz von Sicherheitstonnen

Ist T_0 eine beliebige Tonne um $(t_0, \mathbf{y}_0)$ mit Radius r und Länge 2ε und $\mathbf{F}$ stetig auf T_0, so gibt es ein δ mit $0 < \delta \le \varepsilon$, so dass jede Tonne T mit Radius r und Länge $\le 2\delta$ um $(t_0, \mathbf{y}_0)$ eine Sicherheitstonne für $\mathbf{F}$ ist.

Beweis: Sei $M := \sup_{T_0}\|\mathbf{F}\|$ und $\delta := \min(\varepsilon, \dfrac{r}{M})$. Dabei sei $r/M := +\infty$ gesetzt, falls $M = 0$ ist. Dann ist $r/\delta = \max(r/\varepsilon, M)$, und für die Tonne T gilt: $\sup_{T}\|\mathbf{F}\| \le \sup_{T_0}\|\mathbf{F}\| = M \le \dfrac{r}{\delta}$. ■

Definition

Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine stückweise stetig differenzierbare Funktion $\boldsymbol{\varphi} : J \to \mathbb{R}^n$ heißt eine ε-***Näherungslösung*** der auf G definierten DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$, falls gilt:

1. $(t, \boldsymbol{\varphi}(t)) \in G$ für $t \in J$.
2. $\|\boldsymbol{\varphi}'(t) - \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))\| \le \varepsilon$ für $t \in J$.

In den Punkten, in denen $\boldsymbol{\varphi}$ nicht differenzierbar ist, soll die Ungleichung für die beiden einseitigen Grenzwerte gelten.

Wir wollen eine solche Näherung konstruieren. Dabei können wir annehmen, dass $\mathbf{F}(t, \mathbf{y}) \not\equiv \mathbf{0}$ ist. Sei T_0 eine Sicherheitstonne mit Radius r und Länge 2ε um $(t_0, \mathbf{y}_0)$, $M := \sup_{T_0}\|\mathbf{F}\| > 0$, $a := \min(\varepsilon, r/M)$ und $I := [t_0, t_0 + a]$. Dann ist $0 < a \le \varepsilon$, $aM \le r$ und $T := I \times \overline{B_r(\mathbf{y}_0)} \subset T_0$.

Nun betrachtet man Zerlegungen $\mathfrak{Z} = (t_0, \ldots, t_N)$ des Intervalls I. Bei fester Zerlegung sei $J_i := [t_{i-1}, t_i]$, für $i = 1, \ldots, N$. Dann wird wie folgt ein Streckenzug $\boldsymbol{\varphi} : I \to \mathbb{R}^n$ konstruiert:

Auf J_1 sei $\boldsymbol{\varphi}(t) := \mathbf{y}_0 + (t - t_0)\mathbf{F}(t_0, \mathbf{y}_0)$. An der Stelle t_0 hat $\boldsymbol{\varphi}$ die richtige Steigung, und außerdem ist

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t) - \mathbf{y}_0\| = |t - t_0| \cdot \|\mathbf{F}(t_0, \mathbf{y}_0)\| \leq a \cdot M \leq r.$$

Der Graph von $\boldsymbol{\varphi}$ verläuft also über J_1 ganz in $T_0 \subset G$, und es ist $\|\boldsymbol{\varphi}(t_1) - \mathbf{y}_0\| \leq |t_1 - t_0| \cdot M$.

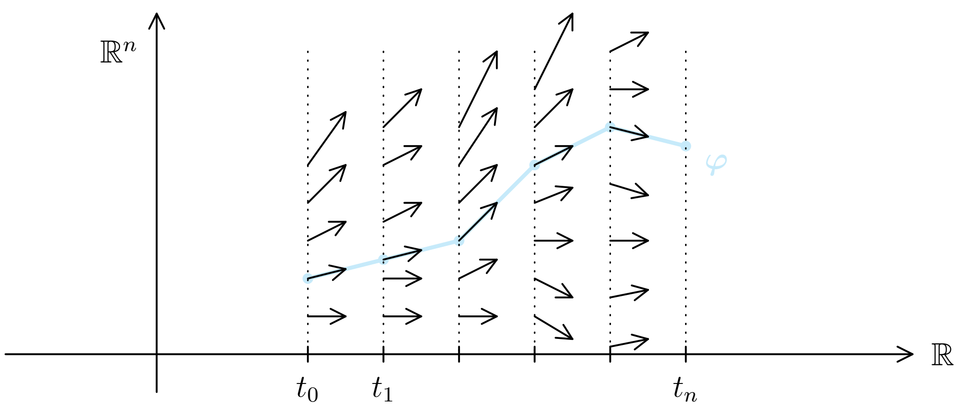
Auf $J_2 = \{t \,:\, t_1 < t < t_2\}$ sei

$$\boldsymbol{\varphi}(t) := \boldsymbol{\varphi}(t_1) + (t - t_1)\mathbf{F}(t_1, \boldsymbol{\varphi}(t_1)),$$

und so fährt man fort. Der Streckenzug, der so entsteht, wird ***Euler-Polygonzug*** genannt. Er ist Graph einer stetigen und sogar stückweise stetig differenzierbaren Abbildung und verläuft ganz in T_0. Ist nämlich $\|\boldsymbol{\varphi}(t_{i-1}) - \mathbf{y}_0\| \leq |t_{i-1} - t_0| \cdot M$, so gilt für $t \in J_i$:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\varphi}(t) - \mathbf{y}_0\| &= \|\boldsymbol{\varphi}(t_{i-1}) + (t - t_{i-1}) \cdot \mathbf{F}(t_{i-1}, \boldsymbol{\varphi}(t_{i-1})) - \mathbf{y}_0\| \\
&\leq |t_{i-1} - t_0| \cdot M + |t - t_{i-1}| \cdot M \\
&= (t - t_0) \cdot M \;\leq\; a \cdot M \;\leq\; r,
\end{aligned}$$

insbesondere ist $\|\boldsymbol{\varphi}(t_i) - \mathbf{y}_0\| \leq (t_1 - t_0) \cdot M$. In den Punkten $(t_i, \boldsymbol{\varphi}(t_i))$ hat der Polygonzug jeweils rechtsseitig die richtige Steigung.



Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\mathscr{F} = (\mathbf{f}_\nu)$ eine Folge von Abbildungen $\mathbf{f}_\nu : I \to \mathbb{R}^n$.

- $\mathscr{F}$ heißt auf I ***gleichgradig stetig***, falles es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $t, s \in I$ und alle $\nu \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|t - s| < \delta \implies \|\mathbf{f}_\nu(t) - \mathbf{f}_\nu(s)\| < \varepsilon.$$

- $\mathscr{F}$ heißt ***punktweise beschränkt***, falls es zu jedem $t \in I$ eine Konstante $C = C(t) > 0$, so dass $|\mathbf{f}_\nu(t)| \leq C$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ gilt.

1.5. Satz von Ascoli

Sei $I = [a, b]$ und $\mathscr{F} = (\mathbf{f}_\nu)$ eine Folge von Abbildungen $\mathbf{f}_\nu : I \to \mathbb{R}^n$. Ist $\mathscr{F}$ gleichgradig stetig und punktweise beschränkt, so enthält $\mathscr{F}$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Beweis: a) Sei $A := [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Da diese Menge abzählbar ist, kann man schreiben: $A = \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Die Folge $(\mathbf{f}_\nu(t_1))$ ist eine beschränkte Zahlenfolge. Deshalb gibt es eine Teilfolge $(\nu_k^{(1)})$ von $\mathbb{N}$, so dass $\big(\mathbf{f}_{\nu_k^{(1)}}(t_1)\big)$ konvergiert. Sei $\mathscr{F}_1 := \big(\mathbf{f}_{\nu_k^{(1)}}\big)$.

Da auch $\big(\mathbf{f}_{\nu_k^{(1)}}(t_2)\big)$ beschränkt ist, gibt es eine Teilfolge $(\nu_k^{(2)})$ von $(\nu_k^{(1)})$, so dass $\big(\mathbf{f}_{\nu_k^{(2)}}(t_2)\big)$ konvergiert. Sei $\mathscr{F}_2 := \big(\mathbf{f}_{\nu_k^{(2)}}\big)$.

Man fährt so fort und benutzt schließlich die „Diagonalfolge" $\mathscr{D} = (\mathbf{g}_k)$ mit $\mathbf{g}_k := \mathbf{f}_{\nu_k^{(k)}}$. Da $(\mathbf{g}_k, \mathbf{g}_{k+1}, \ldots)$ eine Teilfolge von $\mathscr{F}_k$ ist, konvergiert $\mathscr{D}$ in jedem Punkt der Menge A.

b) Wir wollen zeigen, dass $(\mathbf{g}_k)$ gleichmäßig auf $[a, b]$ konvergiert.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Voraussetzung gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $t, s \in I$ und alle $\nu \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|t - s| < \delta \implies \|\mathbf{f}_\nu(t) - \mathbf{f}_\nu(s)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Die rechte Ungleichung gilt dann erst recht für alle $\mathbf{g}_k$. Man zerlege nun das Intervall $[a, b]$ in der Form $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$, so dass $0 < t_j - t_{j-1} < \delta$ ist. Dann gibt es für jedes $j \in \{1, \ldots, N\}$ ein $s_j \in A \cap (t_{j-1}, t_j)$ (weil $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist).

Weil $(\mathbf{g}_k(s))$ in jedem Punkt $s = s_j$ konvergiert, kann man ein gemeinsames $k_0 = k_0(\varepsilon)$ finden, so dass gilt:

$$|\mathbf{g}_k(s_j) - \mathbf{g}_m(s_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für } k, m \geq k_0 \text{ und } j = 1, \ldots, N.$$

Sei nun $s \in [a, b]$ beliebig, und dazu j so gewählt, dass $|s - s_j| < \delta$ ist. Für $k, m \geq k_0$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}_k(s) - \mathbf{g}_m(s)\| &\leq \|\mathbf{g}_k(s) - \mathbf{g}_k(s_j)\| + \|\mathbf{g}_k(s_j) - \mathbf{g}_m(s_j)\| + \|\mathbf{g}_m(s_j) - \mathbf{g}_m(s)\| \\ &= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

∎

Sei jetzt $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung und $T \subset G$ eine Sicherheitstonne mit Radius r und Länge $2a$ um $(t_0, \mathbf{y}_0)$ für $\mathbf{F}$, also

$$M := \sup_T \|\mathbf{F}(t, \mathbf{x})\| \leq r/a.$$

1.6. Lemma

Eine stetige Funktion $\boldsymbol{\varphi} : [t_0, t_0 + a] \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine stetig differenzierbare Lösung der DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ mit $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$, wenn für $t_0 \le t \le t_0 + a$ gilt:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}(u))\, du.$$

BEWEIS: Sei $\boldsymbol{\varphi} : [t_0, t_0 + a] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion.

a) Ist $\boldsymbol{\varphi}$ stetig differenzierbar, $\boldsymbol{\varphi}'(t) = \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ und $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$, so ist

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}(u))\, du = \boldsymbol{\varphi}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\varphi}(t) - \mathbf{y}_0.$$

b) Sei umgekehrt $\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}(u))\, du$. Dann ist offensichtlich $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$, $\boldsymbol{\varphi}$ stetig differenzierbar und $\boldsymbol{\varphi}'(t) = \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$, also $\boldsymbol{\varphi}$ eine Lösung der DGL. ∎

1.7. Existenzsatz von Peano

In der obigen Situation existiert eine Lösung $\boldsymbol{\varphi} : [t_0, t_0 + a] \to \mathbb{R}^n$ der DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ mit $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$.

BEWEIS: Nach Voraussetzung ist $a \le r/M$.

a) Ist $M = 0$, so ist $\mathbf{F}(t, \mathbf{y}) \equiv \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{\varphi}(t) \equiv \mathbf{y}_0$ eine Lösung.

b) Sei $M > 0$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es ein $\delta > 0$, so dass gilt:

$$(*) \qquad \text{Ist } |t - s| < \delta \text{ und } \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta, \text{ so ist } \|\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{F}(s, \mathbf{y})\| < \varepsilon,$$

denn die stetige Abbildung $\mathbf{F}$ ist auf der kompakten Tonne gleichmäßig stetig.

Sei $n = n(\varepsilon)$ so groß gewählt, dass $0 < a/n < \min(\delta, \delta/M)$ ist, und

$$t_j := t_0 + j \cdot \frac{a}{n} \text{ und } \mathbf{y}_j := \mathbf{y}_{j-1} + \frac{a}{n} \cdot \mathbf{F}(t_{j-1}, \mathbf{y}_{j-1}), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Durch

$$\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t_0) := \mathbf{y}_0 \;\text{ und }\; \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t) := \mathbf{y}_j + (t - t_j)\mathbf{F}(t_j, \mathbf{y}_j) \text{ für } t_j \le t \le t_{j+1} \text{ und } j \ge 0$$

wird ein Euler'scher Polygonzug auf $[t_0, t_0 + a]$ definiert.

Behauptung: $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ ist eine ε-Näherungslösung auf $[t_0, t_0 + a]$.

Beweis dafür: Für $t \in [t_j, t_{j+1}]$ ist $|t - t_j| < |t_{j+1} - t_j| = a/n$ und

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}_j\| &= |t - t_j| \cdot \|\mathbf{F}(t_j, \mathbf{y}_j)\| \\ &\leq \frac{a}{n} \cdot \|\mathbf{F}(t_j, \mathbf{y}_j)\| \leq \frac{a}{n} \cdot M < \frac{\delta}{M} \cdot M = \delta.\end{aligned}$$

Da $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon'(t) = \mathbf{F}(t_j, \mathbf{y}_j)$ für $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ ist, folgt mit $(*)$:

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon'(t) - \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(t))\| < \varepsilon \quad \text{auf } [t_0, t_0 + a].$$

c) Sei nun (ε_k) eine Nullfolge und $\boldsymbol{\varphi}_k := \boldsymbol{\varphi}_{\varepsilon_k}$. Da der Polygonzug komplett in der Tonne bleibt, ist die Folge $(\boldsymbol{\varphi}_k)$ punktweise bschränkt. Sie ist aber auch gleichgradig stetig:

Beweis dafür: Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta < \varepsilon/(2M)$. Sei $|t - s| < \delta$. Wir nehmen zunächst an, dass t und s beide in einem Intervall $[t_j, t_{j+1}]$ liegen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{\varphi}_k(t) - \boldsymbol{\varphi}_k(s)\| = \\ &= \|\big(\boldsymbol{\varphi}_k(t_j) + (t - t_j)\mathbf{F}(t_j, \boldsymbol{\varphi}_k(t_j))\big) - \big(\boldsymbol{\varphi}_k(t_j) + (s - t_j)\mathbf{F}(t_j, \boldsymbol{\varphi}_k(t_j))\big)\| \\ &= |t - s| \cdot \|\mathbf{F}(t_j, \boldsymbol{\varphi}_k(t_j))\| \leq |t - s| \cdot M < \delta M < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } k.\end{aligned}$$

Liegen t und s in zwei aufeinanderfolgenden Intervallen, so erhält man immer noch, dass $\|\boldsymbol{\varphi}_k(t) - \boldsymbol{\varphi}_k(s)\| < \varepsilon$ für alle k ist.

Nach dem Satz von Ascoli gibt es dann eine Teilfolge von $(\boldsymbol{\varphi}_k)$ (die wir wieder mit $\boldsymbol{\varphi}_k$ bezeichnen), die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $\boldsymbol{\varphi}$ konvergiert.

Für $t \in [t_j, t_{j+1}]$ und $k \in \mathbb{N}$ ist nun

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{\varphi}_k(t) - \mathbf{y}_0 - \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(s, \boldsymbol{\varphi}_k(s))\, ds\| = \\ &= \|\sum_{\nu=0}^{j-1} \Big(\mathbf{y}_{\nu+1} - \mathbf{y}_\nu - \int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} \mathbf{F}(s, \boldsymbol{\varphi}_k(s))\, ds\Big) + \boldsymbol{\varphi}_k(t) - \mathbf{y}_j - \int_{t_j}^{t} \mathbf{F}(s, \boldsymbol{\varphi}_k(s))\, ds\| \\ &= \|\sum_{\nu=0}^{j-1} \int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} \Big(\boldsymbol{\varphi}_k'(s) - \mathbf{F}\big(s, \boldsymbol{\varphi}_k(s)\big)\Big)\, ds + \int_{t_j}^{t} \Big(\boldsymbol{\varphi}_k'(s) - \mathbf{F}\big(s, \boldsymbol{\varphi}_k(s)\big)\Big)\, ds\| \\ &\leq \sum_{\nu=0}^{j-1} \varepsilon_k \cdot (t_{\nu+1} - t_\nu) + \varepsilon_k(t - t_j) \\ &= \varepsilon_k \cdot (t - t_0) \leq \varepsilon_k \cdot a \quad \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.\end{aligned}$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $(\boldsymbol{\varphi}_k)$ ist dann

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(s, \boldsymbol{\varphi}(s))\, ds,$$

d.h., $\boldsymbol{\varphi}$ ist Lösung der Differentialgleichung. ∎

Wir untersuchen jetzt einige spezielle Typen von Differentialgleichungen.

