1.3 Isolierte Singularitäten

Definition

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann nennt man z_0 eine ***isolierte Singularität*** von f.

Zunächst einmal ist z_0 nur eine Definitionslücke für f. Wie „singulär“ f tatsächlich in z_0 ist, das müssen wir erst von Fall zu Fall herausfinden. Entscheidend ist, dass z_0 eine *isolierte* Definitionslücke ist, dass es also keine Folge von singulären Punkten von f gibt, die sich gegen z_0 häuft. Der komplexe Logarithmus ist im Nullpunkt nicht definiert, aber er hat dort auch keine isolierte Singularität, denn man muss immer einen von Null nach ∞ führenden Weg aus $\mathbb{C}$ herausnehmen, um log auf dem Rest definieren zu können.

Wir wollen nun die isolierten Singularitäten klassifizieren.

Definition

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und f holomorph auf U, bis auf eine isolierte Singularität in einem Punkt $z_0 \in U$.

1. z_0 heißt eine ***hebbare Singularität*** von f, wenn es eine holomorphe Funktion $\widehat{f}$ auf U gibt, so dass $f(z) = \widehat{f}(z)$ für $z \in U \setminus \{z_0\}$ ist.

2. z_0 heißt eine ***Polstelle*** von f, wenn es ein $k \geq 1$, eine Umgebung $W = W(z_0) \subset U$ und eine auf W holomorphe Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$ gibt, so dass gilt:
$$f(z) \cdot (z - z_0)^k = g(z) \quad \text{für } z \in W \setminus \{z_0\}.$$
Die eindeutig bestimmte Zahl k mit dieser Eigenschaft heißt dann die Polstellenordnung von f in z_0.

3. z_0 heißt eine ***wesentliche Singularität*** von f, wenn z_0 weder hebbar noch eine Polstelle ist.

Offensichtlich schließen sich die Hebbarkeit und die Polstelle gegenseitig aus, so dass die isolierten Singularitäten durch die obige Definition tatsächlich klassifiziert werden. Die Polstellenordnung ist dadurch eindeutig bestimmt, dass k die kleinste natürliche Zahl ist, für die $f(z) \cdot (z - z_0)^k$ holomorph und $\neq 0$ in z_0 ist, während $f(z) \cdot (z - z_0)^{k+1}$ holomorph mit einer Nullstelle in z_0 ist.

Man kann die drei Typen isolierter Singularitäten auch auf Grund des Werteverhaltens von f in der Nähe von z_0 unterscheiden:

3.1. Satz

Sei z_0 eine isolierte Singularität von f.

1. *z_0 ist genau dann eine hebbare Singularität, wenn f in der Nähe von z_0 beschränkt bleibt.*
2. *Eine Polstelle liegt genau dann in z_0 vor, wenn $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$ ist.*

BEWEIS: 1) folgt sofort aus dem Riemannschen Hebbarkeitssatz.

2) Ist $f(z) \cdot (z - z_0)^k = g(z)$, mit einer holomorphen Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$, so gibt es eine Umgebung $V = V(z_0)$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $|g(z)| > \varepsilon$ für $z \in V$. Ist $z \neq z_0$, so gilt:

$$|f(z)| = \frac{1}{|z - z_0|^k} \cdot |g(z)| > \frac{\varepsilon}{|z - z_0|^k} \to +\infty \quad (\text{für } z \to z_0).$$

Setzen wir umgekehrt voraus, dass $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$ ist, so lässt sich $1/f$ zu einer holomorphen Funktion h mit $h(z_0) = 0$ fortsetzen. Das bedeutet, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion $\widetilde{h}$ in der Nähe von z_0 gibt, so dass gilt:

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^k \cdot \widetilde{h}(z) \text{ und } \widetilde{h}(z) \neq 0 \text{ nahe } z_0.$$

Also ist $f(z) = \dfrac{1}{(z - z_0)^k} \cdot g(z)$, wobei $g(z) := 1/\widetilde{h}(z)$ holomorph und $\neq 0$ nahe z_0 ist. ∎

3.2. Satz von Casorati-Weierstraß

f hat in z_0 genau dann eine wesentliche (isolierte) Singularität, wenn $f(z)$ in jeder Umgebung von z_0 jedem beliebigen Wert beliebig nahe kommt.

Das Kriterium bedeutet: Ist $w_0 \in \mathbb{C}$ ein beliebig vorgegebener Wert, so gibt es eine Folge von Punkten (z_n) mit $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$ und $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = w_0$.

BEWEIS: 1) Ist das Kriterium erfüllt, so ist $|f|$ nicht beschränkt und strebt auch nicht gegen $+\infty$. Also muss die Singularität wesentlich sein.

2) Sei umgekehrt z_0 eine wesentliche Singularität von f. Wir wollen zeigen, dass f in jeder Umgebung von z_0 jedem Wert $w_0 \in \mathbb{C}$ beliebig nahe kommt. Nehmen wir also an, es gibt eine offene Umgebung $V = V(z_0)$, ein $w_0 \in \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass gilt:

$$f(V \setminus \{z_0\}) \cap D_\varepsilon(w_0) = \varnothing.$$

Dann ist $g(z) := 1/\big(f(z) - w_0\big)$ holomorph auf $V \setminus \{z_0\}$ und beschränkt bei Annäherung an z_0. Es gibt daher eine holomorphe Funktion $\widehat{g}$ auf V mit $\widehat{g}|_{V \setminus \{z_0\}} = g$

Ist $\widehat{g}(z_0) = 0$, so hat $f(z) = w_0 + 1/g(z)$ in z_0 eine Polstelle. Ist dagegen $\widehat{g}(z_0) \neq 0$, so ist f nahe z_0 beschränkt, die Singularität also hebbar. Beides kann nicht sein! ■

3.3. Beispiele

A. Sei $f(z) := z/\sin z$ für $|z| < \pi$ und $z \neq 0$. Es ist $\sin(0) = 0$ und $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, also $\sin(z) = z \cdot h(z)$, mit einer nahe $z_0 = 0$ holomorphen Funktion h mit $h(0) = 1$. Aus Stetigkeitsgründen gibt es dann ein kleines $\varepsilon > 0$, so dass $\big|\sin(z)/z\big| = |h(z)| > 1 - \varepsilon$ für z nahe bei 0 und $z \neq 0$ ist.

Also ist $|f(z)| = \big|z/\sin(z)\big| < 1/(1-\varepsilon)$ in der Nähe von 0 beschränkt. (Die Abschätzung gilt natürlich nur für $z \neq 0$). Damit liegt eine hebbare Singularität vor. Der Wert, der in 0 ergänzt werden muss, ist gegeben durch $f(0) := 1/h(0) = 1$.

B. $f(z) := 1/z$ hat offensichtlich in $z = 0$ eine Polstelle.

C. Sei $f(z) := \exp(1/z)$. In $z_0 = 0$ liegt eine isolierte Singularität vor. Aber was für eine?

Setzen wir $z_n := 1/n$ ein, dann strebt $f(z_n) = e^n$ gegen ∞. Also kann die Singularität nicht hebbar sein.

Setzen wir dagegen $z_n := -\mathsf{i}/(2\pi n)$ ein, so erhalten wir $f(z_n) = e^{2\pi n \cdot \mathsf{i}} = 1$. Also strebt $f(z_n)$ in diesem Fall nicht gegen ∞. Damit kann auch keine Polstelle vorliegen, die Singularität ist wesentlich!

Die Methode, den Typ einer Singularität über das Werteverhalten der Funktion herauszubekommen, ist nicht immer so einfach anwendbar. Wir werden deshalb nach einer besseren Methode suchen.

Zur Motivation betrachten wir eine Funktion f mit einer Polstelle in z_0, so dass $f(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^k} \cdot h(z)$ ist, mit einer nahe z_0 holomorphen Funktion h. Dann können wir h in z_0 in eine Taylorreihe entwickeln,

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ für } |z - z_0| < r,$$

und dann gilt für $z \neq z_0$ und $|z - z_0| < r$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-k} = \frac{a_0}{(z-z_0)^k} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \cdots$$

Als Beispiel einer wesentlichen Singularität betrachten wir etwa $f(z) := \exp(1/z)$. Hier erhalten wir für $z \neq 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2} + \frac{1}{6} z^{-3} + \cdots$$

Die Reihe erstreckt sich über unendlich viele negative Potenzen von z. Wir werden sehen, dass es immer möglich ist, eine holomorphe Funktion um eine isolierte Singularität z_0 herum in eine Reihe zu entwickeln, die sowohl positive als auch negative Potenzen von $z - z_0$ enthalten kann.

Definition

Eine ***Laurent-Reihe*** ist eine Reihe der Form

$$L(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Die Zahlen a_n heißen die *Koeffizienten* der Reihe, z_0 der Entwicklungspunkt.

$$\begin{aligned} H(z) &:= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \\ &= \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots \end{aligned}$$

heißt ***Hauptteil der Reihe***,

$$\begin{aligned} N(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

heißt ***Nebenteil*** der Reihe.

Die Laurentreihe $L(z) = H(z) + N(z)$ heißt *konvergent (absolut konvergent, lokal gleichmäßig konvergent usw.)*, wenn Hauptteil und Nebenteil es jeweils für sich sind.

Ist $0 \leq r < R$, so nennt man

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$

den ***Kreisring*** um z_0 mit innerem Radius r und äußerem Radius R. Dabei ist die Möglichkeit $R = +\infty$ zugelassen.

3.4. Satz

Sei $L(z) = H(z) + N(z)$ eine Laurentreihe mit Entwicklungspunkt z_0, $R > 0$ der Konvergenzradius des Nebenteils $N(z)$ und $r^* > 0$ der „Konvergenzradius" des Hauptteils, d.h. der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\widetilde{H}(w) := H(z_0 + \frac{1}{w}) = a_{-1}w + a_{-2}w^2 + \cdots .$$

Sei $r := 1/r^*$. Der Hauptteil $H(z)$ konvergiert für $|z - z_0| > r$ und strebt für $|z| \to \infty$ gegen Null.

1. *Ist $r \geq R$, so ist $K_{r,R}(z_0) = \varnothing$, und $L(z)$ konvergiert auf keiner offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$.*

2. *Ist $r < R$, so konvergiert $L(z)$ in dem Kreisring $K_{r,R}(z_0)$ absolut und lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion.*

BEWEIS: Ist $H(z)$ konvergent und $w := 1/(z-z_0)$, so konvergiert auch die Potenzreihe $\widetilde{H}(w) = a_{-1}w + a_{-2}w^2 + \cdots$, und umgekehrt. Nach Voraussetzung konvergiert $\widetilde{H}(w)$ für $|w| < r^*$. Dann konvergiert $H(z) = \widetilde{H}(\dfrac{1}{z - z_0})$ für $|z - z_0| > \dfrac{1}{r^*} = r$. Weil $\widetilde{H}(0) = 0$ ist, strebt $H(z)$ für $|z| \to \infty$ gegen Null.

Ist $r \geq R$, so kann die Reihe nirgends konvergieren. Ist $r < R$, so konvergieren Haupt- und Nebenteil beide für $r < |z - z_0| < R$. ■

Laurentreihen konvergieren also auf Ringgebieten. Lässt man den inneren Radius gegen 0 und den äußeren gegen ∞ gehen, so erhält man $\mathbb{C}^*$ als Beispiel eines ausgearteten Ringgebietes.

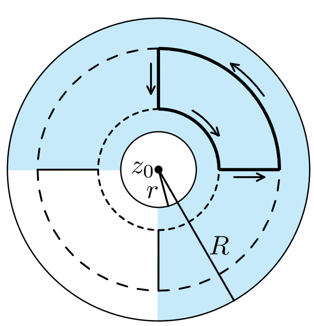
Wir wollen nun sehen, dass sich umgekehrt jede auf einem Ringgebiet definierte holomorphe Funktion dort in eine konvergente Laurentreihe entwickeln lässt. Auf dem Weg dahin brauchen wir ein paar Hilfssätze.

3.5. Hilfssatz 1

Sei $0 < r < R$ und f holomorph auf dem ***Kreisring***

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \,:\, r < |z - z_0| < R\}.$$

Für $r < \varrho_1 < \varrho_2 < R$ ist dann stets $\displaystyle\int_{\partial D_{\varrho_1}(z_0)} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\partial D_{\varrho_2}(z_0)} f(\zeta)\, d\zeta.$



Beweis: Man teile den Kreisring in mehrere Sektoren und wende jeweils den Cauchy'schen Integralsatz für einfach-zusammenhängende Gebiete an:

Das Integral über die Sektoren des kleineren Ringes $K_{\varrho_1,\varrho_2}(z_0)$ verschwindet immer. Addiert man diese Integrale, so fallen die über die „Verbindungsstege" weg und es bleiben nur die Integrale über $\partial D_{\varrho_1}(z_0)$ und über $\partial D_{\varrho_1}(z_0)$ übrig, mit umgekehrten Vorzeichen. ■

3.6. Hilfssatz 2

Sei f holomorph auf dem Kreisring $K_{r,R}(z_0)$ und $r < \varrho_1 < |z - z_0| < \varrho_2 < R$. Dann ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{\partial D_{\varrho_2}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{\partial D_{\varrho_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Der Beweis benutzt die gleiche Skizze wie bei Hilfssatz 1, aber diesmal die Cauchy'sche Integralformel. Eines der 4 Teilintegrale ergibt $f(z)$, die anderen jeweils Null. ■

3.7. Satz von der Laurent-Entwicklung

Sei f holomorph auf dem Ringgebiet $K = K_{r,R}(z_0)$. Dann lässt sich f auf K in eindeutiger Weise in eine Laurentreihe entwickeln:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Die Reihe konvergiert im Innern von K absolut und gleichmäßig gegen f.

Für jedes ϱ mit $r < \varrho < R$ und jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int\limits_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta.$$

Beweis: a) Sei $r < \varrho < R$. Nach dem Entwicklungslemma ist

$$F_\varrho(z) := \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \partial D_\varrho(z_0)$. (Um F_ϱ definieren zu können, braucht man nur die Werte von f auf $\partial D_\varrho(z_0)$).

b) Sei $f_+ : D_R(z_0) \to \mathbb{C}$ definiert durch $f_+(z) := F_\varrho(z)$, wobei ϱ (in Abhängigkeit von z) so gewählt werden soll, dass $\max\big(r, |z - z_0|\big) < \varrho < R$ ist.

Ist $z \in D_R(z_0)$ und auch noch $U = U_\varepsilon(z) \subset D_\varrho(z_0)$, so ist $f_+|_U = F_\varrho|_U$. Daraus folgt, dass f_+ holomorph ist. Außerdem hängt die Definition von $f_+(z)$ gar nicht vom gewählten ϱ ab.