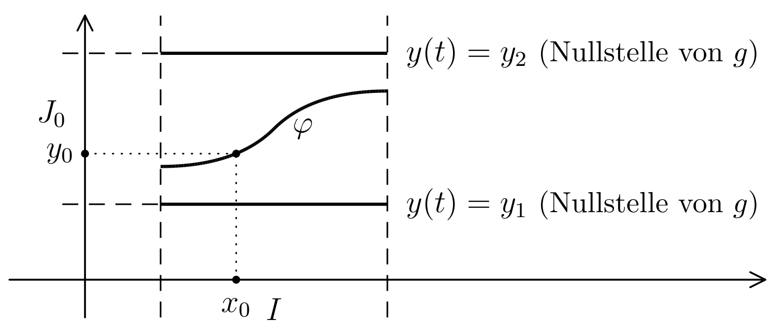
Differentialgleichungen mit getrennten Variablen:

Unter einer *Differentialgleichung mit getrennten Variablen* versteht man eine Differentialgleichung der Form
$$y' = f(x)g(y),$$
wobei $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf geeigneten Intervallen sind.

Wir wollen das Anfangswertproblem lösen, d.h., wir suchen eine Funktion φ mit $\varphi(x_0) = y_0$ und $\varphi'(x) = f(x) \cdot g(\varphi(x))$.

1. Fall: Ist $g(y_0) = 0$, so ist für jedes $x_0 \in I$ die konstante Funktion $\varphi(x) \equiv y_0$ eine Lösung mit $\varphi(x_0) = y_0$.

2. Fall: Sei $J_0 \subset J$ ein offenes Intervall, auf dem g keine Nullstellen hat, und $y_0 \in J_0$. Ist φ eine Lösung auf I mit $\varphi(x_0) = y_0$, so ist $g(\varphi(x)) \neq 0$ nahe x_0 und
$$\frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = f(x).$$
Also ist
$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))}\,dt = \int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{1}{g(u)}\,du.$$
Sei nun F eine Stammfunktion von f auf I und G eine Stammfunktion von $1/g$ auf J_0. Dann ist $F(x) - F(x_0) = G(\varphi(x)) - G(y_0)$. Außerdem ist $G'(x) = 1/g(x) \neq 0$ für $x \in J_0$, also G dort streng monoton. Damit ist G umkehrbar und
$$\varphi(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0)).$$
Die Probe zeigt sofort, dass φ tatsächlich die DGL löst.



Bemerkung: Die Physiker haben – wie immer – eine suggestive Schreibweise dafür:
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad &\Longrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \\ &\Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx \\ &\Longrightarrow \quad G(y) = F(x) + c \\ &\Longrightarrow \quad y = G^{-1}(F(x) + c). \end{aligned}$$

Damit $y(x_0) = y_0$ ist, muss man $c = G(y_0) - F(x_0)$ wählen.

Als konkretes **Beispiel** nehmen wir die DGL $y' = xy$.
Hier sind $f(x) = x$ und $g(y) = y$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Als Stammfunktionen können wir

$$F(x) := \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{auf } \mathbb{R}$$

und

$$G(y) := \ln|y| \qquad \text{auf jedem Intervall } J\text{, das nicht die Null enthält,}$$

nehmen. Dann ist

$$G^{-1}(z) = \begin{cases} e^z & \text{falls } J \subset \mathbb{R}_+, \\ -e^z & \text{sonst,} \end{cases}$$

also

$$\begin{aligned} y(x) &= G^{-1}(F(x) + c) \\ &= \pm\exp(\frac{1}{2}x^2 + c) \\ &= C \cdot \exp(\frac{1}{2}x^2), \text{ mit } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Das schließt insbesondere die Lösung $y(x) \equiv 0$ mit ein. Liegt J in $\mathbb{R}_+$, so muss $C > 0$ gewählt werden, sonst $C < 0$.

Als zweites **Beispiel** betrachten wir die DGL

$$y' = xy^2.$$

Hier ist $f(x) = x$, also $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, wie oben, sowie $g(y) = y^2$, also $G(y) = -\frac{1}{y}$ (auf jedem Intervall J, das nicht die Null enthält). Nach dem obigen Verfahren erhalten wir die Lösungen

$$y_c(x) = G^{-1}(F(x) + c) = -\frac{1}{x^2/2 + c} = -\frac{2}{2c + x^2}.$$

Hinzu kommt die konstante Lösung $y(x) \equiv 0$, die sich aus der einzigen Nullstelle von $g(y)$ ergibt.

Lineare Differentialgleichungen:

Eine allgemeine lineare DGL 1. Ordnung über einem Intervall I hat folgende Gestalt:

$$y' + a(x)y = r(x), \text{ mit stetigen Funktionen } a, r : I \to \mathbb{R}.$$

Ist $r(x) \equiv 0$, so spricht man vom ***homogenen*** Fall. Dann ist auf jeden Fall die Funktion $y(x) \equiv 0$ eine Lösung. Suchen wir nach weiteren Lösungen, so können wir voraussetzen, dass $y(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ ist, und es gilt:

$$(\ln|y|)'(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x).$$

Ist $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$ über I, so ist

$$y(x) = c \cdot e^{-A(x)},$$

mit einer Integrationskonstanten c, die auch ≤ 0 sein darf.

Nun betrachten wir den ***inhomogenen*** Fall ($r(x) \not\equiv 0$): Sind φ_1, φ_2 zwei Lösungen, so ist

$$(\varphi_1 - \varphi_2)'(t) + a(t)(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) = r(t) - r(t) = 0,$$

also unterscheiden sich je zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung um eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung hat demnach die Gestalt

$$\varphi(t) = \varphi_p(t) + c \cdot e^{-A(t)},$$

mit einer „partikulären Lösung“ $\varphi_p(t)$ der inhomogenen Gleichung. Die müssen wir noch finden.

Meistens findet man spezielle Lösungen über einen geeigneten Ansatz. So geht man auch hier vor. Wir benutzen die Methode der ***Variation der Konstanten***.

Ansatz: $\quad y_p(x) = c(x) \cdot e^{-A(x)}.$

Durch Differenzieren und Einsetzen in die DGL versucht man, Bedingungen für $c(x)$ zu erhalten:

$$y_p'(x) = (c'(x) - c(x) \cdot A'(x)) \cdot e^{-A(x)} = (c'(x) - c(x)a(x)) \cdot e^{-A(x)}.$$

Da $y_p'(x) + a(x)y_p(x) = r(x)$ sein soll, erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$c'(x) \cdot e^{-A(x)} = r(x),$$

und setzt daher

$$c(x) := \int_{x_0}^{x} r(t)e^{A(t)}\,dt.$$

Die Probe zeigt, dass y_p tatsächlich die inhomogene DGL löst.

Die allgemeine Lösung hat somit die Gestalt

$$y(x) = y_p(x) + c \cdot e^{-A(x)} = \left(\int_{x_0}^{x} r(t)e^{A(t)}\,dt + c\right) \cdot e^{-A(x)}.$$

Transformationen:

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $F : G \to \mathbb{R}$ stetig. Die DGL $y' = F(x,y)$ lässt sich manchmal besser lösen, wenn man sie transformiert.

Sei $T : G \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus auf ein Gebiet D, mit $T(t,y) = (t, \widetilde{T}(t,y))$.

Die Integralkurven $\boldsymbol{\alpha}(t) = (t, \varphi(t))$ der ursprünglichen DGL werden auf Kurven

$$T \circ \boldsymbol{\alpha}(t) = T(t,\varphi(t)) = (t, \widetilde{T}(t,\varphi(t))) =: (t, \psi(t)) \qquad (*)$$

abgebildet, und wir versuchen, diese Kurven als Integralkurven einer neuen DGL aufzufassen. Wie sieht diese DGL aus?

Hat die transformierte DGL die Gestalt $v' = \widetilde{F}(t,v)$, so muss gelten:

$$\psi'(t) = \widetilde{F}(t,\psi(t)) \quad \text{ und } \psi(t) = \widetilde{T}(t,\varphi(t)).$$

Dann ist

$$\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t}(t,\varphi(t)) + \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial y}(t,\varphi(t))\varphi'(t) = \psi'(t) = \widetilde{F}(t,\psi(t))$$

und (wegen (*))

$$(t,\varphi(t)) = T^{-1}(t,\psi(t)), \text{ sowie } \varphi'(t) = F(t,\varphi(t)),$$

also

$$\widetilde{F}(t,v) = \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t}(T^{-1}(t,v)) + \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial y}(T^{-1}(t,v)) \cdot F(T^{-1}(t,v)).$$

Als Beispiel betrachten wir „homogene Differentialgleichungen“. Die DGL $y' = F(t,y)$ wird *homogen* genannt, falls $F(rt,ry) = F(t,y)$ für $(t,y) \in G$ und $r \neq 0$ ist.[1] Der Definitionsbereich G von F muss dann folgende Eigenschaft besitzen: Mit (t,y) gehört für jedes $r \neq 0$ auch (rt,ry) zu G.

Enthält G keinen Punkt (t,y) mit $t = 0$, so ist folgende Transformation möglich:

$$T(t,y) := (t, \frac{y}{t}).$$

Ist $\varphi(t)$ Lösung der Ausgangsgleichung, so ist $\psi(t) := \varphi(t)/t$ Lösung der transformierten Gleichung, und es gilt:

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= \frac{t\varphi'(t) - \varphi(t)}{t^2} = \frac{t \cdot F(t,\varphi(t)) - \varphi(t)}{t^2} \\ &= \frac{t \cdot F(t,t\psi(t)) - t\psi(t)}{t^2} = \frac{F(1,\psi(t)) - \psi(t)}{t},\end{aligned}$$

d.h., ψ ist Lösung der DGL $v' = \dfrac{F(1,v) - v}{t}$. Eventuell ist ψ einfacher zu finden.

[1] Dieser Begriff sollte nicht mit dem Begriff „homogen“ bei linearen DGLn verwechselt werden!

Sei etwa $F(t,y) = \dfrac{y}{t} + \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{t^2}}$ auf

$$G = \{(t,y)\,:\, t^2 \ge y^2\} = \{(t,y)\,:\,(t-y)\cdot(t+y) \ge 0\}.$$

Man sieht sofort, dass das eine homogene DGL ergibt, und die obige Transformation macht daraus

$$v' = \frac{1}{t}\sqrt{1-v^2}.$$

Das ist eine DGL mit getrennten Variablen, der Gestalt $v' = f(t)g(v)$, mit $f(t) = 1/t$ und $g(v) = \sqrt{1-v^2}$. Offensichtlich ist die Lösung ψ mit $\psi(t_0) = v_0$ gegeben durch

$$\psi(t) = \sin\big(\ln(t/t_0) + \arcsin(v_0)\big).$$

Dabei sei $(t_0, v_0) = (t_0, y_0/t_0)$ eine (transformierte) Anfangsbedingung. Als Lösung der Ausgangsgleichung erhält man dann:

$$\varphi(t) = t \cdot \psi(t) = t \cdot \sin\big(\ln(t/t_0) + \arcsin(y_0/t_0)\big).$$

Ein anderes Anwendungsbeispiel ist die ***Bernoulli'sche DGL*** :

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha,$$

wobei α reell, $\neq 0$ und $\neq 1$ sein soll.

Wir verwenden die Transformation $T(t,y) := (t, y^{1-\alpha})$. Dann ist

$$T^{-1}(t,v) = (t, v^{1/(1-\alpha)}), \quad \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t}(t,y) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial y}(t,y) = (1-\alpha)y^{-\alpha}.$$

Weil $F(t,y) = a(t)y + b(t)y^\alpha$ ist, folgt: Die transformierten Integralkurven genügen der DGL $v' = \widetilde{F}(t,v)$, mit

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}(t,v) &= \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t}(t, v^{1/(1-\alpha)}) + \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial y}(t, v^{1/(1-\alpha)}) \cdot F(t, v^{1/(1-\alpha)}) \\
&= (1-\alpha)v^{-\alpha/(1-\alpha)} \cdot \big(a(t)v^{1/(1-\alpha)} + b(t)v^{\alpha/(1-\alpha)}\big) \\
&= (1-\alpha)\cdot(a(t)v + b(t)).
\end{aligned}$$

Die transformierte DGL ist linear und daher sicher einfacher zu behandeln als die Ausgangsgleichung.

Die logistische Gleichung:

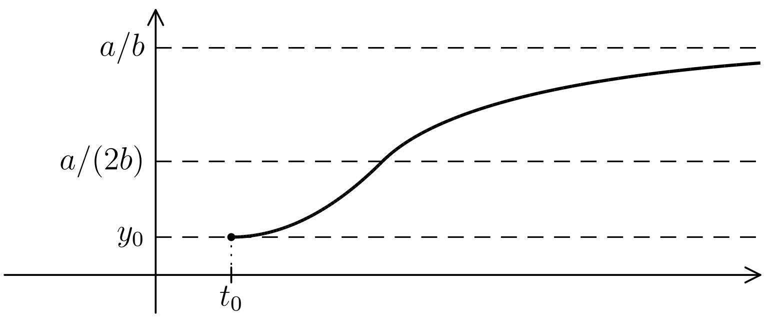
Die *logistische Gleichung* (oder *Gleichung des beschränkten Wachstums*)

$$y' = ay - by^2, \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}_+ \text{ und } y > 0$$

ist vom Bernoulli'schen Typ (mit $\alpha = 2$). Bevor wir sie transformieren, noch ein paar Anmerkungen:

Es ist $y' = y(a - by)$. Ist φ eine Lösung und $0 < \varphi(t) < a/b$, so ist $a - b \cdot \varphi(t) > 0$, also $\varphi'(t) > 0$. Der „Bestand" wächst! Ist dagegen $\varphi(t) > a/b$, so ist $\varphi'(t) < 0$ und der Bestand nimmt ab.

Weiter ist $\varphi''(t) = a\varphi'(t) - 2b\varphi(t)\varphi'(t) = (a - 2b\varphi(t))\varphi'(t)$. Ist also $0 < \varphi(t) < a/(2b)$, so ist $\varphi'(t) > 0$ und $\varphi''(t) > 0$. Das ist der Bereich „beschleunigten Wachstums", der Graph beschreibt eine Linkskurve. Ist dagegen $a/(2b) < \varphi(t) < a/b$, so ist $\varphi''(t) < 0$. Hier beschreibt der Graph eine Rechtskurve, das Wachstum wird gebremst.



Nun wenden wir unsere Transformation an. Suchen wir eine Lösung von $y' = ay - by^2$ zum Anfangswert (t_0, y_0), so können wir genauso gut eine Lösung von $v' = -av + b$ suchen, zum Anfangswert (t_0, y_0^{-1}). Das ist eine inhomogene DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Eine partikuläre Lösung ist die konstante Funktion $v_p(t) \equiv b/a$, und die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist gegeben durch $v_c(t) := c \cdot e^{-at}$, $c \in \mathbb{R}$.

Die allgemeine Lösung der Ausgangsgleichung ist dann gegeben durch

$$y_c(t) = (v_p(t) + v_c(t))^{-1} = \frac{a}{b + ac \cdot e^{-at}}.$$

Für alle diese Lösungen gilt:

$$y_c(t) \to \frac{a}{b} \quad \text{für } t \to \infty.$$

2.2 Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Zur Erinnerung:

Sei E ein Vektorraum mit Norm $\|\cdots\|$. Eine Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{a}_\nu$ in E heißt (im gewöhnlichen Sinne) ***konvergent***, falls es ein Element $\mathbf{a} \in E$ gibt, so dass gilt:

$$\lim_{N\to\infty} \|\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{a}_\nu - \mathbf{a}\| = 0.$$

Die Reihe heißt ***normal*** (oder ***absolut***) ***konvergent***, falls die Zahlenreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \|\mathbf{a}_\nu\|$ konvergiert.

Der Vektorraum E heißt ***vollständig*** oder ein ***Banachraum***, falls in E jede normal konvergente Reihe auch im gewöhnlichen Sinne konvergiert. $\mathbb{R}$ und der $\mathbb{R}^n$ sind vollständige Vektorräume.

Definition

Sei E ein Banachraum und $M \subset E$ eine Teilmenge. Eine Abbildung $f : M \to M$ heißt ***kontrahierend***, falls es eine reelle Zahl q mit $0 < q < 1$ gibt, so dass $\|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\| \le q \cdot \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$ für alle $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in M$ gilt.

Ein Element $\mathbf{x}_0 \in M$ heißt ***Fixpunkt*** von f, falls $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ ist.

Bemerkung: Ist f kontrahierend, so kann f höchstens einen Fixpunkt besitzen.

2.1. Banach'scher Fixpunktsatz

Sei E ein Banachraum, $A \subset E$ abgeschlossen und $f : A \to A$ eine kontrahierende Abbildung. Dann besitzt f einen (eindeutig bestimmten) Fixpunkt in A.