Um das zu sehen, sei z festgehalten und $\max\bigl(r, |z - z_0|\bigr) < \varrho_1 < \varrho_2 < R$. Wählt man noch ein ϱ mit $\max\bigl(r, |z - z_0|\bigr) < \varrho < \varrho_1$, so ist $g_z(\zeta) := \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ auf $K_{\varrho,R}(z_0)$ definiert und holomorph. Weil $\varrho < \varrho_1 < \varrho_2 < R$ ist, folgt aus Hilfssatz 1:

$$F_{\varrho_1}(z) = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{\partial D_{\varrho_1}(z_0)} g_z(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{\partial D_{\varrho_2}(z_0)} g_z(\zeta)\, d\zeta = F_{\varrho_2}(z).$$

c) Sei $f_- : \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f_-(z) := -F_\varrho(z)$, wobei ϱ (in Abhängigkeit von z) so gewählt werden soll, dass $r < \varrho < \min\bigl(R, |z - z_0|\bigr)$ ist.

Wie in (b) folgt, dass f_- holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)}$ und die Definition unabhängig von der Wahl von ϱ ist.

d) Ist $z \in K_{r,R}(z_0)$, so kann man ϱ_1, ϱ_2 so wählen, dass $r < \varrho_1 < |z - z_0| < \varrho_2 < R$ ist. Dann ist $\max(r, |z - z_0|) = \min(R, |z - z_0|) = |z - z_0|$ und daher

$$f_+(z) = F_{\varrho_2}(z) \quad \text{und} \quad f_-(z) = -F_{\varrho_1}(z).$$

Mit Hilfssatz 2 folgt: $f_+(z) + f_-(z) = F_{\varrho_2}(z) - F_{\varrho_1}(z) = f(z)$.

Man spricht bei der Zerlegung $f_+ + f_- = f$ auch von der „Laurent-Trennung".

e) Nun muss gezeigt werden, dass f_+ und f_- auf die gewünschte Weise in eine Reihe entwickelt werden können.

f_+ kann in $D_R(z_0)$ in eine Potenzreihe um z_0 entwickelt werden:

$$f_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Für $|z - z_0| < \varrho < R$ ist

$$f_+(z) = F_\varrho(z) = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

und nach dem Entwicklungslemma ist dann $a_n = \dfrac{1}{2\pi \mathsf{i}} \displaystyle\int_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$.

Bei f_- erhält man die Reihenentwicklung wie beim Beweis des Entwicklungslemmas mit Hilfe der geometrischen Reihe: Für $r < \varrho < |z - z_0|$ ist

$$f_-(z) = -F_\varrho(z) = -\frac{1}{2\pi \mathsf{i}} \int_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Ist $\zeta \in \partial D_\varrho(z_0)$, so ist $\left| \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1$ und

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - (\zeta - z_0)/(z - z_0)} \\ &= -\frac{1}{z - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\Big)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} (\zeta - z_0)^{n-1} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^n}\,.\end{aligned}$$

Also ist

$$f_-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_{\partial D_\varrho(z_0)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1}\, d\zeta\Big) \frac{1}{(z - z_0)^n} = \sum_{m=-\infty}^{-1} a_m (z - z_0)^m$$

mit $a_m = \dfrac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \displaystyle\int_{\partial D_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}}\, d\zeta$.

Wegen der negativen Potenzen von $z - z_0$ strebt $f_-(z)$ wie jeder Hauptteil einer Laurentreihe für $|z| \to \infty$ gegen Null.

f) Zur Eindeutigkeit: Sind zwei Laurententwicklungen $f = H_1 + N_1 = H_2 + N_2$ auf $K_{r,R}(z_0)$ gegeben, so ist dort $H_1 - H_2 = N_2 - N_1$. Also wird durch

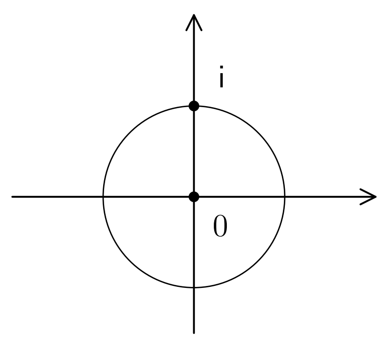
$$h(z) := \begin{cases} H_1(z) - H_2(z) & \text{auf } \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)}, \\ N_2(z) - N_1(z) & \text{auf } D_R(z_0) \end{cases}$$

eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ gegeben. Weil die Hauptteile im Unendlichen verschwinden, gilt das auch für $|h(z)| \le |H_1(z)| + |H_2(z)|$. Also ist h beschränkt und nach Liouville konstant. Es kommt nur $h(z) \equiv 0$ in Frage. Damit ist $H_1 = H_2$ und $N_1 = N_2$. ∎

3.8. Beispiel

Sei $f(z) := \dfrac{1}{z(z - \mathsf{i})^2}$.

Diese Funktion ist holomorph für $z \notin \{0, \mathsf{i}\}$.



Es gibt hier verschiedene Gebiete, in denen f in eine Laurentreihe entwickelt werden kann.

Im Kreisring $K_{0,1}(0)$:

Wir müssen f nach Potenzen von z entwickeln. Der erste Faktor hat schon die gewünschte Gestalt, und für den zweiten gibt es ein Kochrezept:

Will man – allgemein – eine Funktion der Gestalt $\dfrac{1}{z-z_0}$ in eine Laurentreihe um $a \neq z_0$ entwickeln, so benutzt man den Trick mit der geometrischen Reihe. Für alle z mit $|z-a| < |z_0-a|$ ist

$$|\frac{z-a}{z_0-a}| < 1,$$

also

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-z_0} &= \frac{1}{z-a-(z_0-a)} = -\frac{1}{z_0-a}\cdot\frac{1}{1-(z-a)/(z_0-a)}\\ &= -\frac{1}{z_0-a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)^n.\end{aligned}$$

Ist $|z-a| > |z_0-a|$, so geht man analog vor:

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-(z_0-a)/(z-a)} = \frac{1}{z-a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_0-a}{z-a}\right)^n.$$

Ist $m \geq 2$, so ist

$$\frac{1}{(z-z_0)^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\cdot\left(\frac{1}{z-z_0}\right)^{(m-1)}.$$

Durch gliedweise Differentiation der Reihe für $\dfrac{1}{z-z_0}$ erhält man die Reihe für die m-ten Potenzen.

Im vorliegenden Fall ist $a = 0$, $z_0 = \mathsf{i}$ und $|z| < 1$, also $|z-a| < |z_0-a|$. Wir wollen nach Potenzen von $z = z - a$ entwickeln. Nun ist

$$\frac{1}{z-\mathsf{i}} = \mathsf{i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\mathsf{i}}\right)^n$$

und

$$\frac{1}{(z-\mathsf{i})^2} = -\left(\frac{1}{z-\mathsf{i}}\right)' = -\mathsf{i}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{z}{\mathsf{i}}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{\mathsf{i}} = -\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot\left(\frac{z}{\mathsf{i}}\right)^n,$$

also

$$f(z) = -\frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{\mathsf{i}^n}z^{n-1} = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)}{\mathsf{i}^{n+1}}z^n.$$

Im Kreisring $K_{1,\infty}(0)$:

Hier ist wieder $a = 0$, $z_0 = \mathsf{i}$, aber $|z-a| = |z| > 1 = |z_0-a|$, also

$$\frac{1}{z-\mathrm{i}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{i}}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{i}^{\,n-1} \frac{1}{z^n}$$

und

$$\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} = -\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{i}^{\,n-1}(-n)\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{i}^{\,n-1} \cdot n \cdot \frac{1}{z^{n+1}}.$$

Also ist

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{i}^{\,n-1} \cdot n \cdot \frac{1}{z^{n+2}} = \sum_{n=3}^{\infty} \mathrm{i}^{\,n-3}(n-2)\frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-3} \mathrm{i}^{\,-n-1}(n+2)z^n,$$

wegen $\mathrm{i}^{\,-n-3}(-n-2) = \mathrm{i}^{\,-n-1}(n+2)$.

Im Kreisring $K_{0,1}(\mathrm{i})$:

Hier ist $a = \mathrm{i}$, $z_0 = 0$ und $|z-a| < |z_0 - a|$, und es soll nach Potenzen von $(z-\mathrm{i})$ entwickelt werden. Es ist

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{-\mathrm{i}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i}^{\,n-1}(z-\mathrm{i})^n,$$

also

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i}^{\,n-1}(z-\mathrm{i})^{n-2} \\ &= \frac{-\mathrm{i}}{(z-\mathrm{i})^2} + \frac{1}{z-\mathrm{i}} + \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{i}^{\,m+1}(z-\mathrm{i})^m. \end{aligned}$$

Wir könnten noch den Kreisring $K_{1,\infty}(\mathrm{i})$ betrachten, aber darauf verzichten wir.

3.9. Satz

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von z_0 und z_0 eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Auf einem Kreisring $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ besitze f die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} z_0 \text{ hebbar} &\iff a_n = 0 \text{ für } \textbf{alle } n < 0, \\ z_0 \text{ Polstelle} &\iff \exists n < 0 \text{ mit } a_n \neq 0 \text{ und } a_k = 0 \text{ für } k < n, \\ z_0 \text{ wesentlich} &\iff a_n \neq 0 \text{ für unendlich viele } n < 0. \end{aligned}$$

Beweis: 1) z_0 ist genau dann hebbar, wenn eine holomorphe Funktion $\widehat{f}$: $D_\varepsilon(z_0) \to \mathbb{C}$ existiert, mit $\widehat{f}\Big|_{K_{0,\varepsilon}(z_0)} = f$. Aber $\widehat{f}$ besitzt eine Taylorentwicklung:

$$\widehat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

2) z_0 ist genau dann eine Polstelle, wenn es in der Nähe von z_0 eine Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot h(z)$$

gibt, wobei gilt:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \qquad \text{mit } b_0 \neq 0.$$

Aber dann ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-k} = \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k} (z - z_0)^n.$$

3) z_0 ist wesentlich, wenn es weder hebbar noch Polstelle ist. Das lässt nur die Möglichkeit, dass $a_n \neq 0$ für unendlich viele n mit $n < 0$ ist. ∎

3.10. Beispiele

A. Die Funktion

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \cdot \left(z - \frac{z^3}{3!} \pm \ldots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} \pm \ldots$$

besitzt keinen Hauptteil, hat also in $z = 0$ eine hebbare Singularität. Natürlich ist

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

B. Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(z - \mathrm{i})^2}$$

hat eine Polstelle 1. Ordnung in 0 und eine Polstelle 2. Ordnung in i. Die nötigen Laurentreihen haben wir schon ausgerechnet.

C. Die Funktion

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \cdots$$

hat in $z = 0$ eine wesentliche Singularität.

D. Die Funktion
$$f(z) := \frac{1}{\sin z}$$
ist holomorph für $z \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Sei $g(z) := \dfrac{\sin z}{z}$. Dann ist g holomorph und $\neq 0$ auf $D_\pi(0)$, mit $g(0) = 1$. Aber dann ist auch $\dfrac{1}{g}$ holomorph auf $D_\pi(0)$, und man kann schreiben:

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \text{mit } a_0 = 1.$$

Also ist
$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n.$$
Das bedeutet, dass f in $z = 0$ eine Polstelle 1. Ordnung besitzt.

Wir kehren noch einmal zu folgender Beziehung zurück:

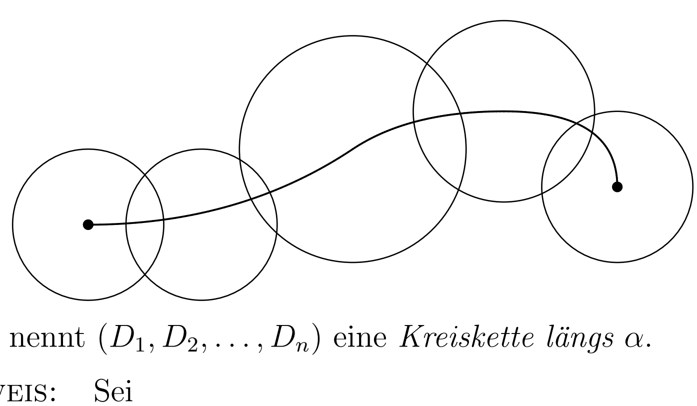
Ist $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ ein weiterer Punkt, $|z - z_0| \neq r$, so ist

$$\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i} & \text{für } |z - z_0| < r, \\ 0 & \text{für } |z - z_0| > r. \end{cases}$$

Was passiert, wenn man den Kreisrand durch einen beliebigen Weg ersetzt?

3.11. Hilfssatz

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\alpha : [a, b] \to G$ ein stetiger Weg, so gibt es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ und Kreisscheiben $D_1, \ldots, D_n \subset G$, so dass $\alpha([t_{i-1}, t_i])$ in D_i enthalten ist, für $i = 1, \ldots, n$.



Man nennt $(D_1, D_2, \ldots, D_n)$ eine *Kreiskette längs* α.

Beweis: Sei

$$t^* := \sup\{t \in [a, b] \,:\, \exists \text{ Kreiskette längs } \alpha|_{[a,t]}\}.$$

Offensichtlich existiert t^* mit $a < t^* \le b$.

Ist $t^* = b$, so ist alles bewiesen. Wenn nicht, dann setzen wir $z^* := \alpha(t^*)$ und wählen eine Kreisscheibe $D \subset G$ mit Mittelpunkt z^*. Außerdem sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $\alpha([t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon]) \subset D$ ist. Dann gibt es eine Kreiskette $D_1, \ldots, D_n \subset G$ längs $\alpha|_{[a,t^*-\varepsilon]}$, und $(D_1, \ldots, D_n, D)$ ist eine Kreiskette längs $\alpha|_{[a,t^*+\varepsilon]}$. Das ist ein Widerspruch zur Definition von t^*. ∎

Definition

Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $z \notin |\alpha|$. Dann heißt

$$n(\alpha, z) := \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\alpha \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

die ***Umlaufszahl*** von α bezüglich z.