Beweis: Die Eindeutigkeit ist schon klar, wir müssen noch die Existenz zeigen. Dazu definieren wir induktiv eine Folge $\mathbf{x}_\nu$ in E. Der Anfangspunkt $\mathbf{x}_0$ kann beliebig gewählt werden. Dann setzen wir

$$\mathbf{x}_{\nu+1} := f(\mathbf{x}_\nu).$$

Offensichtlich ist

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu\| &= \|f(\mathbf{x}_\nu) - f(\mathbf{x}_{\nu-1})\| \\ &\le q \cdot \|\mathbf{x}_\nu - \mathbf{x}_{\nu-1}\| \\ &\le \cdots \le q^\nu \cdot \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|. \end{aligned}$$

Daraus folgt: Die Reihe $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}(\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu)$ ist normal konvergent. Weil E ein Banachraum ist, konvergiert die Reihe in E gegen ein Element $\mathbf{z}$, und die Folge

$$\mathbf{x}_{N+1} = \sum_{\nu=0}^{N} (\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu) + \mathbf{x}_0$$

konvergiert gegen $\mathbf{x}^* := \mathbf{z} + \mathbf{x}_0$. Weil $A \subset E$ abgeschlossen ist, liegt $\mathbf{x}^*$ in A.

Für beliebiges ν ist außerdem

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}^*) - \mathbf{x}^*\| &\leq \|f(\mathbf{x}^*) - f(\mathbf{x}_\nu)\| + \|f(\mathbf{x}_\nu) - \mathbf{x}^*\| \\ &\leq q \cdot \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_\nu\| + \|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}^*\|, \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck strebt gegen Null. Also ist $f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$. ■

Definition

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine stetige Abbildung $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ genügt auf G einer ***Lipschitz-Bedingung*** mit Lipschitz-Konstante k, falls gilt:

$$\|\mathbf{F}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_2)\| \leq k \cdot \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \text{ für alle Punkte } (t, \mathbf{x}_1), (t, \mathbf{x}_2) \in G.$$

$\mathbf{F}$ genügt *lokal* der *Lipschitz-Bedingung*, falls es zu jedem $(t_0, \mathbf{x}_0) \in G$ eine Umgebung $U = U(t_0, \mathbf{x}_0) \subset G$ gibt, so dass $\mathbf{F}$ auf U einer Lipschitz-Bedingung genügt.

2.2. Satz

Ist $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, x_1, \ldots, x_n)$ auf G stetig und nach den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ stetig partiell differenzierbar, so genügt $\mathbf{F}$ auf jeder Tonne $T \subset G$ einer Lipschitz-Bedingung.

Beweis: Sei $T = I \times B \subset G$ eine beliebige Tonne. Die partiellen Ableitungen $\mathbf{F}_{x_i}(t, \mathbf{x})$ sind auf T stetig und damit beschränkt, etwa durch $M > 0$. Für $t \in I$ ist $\mathbf{f}_t(\mathbf{x}) := \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = (F_1(t, \mathbf{x}), \ldots, F_n(t, \mathbf{x}))$ auf B (total) stetig differenzierbar, und für $\mathbf{x} \in B$ ist

$$\begin{aligned} \|D\mathbf{f}_t(\mathbf{x})\mathbf{v}\|^2 &= \big(\nabla F_1(t, \mathbf{x}) \bullet \mathbf{v}\big)^2 + \cdots + \big(\nabla F_n(t, \mathbf{x}) \bullet \mathbf{v}\big)^2 \\ &\leq \|\nabla F_1(t, \mathbf{x})\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2 + \cdots + \|\nabla F_n(t, \mathbf{x})\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{v}\|^2 \cdot n \cdot \max_\nu \|\nabla F_\nu(t, \mathbf{x})\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{v}\|^2 \cdot n \cdot \max_\nu \Big(\big((F_\nu)_{x_1}(t, \mathbf{x})\big)^2 + \cdots + \big((F_\nu)_{x_n}(t, \mathbf{x})\big)^2 \Big) \\ &\leq \|\mathbf{v}\|^2 \cdot n \cdot (n \cdot M^2), \end{aligned}$$

also

$$\|D\mathbf{f}_t(\mathbf{x})\|_{\text{op}} := \sup_{\|\mathbf{v}\| \leq 1} \|D\mathbf{f}_t(\mathbf{x})\mathbf{v}\| \leq n \cdot M.$$

Aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz folgt dann:

$$\|\mathbf{f}_t(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_2)\| \le n \cdot M \cdot \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \text{ für } \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B.$$

Da dies unabhängig von t gilt, haben wir unsere gesuchte Lipschitz-Bedingung. ∎

2.3. Satz

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ stetig. Genügt $\mathbf{F}$ auf G lokal der Lipschitz-Bedingung, so gibt es zu jedem $(t_0, \mathbf{x}_0) \in G$ ein $\varepsilon > 0$ und eine Sicherheitstonne $T \subset G$ mit Zentrum $(t_0, \mathbf{x}_0)$ und Länge 2ε für $\mathbf{F}$, auf der $\mathbf{F}$ einer Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstante $k < 1/(2\varepsilon)$ genügt.

Beweis: Sei $U = U(t_0, \mathbf{x}_0)$ eine Umgebung, auf der $\mathbf{F}$ einer Lipschitz-Bedingung mit Konstante k genügt. Weiter sei $T_0 \subset U$ eine Tonne mit Zentrum $(t_0, \mathbf{x}_0)$, Radius $r < 1$ und Länge 2ε. Man kann ε so weit verkleinern, dass $\varepsilon < 1/(2k)$ und T eine Sicherheitstonne für $\mathbf{F}$ ist. ∎

2.4. Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ stetig. Genügt $\mathbf{F}$ lokal der Lipschitz-Bedingung, so gibt es zu jedem $(t_0, \mathbf{y}_0) \in G$ ein $\varepsilon > 0$, so dass auf $I := [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ genau eine Lösung $\boldsymbol{\varphi}$ der Differentialgleichung $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ mit $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$ existiert.

Beweis: Es sei $T = I \times B \subset G$ eine Sicherheitstonne mit Radius r und Länge 2ε um $(t_0, \mathbf{y}_0)$ für $\mathbf{F}$, auf der $\mathbf{F}$ einer Lipschitz-Bedingung mit einer Konstanten $k < 1/(2\varepsilon)$ genügt. Weiter sei $I = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ und $B = \overline{B}_r(\mathbf{y}_0)$. Wir betrachten den Banachraum E aller stetigen Abbildungen $\boldsymbol{\varphi} : I \to \mathbb{R}^n$ und setzen

$$A := \{\boldsymbol{\varphi} \in E \,:\, \boldsymbol{\varphi}(I) \subset B \text{ und } \boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0\}.$$

Offensichtlich ist $A \neq \varnothing$, denn die Funktion $\boldsymbol{\varphi}(t) \equiv \mathbf{y}_0$ gehört zu A.

Sei nun $(\boldsymbol{\varphi}_\nu)$ eine Folge in A, die in E gegen eine stetige Grenzfunktion $\boldsymbol{\varphi}_0$ konvergiert. Da B abgeschlossen und $\boldsymbol{\varphi}_\nu(t)$ stets in B enthalten ist, muss auch der Grenzwert $\boldsymbol{\varphi}_0(t)$ in B liegen. Und die Relation $\boldsymbol{\varphi}_\nu(t_0) = \mathbf{y}_0$ bleibt ebenfalls beim Grenzübergang erhalten. Das bedeutet, dass $\boldsymbol{\varphi}_0$ wieder in A liegt, A ist eine abgeschlossene Teilmenge von E.

Als nächstes definieren wir eine Abbildung $S : A \to E$ durch

$$(S\boldsymbol{\varphi})(t) := \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}(u))\, du\,.$$

Es ist klar, dass $S\boldsymbol{\varphi}$ stetig ist und Werte in $\mathbb{R}^n$ hat. Außerdem ist $(S\boldsymbol{\varphi})(t_0) = \mathbf{y}_0$, und für $t \in I$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|(S\boldsymbol{\varphi})(t) - \mathbf{y}_0\| &= \|\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}(u))\,du\| \\
&\leq |t - t_0| \cdot \sup_T \|\mathbf{F}(t, \mathbf{y})\| \\
&\leq \varepsilon \cdot \frac{r}{\varepsilon} = r.
\end{aligned}$$

Also liegt $S\boldsymbol{\varphi}$ wieder in A, S bildet A auf sich ab.

Wir wollen nun zeigen, dass S kontrahierend ist. Für $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} \in A$ ist

$$\begin{aligned}
\|S\boldsymbol{\varphi} - S\boldsymbol{\psi}\| &= \sup_I \|S\boldsymbol{\varphi}(t) - S\boldsymbol{\psi}(t)\| \\
&= \sup_I \|\int_{t_0}^{t} [\mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}(u)) - \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\psi}(u))]\,du\| \\
&\leq \varepsilon \cdot k \cdot \sup_I \|\boldsymbol{\varphi}(u) - \boldsymbol{\psi}(u)\| \\
&< \frac{1}{2}\,\|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}\|.
\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass S genau einen Fixpunkt $\boldsymbol{\varphi}^*$ besitzt. Nun gilt:

$$\boldsymbol{\varphi}^*(t) = (S\boldsymbol{\varphi}^*)(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}^*(u))\,du.$$

Damit ist $\boldsymbol{\varphi}^*$ eine Lösung der DGL, mit $\boldsymbol{\varphi}^*(t_0) = \mathbf{y}_0$.

Ist umgekehrt $\boldsymbol{\varphi}$ eine Lösung der DGL mit der gewünschten Anfangsbedingung, so ist

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}(u))\,du,$$

also $S\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}$. Damit ist Existenz und Eindeutigkeit der Lösung über I gezeigt. ∎

Bemerkung: Das oben vorgestellte Lösungsverfahren nennt man das ***Verfahren von Picard-Lindelöf***. Es ist konstruktiv in dem Sinne, dass man mit einer beliebigen Funktion (z.B. $\boldsymbol{\varphi}(t) \equiv \mathbf{y}_0$) starten kann und die gesuchte Lösung als Grenzwert der Folge $\boldsymbol{\varphi}_k := S^k\boldsymbol{\varphi}$ für $k \to \infty$ erhält.

Betrachten wir als Beispiel die DGL $(y_1', y_2') = (-y_2, y_1)$. Sei $t_0 = 0$ und $\boldsymbol{\varphi}_0(t) := \mathbf{y}_0 = (1, 0)$. Hier ist $\mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}_1(u), \boldsymbol{\varphi}_2(u)) = (-\boldsymbol{\varphi}_2(u), \boldsymbol{\varphi}_1(u))$, also

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}_1(t) &= S\boldsymbol{\varphi}_0(t) = \mathbf{y}_0 + \int_0^t \mathbf{F}(u, \mathbf{y}_0)\,du = (1,0) + \int_0^t (0,1)\,du = (1, t), \\
\boldsymbol{\varphi}_2(t) &= (1,0) + \int_0^t (-u, 1)\,du = (1 - \frac{t^2}{2}, t), \\
\boldsymbol{\varphi}_3(t) &= (1,0) + \int_0^t (-u, 1 - \frac{u^2}{2})\,du = (1 - \frac{t^2}{2}, t - \frac{t^3}{6}).
\end{aligned}$$

Per Induktion zeigt man schließlich:

$$\boldsymbol{\varphi}_{2k}(t) = \Big(\sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!}, \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu \frac{t^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \Big)$$

und

$$\boldsymbol{\varphi}_{2k+1}(t) = \Big(\sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!}, \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \frac{t^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \Big).$$

Das bedeutet, dass $\boldsymbol{\varphi}(t) := (\cos(t), \sin(t))$ die einzige Lösung mit $\boldsymbol{\varphi}(0) = (1, 0)$ ist.

Erfüllt $\mathbf{F}$ keine Lipschitz-Bedingung, so sichert der Existenzsatz von Peano dennoch die Existenz einer Lösung. Allerdings gibt es dann kein konstruktives Verfahren, und es kann passieren, dass es zu einer Anfangsbedingung mehrere Lösungen gibt.

Im folgenden betrachten wir eine DGL $\mathbf{y}' = F(t, \mathbf{y})$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Die Abbildung F genüge lokal der Lipschitz-Bedingung.

2.5. Satz

Sei $\varphi : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung. Dann gibt es ein $t_2 > t_1$ und eine Lösung $\widehat{\varphi} : [t_0, t_2) \to \mathbb{R}^n$ mit $\widehat{\varphi}|_{[t_0,t_1]} = \varphi$.

Beweis: Nach dem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutig bestimmte Lösung $\psi : (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$. Außerdem ist

$$\psi'(t_1) = F(t_1, \psi(t_1)) = F(t_1, \varphi(t_1)) = \varphi'(t_1).$$

Also ist $\widehat{\varphi} : [t_0, t_1 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\widehat{\varphi}(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{für } t_0 \le t \le t_1, \\ \psi(t) & \text{für } t_1 < t < t_1 + \varepsilon. \end{cases}$$

stetig differenzierbar und damit eine Lösung über $[t_0, t_1 + \varepsilon)$. ∎

2.6. Satz (von der globalen Eindeutigkeit)

Sind $\varphi, \psi : [t_0, t_1) \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen mit $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$, so ist $\varphi = \psi$.

Beweis: Nach dem lokalen Eindeutigkeitssatz gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\varphi(t) = \psi(t)$ für $t_0 \le t < t_0 + \varepsilon$ ist. Ist $\varphi = \psi$ auf ganz $[t_0, t_1)$, so ist nichts mehr zu zeigen. Andernfalls sei

$$t^* := \inf\{t \in [t_0, t_1) \,:\, \varphi(t) \ne \psi(t)\}.$$

Dann ist $t_0 < t^* < t_1$, und es muss $\varphi(t^*) = \psi(t^*)$ sein, denn die Menge aller t mit $\varphi(t) \ne \psi(t)$ ist offen. Wegen der lokalen Eindeutigkeit wäre dann aber auch noch in der Nähe von t^* die Gleichheit von $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ gegeben. Das ist ein Widerspruch zur Definition von t^*. ∎

2.7. Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Zu vorgegebener Anfangsbedingung $(t_0, \mathbf{y}_0) \in G$ *gibt es Zahlen* $t_-, t_+ \in \overline{\mathbb{R}}$ *mit* $t_- < t_0 < t_+$ *und eine Lösung* $\varphi : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ *mit folgenden Eigenschaften:*

1. $\varphi(t_0) = \mathbf{y}_0$.
2. φ *lässt sich auf kein größeres Intervall fortsetzen.*
3. *Ist* $\psi : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}^n$ *eine weitere Lösung mit* $\psi(t_0) = \mathbf{y}_0$*, so ist* $\varphi = \psi$.
4. *Die Integralkurve* $\Phi(t) := (t, \varphi(t))$ *läuft in* G *„von Rand zu Rand“: Zu jeder kompakten Teilmenge* $K \subset G$ *mit* $(t_0, \mathbf{y}_0) \in K$ *gibt es Zahlen* t_1, t_2 *mit*
$$t_- < t_1 < t_0 < t_2 < t_+,$$
so dass $\Phi((t_-, t_1)) \subset G \setminus K$ *und* $\Phi((t_2, t_+)) \subset G \setminus K$ *ist.*

Beweis: Wir beschränken uns auf die Konstruktion von t_+, die von t_- kann dann analog durchgeführt werden. Es sei

$$\varepsilon_+ := \sup\{\varepsilon > 0 \ : \ \exists \text{ Lösung } \varphi_\varepsilon : [t_0, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n \text{ mit } \varphi_\varepsilon(t_0) = \mathbf{y}_0\}$$

und

$$t_+ := t_0 + \varepsilon_+.$$

Ist nun $t \in [t_0, t_+)$, so gibt es ein ε mit $t - t_0 < \varepsilon < \varepsilon^+$, und wir setzen

$$\varphi(t) := \varphi_\varepsilon(t).$$

Diese Definition ist wegen der globalen Eindeutigkeit unabhängig vom gewählten ε, und φ ist deshalb auch eine Lösung der DGL. Nach Konstruktion von ε_+ lässt sich φ nicht über t_+ hinaus zu einer erweiterten Lösung fortsetzen. Offensichtlich ist φ eindeutig bestimmt.

Der Beweis der letzten Aussage ist etwas komplizierter.

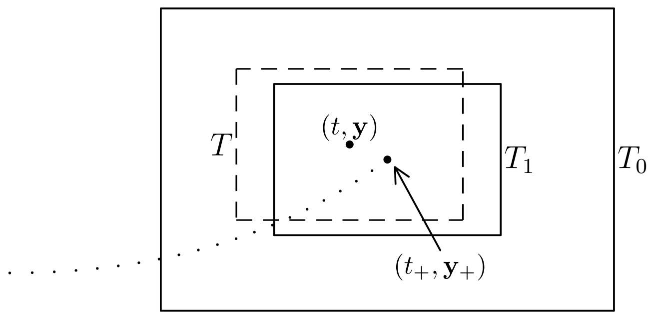
Sei $\Phi(t) := (t, \varphi(t))$ für $t_0 \le t < t_+$ die zugehörige Integralkurve. Wenn die Behauptung falsch wäre, gäbe es eine kompakte Menge $K \subset G$ und eine monoton wachsende und gegen t_+ konvergente Folge (t_ν), so dass $\Phi(t_\nu) \in K$ für $\nu \in \mathbb{N}$ gilt. Wir nehmen an, das sei der Fall. Da K kompakt ist, muss dann die Folge (t_ν) beschränkt sein, also t_+ endlich. Außerdem muss es eine Teilfolge (t_{ν_i}) geben, so dass $\Phi(t_{\nu_i})$ gegen ein Element $(t_+, \mathbf{y}_+) \in K$ (und damit in G) konvergiert. Zur Vereinfachung der Schreibweise nehmen wir an, dass schon die Folge $(\Phi(t_\nu))$ gegen $(t_+, \mathbf{y}_+)$ konvergiert.