3.12. Satz

*Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein **geschlossener** Integrationsweg und $z \notin |\alpha|$. Dann ist $n(\alpha, z)$ eine ganze Zahl.*

Beweis: Es reicht, den Satz für $z = 0$ zu beweisen. Ist nämlich $a \in \mathbb{C}$ und $T_a(z) := z + a$, so ist

$$\begin{aligned} n(T_a \circ \alpha, T_a(z)) &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{T_a\circ\alpha} \frac{d\zeta}{\zeta - T_a(z)} \\ &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_a^b \frac{(T_a \circ \alpha)'(t)\,dt}{T_a \circ \alpha(t) - T_a(z)} \\ &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_a^b \frac{\alpha'(t)}{(\alpha(t) + a) - (z + a)}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_a^b \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t) - z}\,dt \;=\; n(\alpha, z). \end{aligned}$$

Sei also $z = 0$. Wir wählen nun eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ und eine dazu passende Kreiskette $(D_1, \ldots, D_n)$ längs α in $\mathbb{C}^*$. Für $\nu = 0, \ldots, n$ sei $z_\nu := \alpha(t_\nu)$. Auf jeder der Kreisscheiben D_ν gibt es eine Logarithmusfunktion L_ν. Weil $L_\nu'(z) = 1/z$ auf D_ν ist, gilt (mit $\alpha_\nu := \alpha|_{[t_{\nu-1},t_\nu]}$):

$$\begin{aligned} n(\alpha, z) &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\alpha \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\alpha_\nu} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \sum_{\nu=1}^{n} \Big(L_\nu(z_\nu) - L_\nu(z_{\nu-1}) \Big). \end{aligned}$$

Auf $D_{\nu-1} \cap D_\nu$ ist $L_\nu(z) - L_{\nu-1}(z) = 2\pi\,\mathrm{i}\,k_\nu$ mit geeignetem $k_\nu \in \mathbb{Z}$, für $\nu = 2, \ldots, n$, und auf $D_1 \cap D_n$ ist $L_1(z) - L_n(z) = 2\pi\,\mathrm{i}\,k_1$ mit $k_1 \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} n(\alpha, z) &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \sum_{\nu=1}^{n} \Big(L_\nu(z_\nu) - L_\nu(z_{\nu-1}) \Big) \\ &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \left(L_n(z_0) - L_1(z_0) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \Big(L_\nu(z_\nu) - L_{\nu+1}(z_\nu) \Big) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \Big(2\pi\,\mathrm{i}\,k_1 + \sum_{\nu=1}^{n-1} 2\pi\,\mathrm{i}\,k_{\nu+1} \Big) \;=\; \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \;\in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. ■

Die Umlaufszahl eines geschlossenen Weges α um einen Punkt $z \notin |\alpha|$ zählt, wie oft z von α umlaufen wird.

Wir wollen jetzt Umlaufszahlen berechnen. Dazu sind weitere geometrische Betrachtungen erforderlich.

Definition

Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, $B := \mathbb{C} \setminus K$ und $z_0 \in B$. Dann heißt die Menge

$$C_B(z_0) := \{ z \in B \,:\, \exists \text{ stetiger Weg von } z_0 \text{ nach } z \text{ in } B. \}$$

die ***Zusammenhangskomponente*** von z_0 in B.

3.13. Satz

Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $B = \mathbb{C} \setminus K$.

1. *$C_B(z_0)$ ist das größte Teilgebiet von B, das z_0 enthält. Ist also $Z \subset B$ ein Gebiet mit $z_0 \in Z$, so liegt Z in einer Zusammenhangskomponente.*
2. *Je zwei verschiedene Zusammenhangskomponenten in B sind disjunkt.*
3. *Es gibt genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente.*
4. *B ist endliche Vereinigung von Zusammenhangskomponenten.*

Beweis: 1) Sei $C := C_B(z_0)$. Offensichtlich ist C ein Gebiet. Ist andererseits $G \subset B$ ein Gebiet, das z_0 enthält, so muss G definitionsgemäß in C liegen.

2) Gibt es einen Punkt $z_0 \in C_B(z_1) \cap C_B(z_2)$, so können Punkte $z' \in C_B(z_1)$ und $z'' \in C_B(z_2)$ durch einen über z_0 führenden Weg in B miteinander verbunden werden. Also stimmen die beiden Komponenten überein.

3) K ist kompakt und daher in einer abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D_R(0)}$ enthalten. Die zusammenhängende Menge $U := \mathbb{C} \setminus \overline{D_R(0)}$ liegt in einer (unbeschränkten) Komponente, jede andere Komponente muss in $D_R(0)$ enthalten, also beschränkt sein.

4) Ist $z \in B$, so liegt z in $C_B(z)$. Wegen (2) wird B in paarweise disjunkte Zusammenhangskomponenten zerlegt. Da man in jeder solchen Komponente einen Punkt mit rationalen Koordinaten auswählen kann, gibt es höchstens abzählbar viele Komponenten. Da das Komplement der unbeschränkten Komponente kompakt ist, kann es nur endlich viele beschränkte Komponenten geben. ∎

3.14. Satz

Sei α ein geschlossener Integrationsweg in $\mathbb{C}$. Dann ist die Umlaufszahl $n(\alpha, z)$ auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus |\alpha|$ konstant und $= 0$ auf der unbeschränkten Komponente.

Beweis: Da $n(\alpha, z)$ stetig ist, aber nur ganzzahlige Werte annimmt, muss die Umlaufszahl auf jeder Zusammenhangskomponente konstant sein.

Die Umlaufszahl auf der unbeschränkten Komponente berechnen wir wie folgt: Sei $|\alpha| \subset D_R(0)$. Ist $|z_0| > R$, so ist $f(z) := 1/(z - z_0)$ holomorph auf der sternförmigen Menge $D_R(0)$, besitzt dort also auch eine Stammfunktion. Daher ist

$$n(\alpha, z_0) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\alpha f(z)\, dz = 0$$

und dann sogar $n(\alpha, z) = 0$ auf der gesamten unbeschränkten Komponente. ∎

Es soll nun angedeutet werden, wie man zu einem geschlossenen Integrationsweg α ganz einfach „per Hand“ sämtliche Umlaufszahlen $n(\alpha, z)$ bestimmen kann.

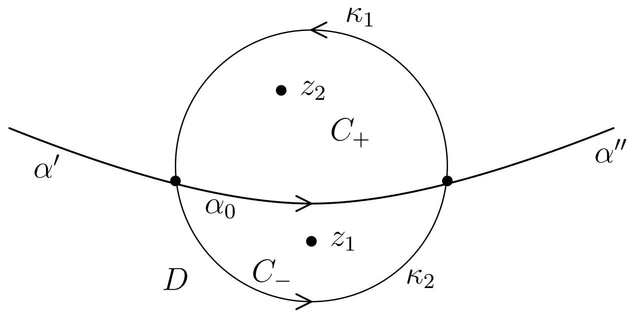
3.15. Satz

Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg, $t_0 \in (a, b)$, $z_0 := \alpha(t_0)$ und α in t_0 sogar differenzierbar, mit $\alpha'(t_0) \neq 0$. Es gebe ein $\varepsilon > 0$, so dass gilt:

1. *α läuft in $D_\varepsilon(z_0)$ von Rand zu Rand.*
2. *$D_\varepsilon(z_0) \setminus |\alpha|$ besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten C_+ und C_-.*
3. *Jeder Punkt aus $D_\varepsilon(z_0) \cap |\alpha|$ ist Randpunkt von C_+ und C_-.*
4. *C_+ liegt links von α und C_- liegt rechts von α.*

Ist dann $z_1 \in C_-$ und $z_2 \in C_+$, so ist $n(\alpha, z_2) = n(\alpha, z_1) + 1$.

Beweis: Wir benutzen die folgende Skizze. Dabei sei $D := D_\varepsilon(z_0)$ und $\alpha = \alpha' + \alpha_0 + \alpha''$, wobei α_0 der Teil ist, der im Innern von D verläuft. Der Teil α' beginnt beim gemeinsamen Anfangs- und Endpunkt von α, und α'' endet dort.



Dann ist $\partial C_+ = \alpha_0 + \kappa_1$ und $\partial C_- = \kappa_2 - \alpha_0$.

Der Weg $\gamma := \alpha' - \kappa_1 + \alpha''$ ist offensichtlich auch geschlossen.

Da $|\gamma| \cap D = \varnothing$ ist, liegt D ganz in einer Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$, und es ist $n(\gamma, z_1) = n(\gamma, z_2)$. Weiter gilt:

1. $n(\kappa_1 + \kappa_2, z) = n(\partial D, z) = 1$ für jedes $z \in D$.
2. $n(\alpha_0 + \kappa_1, z_1) = n(\partial C_+, z_1) = 0$ und $n(\kappa_2 - \alpha_0, z_2) = n(\partial C_-, z_2) = 0$.

Alles zusammen ergibt:

$$\begin{aligned} n(\alpha, z_2) - n(\alpha, z_1) &= n(\alpha' + \alpha_0 + \alpha'', z_2) - n(\alpha' + \alpha_0 + \alpha'', z_1) \\ &= n(\gamma, z_2) + n(\kappa_1 + \alpha_0, z_2) - n(\gamma, z_1) - n(\kappa_1 + \alpha_0, z_1) \\ &= n(\kappa_1 + \kappa_2, z_2) - n(\kappa_2 - \alpha_0, z_2) \;=\; 1. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. ∎

Die Moral von der Geschichte ist nun:

1. „Weit draußen“ ist auf jeden Fall $n(\alpha, z) = 0$.
2. Überquert man α (in einem glatten Punkt) so, dass α dabei von „links“ kommt, so erhöht sich die Umlaufszahl um 1. Kommt α von rechts, so erniedrigt sie sich um 1.

Definition

Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg. Dann nennt man

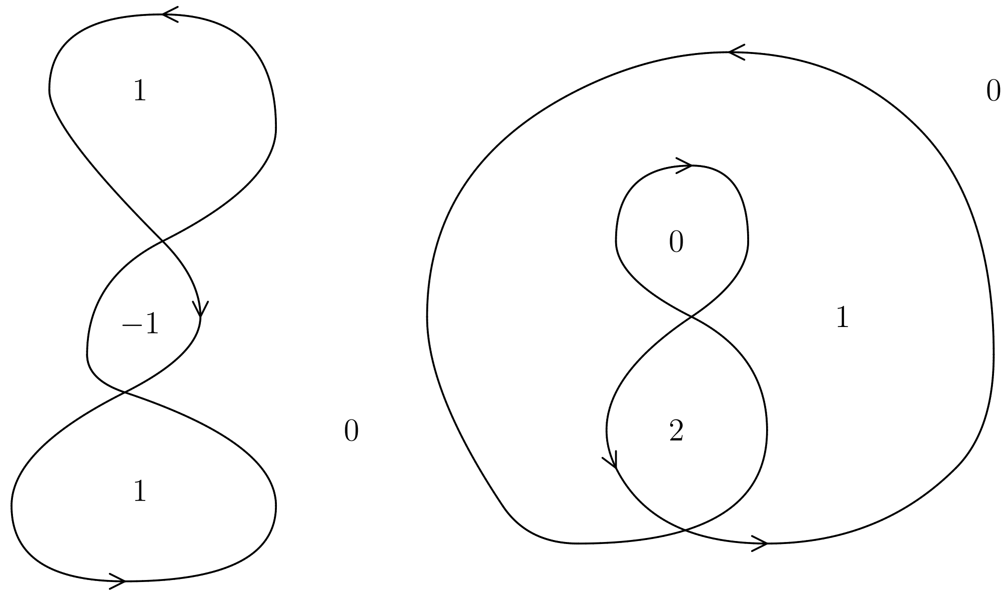
$$\mathrm{Int}(\alpha) := \{z \in \mathbb{C} \setminus |\alpha| \,:\, n(\alpha, z) \neq 0\}$$

das ***Innere*** von α, und

$$\mathrm{Ext}(\alpha) := \{z \in \mathbb{C} \setminus |\alpha| \,:\, n(\alpha, z) = 0\}$$

das ***Äußere*** von α.

3.16. Beispiel



3.17. Satz

Ist $G \subset \mathbb{C}$ einfach-zusammenhängend und $\alpha : [a,b] \to G$ ein geschlossener Integrationsweg, so ist $\mathrm{Int}(\alpha) \subset G$.

BEWEIS: Ist $z_0 \notin G$, so ist $1/(z - z_0)$ holomorph auf G und daher $n(\alpha, z_0) = 0$. ∎

3.18. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ einfach-zusammenhängend und α ein einfach geschlossener Integrationsweg in G. Dann ist $\mathrm{Int}(\alpha) = \{z \in G : n(\alpha, z) = \pm 1\}$.

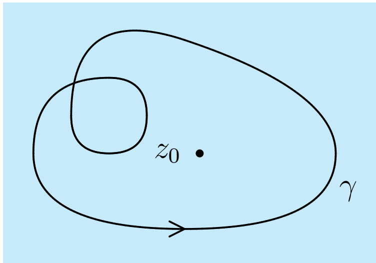
BEWEIS: $\mathrm{Int}(\alpha)$ besteht aus einer einzigen Zusammenhangskomponente. Außerhalb ist $n(\alpha, z) = 0$. Dann kann in $\mathrm{Int}(\alpha)$ nur der Wert ± 1 auftreten. ∎

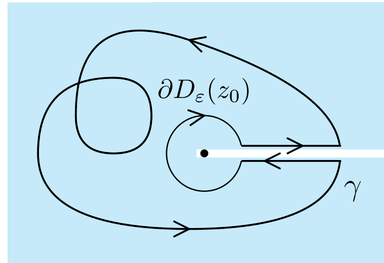
Es geht jetzt um folgendes Problem:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach-zusammenhängendes Gebiet, $z_0 \in G$, γ ein geschlossener Integrationsweg in $G' := G \setminus \{z_0\}$ und f eine holomorphe Funktion auf $G \setminus \{z_0\}$.

$$\text{Wie berechnet man } \int_\gamma f(z)\,dz\,?$$

Um eine Idee zu bekommen, nehmen wir erst mal an, dass es einen Punkt z auf der Kurve gibt, so dass der Strahl von z_0 in Richtung z mit Ausnahme von z keinen weiteren Punkt der Kurve enthält.





Umgeht man z_0 mit Hilfe eines kleinen Abstechers und eines in umgekehrter Richtung durchlaufenen Kreises $\partial D_\varepsilon(z_0)$ (siehe Skizze), so erhält man einen neuen geschlossenen Weg innerhalb eines einfach-zusammenhängenden Gebietes, der sich aus γ und $-\partial D_\varepsilon(z_0)$ zusammensetzt. Aus dem Cauchy'schen Integralsatz folgt:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(z)\,dz.$$

Das „Restintegral" über den Kreisrand $\partial D_\varepsilon(z_0)$ bezeichnet man (nach Division durch $2\pi\,\mathrm{i}$) als *Residuum*.

Definition

Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in B$, $f : B \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\varepsilon > 0$, so dass $D_\varepsilon(z_0) \subset\subset B$ ist. Dann heißt

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) := \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int\limits_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(\zeta)\,d\zeta$$

das ***Residuum*** von f in z_0.

Bemerkungen:

1. Das Residuum hängt nicht von der Wahl des Radius ε ab (siehe Hilfssatz 1 zum Satz von der Laurent-Entwicklung).

2. z_0 braucht keine Singularität zu sein! Ist f in z_0 holomorph, so ist $\operatorname{res}_{z_0}(f) = 0$. Das folgt aus dem Cauchy'schen Integralsatz.

3. In der Laurententwicklung von f um z_0 ist

   $$a_{-1} = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} f(\zeta)\,d\zeta = \operatorname{res}_{z_0}(f),$$

   für ein genügend kleines ε.