Sei $T_0 = [t_+ - \varepsilon_0, t_+ + \varepsilon_0] \times \overline{B}_{r_0}(\mathbf{y}_+)$ eine Tonne, die noch ganz in G liegt. Dabei sei ε_0 so klein gewählt, dass F auf T_0 einer Lipschitzbedingung mit Konstante $k < 1/(2\varepsilon_0)$ genügt. Weiter sei

$$M := \sup_{T_0} \|F\|, \quad \varepsilon := \min\Big(\frac{\varepsilon_0}{2}, \frac{r_0}{2M}\Big) \quad \text{und} \quad r := \frac{r_0}{2},$$

sowie T_1 die Tonne mit Radius r und Länge 2ε um $(t_+, \mathbf{y}_+)$. Für einen beliebigen Punkt $(t, \mathbf{y}) \in T_1$ ist die Tonne $T = T(t, \mathbf{y})$ mit Radius r und Länge 2ε um $(t, \mathbf{y})$ eine in T_0 enthaltene Sicherheitstonne, denn es ist

$$\frac{r}{\varepsilon} = \max\Big(\frac{r_0}{\varepsilon_0}, M\Big), \text{ also } \sup_{T} \|F\| \le \sup_{T_0} \|F\| = M \le \frac{r}{\varepsilon}\,.$$



Außerdem erfüllt F auch auf T die Lipschitzbedingung mit der Konstanten k. Wir können das auf $T_\nu = T(t_\nu, \varphi(t_\nu))$ anwenden, denn für genügend großes ν liegt $(t_\nu, \varphi(t_\nu))$ in T_1. Dann ist $(t_+, \mathbf{y}_+)$ in T_ν enthalten. Nach dem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz gibt es genau eine Lösung $\psi : [t_\nu - \varepsilon, t_\nu + \varepsilon] \to \overline{B}_r(\varphi(t_\nu))$ mit $\psi(t_\nu) = \varphi(t_\nu)$.

Offensichtlich wird φ durch ψ fortgesetzt, und zwar über t_+ hinaus. Das ist ein Widerspruch! ∎

2.3 Lineare Systeme

Wir betrachten in diesem Abschnitt ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und eine DGL

$$\mathbf{y}' = F(t, \mathbf{y}),$$

wobei $F : G \to \mathbb{R}^n$ lokal der Lipschitz-Bedingung genügt.

3.1. Lemma von Gronwall

Sei $t_0 < t_1 \leq \infty$, $g : [t_0, t_1) \to \mathbb{R}$ stetig, $\alpha \geq 0$ und $\beta \geq 0$. Ist

$$0 \leq g(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau \qquad \textit{für } t \in [t_0, t_1),$$

so ist

$$g(t) \leq \alpha \cdot e^{\beta(t-t_0)} \qquad \textit{für } t \in [t_0, t_1).$$

Beweis: Sei $G(t) := \alpha + \beta \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau$. Dann ist $G(t_0) = \alpha$ und $G'(t) = \beta g(t) \leq \beta G(t)$, also $(\ln G)'(t) \leq \beta$. Daraus folgt, dass $\ln G(t) - \beta t$ monoton fällt, Für $t > t_0$ ist dann

$$\ln G(t) - \beta t \leq \ln G(t_0) - \beta t_0 = \ln \alpha - \beta t_0$$

und

$$g(t) \leq G(t) \leq \alpha e^{\beta(t-t_0)}.$$

∎

3.2. Folgerung (Fundamentale Abschätzung)

Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Kugel, so dass $\mathbf{F}$ auf $T := J \times B$ einer Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstante k genügt.

Sind $\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2 : J \to B$ zwei Lösungen der DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ mit Anfangsbedingungen $\boldsymbol{\varphi}_1(t_0) = \mathbf{y}_1$ und $\boldsymbol{\varphi}_2(t_0) = \mathbf{y}_2$, so ist

$$\|\boldsymbol{\varphi}_1(t) - \boldsymbol{\varphi}_2(t)\| \leq \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \cdot e^{k \cdot |t-t_0|} \textit{ für } t \in J.$$

Beweis: Weil $\boldsymbol{\varphi}_\lambda'(t) = \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\varphi}_\lambda(t))$ ist, für $\lambda = 1, 2$, folgt:

$$\boldsymbol{\varphi}_\lambda(t) = \boldsymbol{\varphi}_\lambda(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}_\lambda(u))\, du.$$

Nun setzen wir

$$\omega(t) := \|\boldsymbol{\varphi}_1(t) - \boldsymbol{\varphi}_2(t)\| \text{ für } t \geq t_0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\omega(t) &\le \|\boldsymbol{\varphi}_1(t_0) - \boldsymbol{\varphi}_2(t_0)\| + \|\int_{t_0}^{t} (\mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}_1(u)) - \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}_2(u)))\, du\| \\ &\le \omega(t_0) + k \cdot \int_{t_0}^{t} \omega(u)\, du\end{aligned}$$

und nach Gronwall

$$\omega(t) \le \omega(t_0) \cdot e^{k(t-t_0)}.$$

Damit ist der Satz für $t \ge t_0$ bewiesen.

Um ihn auch für $t < t_0$ zu erhalten, setzen wir $\widetilde{\mathbf{F}}(t, \mathbf{y}) := -\mathbf{F}(t_0 - t, \mathbf{y})$. Ist $\boldsymbol{\varphi}$ Lösung der DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$, so ist $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(t) := \boldsymbol{\varphi}(t_0 - t)$ Lösung der DGL $\mathbf{y}' = \widetilde{\mathbf{F}}(t, \mathbf{y})$, und umgekehrt, denn es ist $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}'(t) = -\boldsymbol{\varphi}'(t_0 - t) = -\mathbf{F}(t_0 - t, \boldsymbol{\varphi}(t_0 - t)) = \widetilde{\mathbf{F}}(t, \boldsymbol{\varphi}(t_0 - t)) = \widetilde{\mathbf{F}}(t, \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(t))$. Außerdem ist $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(0) = \boldsymbol{\varphi}(t_0)$.

Sei $\widetilde{\omega}(t) := \|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_1(t) - \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_2(t)\| = \omega(t_0 - t)$. Ist $t < t_0$, so ist $t_0 - t > 0$ und

$$\omega(t) = \widetilde{\omega}(t_0 - t) \le \widetilde{\omega}(0) e^{k(t_0 - t)} = \omega(t_0) e^{k|t - t_0|}.$$

■

Wir wollen nun Systeme von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung über einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ untersuchen:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A(t)^{\top} + \mathbf{b}(t),$$

mit stetigen Abbildungen $A : I \to M_{n,n}(\mathbb{R})$ und $\mathbf{b} : I \to \mathbb{R}^n$. Wie im Falle linearer Gleichungssysteme beginnt man mit dem **homogenen** Fall $\mathbf{b}(t) \equiv \mathbf{0}$. Die stetige Abbildung

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}) := \mathbf{y} \cdot A(t)^{\top}$$

ist auf ganz $I \times \mathbb{R}^n$ definiert und genügt dort lokal einer Lipschitz-Bedingung, denn es ist

$$\|\mathbf{F}(t, \mathbf{y}_1) - \mathbf{F}(t, \mathbf{y}_2)\| = \|(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \cdot A(t)^{\top}\| \le \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \cdot \|A(t)\|_{\mathrm{op}}.$$

3.3. Der Lösungsraum einer homogenen linearen DGL

Ist die lineare DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ über $I = (a, b)$ definiert, so ist auch jede maximale Lösung über I definiert, und die Menge aller maximalen Lösungen bildet einen reellen Vektorraum.

BEWEIS: Sei $J = (t_-, t_+) \subset I$, $t_0 \in J$ und $\boldsymbol{\varphi} : J \to \mathbb{R}^n$ eine maximale Lösung mit $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$. Wir nehmen an, es sei $t_+ < b$. Dann ist $\|A(t)\|_{\mathrm{op}}$ auf $[t_0, t_+]$ beschränkt, etwa durch eine Zahl $k > 0$. Wir wenden die fundamentale Abschätzung auf die beiden Lösungen $\boldsymbol{\varphi}$ und $\boldsymbol{\psi}(x) \equiv \mathbf{0}$ an. Damit ist $\|\boldsymbol{\varphi}(t)\| \le \|\mathbf{y}_0\| \cdot e^{k(t_+ - t_0)}$, bleibt also auf $[t_0, t_+)$ beschränkt. Das bedeutet, dass die Integralkurve $t \mapsto (t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ im Innern von $I \times \mathbb{R}^n$ endet, und das kann nicht sein. Also muss $t_+ = b$ (und entsprechend dann auch $t_- = a$) sein.

Dass die Menge aller (maximalen) Lösungen dann einen Vektorraum bildet, ist trivial. ∎

Sei $\mathcal{L}$ der (reelle) Vektorraum aller Lösungen über I. Für ein festes $t_0 \in I$ sei $E : \mathcal{L} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $E(\boldsymbol{\varphi}) := \boldsymbol{\varphi}(t_0)$. [2] Dann ist E offensichtlich linear, und aus dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz und dem obigen Resultat folgt, dass E bijektiv ist, also ein Isomorphismus von $\mathcal{L}$ auf $\mathbb{R}^n$. Daraus folgt:

> *Der Lösungsraum $\mathcal{L}$ eines homogenen linearen Systems $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A(t)^\top$ in $I \times \mathbb{R}^n$ ist ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.*

Eine Basis $\{\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n\}$ von $\mathcal{L}$ bezeichnet man auch als ***Fundamentalsystem*** (von Lösungen), die Matrix

$$X(t) := \big(\boldsymbol{\varphi}_1^\top(t), \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n^\top(t)\big)$$

nennt man ***Fundamentalmatrix***. Sie erfüllt die Gleichung

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t).$$

Wir erinnern uns an einige Tatsachen aus der Determinantentheorie. Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ und $S_{ij}(A)$ die Streichungsmatrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte aus A entsteht. Dann wird die Zahl $A_{ij} := (-1)^{i+j} \det S_{ij}(A)$ als ***Cofaktor***, *algebraisches Komplement* oder ***Adjunkte*** bezeichnet, und der Laplace'sche Entwicklungssatz besagt: Für beliebiges k und beliebiges l ist

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{il} \cdot A_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj}.$$

Man beachte: Sind $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ die Zeilen der Matrix A, so ist

$$A_{ij} = \det\big(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{e}_j, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n\big),$$

und die Koeffizienten $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ kommen in A_{ij} nicht vor.

Die Matrix $\operatorname{ad}(A) := \left(A_{ij} \;\middle|\; \begin{array}{l} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, n \end{array} \right)$ heißt ***adjungierte Matrix*** zu A.

---

[2] „E" steht für *evaluate* (auswerten).

3.4. Hilfssatz

1. *Ist* $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$*, so ist* $(\det A) \cdot E_n = A \cdot \mathrm{ad}(A)^\top$.
2. *Ist* $t \mapsto A(t) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ *differenzierbar, so ist*

$$(\det \circ A)'(t) = \sum_{i,j} a'_{ij}(t) \cdot A_{ij}(t).$$

Beweis: 1) Seien $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ die Zeilen der Matrix A. Dann ist

$$\begin{aligned}
\left(A \cdot \mathrm{ad}(A)^\top\right)_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} \\
&= \sum_{k=1}^n a_{ik} \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{e}_k, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) \\
&= \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \sum_{k=1}^n a_{ik} \mathbf{e}_k, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) \\
&= \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) \\
&= \delta_{ij} \cdot \det A.
\end{aligned}$$

2) Weil A_{ij} von a_{ij} nicht abhängt, folgt mit dem Entwicklungssatz

$$\frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A) = \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \left(\sum_{k=1}^n a_{kj} \cdot A_{kj} \right) = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} A_{kj} = A_{ij},$$

nach Kettenregel also

$$(\det \circ A)'(t) = \sum_{i,j} \frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A(t)) \cdot a'_{ij}(t) = \sum_{i,j} a'_{ij}(t) \cdot A_{ij}(t).$$

■

Man kann den Begriff der Wronski-Determinante noch etwas verallgemeinern:

Definition

Sind $\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n : I \to \mathbb{R}^n$ irgendwelche (differenzierbare) Funktionen, so nennt man

$$W(\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n)(t) := \det(\boldsymbol{\varphi}_1(t), \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n(t))$$

die ***Wronski-Determinante*** von $\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n$.

3.5. Die Formel von Liouville

Die Wronski-Determinante $W(t)$ eines Systems von Lösungen der DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A(t)^\top$ erfüllt die gewöhnliche Differentialgleichung

$$z' = z \cdot \mathrm{Spur} A(t) \,.$$

Ist $W(t)$ sogar die Wronski-Determinante einer Fundamentalmatrix, so ist $W(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, und für beliebiges (festes) $t_0 \in \mathbb{R}$ ist

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t \mathrm{Spur} A(s)\, ds\right).$$

BEWEIS: Sei $X(t) = (x_{ij}(t)) = (\boldsymbol{\varphi}_1^\top(t), \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n^\top(t))$ und $W(t) = \det X(t)$. Dann ist

$$\begin{aligned} W'(t) &= (\det \circ X)'(t) \\ &= \sum_{i,j} x_{ij}'(t) \cdot (\mathrm{ad}(X))_{ij}(t) \\ &= \sum_{i=1}^n (X'(t) \cdot \mathrm{ad}(X)^\top(t))_{ii} \\ &= \mathrm{Spur}\big(X'(t) \cdot \mathrm{ad}(X)^\top(t)\big). \end{aligned}$$

Da die Spalten von $X(t)$ Lösungen der DGL sind, ist

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t),$$

also

$$\begin{aligned} W'(t) &= \mathrm{Spur}\big(A(t) \cdot X(t) \cdot \mathrm{ad}(X)^\top(t)\big) \\ &= \mathrm{Spur}\big(A(t) \cdot (\det X(t) \cdot E_n)\big) \\ &= W(t) \cdot \mathrm{Spur} A(t). \end{aligned}$$

Sei $X(t) = \big(\boldsymbol{\varphi}_1^\top(t), \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n^\top(t)\big)$ eine Fundamentalmatrix. Gibt es ein $t_0 \in I$ mit $W(t_0) = 0$, so gibt es reelle Zahlen c_ν, nicht alle $= 0$, so dass $\sum_\nu c_\nu \boldsymbol{\varphi}_\nu(t_0) = \mathbf{0}$ ist. Die Funktion $\boldsymbol{\varphi} := \sum_\nu c_\nu \boldsymbol{\varphi}_\nu$ ist Lösung der DGL und verschwindet in t_0. Nach dem Eindeutigkeitssatz muss dann $\boldsymbol{\varphi}(t) \equiv \mathbf{0}$ sein. Also sind $\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n$ linear abhängig und können kein Fundamentalsystem sein. Widerspruch!

Also ist $W(t) \neq 0$ und $X(t)$ invertierbar für alle $t \in I$. Außerdem ist

$$(\ln \circ W)'(t) = \frac{W'(t)}{W(t)} = \mathrm{Spur} A(t),$$

also

$$\ln\Big(\frac{W(t)}{W(t_0)}\Big) = \ln W(t) - \ln W(t_0) = \int_{t_0}^{t} \operatorname{Spur} A(s)\, ds.$$

Wendet man exp an, so erhält man die Liouville-Formel. ∎

3.6. Die Fundamentallösung

Sei $A : I \to M_{n,n}(\mathbb{R})$ stetig.

1. *Zu jedem $t_0 \in I$ gibt es genau eine Fundamentalmatrix X_0 der DGL*

   $$\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A(t)^\top \quad \text{mit} \quad X_0(t_0) = E_n \quad (= n\text{-reihige Einheitsmatrix}).$$

   Für $\mathbf{t} \in \mathbf{I}$ wird dann $\mathbf{C(t, t_0)} := \mathbf{X_0(t)} \in \mathbf{M_{n,n}}(\mathbb{R})$ gesetzt.

2. *Ist $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, so ist $\boldsymbol{\varphi}(t) := \mathbf{y}_0 \cdot C(t, t_0)^\top$ die eindeutig bestimmte Lösung mit $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$.*

3. *Die Matrix $C(t, t_0)$ ist stets invertierbar, und für $s, t, u \in I$ gilt:*

   (a) $C(s, t) \cdot C(t, u) = C(s, u)$.