4. Es ist $\quad \operatorname{res}_{z_0}(a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot \operatorname{res}_{z_0}(f) + b \cdot \operatorname{res}_{z_0}(g).$

5. Ist F holomorph auf $B \setminus \{z_0\}$ und $F' = f$, so ist $\text{res}_{z_0}(f) = 0$. Das ist klar, denn das Integral über eine abgeleitete Funktion und einen geschlossenen Weg verschwindet immer.

6. $\text{res}_{z_0}\left(\dfrac{1}{z-z_0}\right) = 1$ und $\text{res}_{z_0}\left(\dfrac{1}{(z-z_0)^k}\right) = 0$ für $k \geq 2$.

7. Allgemeiner gilt: Hat f in z_0 eine *einfache* Polstelle, so ist

$$\text{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

BEWEIS: Wir schreiben $f(z) = \dfrac{a_{-1}}{z-z_0} + h(z)$, h holomorph in z_0.

Dann folgt: $(z - z_0)f(z) = a_{-1} + (z - z_0)h(z) \to a_{-1}$ für $z \to z_0$. ∎

8. Und noch allgemeiner kann man zeigen:

Hat f in z_0 eine m-fache Polstelle, so ist

$$\text{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^m f(z)]^{(m-1)}.$$

BEWEIS: Es ist

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots ,$$

also

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + \cdots$$

Damit ist

$$[(z - z_0)^m f(z)]^{(m-1)} = (m-1)!a_{-1} + (z - z_0) \cdot (\ldots),$$

und es folgt die Behauptung. ∎

9. Seien g und h holomorph nahe z_0, $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) \neq 0$.

Dann ist $\text{res}_{z_0}\left(\dfrac{g}{h}\right) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

BEWEIS: Wir können schreiben:

$$\begin{array}{rrcl} & g(z) & = & c_0 + (z - z_0) \cdot \widetilde{g}(z), \text{ mit } c_0 \neq 0 \\ \text{und} & h(z) & = & (z - z_0) \cdot (b_1 + \widetilde{h}(z)), \text{ mit } b_1 \neq 0 \text{ und } \widetilde{h}(z_0) = 0. \end{array}$$

Dann ist

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{c_0 + (z - z_0) \cdot \widetilde{g}(z)}{(z - z_0) \cdot (b_1 + \widetilde{h}(z))} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{c_0}{b_1 + \widetilde{h}(z)} + \frac{\widetilde{g}(z)}{b_1 + \widetilde{h}(z)}.$$

Also hat $f := g/h$ in z_0 eine einfache Polstelle, und es ist

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{c_0}{b_1 + \widetilde{h}(z_0)} = \frac{c_0}{b_1} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

■

3.19. Beispiele

A. Sei $f(z) := \dfrac{e^{\mathrm{i}\,z}}{z^2 + 1} = \dfrac{e^{\mathrm{i}\,z}}{(z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i})}$.

f hat einfache Polstellen bei i und $-\mathrm{i}$. Es ist

$$\operatorname{res}_{\mathrm{i}}(f) = \lim_{z \to \mathrm{i}} (z - \mathrm{i}) f(z) = \lim_{z \to \mathrm{i}} \frac{e^{\mathrm{i}\,z}}{z + \mathrm{i}} = -\frac{1}{2e}\,\mathrm{i},$$

und analog

$$\operatorname{res}_{-\mathrm{i}}(f) = \lim_{z \to -\mathrm{i}} (z + \mathrm{i}) f(z) = \lim_{z \to -\mathrm{i}} \frac{e^{\mathrm{i}\,z}}{z - \mathrm{i}} = \frac{e}{2}\,\mathrm{i}.$$

B. $f(z) := \dfrac{z^2}{1 + z^4}$ hat 4 einfache Polstellen, insbesondere in

$$z_0 := e^{(\pi/4)\,\mathrm{i}} = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathrm{i}).$$

Mit $g(z) := z^2$ und $h(z) := 1 + z^4$ ist

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} = \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4z_0} = \frac{1}{4} e^{-(\pi/4)\,\mathrm{i}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1 - \mathrm{i}).$$

3.20. Der Residuensatz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach-zusammenhängendes Gebiet, $D \subset G$ diskret, γ ein geschlossener Integrationsweg in G mit $|\gamma| \cap D = \varnothing$ und $f : G \setminus D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{z \in G} n(\gamma, z) \operatorname{res}_z(f).$$

Bemerkung: Da das Innere von γ in G liegt, gibt es eine kompakte Menge $K \subset G$, so dass $n(\gamma, z) = 0$ für $z \in G \setminus K$ ist. Da $K \cap D$ endlich ist, gibt es höchstens endlich viele Punkte $z \in G$, in denen das Produkt $n(\gamma, z) \cdot \mathrm{res}_z(f)$ nicht verschwindet. Also ist die Summe auf der rechten Seite der Gleichung sinnvoll.

Das Gebiet G braucht nicht unbedingt einfach-zusammenhängend zu sein. Man wird sehen, dass folgende Bedingung ausreicht: Für jede auf G holomorphe Funktion g verschwindet $\int_\gamma g(z)\,dz$.

Beweis: Die Menge $D' := D \cap \mathrm{Int}(\gamma)$ besteht nur aus endlich vielen Punkten $z_1, \ldots, z_N$. Sei $h_\mu(z)$ der Hauptteil der Laurententwicklung von f um z_μ. Wie aus dem Satz von der Laurent-Entwicklung hervorgeht, ist h_μ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{z_\mu\}$. Daher gilt:

$$f - \sum_{\mu=1}^{N} h_\mu \text{ ist holomorph auf } G.$$

Also folgt:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{\mu=1}^{N} \int_\gamma h_\mu(z)\,dz.$$

Nun schreiben wir ausführlich:

$$h_\mu(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{\mu,n}(z - z_\mu)^n.$$

Diese Reihe konvergiert gleichmäßig auf $|\gamma|$, kann dort also gliedweise integriert werden. Daher gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma h_\mu(z)\,dz &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{\mu,n} \int_\gamma (z - z_\mu)^n\,dz \\
&= a_{\mu,-1} \int_\gamma \frac{1}{z - z_\mu}\,dz + \sum_{n \geq 2} a_{\mu,-n} \int_\gamma \frac{1}{(z - z_\mu)^n}\,dz \\
&= a_{\mu,-1} \cdot 2\pi\,\mathrm{i} \cdot n(\gamma, z_\mu),
\end{aligned}$$

denn für $n \geq 2$ besitzt $\dfrac{1}{(z - z_\mu)^n}$ in der Nähe von $|\gamma|$ eine Stammfunktion.