   (b) $C(t, t) = E_n$,

   (c) $C(s, t)^{-1} = C(t, s)$.

4. *Ist $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$, so wird durch $\boldsymbol{\varphi}_\nu(t) := \mathbf{a}_\nu \cdot C(t, t_0)^\top$ ein Fundamentalsystem von Lösungen mit $\boldsymbol{\varphi}_\nu(t_0) = \mathbf{a}_\nu$ definiert.*

Beweis: 1) Es gibt eindeutig bestimmte Lösungen $\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n$, so dass $\boldsymbol{\varphi}_\nu(t_0) = \mathbf{e}_\nu$ der ν-te Einheitsvektor ist. Da die Einheitsvektoren eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden und die Evaluationsabbildung E ein Isomorphismus ist, bilden die $\boldsymbol{\varphi}_\nu$ eine Basis des Lösungsraumes. $X_0 := (\boldsymbol{\varphi}_1^\top, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n^\top)$ ist dann die (eindeutig bestimmte) Fundamentalmatrix mit $X_0(t_0) = E_n$.

2) Da $X_0(t) = C(t, t_0)$ eine Fundamentalmatrix ist, erfüllt $\boldsymbol{\varphi}(t) := \mathbf{y}_0 \cdot C(t, t_0)^\top$ die DGL. Es ist nämlich

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = \mathbf{y}_0 \cdot \big(X_0^\top(t)\big)' = \mathbf{y}_0 \cdot \big(X_0^\top(t) \cdot A^\top(t)\big) = \boldsymbol{\varphi}(t) \cdot A^\top(t).$$

Nach Konstruktion ist $C(t_0, t_0) = E_n$, also $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$.

3) Weil $W(t) = \det C(t, t_0)$ nirgends verschwindet, ist $C(t, t_0)$ immer invertierbar. Sei $\mathbf{y}$ beliebig, $t, u \in I$ beliebig, aber fest, sowie $s \in I$ beliebig (variabel). Wir setzen $\boldsymbol{\varphi}(s) := \mathbf{y} \cdot C(s, u)^\top$ und $\boldsymbol{\psi}(s) := \boldsymbol{\varphi}(t) \cdot C(s, t)^\top$. Dann ist $\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$, also auch $\boldsymbol{\psi}(s) = \boldsymbol{\varphi}(s)$ für alle $s \in I$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} \cdot C(s,u)^\top &= \boldsymbol{\varphi}(s) \;=\; \boldsymbol{\psi}(s) \\
&= \boldsymbol{\varphi}(t) \cdot C(s,t)^\top \\
&= \mathbf{y} \cdot C(t,u)^\top \cdot C(s,t)^\top \\
&= \mathbf{y} \cdot \bigl(C(s,t) \cdot C(t,u)\bigr)^\top.
\end{aligned}$$

Weil $C(s,u)$ invertierbar ist, folgt die Gleichung $C(s,u) = C(s,t) \cdot C(t,u)$.

4) ist trivial. ■

Leider ist es im allgemeinen nicht möglich, die Lösungen eines homogenen linearen Systems explizit anzugeben! In Einzelfällen kann es aber durchaus Lösungsmethoden geben.

Wir betrachten nun den ***inhomogenen Fall*** $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A(t)^\top + \mathbf{b}(t)$. Wie im homogenen Fall kann man zeigen, dass alle Lösungen über ganz I definiert sind. Da die Differenz zweier Lösungen der inhomogenen Gleichung eine Lösung der homogenen Gleichung ist, bilden die Lösungen der inhomogenen Gleichung einen affinen Raum, und es genügt, eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems zu finden. Wir benutzen hier wieder (wie im Falle einer Gleichung erster Ordnung) die Methode der ***Variation der Kostanten***.

Ist $X(t) = (\boldsymbol{\varphi}_1^\top(t), \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n^\top(t))$ eine Fundamentalmatrix, so ist die Lösungsgesamtheit des homogenen Systems die Menge der Linearkombinationen

$$c_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_1(t) + \cdots + c_n \cdot \boldsymbol{\varphi}_n(t).$$

Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz

$$\boldsymbol{\varphi}_p(t) := c_1(t) \cdot \boldsymbol{\varphi}_1(t) + \cdots + c_n(t) \cdot \boldsymbol{\varphi}_n(t) = \mathbf{c}(t) \cdot X(t)^\top.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}_p'(t) &= \mathbf{c}'(t) \cdot X(t)^\top + \mathbf{c}(t) \cdot \bigl(X'(t)\bigr)^\top \\
&= \mathbf{c}'(t) \cdot X(t)^\top + \mathbf{c}(t) \cdot \bigl(A(t) \cdot X(t)\bigr)^\top \\
&= \mathbf{c}'(t) \cdot X(t)^\top + \boldsymbol{\varphi}_p(t) \cdot A(t)^\top.
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}_p(t) \text{ ist Lösung} \quad &\iff \quad \boldsymbol{\varphi}_p'(t) = \boldsymbol{\varphi}_p(t) \cdot A(t)^\top + \mathbf{b}(t) \\
&\iff \quad \mathbf{c}'(t) \cdot X(t)^\top = \mathbf{b}(t) \\
&\iff \quad \mathbf{c}'(t) = \mathbf{b}(t) \cdot (X(t)^\top)^{-1} \\
&\iff \quad \mathbf{c}(t) = \mathbf{c}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{b}(s) \cdot (X(s)^\top)^{-1} \, ds\,.
\end{aligned}$$

Ist $X(t) = C(t,t_0)$, also $X(t_0) = E_n$, so ist

$$\boldsymbol{\varphi}_p(t) = \mathbf{c}(t) \cdot X(t)^\top = \left(\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{b}(s) \cdot C(t_0, s)^\top \, ds\right) \cdot C(t, t_0)^\top$$

die partikuläre Lösung $\boldsymbol{\varphi}_p$ mit $\boldsymbol{\varphi}_p(t_0) = \mathbf{y}_0$.

Eine ***homogene lineare DGL n-ter Ordnung*** hat die Gestalt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0\,.$$

Das zugeordnete lineare System hat dann – in Spaltenschreibweise – die Form

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Ist $\{f_1, \ldots, f_n\}$ eine Basis des Lösungsraumes der DGL n-ter Ordnung, so erhalten wir für das System die Fundamentalmatrix

$$X(t) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

3.7. Beispiel

Wir betrachten eine gewöhnliche inhomogene lineare DGL 2. Grades,

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x).$$

Dem entspricht das lineare System $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A(t)^\top + \mathbf{b}(t)$ mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}(t) = (0, r(t)).$$

Eine Fundamentalmatrix hat die Gestalt

$$X(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $W(t) = \det X(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$ die Wronski-Determinante, und die Matrix $X(t)^{-1}$ kann durch die Formel

$$X(t)^{-1} = \frac{1}{W(t)} \cdot \begin{pmatrix} y_2'(t) & -y_2(t) \\ -y_1'(t) & y_1(t) \end{pmatrix}$$

berechnet werden. Also ist

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(s)\cdot(X(s)^\top)^{-1} &= \frac{1}{W(s)}(0,r(s))\cdot\begin{pmatrix} y_2'(s) & -y_1'(s)\\ -y_2(s) & y_1(s)\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{W(s)}\big(-y_2(s)r(s), y_1(s)r(s)\big),\end{aligned}$$

und $\boldsymbol{\varphi}_p(t) = \left(\int_{t_0}^t \mathbf{b}(s)\cdot(X(s)^\top)^{-1}\,ds\right)\cdot X(t)^\top$ ist eine partikuläre Lösung des (inhomogenen) Systems mit $\boldsymbol{\varphi}_p(t_0) = 0$. Die 1. Komponente davon ist Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung. Das ist

$$\varphi(t) = y_1(t)\cdot\int_{t_0}^t \frac{-y_2(s)r(s)}{W(s)}\,ds + y_2(t)\cdot\int_{t_0}^t \frac{y_1(s)r(s)}{W(s)}\,ds\,,$$

und $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi,\varphi')$ ist Lösung des Systems.

Die Funktion $G(s,t) := \big(y_2(t)y_1(s) - y_1(t)y_2(s)\big)W(s)^{-1}$ bezeichnet man auch als ***Green'sche Funktion***. Offensichtlich ist $\varphi(t) = \int_{t_0}^t G(s,t)r(s)\,ds$.

Im Falle der konkreten DGL $y'' + y' - 2y = e^x$ lösen $\varphi_1(x) := e^x$ und $\varphi_2(x) := e^{-2x}$ die zugehörige homogene Gleichung. Weil

$$W(x) = \det\begin{pmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x)\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} e^x & e^{-2x}\\ e^x & -2e^{-2x}\end{pmatrix} = -3e^{-x} \neq 0$$

ist, bilden φ_1 und φ_2 sogar eine Basis des Lösungsraumes. Man berechnet dann

$$G(s,t) = \frac{1}{3}\big(e^t e^{-s} - e^{-2t}e^{2s}\big)$$

und erhält als Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t G(s,t)r(s)\,ds = \frac{1}{3}\int_{t_0}^t \big(e^t - e^{-2t}e^{3s}\big)\,ds = \frac{1}{3}\,te^t - \frac{1}{9}\,e^t.$$

2.4 Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir erinnern uns: Ist (X_n) eine Folge von Matrizen in $M_{n,n}(\mathbb{R})$, so gilt:

$$\text{Ist } \sum_{n=0}^{\infty} \|X_n\|_{\text{op}} < \infty, \text{ so konvergiert } \sum_{n=0}^{\infty} X_n \text{ in } M_{n,n}(\mathbb{R}).$$

4.1. Beispiel

Sei $A \in M := M_{n,n}(\mathbb{R})$. Dann ist $A^0 := E_n$ (= Einheitsmatrix) und $A^n := \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n\text{-mal}}$, und die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A\|_{\text{op}}^n$ konvergiert in $\mathbb{R}$ (gegen $e^{\|A\|_{\text{op}}}$). Daher konvergiert auch die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ in M.

$$\textbf{Den Grenzwert der Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \textbf{ bezeichnen wir mit } e^A.$$

Sei nun $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $F_n : I \to M$ eine stetige Funktion. Gibt es eine Folge positiver reeller Zahlen (a_n), so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ und $\|F_n(t)\|_{\text{op}} \leq a_n$ für alle n und alle $t \in I$ ist, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$ auf I gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $F(t)$.

4.2. Satz

Ist $A \in M$, so ist $f : \mathbb{R} \to M$ mit $f(t) := e^{At}$ eine differenzierbare Funktion und $f'(t) = A \cdot e^{At}$.

Beweis: Es sei $S_N(t) := \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} (At)^n$. Dann konvergiert die Folge der S_N auf jedem abgeschlossenen Intervall gleichmäßig gegen die Funktion $f(t)$. Weiter ist S_N differenzierbar und

$$S_N'(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!} A^n t^{n-1} = A \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} A^n t^n.$$

Offensichtlich konvergiert die Folge der Funktionen $S_N'(t)$ (gleichmäßig auf I) gegen $A \cdot e^{At}$. Aber dann ist f differenzierbar und $f'(t) = \lim_{N \to \infty} S_N'(t) = A \cdot e^{At}$. ∎

Ist $A \in M$, so nennt man die DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A^\top$ ein ***lineares System mit konstanten Koeffizienten***. Es gilt dafür alles, was wir über lineare Systeme gelernt haben, und noch viel mehr.

4.3. Die Lösung eines Systems mit konstanten Koeffizienten

Sei $A \in M_{n,n}(K)$. Die eindeutig bestimmte Fundamentalmatrix $X(t)$ des linearen Systems

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A^\top \qquad \textit{mit } X(0) = E$$

ist gegeben durch $X(t) := e^{tA}$.

Beweis: Es ist $X'(t) = A \cdot X(t)$ und $X(0) = E$. Nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz ist damit schon alles bewiesen. ∎

4.4. Eigenschaften der Exponentialfunktion

1. *Für $s, t \in \mathbb{R}$ ist $e^{sA} \cdot e^{tA} = e^{(s+t)A}$.*
2. *Ist $A \cdot B = B \cdot A$, so ist $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.*
3. *Die Matrix e^A ist stets invertierbar. Insbesondere gilt:*

$$\det(e^A) = e^{\operatorname{Spur}(A)}.$$

Beweis: Ist $A \cdot B = B \cdot A$, so ist

$$B \cdot \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(tA)^k = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B \cdot (tA)^k = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(tA)^k \cdot B,$$

also (nach Übergang zum Limes) $B \cdot e^{tA} = e^{tA} \cdot B$.

Wir setzen $F(t) := e^{t(A+B)} - e^{tA} \cdot e^{tB}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F'(t) &= (A+B) \cdot e^{t(A+B)} - A \cdot e^{tA} \cdot e^{tB} - e^{tA} \cdot B \cdot e^{tB} \\ &= (A+B) \cdot (e^{t(A+B)} - e^{tA} \cdot e^{tB}) \\ &= (A+B) \cdot F(t). \end{aligned}$$

$F(t)$ ist also die eindeutig bestimmte Fundamentalmatrix der DGL

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot (A+B)^\top \quad \text{mit } F(0) = 0\,.$$

Daher muss $F(t) \equiv 0$ sein, d.h.

$$e^{t(A+B)} = e^{tA} \cdot e^{tB}.$$

2) Für $t = 1$ erhält man: $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

1) Die Matrizen sA und tA sind natürlich vertauschbar. Also ist

$$e^{(s+t)A} = e^{sA+tA} = e^{sA} \cdot e^{tA}.$$

3) Es ist $e^A \cdot e^{-A} = e^0 = E$, also e^A invertierbar, mit $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

$\det(e^{tA})$ ist die Wronski-Determinante der Fundamentalmatrix $X(t) := e^{tA}$. Aus der Liouville-Formel ergibt sich (mit $t_0 = 0$):

$$\det(e^{tA}) = \exp\Big(\int_0^t \operatorname{Spur}(A)\,ds\Big) = e^{t\cdot\operatorname{Spur}(A)}.$$

Mit $t = 1$ erhält man die gewünschte Formel. ∎

4.5. Folgerung

1. *Die Fundamentallösung $C(t, t_0)$ des Systems $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A^\top$ ist gegeben durch $C(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$.*

2. *Ist $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$, so bilden die Funktionen*

$$\boldsymbol{\varphi}_\nu(t) := \mathbf{y}_\nu \cdot e^{A^\top t}, \nu = 1, \ldots, n,$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen.

3. *Ist B invertierbar, so ist $B^{-1} \cdot e^A \cdot B = e^{B^{-1}\cdot A\cdot B}$.*

Beweis: 1) Setzt man $X(t) := e^{A(t-t_0)}$, so ist $X'(t) = A \cdot X(t)$ und $X(t_0) = E_n$. Also ist $C(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$.

2) Die Lösung $\boldsymbol{\varphi}_\nu$ mit $\boldsymbol{\varphi}_\nu(0) = \mathbf{y}_\nu$ ist gegeben durch $\boldsymbol{\varphi}_\nu(t) = \mathbf{y}_\nu \cdot C(t, 0)^\top = \mathbf{y}_\nu \cdot e^{A^\top t}$, denn es ist

$$(e^A)^\top = e^{A^\top}.$$

3) $X(t) := B^{-1} \cdot e^{At} \cdot B$ und $Y(t) := e^{(B^{-1}\cdot A\cdot B)t}$ sind beides Fundamental-Lösungen von $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot (B^{-1} \cdot A \cdot B)$ mit $X(0) = Y(0) = E_n$, denn es ist

$$X'(t) = B^{-1} \cdot A \cdot e^{At} \cdot B = (B^{-1} \cdot A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot e^{At} \cdot B) = (B^{-1} \cdot A \cdot B) \cdot X(t)$$

und

$$Y'(t) = (B^{-1} \cdot A \cdot B) \cdot e^{(B^{-1}\cdot A\cdot B)t} = (B^{-1} \cdot A \cdot B) \cdot Y(t)\,.$$

Aber dann muss $X(t) = Y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ sein, insbesondere $X(1) = Y(1)$. ∎

Wir versuchen nun, die Exponentialfunktion von Matrizen zu berechnen.

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall, mit Diagonalmatrizen. Für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ bezeichne $D = \Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ die aus den λ_i gebildete Diagonalmatrix. Dann ist $D^k = \Delta(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$ und

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} D^k = \Delta\Big(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k!}\lambda_1^k, \ldots, \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!}\lambda_n^k\Big).$$

Lässt man nun N gegen Unendlich gehen, so erhält man

$$e^D = \Delta(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}).$$

Der nächst-einfache Fall ist der von diagonalisierbaren Matrizen. Eine Matrix A heißt diagonalisierbar, wenn es eine invertierbare Matrix P gibt, so dass $D := P^{-1} \cdot A \cdot P$ eine Diagonalmatrix ist. Dann ist $e^A = e^{P \cdot D \cdot P^{-1}} = P \cdot e^D \cdot P^{-1}$.

Für den allgemeinen Fall müssen wir uns an die Eigenwert-Theorie erinnern.

Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ und $\mathbf{f}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der durch $\mathbf{f}_A(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \cdot A^\top$ definierte Endomorphismus. Eine reelle Zahl λ heißt ***Eigenwert*** von A, falls es einen Vektor $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ gibt, so dass $\mathbf{f}_A(\mathbf{x}_0) = \lambda \mathbf{x}_0$ ist. Der Vektor $\mathbf{x}_0$ heißt dann ***Eigenvektor*** von A zum Eigenwert λ. Er ist eine nichttriviale Lösung des Gleichungssystems $(A - \lambda \cdot E_n) \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{0}^\top$. Eine solche Lösung gibt es genau dann, wenn $\det(A - \lambda \cdot E_n) = 0$ ist.

Die Eigenwerte von A sind daher genau die Nullstellen des ***charakteristischen Polynoms*** $p_A(x) := \det(A - x \cdot E_n)$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt jedes Polynom über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren. Also besitzt jede Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ genau n „komplexe Eigenwerte“ (mit Vielfachheit gezählt). Die Eigenvektoren zu komplexen Eigenwerten sind dann allerdings Elemente des $\mathbb{C}^n$.

4.6. Lemma

Sei λ ein Eigenwert der Matrix A und $\mathbf{y}_0$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann ist $\boldsymbol{\varphi}(t) := e^{\lambda t}\mathbf{y}_0$ eine Lösung der DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A^\top$.

Beweis: Setzt man $\boldsymbol{\varphi}(t) := e^{\lambda t}\mathbf{y}_0$, so ist

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{y}_0 = e^{\lambda t}(\lambda \mathbf{y}_0) = e^{\lambda t}(\mathbf{y}_0 \cdot A^\top) = (e^{\lambda t}\mathbf{y}_0) \cdot A^\top = \boldsymbol{\varphi}(t) \cdot A^\top.$$

Also ist $\boldsymbol{\varphi}$ Lösung der DGL. ■

Indem man über $\mathbb{C}$ arbeitet, kann man davon ausgehen, dass das charakteristische Polynom $p_A(x)$ in Linearfaktoren zerfällt. Wenn es eine Basis aus Eigenvektoren von A gibt, ist A diagonalisierbar. Das ist z.B. dann der Fall, wenn alle Nullstellen von $p_A(x)$ einfach sind. Allerdings ist diese Bedingung nicht notwendig.

Sei λ Eigenwert der Matrix A. Ein Vektor $\mathbf{v}$ heißt ***Hauptvektor*** von A zum Eigenwert λ, falls es ein $j \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt:

$$\mathbf{v} \in \operatorname{Ker}(\mathbf{f}_A - \lambda \operatorname{id})^j.$$

Die kleinste natürliche Zahl j mit dieser Eigenschaft nennt man die Stufe von $\mathbf{v}$. Der Nullvektor ist der einzige Hauptvektor der Stufe 0, die Eigenvektoren zum Eigenwert λ sind die Hauptvektoren der Stufe 1. Alle Hauptvektoren zum Eigenwert λ bilden den sogenannten ***Hauptraum*** $H_A(\lambda)$.

Ist $p_A(x) = (-1)^n(x - \lambda_1)^{n_1}(x - \lambda_2)^{n_2} \cdots (x - \lambda_k)^{n_k}$, so ist $\dim H_A(\lambda_i) = n_i$, für $i = 1, \ldots, k$, sowie $\mathbb{R}^n = H_A(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus H_A(\lambda_k)$. Die Haupträume sind alle invariant unter $\mathbf{f}_A$: Ist nämlich $\mathbf{v} \in H_A(\lambda_i)$ und j die Stufe von $\mathbf{v}$, so ist

$$(\mathbf{f}_A - \lambda_i \,\mathrm{id})^j \big(\mathbf{f}_A(\mathbf{v})\big) = \mathbf{f}_A \circ (\mathbf{f}_A - \lambda_i \,\mathrm{id})^j \mathbf{v} = \mathbf{f}_A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Daraus ergibt sich der Satz von der Jordan'schen Normalform. Außerdem gilt:

Ist $\mathbf{g}_i := \big(\mathbf{f}_A - \lambda_i \,\mathrm{id}\big)|_{H_A(\lambda_i)}$, so ist $(\mathbf{g}_i)^{n_i} = 0$, also $\mathbf{g}_i$ „nilpotent“.

4.7. Die Lösung linearer DGL-Systeme

1. *A besitze n verschiedene (reelle) Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (jeweils mit Vielfachheit 1), und $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ sei eine dazu passende Basis von Eigenvektoren von A. Dann bilden die n Funktionen $\boldsymbol{\varphi}_\nu(t) := e^{\lambda_\nu t} \cdot \mathbf{y}_\nu$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A^\top$.*

2. *Hat A nur k verschiedene (reelle) Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_k$, so gibt es ein Fundamentalsystem von Lösungen, welches für $\nu = 1, \ldots, k$ aus jeweils n_ν Funktionen der Gestalt $\mathbf{q}_{\nu\mu}(t) \cdot e^{\lambda_\nu t}$ besteht, $\mu = 1, \ldots, n_\nu$. Dabei ist $\mathbf{q}_{\nu\mu}(t)$ jeweils ein Vektor von Polynomen vom Grad $\le n_\nu - 1$.*

BEWEIS: 1) Auf Grund des Lemmas ist klar, dass die $\boldsymbol{\varphi}_\nu$ Lösungen sind. Weil $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist, verschwindet die Wronski-Determinante $W(t) = W(\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n)(t)$ nicht in $t = 0$. Aber dann ist $W(t) \ne 0$ für alle t, und $\{\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n\}$ eine Basis des Lösungsraumes.

2) Wir können annehmen, dass $k = 1$ ist, dass es also nur einen einzigen Eigenwert λ mit Vielfachheit n gibt. Dann ist $(A - \lambda \cdot E)^n = 0$, also $A = \lambda \cdot E + N$, mit einer nilpotenten Matrix N.

Weil die Diagonalmatrix $(\lambda t)E$ mit jeder Matrix vertauscht werden kann, ist

$$e^{At} = e^{(\lambda t)E + Nt} = e^{(\lambda t)E} \cdot e^{Nt} = e^{\lambda t} \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\nu!} N^\nu t^\nu .$$

Nun sei $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ und $\mathbf{a}_{\nu\mu} := \mathbf{y}_\mu \cdot (N^\nu)^\top$ für $\nu = 0, \ldots, n-1$ und $\mu = 1, \ldots, n$. Dann ist

$$\boldsymbol{\varphi}_\mu(t) := \mathbf{y}_\mu \cdot e^{A^\top t} = e^{\lambda t} \cdot \mathbf{y}_\mu \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\nu!} (N^\nu)^\top t^\nu = e^{\lambda t} \cdot \mathbf{q}_\mu(t),$$

wobei $\mathbf{q}_\mu(t) := \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{t^\nu}{\nu!} \cdot \mathbf{a}_{\nu\mu}$ ein Vektor von Polynomen vom Grad $\le n - 1$ ist. ∎

Eine Lösungsmethode besteht nun darin, die Polynome mit unbestimmten Koeffizienten anzusetzen, das Ergebnis in die DGL einzusetzen und auf den Koeffizientenvergleich zu hoffen.

4.8. Beispiel

Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Wir wollen die DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot A^\top$ lösen.

Zunächst bestimmen wir die Eigenwerte von A als Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Nach Laplace ergibt die Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} p_A(t) \;=\; \det(A - tE) \;&=\; (-t)[(3-t)(1-t)+1] - [(-2)(1-t)-1] \\ &\quad\; - [-2 + (3-t)] \\ &=\; (-t)(t^2 - 4t + 4) - (2t-3) - (1-t) \\ &=\; -t^3 + 4t^2 - 5t + 2 \;=\; -(t-1)^2(t-2). \end{aligned}$$

Der Eigenwert $\lambda = 2$ hat die Vielfachheit 1. Man findet sofort einen Eigenvektor dazu, nämlich $\mathbf{u} := (0,1,1)$. Das ergibt die erste Lösung

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) := (0,1,1) \cdot e^{2t}.$$

Der Eigenwert $\lambda = 1$ hat die (algebraische) Vielfachheit 2, aber der Eigenraum hat nur die Dimension 1, eine Basis bildet der Eigenvektor $\mathbf{v} := (1,1,0)$. Das ergibt

$$\boldsymbol{\varphi}_2(t) := (1,1,0) \cdot e^{t}.$$

Da A nicht diagonalisierbar ist, machen wir für eine dritte Lösung den Ansatz

$$\boldsymbol{\varphi}_3(t) = (q_1 + p_1 t,\; q_2 + p_2 t,\; q_3 + p_3 t)e^t.$$

Weil mit $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2$ und $\boldsymbol{\varphi}_3$ auch die Lösungen $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2$ und $\boldsymbol{\varphi}_3 - c\boldsymbol{\varphi}_2$ eine Basis bilden, können wir annehmen, dass $q_1 = 0$ ist.

Setzt man $\boldsymbol{\varphi}_3(t)$ in die DGL ein, so erhält man die Beziehung

$$\begin{aligned} &\big(p_1 + p_1 t, (p_2 + q_2) + p_2 t, (p_3 + q_3) + p_3 t\big) \;= \\ &\quad= \;(p_1 t,\; q_2 + p_2 t,\; q_3 + p_3 t) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top \\ &\quad= \;\big((q_2 - q_3) + (p_2 - p_3)t, (3q_2 - q_3) + (-2p_1 + 3p_2 - p_3)t, (q_2 + q_3) + (-p_1 + p_2 + p_3)t\big), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} p_1 + p_1 t \;&=\; (q_2 - q_3) + (p_2 - p_3)t, \\ (q_2 + p_2) + p_2 t \;&=\; (3q_2 - q_3) + (-2p_1 + 3p_2 - p_3)t, \\ (q_3 + p_3) + p_3 t \;&=\; (q_2 + q_3) + (-p_1 + p_2 + p_3)t. \end{aligned}$$

Der Vergleich der Koeffizienten bei t liefert

$$p_1 = p_2 - p_3 \quad \text{und} \quad p_1 = p_2, \text{ also } p_3 = 0.$$

Setzen wir $\alpha := p_1 = p_2$, so ergibt der Vergleich der Koeffizienten bei 1:

$$q_2 - q_3 = \alpha, \quad 2q_2 - q_3 = \alpha \quad \text{und daher} \quad q_2 = 0 \text{ und } q_3 = -\alpha.$$

So erhalten wir

$$\boldsymbol{\varphi}_3(t) = \big(\alpha t,\, \alpha t,\, -\alpha\big)e^t.$$

Natürlich können wir jetzt $\alpha = 1$ setzen, also $\boldsymbol{\varphi}_3(t) := (t, t, -1)e^t$.

Eine weitere Methode benutzt direkt die Darstellung $A = \lambda E_n + N$:

Sei λ Eigenwert der Matrix A mit Vielfachheit k, der Eigenraum habe die Dimension 1, $\mathbf{v}_1$ sei ein Eigenvektor. Dann ist $\mathbf{v}_1 \cdot (A^\top - \lambda E_n) = \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{\varphi}_1(t) := e^{\lambda t}\mathbf{v}_1$ eine Lösung.

Ist $k > 1$, so muss es einen Vektor $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ mit

$$\mathbf{v}_2 \cdot (A^\top - \lambda E_n) \neq \mathbf{0}, \text{ aber } \mathbf{v}_2 \cdot (A^\top - \lambda E_n)^k = \mathbf{0}$$

geben. Natürlich ist auch $\boldsymbol{\varphi}_2(t) := \mathbf{v}_2 \cdot e^{A^\top t}$ eine Lösung (mit $\boldsymbol{\varphi}_2(0) = \mathbf{v}_2$). Dabei ist

$$e^{A^\top t} = e^{\lambda t} \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{t^\nu}{\nu!}(A^\top - \lambda E)^\nu.$$

Ist $\mathbf{v}_2 \cdot (A^\top - \lambda E_n)^2 = \mathbf{0}$, so ist

$$\boldsymbol{\varphi}_2(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}_2 \cdot e^{(A^\top - \lambda E)t} = e^{\lambda t}\big(\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_2 \cdot (A^\top - \lambda E_n)\big).$$

Ist $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ eine Basis des Raumes $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \,:\, \mathbf{v} \cdot (A^\top - \lambda E_n)^2 = \mathbf{0}\}$ und $k > 2$, so gibt es einen Vektor $\mathbf{v}_3 \neq \mathbf{0}$ mit

$$\mathbf{v}_3 \cdot (A^\top - \lambda E_n)^2 \neq \mathbf{0}, \text{ aber } \mathbf{v}_3 \cdot (A^\top - \lambda E_n)^k = \mathbf{0}.$$

Ist $\mathbf{v}_3 \cdot (A^\top - \lambda E_n)^3 = \mathbf{0}$, so ist

$$\boldsymbol{\varphi}_3(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}_3 \cdot e^{(A^\top - \lambda E_n)t} = e^{\lambda t}\Big(\mathbf{v}_3 + t\mathbf{v}_3 \cdot (A^\top - \lambda E_n) + \frac{t^2}{2}\mathbf{v}_3 \cdot (A^\top - \lambda E_n)^2\Big).$$

Bei 3×3-Matrizen kommt man damit immer aus.

4.9. Beispiel

Wir betrachten noch einmal die DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$.

Wir wissen schon, dass 2 ein Eigenwert der Vielfachheit 1 und 1 ein Eigenwert der Vielfachheit 2 ist, und dass

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) := e^{-2t}(0,1,1) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\varphi}_2(t) := e^{-t}(1,1,0)$$

Lösungen sind. Außerdem ist

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } (A - E_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\mathbf{v}_3 := (0,0,1)$ ist kein Eigenvektor, aber Lösung der Gleichung $\mathbf{v} \cdot (A^\top - E_3)^2 = \mathbf{0}$. Das liefert die Lösung

$$\boldsymbol{\varphi}_3(t) := e^t(\mathbf{v}_3 + t\mathbf{v}_3(A^\top - E_3)) = e^t(-t, -t, 1),$$

und das ist – bis auf's Vorzeichen – die Lösung, die wir auch mit der Koeffizientenvergleichsmethode gefunden haben.

Bisher haben wir nur den Fall reeller Eigenwerte betrachtet. Den Fall komplexer Eigenwerte kann man aber auf den reellen Fall zurückführen. Ist $\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{g}(t) + \mathrm{i}\,\mathbf{h}(t)$, so sind $\mathbf{g} = \mathrm{Re}(\boldsymbol{\varphi})$ und $\mathbf{h} = \mathrm{Im}(\boldsymbol{\varphi})$ reelle Lösungen, denn es ist

$$\mathbf{g}'(t) + \mathrm{i}\,\mathbf{h}'(t) = \boldsymbol{\varphi}'(t) = \boldsymbol{\varphi}(t) \cdot A^\top = \mathbf{g}(t) \cdot A^\top + \mathrm{i}\,\mathbf{h}(t) \cdot A^\top.$$

4.10. Beispiel

Sei $\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{z}$ komplexe Lösung einer DGL, mit $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$ und $\mathbf{z} = \mathbf{v} + \mathrm{i}\,\mathbf{w}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(t) &= e^{\alpha t} e^{\mathrm{i}\,\beta t}(\mathbf{v} + \mathrm{i}\,\mathbf{w}) \\ &= e^{\alpha t}\big[(\cos(\beta t)\mathbf{v} - \sin(\beta t)\mathbf{w}) + \mathrm{i}\,(\sin(\beta t)\mathbf{v} + \cos(\beta t)\mathbf{w})\big]. \end{aligned}$$

Real- und Imaginärteil sind reelle Lösungen.

2.5 Pfaffsche Formen

Definition

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine ***Pfaffsche Form*** oder ***Differentialform vom Grad 1*** auf B ist eine beliebig oft differenzierbare Funktion $\omega : B \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die im zweiten Argument linear ist. (Gelegentlich lässt man auch zu, dass ω nur eine $\mathscr{C}^k$-Funktion ist, $k \geq 0$).

Durch $\omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) := \omega(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ definiert eine Pfaffsche Form ω auf B in jedem Punkt $\mathbf{x} \in B$ ein Element $\omega_{\mathbf{x}}$ des Dualraumes $(\mathbb{R}^n)^* = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Pfaffsche Formen können addiert und mit (beliebig oft) differenzierbaren Funktionen multipliziert werden:

$$\begin{aligned}(\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) &:= \omega_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \omega_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}),\\ (f \cdot \omega)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) &:= f(\mathbf{x}) \cdot \omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}).\end{aligned}$$

Ist $f : B \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion, so wird das ***totale Differential*** $df : B \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$df(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := Df(\mathbf{x})(\mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v}.$$

Bemerkung: Setzt man f nur als k-mal stetig differenzierbar voraus, so ist df nur $(k-1)$-mal stetig differenzierbar.

Speziell ist dx_i für $i = 1, \ldots, n$ eine Pfaffsche Form, mit $dx_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = v_i$.

Ist $\mathbf{F} : B \to \mathbb{R}^n$ eine beliebig oft differenzierbare Abbildung, also ein **Vektorfeld** auf B, so wird durch

$$\omega_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := \mathbf{F}(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{v}$$

die dem Vektorfeld $\mathbf{F}$ zugeordnete Pfaffsche Form $\omega_{\mathbf{F}}$ definiert.

5.1. Satz

Sei ω eine Pfaffsche Form auf B. Dann gibt es eindeutig bestimmte, beliebig oft differenzierbare Funktionen $\omega_1, \ldots, \omega_n$ auf B, so dass gilt:

$$\omega = \omega_1 \cdot dx_1 + \cdots + \omega_n \cdot dx_n.$$

Beweis: a) Existenz: Durch $\omega_i(\mathbf{x}) := \omega(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)$ wird eine beliebig oft differenzierbare Funktion $\omega_i : B \to \mathbb{R}$ definiert. Sei $\varphi := \omega_1\, dx_1 + \cdots + \omega_n\, dx_n$. Dann gilt für $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in B \times \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}) &= \omega_1(\mathbf{x}) \cdot dx_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \cdots + \omega_n(\mathbf{x}) \cdot dx_n(\mathbf{x}, \mathbf{v})\\ &= \omega(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1)v_1 + \cdots + \omega(\mathbf{x}, \mathbf{e}_n)v_n\\ &= \omega(\mathbf{x}, v_1\mathbf{e}_1 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n) \;=\; \omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}).\end{aligned}$$

Also ist $\omega = \varphi$.

b) Eindeutigkeit: Ist $\omega_1\,dx_1 + \cdots + \omega_n\,dx_n = 0$, so gilt für jedes $\mathbf{x} \in B$ und jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \big(\omega_1\,dx_1 + \cdots + \omega_n\,dx_n\big)(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) \\ &= \omega_1(\mathbf{x}) \cdot dx_1(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) + \cdots + \omega_n(\mathbf{x}) \cdot dx_n(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) \\ &= \omega_1(\mathbf{x}) \cdot \delta_{1i} + \cdots + \omega_n(\mathbf{x}) \cdot \delta_{ni} \;=\; \omega_i(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Daraus folgt: Ist $\omega_1\,dx_1 + \cdots + \omega_n\,dx_n = \omega_1^*\,dx_1 + \cdots + \omega_n^*\,dx_n$, so muss $\omega_i = \omega_i^*$ für $i = 1, \ldots, n$ gelten. ■

Speziell gilt:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n,$$

denn es ist $df(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = \nabla f(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{e}_i = f_{x_i}(\mathbf{x})$.

Und wenn $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ ein Vektorfeld auf B ist, dann ist $\omega_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{e}_i = F_i$, also

$$\omega_{\mathbf{F}} = F_1 \cdot dx_1 + \cdots + F_n \cdot dx_n.$$

Deshalb ist tatsächlich **jede** Pfaffsche Form auf B von der Gestalt $\omega = \omega_{\mathbf{F}}$.

Sei $U \subset \mathbb{R}^p$ offen und $\Phi : U \to B \subset \mathbb{R}^n$ eine (beliebig oft) differenzierbare Abbildung und ω eine Pfaffsche Form auf B. Dann kann man ω mit Hilfe von Φ zurückholen, zur Pfaffschen Form $\Phi^*\omega$ auf U, durch

$$\Phi^*\omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := \omega\big(\Phi(\mathbf{x}), D\Phi(\mathbf{x})(\mathbf{v})\big).$$

Dabei benutzen wir die totale Ableitung von Φ in $\mathbf{x}$, die ja als eine lineare Abbildung $D\Phi(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ definiert wurde. So ist auch $\Phi^*\omega$ im zweiten Argument linear.

5.2. Satz

Das Zurückholen von Pfaffschen Formen genügt den folgenden Regeln:

1. $\Phi^*(\omega_1 + \omega_2) = \Phi^*\omega_1 + \Phi^*\omega_2$ *und* $\Phi^*(f \cdot \omega) = (f \circ \Phi) \cdot \Phi^*\omega$.
2. $\Phi^*(df) = d(f \circ \Phi)$, *insbesondere* $\Phi^*(dx_i) = d\Phi_i$ *für* $i = 1, \ldots, n$ *und* $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$.
3. *Ist* $V \subset \mathbb{R}^k$ *offen und* $\Psi : V \to U$ *eine weitere differenzierbare Abbildung, so ist*
$$(\Phi \circ \Psi)^*\omega = \Psi^*(\Phi^*\omega).$$

Beweis: 1) Die Linearität ist trivial, für Funktionen $f : B \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\Phi^*(f \cdot \omega)(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = (f \cdot \omega)(\Phi(\mathbf{x}), D\Phi(\mathbf{x})\mathbf{v}) = (f \circ \Phi(\mathbf{x})) \cdot \Phi^*\omega(\mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

2) Nach Kettenregel ist

$$\begin{aligned}\Phi^*(df)(\mathbf{x},\mathbf{v}) &= df(\Phi(\mathbf{x}), D\Phi(\mathbf{x})\mathbf{v}) \;=\; Df(\Phi(\mathbf{x}))\circ D\Phi(\mathbf{x})\mathbf{v}\\ &= D(f\circ\Phi)(\mathbf{x})\mathbf{v} \;=\; d(f\circ\Phi)(\mathbf{x},\mathbf{v}).\end{aligned}$$

3) Schließlich ist

$$\begin{aligned}\big((\Phi\circ\Psi)^*\omega\big)(\mathbf{x},\mathbf{v}) &= \omega\big((\Phi\circ\Psi)(\mathbf{x}), D(\Phi\circ\Psi)(\mathbf{x})\mathbf{v}\big)\\ &= \omega\big(\Phi(\Psi(\mathbf{x})), D\Phi(\Psi(\mathbf{x}))(D\Psi(\mathbf{x})\mathbf{v})\big)\\ &= (\Phi^*\omega)\big(\Psi(\mathbf{x}), D\Psi(\mathbf{x})\mathbf{v}\big) \;=\; \big(\Psi^*(\Phi^*\omega)\big)(\mathbf{x},\mathbf{v}).\end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. ■

5.3. Beispiele

A. Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist

$$df = a\,dt, \qquad \text{mit } a(t) = df(t,1) = f'(t)\cdot 1 = f'(t).$$

Die Gleichung $df = f'\,dt$ bringt zum Ausdruck, dass die beiden vektoriellen Größen df und dt linear abhängig sind. Physiker machen daraus durch Division die Gleichung $f' = \dfrac{df}{dt}$. Damit folgen sie der Tradition von Leibniz.

B. Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}_+ \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\Phi(r,\theta) := (\Phi_1(r,\theta), \Phi_2(r,\theta)) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \qquad \text{(ebene Polarkoordinaten)}$$

Ist $\omega = y\,dx - x\,dy$, so ist

$$\begin{aligned}\Phi^*\omega &= (y\circ\Phi)\,d\Phi_1 - (x\circ\Phi)\,d\Phi_2\\ &= \Phi_2\big((\Phi_1)_r\,dr + (\Phi_1)_\theta\,d\theta\big) - \Phi_1\big((\Phi_2)_r\,dr + (\Phi_2)_\theta\,d\theta\big)\\ &= r\sin\theta\big(\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta\big) - r\cos\theta\big(\sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta\big)\\ &= -r^2\,d\theta.\end{aligned}$$

Definition

Sei $\boldsymbol{\alpha} : [a,b] \to B$ ein stetig differenzierbarer Weg und ω eine Pfaffsche Form auf B. Dann definiert man das Integral von ω über α durch

$$\int_{\boldsymbol{\alpha}} \omega := \int_a^b \omega(\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\alpha}'(t))\,dt.$$

Ist $\alpha(t) = t$ die identische Abbildung von $[a,b]$ nach $\mathbb{R}$ und $\omega = f\,dt$ eine Pfaffsche Form auf $\mathbb{R}$, so ist $\omega(\alpha(t),\alpha'(t)) = \omega(t,1) = f(t)$, also $\displaystyle\int_\alpha \omega = \int_a^b f(t)\,dt$ das gewöhnliche Integral.

Im allgemeinen Fall ist $\boldsymbol{\alpha}^*\omega(t,1) = \omega(\boldsymbol{\alpha}(t), D\boldsymbol{\alpha}(t)(1)) = \omega(\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\alpha}'(t))$, also

$$\boldsymbol{\alpha}^*\omega = \omega(\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\alpha}'(t))\,dt \quad \text{und} \quad \int_{\boldsymbol{\alpha}} \omega = \int_{\mathrm{id}_{[a,b]}} \boldsymbol{\alpha}^*\omega.$$

Ist $\omega = \omega_{\mathbf{F}}$, für ein differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{F}$, so ist $\boldsymbol{\alpha}^*\omega_{\mathbf{F}} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}(t)) \bullet \boldsymbol{\alpha}'(t)$, also

$$\int_{\boldsymbol{\alpha}} \omega_{\mathbf{F}} = \int_a^b \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}(t)) \bullet \boldsymbol{\alpha}'(t)\,dt.$$

In der älteren Literatur nennt man so ein Integral auch ein ***Kurvenintegral 2. Art*** (im Gegensatz zu dem bei der Berechnung der Bogenlänge auftretenden *Kurvenintegral 1. Art*).

Ist $\omega = df$ ein totales Differential, so ist $\boldsymbol{\alpha}^*\omega = d(f \circ \boldsymbol{\alpha}) = (f \circ \boldsymbol{\alpha})'\,dt$ und

$$\int_{\boldsymbol{\alpha}} df = \int_a^b (f \circ \boldsymbol{\alpha})'(t)\,dt = f(\boldsymbol{\alpha}(b)) - f(\boldsymbol{\alpha}(a)).$$

Ist $\boldsymbol{\alpha}$ ein Integrationsweg, also stückweise stetig differenzierbar, so gibt es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$, so dass die Einschränkung $\boldsymbol{\alpha}_i$ von $\boldsymbol{\alpha}$ auf das Teilintervall $[t_{i-1}, t_i]$ stetig differenzierbar ist, für $i = 1, \ldots, N$. Dann setzt man

$$\int_{\boldsymbol{\alpha}} \omega := \sum_{i=1}^{N} \int_{\boldsymbol{\alpha}_i} \omega.$$

5.4. Eigenschaften des Kurvenintegrals

Sei $\boldsymbol{\alpha} : [a,b] \to B \subset \mathbb{R}^n$ ein Integrationsweg.

1. $$\int_{\boldsymbol{\alpha}} (c_1 \cdot \omega_1 + c_2 \cdot \omega_2) = c_1 \cdot \int_{\boldsymbol{\alpha}} \omega_1 + c_2 \cdot \int_{\boldsymbol{\alpha}} \omega_2,$$
   für Pfaffsche Formen ω_1, ω_2 und Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
2. *Ist $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ eine Parametertransformation (also differenzierbar und bijektiv), so ist*
   $$\int_{\boldsymbol{\alpha}\circ\varphi} \omega = \pm \int_{\boldsymbol{\alpha}} \omega,$$
   je nachdem, ob $\varphi'(x) > 0$ oder < 0 für alle $x \in [c,d]$ ist.

Beweis: 1) ist trivial.

2) Ist $\varphi' > 0$, so ist

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\alpha}\circ\varphi}\omega &= \int_c^d \omega\big(\boldsymbol{\alpha}\circ\varphi(t),(\boldsymbol{\alpha}\circ\varphi)'(t)\big)\,dt\\ &= \int_c^d \omega\big(\boldsymbol{\alpha}(\varphi(t)),\boldsymbol{\alpha}'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\big)\,dt\\ &= \int_a^b \omega\big(\boldsymbol{\alpha}(s),\boldsymbol{\alpha}'(s)\big)\,ds \;=\; \int_{\boldsymbol{\alpha}}\omega.\end{aligned}$$

Ist dagegen $\varphi' < 0$, so ist φ streng monoton fallend und vertauscht die Integralgrenzen. Dann erhält man das zusätzliche Minuszeichen. ∎

5.5. Beispiele

A. Ist $\omega = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dy$ und $\boldsymbol{\alpha}(t) := (R\cos t, R\sin t)$ für $0 \le t \le 2\pi$, so ist

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}^*\omega &= \frac{-R\sin t}{R^2}(-R\sin t)\,dt + \frac{R\cos t}{R^2}(R\cos t)\,dt\\ &= (\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt \;=\; dt,\end{aligned}$$

also $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\alpha}}\omega = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$

B. Auf der rechten Halbebene $H_+ := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x>0\}$ ist $\omega = df$, mit $f(x,y) := \arctan(y/x)$. Nun sei $\boldsymbol{\beta}(t) := (2+\cos t, \sin t)$. Weil die Spur von $\boldsymbol{\beta}$ in H_+ liegt, ist

$$\int_{\boldsymbol{\beta}}\omega = \int_{\boldsymbol{\beta}} df = \int_0^{2\pi}(f\circ\boldsymbol{\beta})'(t)\,dt = f(3,0)-f(3,0) = 0.$$

5.6. Hauptsatz über Kurvenintegrale

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und ω eine Pfaffsche Form auf G. Dann sind die folgenden Aussagen über ω äquivalent:

1. *ω ist ein Differential, d.h. es gibt eine differenzierbare Funktion f auf G, so dass $\omega = df$ ist.*
2. *Ist $\boldsymbol{\alpha} : [a,b] \to G$ ein* ***geschlossener*** *Integrationsweg, so ist $\displaystyle\int_{\boldsymbol{\alpha}}\omega = 0$.*

Der Beweis verläuft genauso wie beim entsprechenden Satz über komplexe Kurvenintegrale. Der Vollständigkeit halber sei er hier aber noch einmal ausgeführt.

Beweis:

$1 \implies 2$: Ist $\omega = df$, so gilt:

$$\int_{\boldsymbol{\alpha}} \omega = f(\boldsymbol{\alpha}(b)) - f(\boldsymbol{\alpha}(a)) = 0.$$

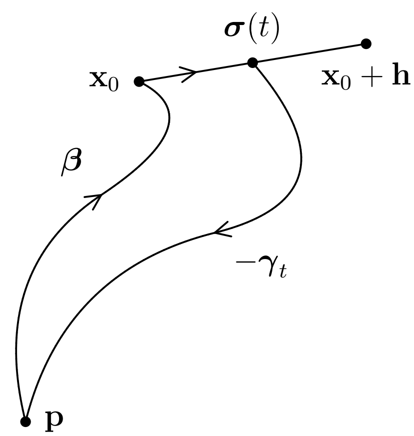
$3 \implies 1$: Sei $\mathbf{p} \in G$ ein fest gewählter Punkt. Ist $\mathbf{x} \in G$, so gibt es einen Integrationsweg $\boldsymbol{\alpha}$, der $\mathbf{p}$ innerhalb von G mit $\mathbf{x}$ verbindet. Wir setzen $f(\mathbf{x}) := \displaystyle\int_{\boldsymbol{\alpha}} \omega$.

Ist $\boldsymbol{\beta}$ ein weiterer Weg von $\mathbf{p}$ nach $\mathbf{x}$, so stellt $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}$ einen geschlossenen Integrationsweg dar, der bei $\mathbf{p}$ beginnt und endet. Nach Voraussetzung ist

$$\int_{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} \omega = 0\,, \text{ also } \qquad \int_{\boldsymbol{\alpha}} \omega = \int_{\boldsymbol{\beta}} \omega.$$

Damit ist die Funktion f auf G „wohldefiniert“, d.h. unabhängig vom benutzten Weg $\boldsymbol{\alpha}$. Es bleibt zu zeigen, dass $df = \omega$ ist.

Sei $\mathbf{x}_0 \in G$ beliebig und $\mathbf{h}$ irgend ein Richtungsvektor. Weiter sei $\boldsymbol{\sigma}(s) := \mathbf{x}_0 + s\mathbf{h}$ (für $s \in [0,1]$) die Verbindungsstrecke von $\mathbf{x}_0$ nach $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$, $\boldsymbol{\sigma}_t := \boldsymbol{\sigma}|_{[0,t]}$ die Verbindungsstrecke von $\mathbf{x}_0$ und $\boldsymbol{\sigma}(t)$, $\boldsymbol{\beta}$ ein Weg von $\mathbf{p}$ nach $\mathbf{x}_0$ und $\boldsymbol{\gamma}_t$ ein Weg von $\mathbf{p}$ nach $\boldsymbol{\sigma}(t)$. Dann ist $\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\sigma}_t - \boldsymbol{\gamma}_t$ für jedes $t \in [0,1]$ geschlossen, und es gilt:



$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) &= \int_{\boldsymbol{\gamma}_t} \omega - \int_{\boldsymbol{\beta}} \omega \\ &= \int_{\boldsymbol{\sigma}_t} \omega \;=\; \int_0^t \boldsymbol{\sigma}_t^* \omega. \end{aligned}$$

Schreiben wir $\boldsymbol{\sigma}_t^*\omega = g(s)\,ds$, so ist

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \int_0^t g(s)\,ds,$$

und nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $c = c(t) \in [0,t]$, so dass gilt:

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = g(c) \cdot (t - 0) = (\boldsymbol{\sigma}_t^*\omega)(c,1) = \omega(\mathbf{x}_0 + c\mathbf{h}, \mathbf{h}) \cdot t,$$

also

$$\begin{aligned} df(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) &= Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) \;=\; D_{\mathbf{h}}f(\mathbf{x}_0) \;=\; \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \omega(\mathbf{x}_0 + c(t) \cdot \mathbf{h}, \mathbf{h}) \;=\; \omega(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}). \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $df = \omega$ ist. ∎

Definition

Ist $\mathbf{F}$ ein Vektorfeld auf $B \subset \mathbb{R}^n$ und f eine Funktion auf B mit $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in B$, so nennt man f ein ***Potential*** für $\mathbf{F}$.

Ein Vektorfeld $\mathbf{F}$ besitzt genau dann ein Potential, wenn die zugehörige Pfaffsche Form $\omega_{\mathbf{F}}$ ein totales Differential ist.

Definition

Eine stetige Pfaffsche Form $\omega = f\,dx + g\,dy$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ heißt ***singulär*** in (x_0, y_0), falls $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ ist. Andernfalls heißt ω in (x_0, y_0) ***regulär***

Definition

Ein glatter, stetig differenzierbarer Weg $\boldsymbol{\alpha} : I \to G$ heißt ***Lösung*** der Gleichung $\omega = 0$, wenn $\boldsymbol{\alpha}^*\omega = 0$ ist.

„glatt“ bedeutet: $\boldsymbol{\alpha}'(t) \neq 0$ für alle t. Ob $\boldsymbol{\alpha}$ Lösung ist, hängt nicht von der Parametrisierung ab.

Sei nun $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $y' = f(x, y)$ eine Differentialgleichung auf G. Dann liegt es nahe, der DGL die Pfaffsche Form $\omega = dy - f(x, y)\,dx$ zuzuordnen. Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung, so ist die zugehörige Integralkurve gegeben durch $\boldsymbol{\alpha}(t) := (t, \varphi(t))$. Offensichtlich ist $\boldsymbol{\alpha}$ glatt und $\boldsymbol{\alpha}^*\omega = \big(\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))\big)\,dt = 0$, also $\boldsymbol{\alpha}$ eine Lösung der Gleichung $\omega = 0$.

Sei umgekehrt $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2) : I \to G$ eine Lösung von $\omega = 0$, also

$$\gamma_2'(t) - f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_1'(t) \equiv 0.$$

Wäre $\gamma_1'(t_0) = 0$, so wäre auch $\gamma_2'(t_0) = 0$. Das steht aber im Widerspruch dazu, dass $\boldsymbol{\gamma}$ glatt sein soll. Also ist $\gamma_1'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Damit ist $\gamma_1 : I \to J := \gamma_1(I)$ umkehrbar stetig differenzierbar (und J wieder ein Intervall). Wir schreiben

$$\boldsymbol{\gamma} \circ \gamma_1^{-1}(s) = (s, \psi(s)), \text{ für } s \in J.$$

Weil $\big(\psi'(s) - f(s, \psi(s))\big)\,ds = (\boldsymbol{\gamma} \circ \gamma_1^{-1})^*\omega = (\gamma_1^{-1})^*(\boldsymbol{\gamma}^*\omega) = 0$ ist, ist ψ eine Lösung der Differentialgleichung.

5.7. Satz

Sei ω eine stetige Pfaffsche Form auf $G \subset \mathbb{R}^2$ und $h : G \to \mathbb{R}$ stetig und ohne Nullstellen. Dann haben die Gleichungen $\omega = 0$ und $h \cdot \omega = 0$ die gleichen Lösungen.

Beweis: Ist $\boldsymbol{\alpha}$ Lösungskurve der Gleichung $\omega = 0$, so ist $\boldsymbol{\alpha}^*\omega = 0$ und daher auch $\boldsymbol{\alpha}^*(h\omega) = (h \circ \boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\alpha}^*\omega = 0$. In der anderen Richtung schließt man analog, unter Verwendung von $1/h$. ∎

5.8. Beispiele

A. Sei $\omega := (x-1)\,dy + (y+1)\,dx$. Die Kurven $\boldsymbol{\alpha}(t) := (1,t)$ und $\boldsymbol{\beta}(t) := (t,-1)$ sind offensichtlich Lösungen von $\omega = 0$. Man beachte, dass die senkrechte Gerade $\boldsymbol{\alpha}$ keine Lösung einer DGL sein kann.

Nun betrachten wir die Gleichung $\omega = 0$ auf

$$G := \{(x,y) \,:\, x > 1 \text{ und } y > -1\}.$$

Dort ist $x - 1 \neq 0$, wir können also auch nach Lösungen von $(x-1)^{-1}\omega = 0$ fragen. Aber die sind zugleich die Lösungen der DGL

$$y' = -\frac{y+1}{x-1} = f(x)g(y) \text{ mit } f(x) := 1/(x-1) \text{ und } g(y) := -(y+1).$$

$F(x) = \ln(x-1)$ ist Stammfunktion von $f(x)$, $G(y) := -\ln(y+1)$ Stammfunktion von $1/g(y)$. Daher ist $y(x) = G^{-1}(F(x)+c) = e^{-(F(x)+c)} - 1 = \dfrac{C}{x-1} - 1$ die allgemeine Lösung.

In der mehr ingenieurwissenschaftlich geprägten Literatur löst man das Problem gerne wie folgt: Aus der Gleichung $(x-1)\,dy + (y+1)\,dx = 0$ wird $\dfrac{dy}{-(y+1)} = \dfrac{dx}{x-1}$, also

$$-\ln(y+1) = \int \frac{dy}{-(y+1)} = \int \frac{dx}{x-1} + c = \ln(x-1) + c$$

und damit $\ln\big((x-1)(y+1)\big) + c = 0$. Das führt zur Gleichung $(x-1)(y+1) = C$. Die Auflösung nach y ergibt die Lösung.

B. Sei $\omega = x\,dx + y\,dy$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Ist $\boldsymbol{\alpha}(t) := (r\cos t, r\sin t)$ für $t \in [0, 2\pi]$, so ist $\boldsymbol{\alpha}^*\omega = -r^2\cos t\sin t + r^2\cos t\sin t = 0$, also $\boldsymbol{\alpha}$ eine Lösung der Gleichung $\omega = 0$. Alle diese Lösungen sind geschlossene Kurven und können daher nicht Integralkurven einer Differentialgleichung sein.

Auf $G := \{(x,y) \,:\, y > 0\}$ erhält man die DGL $y' = -x/y$, also wieder eine DGL mit getrennten Variablen. Die wird gelöst durch $\varphi_\pm(t) := \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ (mit $\varphi(r) = 0$). Offensichtlich parametrisieren die Lösungen $\varphi_\pm$ jeweils ein maximales Stück einer Lösungskurve von $\omega = 0$, das man noch als Graph auffassen kann.

Ist die Pfaffsche Form $\omega = a\,dx + b\,dy$ regulär in (x_0, y_0), so kann man die Gleichung $\omega = 0$ in einer Umgebung von (x_0, y_0) umformen zu $dy + (a/b)\,dx = 0$, und dieser Gleichung kann man wieder eine Differentialgleichung zuordnen. In der Nähe von Singularitäten muss man gesonderte Betrachtungen anstellen, aber das wollen wir hier nicht weiter verfolgen.

Definition

ω heißt ***exakt***, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion f mit $df = \omega$ gibt. Die Funktion f nennt man eine ***Stammfunktion*** von ω.

f ist genau dann Stammfunktion von $\omega = a\,dx + b\,dy$, wenn $a = f_x$ und $b = f_y$ ist. Dann muss gelten:

$$a_y = f_{xy} = f_{yx} = b_x \quad \text{(Integrabilitätsbedingung)}.$$

Ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt, so versucht man f folgendermaßen zu bestimmen:

- Suche Stammfunktion $f(x,y) = \displaystyle\int a(x,y)\,dx + c(y)$.
- Dann muss $b(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y} \displaystyle\int a(x,y)\,dy + c'(y)$ gelten.
- Bestimme $c(y)$ durch Integration.

Ist die Stammfunktion f ermittelt und ein Anfangswert (x_0, y_0) vorgegeben, so versucht man, eine Lösung $\boldsymbol{\alpha}$ der Gleichung $\omega = 0$ durch Auflösung der Gleichung $f(x,y) = f(x_0,y_0)$ zu bestimmen. Ist nämlich $\boldsymbol{\alpha}(t_0) = (x_0, y_0)$ und $f(\boldsymbol{\alpha}(t)) = f(\boldsymbol{\alpha}(t_0))$ für alle t aus einem Intervall I, so ist $\boldsymbol{\alpha}^*\omega = \boldsymbol{\alpha}^*(df) = d(f \circ \boldsymbol{\alpha}) = d(\text{Konstante}) = 0$.

5.9. Beispiel

Gesucht wird eine Lösung $y(t)$ der impliziten DGL $2xy + (2y + x^2)y' = 0$ mit $y(0) = 1$. Dem entspricht die Gleichung $\omega = 0$, mit $\omega := 2xy\,dx + (2y + x^2)\,dy$, also $a = 2xy$ und $b = 2y + x^2$. Es ist $a_y = 2x$ und auch $b_x = 2x$, d.h. die Integrabilitätsbedingung ist erfüllt.

Nun sei $f(x,y) := \int a(x,y)\,dx + c(y) = x^2y + c(y)$. Differentiation nach y ergibt $f_y(x,y) = x^2 + c'(y)$. Dies soll mit $b(x,y) = 2y + x^2$ übereinstimmen, es muss also $c'(y) = 2y$ sein. Deshalb setzen wir $c(y) := y^2$.

$f(x,y) = x^2y + y^2$ ist tatsächlich die gewünschte Stammfunktion, denn es ist $df = 2xy\,dx + (x^2 + 2y)\,dy = \omega$.

Die Lösung der Differentialgleichung ist nun implizit gegeben durch $x^2y + y^2 = f(0,1) = 1$. Die Auflösung nach y ergibt

$$y(x) = \frac{-x^2 \pm \sqrt{x^4+4}}{2}\,.$$

Das Minuszeichen kann wegen der Anfangsbedingung ausgeschlossen werden.

Bemerkung: Die zu einer exakten Pfaffschen Form gehörige Differentialgleichung nennt man auch eine exakte Differentialgleichung.

Zum Beispiel kann man eine DGL mit getrennten Variablen, $y' = f(x)g(y)$, der exakten Pfaffschen Form

$$\omega := f(x)\,dx - \frac{1}{g(y)}\,dy$$

zuordnen. Eine Stammfunktion von ω ist die Funktion

$$F(x,y) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)}.$$

Das entspricht dem schon bekannten Lösungsverfahren. Allerdings bestimmt man so nur eine Gleichung, die die gesuchte Lösung als implizite Funktion enthält.

Die Pfaffsche Form $f(x)g(y)\,dx - dy$ ist nicht exakt, aber sie unterscheidet sich von ω nur um einen Faktor.

Definition

Sei ω eine stetige Pfaffsche Form auf $G \subset \mathbb{R}^2$. Ist $h : G \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ohne Nullstellen und $h\omega$ exakt, so heißt h ***Euler'scher Multiplikator*** für ω.

5.10. Beispiel

Wir betrachten die implizite DGL $(3x+y) - xy' = 0$. Ihr ist die Pfaffsche Form $\omega := (3x+y)\,dx - x\,dy$ auf $G := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ zugeordnet. Es ist $(3x+y)_y = 1$ und $(-x)_x = -1$, die Integrabilitätsbedingung ist also **nicht** erfüllt. Wir versuchen, einen Euler'schen Multiplikator h zu finden. Es muss gelten:

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(h(x,y)\cdot(3x+y)\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(h(x,y)\cdot(-x)\big),$$

also

$$h_y(x,y)\cdot(3x+y) + 2\cdot h(x,y) + x\cdot h_x(x,y) = 0.$$

Die Suche nach h wird leichter, wenn man z.B. annimmt, dass h nur von x abhängt. Dann muss nur die DGL $xh'(x) + 2h(x) = 0$ erfüllt werden. Dies ist eine DGL mit getrennten Variablen, und man sieht schnell, dass $h(x) = x^{-2}$ eine Lösung ist. Allerdings muss $x \neq 0$ sein. Tatsächlich gilt auf $G^* := \{(x,y) \,:\, x \neq 0\}$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(x^{-2}\cdot(3x+y)\big) = \frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{3}{x} + \frac{y}{x^2}\big) = \frac{1}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\big(-\frac{1}{x}\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(x^{-2}\cdot(-x)\big).$$

Für die Stammfunktion f von $h\omega$ setzen wir an: $f(x,y) = \displaystyle\int \Big(-\frac{1}{x}\Big)\,dy + c(x) = -\frac{y}{x} + c(x)$. Differentiation nach x ergibt:

$$\frac{3}{x} + \frac{y}{x^2} = f_x(x,y) = \frac{y}{x^2} + c'(x).$$

Daher kann man $c(x) = 3\ln|x|$ und $f(x,y) = -\dfrac{y}{x} + 3\ln|x|$ setzen. Die Lösungskurven von $\omega = 0$ sind auch die von $df = 0$, also gegeben durch $-y/x + 3\ln|x| = c$. Die Auflösung nach y ergibt die Funktion

$$y(x) = 3x\ln|x| - cx, \text{ für } x \neq 0.$$

Bisher ist es in jedem Fall, in dem die Integrabilitätsbedingung erfüllt war, gelungen, eine Stammfunktion zu finden. Das ist kein Zufall, und das wollen wir noch in einem etwas allgemeineren Kontext untersuchen.

Wir betrachten Pfaffsche Formen $\omega = a_1\,dx_1 + \cdots + a_n\,dx_n$ im $\mathbb{R}^n$. Ist $\omega = df$, so ist $a_i = f_{x_i}$ für $i = 1,\ldots,n$, und es muss $(a_i)_{x_j} = f_{x_ix_j} = f_{x_jx_i} = (a_j)_{x_i}$ sein.

5.11. Satz

Das Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ sei sternförmig bezüglich eines Punktes $\mathbf{x}_0 \in G$. Erfüllt eine Pfaffsche Form $\omega = a_1\,dx_1 + \cdots + a_n\,dx_n$ auf G die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(a_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}(a_j) \text{ für alle } i,j,$$

so ist ω exakt, also ein totales Differential der Gestalt df.

Beweis: Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ist. Dann setzen wir

$$f(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^{n} \Big(\int_0^1 a_i(t\mathbf{x})\,dt\Big)\,x_i.$$

Für die nachfolgende Rechnung beachten wir:

$$\frac{d}{dt}\big(ta_j(t\mathbf{x})\big) = a_j(t\mathbf{x}) + t\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_j}{\partial x_i}(t\mathbf{x})x_i = a_j(t\mathbf{x}) + t\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(t\mathbf{x})x_i.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{n}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\int_0^1 a_i(t\mathbf{x})\,dt\Big)\,x_i + \delta_{ij}\int_0^1 a_i(t\mathbf{x})\,dt\Big]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\Big(\int_0^1 t\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(t\mathbf{x})\,dt\Big)\,x_i + \int_0^1 a_j(t\mathbf{x})\,dt\\ &= \int_0^1\Big(t\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(t\mathbf{x})x_i + a_j(t\mathbf{x})\Big)\,dt\\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\big(ta_j(t\mathbf{x})\big)\,dt \;=\; ta_j(t\mathbf{x})\,\Big|_0^1 = a_j(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Damit ist $df = \omega$. ■

Im Falle $n = 3$ gibt es genau **drei** Integrabilitätsbedingungen. Das motiviert die folgende

Definition

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf G. Dann versteht man unter der ***Rotation*** von $\mathbf{F}$ das Vektorfeld $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \big(\mathrm{rot}_1(\mathbf{F}), \mathrm{rot}_2(\mathbf{F}), \mathrm{rot}_3(\mathbf{F})\big)$ mit

$$\mathrm{rot}_i(\mathbf{F}) := \frac{\partial}{\partial x_j}F_k - \frac{\partial}{\partial x_k}F_j,$$

wenn (i, j, k) eine zyklische Vertauschung von $(1, 2, 3)$ ist.

5.12. Folgerung

Ist $G \subset \mathbb{R}^3$ ein sternförmiges Gebiet, $\mathbf{F}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf G und $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$, so ist $\omega_{\mathbf{F}}$ ein totales Differential.

5.13. Beispiel

Sei $\mathbf{F}(x, y, z) := (x, y, z)$. Dann ist offensichtlich $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Die Stammfunktion f gewinnt man folgendermaßen:

$$\begin{aligned}&f(x,y,z) \;:=\\ &\quad= x\int_0^1 F_1(tx,ty,tz)\,dt + y\int_0^1 F_2(tx,ty,tz)\,dt + z\int_0^1 F_3(tx,ty,tz)\,dt\\ &\quad= x\cdot\int_0^1 tx\,dt + y\cdot\int_0^1 ty\,dt + z\cdot\int_0^1 tz\,dt\\ &\quad= (x^2+y^2+z^2)\cdot\frac{t^2}{2}\,\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2).\end{aligned}$$

Tatsächlich ist $df = x\,dx + y\,dy + z\,dz = \omega_{\mathbf{F}}$.