Da $a_{\mu,-1} = \mathrm{res}_{z_\mu}(f)$ ist, folgt der Satz. ∎

Angewandt wird der Residuensatz oft in einer spezielleren Form:

3.21. Residuenformel

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach-zusammenhängendes Gebiet, γ ein geschlossener Integrationsweg in G und $z_1, \ldots, z_N$ Punkte in $\mathrm{Int}(\gamma)$. Ist $f : G \setminus \{z_1, \ldots, z_N\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $n(\gamma, z) = 1$ für alle $z \in \mathrm{Int}(\gamma)$, so ist

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{res}_{z_k}(f).$$

Beweis: Man kann den Residuensatz auf f und γ anwenden. ∎

3.22. Beispiele

A. Es soll $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4}\,dz$ berechnet werden.

Das geht in diesem Falle auch sehr einfach mit einer der höheren Cauchy'schen Integralformeln:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4}\,dz = \frac{2\pi\,\mathrm{i}}{3!}\frac{d^3}{dz^3}\Big|_0 (e^z) = \frac{\pi\,\mathrm{i}}{3}.$$

Mit dem Residuensatz macht man es so:

Die Laurentreihe des Integranden um $z = 0$ hat die Gestalt

$$\frac{e^z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z} + \frac{1}{24} + \cdots$$

Also ist

$$\mathrm{res}_0\left(\frac{e^z}{z^4}\right) = \text{ Koeffizient bei } z^{-1} = \frac{1}{6}.$$

Daraus folgt:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4}\,dz = 2\pi\,\mathrm{i} \cdot \mathrm{res}_0\left(\frac{e^z}{z^4}\right) = \frac{\pi\,\mathrm{i}}{3}.$$

B. Sei $G \subset \mathbb{C}$ einfach-zusammenhängend, f holomorph auf G und $\gamma : [a, b] \to G$ ein geschlossener Integrationsweg. Dann kann man den Residuensatz auf $g(z) := f(z)/(z - z_0)^{k+1}$ anwenden. Es ist

$$g(z) = \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}} \cdot \left(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k + \cdots\right),$$

also $\mathrm{res}_{z_0}(g) = \dfrac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$. Damit folgt:

$$\frac{k!}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta = n(\gamma, z_0) \cdot f^{(k)}(z_0).$$

Das ist eine Verallgemeinerung der höheren Cauchy'schen Integralformeln.

Der Cauchy'sche Integralsatz für einfach-zusammenhängende Gebiete folgt auch aus dem Residuensatz, da unter den Voraussetzungen des Integralsatzes alle Residuen (und damit die komplette rechte Seite) verschwinden.

Wir kommen nun zu weiteren Anwendungen des Residuensatzes:

Definition

Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen und D in B diskret. Eine holomorphe Funktion $f : B \setminus D \to \mathbb{C}$ heißt eine ***meromorphe Funktion auf*** B, falls f in den Punkten von D höchstens Polstellen besitzt (also keine wesentlichen Singularitäten).

Die Menge $P(f) := \{z \in D : \ f \text{ hat in } z \text{ eine Polstelle der Ordnung} \geq 1\}$ heißt ***Polstellenmege von*** f.

Typische Beispiele meromorpher Funktionen sind rationale Funktionen, aber auch Funktionen der Gestalt $1/\sin(z)$.

3.23. Das Argument-Prinzip

Sei $G \subset \mathbb{C}$ einfach-zusammenhängend und γ ein geschlossener Integrationsweg in G. Weiter sei f auf G meromorph und nicht konstant, N die Menge der Nullstellen und P die Menge der Polstellen von f. Es sei $|\gamma| \cap (N \cup P) = \varnothing$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int\limits_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = \sum_{a\in N} n(\gamma,a)o(f,a) - \sum_{b\in P} n(\gamma,b)o(f,b),$$

wenn man mit $o(f,z)$ die Null- bzw. Polstellenordnung von f in z bezeichnet.

Beweis: $D := N \cup P$ ist eine diskrete Menge in B, und es ist $n(\gamma,z) \neq 0$ für höchstens endlich viele Elemente von D. Die Funktion f'/f ist holomorph auf $G \setminus D$.

Sei $a \in D$. Dann gilt in der Nähe von a :

$$f(z) = (z-a)^k \cdot g(z),$$

mit einer nahe a holomorphen Funktion g ohne Nullstellen, $|k| \in \mathbb{N}$ und $k = \pm o(f,a)$, je nachdem, ob eine Null- oder Polstelle vorliegt. Daraus folgt:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k\cdot(z-a)^{k-1}\cdot g(z) + (z-a)^k \cdot g'(z)}{(z-a)^k \cdot g(z)} = \frac{k}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Da g'/g nahe a holomorph ist, ist $\operatorname{res}_a(f'/f) = k = \pm o(f,a)$. Mit dem Residuensatz ergibt sich die gewünschte Formel. ∎

Die Bezeichnung „Argument-Prinzip“ rührt daher, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \ &= \ \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))}\,dt \ = \ \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int_a^b \frac{(f\circ\gamma)'(t)}{f\circ\gamma(t)}\,dt \\ &= \ \frac{1}{2\pi\,\mathsf{i}} \int\limits_{f\circ\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} \ = \ n(f\circ\gamma, 0).\end{aligned}$$

ist. Das Integral auf der linken Seite der Formel misst also die Änderung des Arguments beim Durchlaufen des Weges $f \circ \gamma$.

3.24. Folgerung

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach-zusammenhängendes Gebiet, γ ein geschlossener Weg in G und $n(\gamma, z) = 1$ für $z \in \operatorname{Int}(\gamma)$. Ist f meromorph auf G und ohne Null- und Polstellen auf ∂G, sowie n die Anzahl der Nullstellen und p die Anzahl der Polstellen von f in G (jeweils mit Vielfachheit gezählt), so gilt:

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = n - p.$$

Der Beweis ist trivial, die Umlaufszahlen sind alle $= 1$.

3.25. Satz von Rouché

Sei $B \subset \mathbb{C}$ offen und $G \subset\subset B$ ein einfach-zusammenhängendes Gebiet. Der Rand von G sei die Spur eines einfach geschlossenen Integrationsweges γ, so dass $G = \{z \in B \,:\, n(\gamma, z) = 1\}$ ist.

Sind f und h zwei holomorphe Funktionen auf B mit $|h(z)| < |f(z)|$ auf ∂G, so haben f und $f + h$ gleich viele Nullstellen (mit Vielfachheit) in G.

Beweis: Für $0 \le \lambda \le 1$ sei $f_\lambda(z) := f(z) + \lambda \cdot h(z)$. Dann ist f_λ auf B holomorph, und für $z \in \partial G$ gilt: $|f_\lambda(z)| \ge |f(z)| - \lambda \cdot |h(z)| > (1 - \lambda) \cdot |h(z)| \ge 0$. Also hat f_λ auf ∂G keine Nullstellen.

Nun sei N_λ die Anzahl der Nullstellen von f_λ in G. Der Wert des Integrals

$$N_\lambda = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\partial G} \frac{f_\lambda'(z)}{f_\lambda(z)}\, dz$$

hängt stetig von λ ab, liegt aber in $\mathbb{Z}$. Also ist $N_0 = N_1$. ∎

3.26. Beispiel

Wieviele Nullstellen hat das Polynom $p(z) := z^4 - 4z + 2$ im Innern des Einheitskreises $\mathbb{D} = D_1(0)$?

Setzen wir $f(z) := -4z+2$ und $h(z) := z^4$, so ist $|f(z)| = |4z - 2| \ge 4|z| - 2 = 2$ auf $\partial\mathbb{D}$ und $|h(z)| = |z|^4 = 1 < |f(z)|$ auf $\partial\mathbb{D}$. Nach dem Satz von Rouché müssen nun f und $p = f + h$ in $\mathbb{D}$ gleichviele Nullstellen besitzen. Aber f hat dort genau eine Nullstelle (nämlich $z = 1/2$). Also kann auch p nur eine Nullstelle in $\mathbb{D}$ besitzen.

Der Residuensatz erlaubt es, gewisse analytisch schwer zu behandelnde reelle Integrale auf algebraischem Wege zu berechnen. Hier kommen zwei typische Beispiele.

Typ 1: Uneigentliche rationale Integrale

Nun wollen wir Integrale der Form

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

betrachten, wobei $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ sei, und $p(x)$ und $q(x)$ Polynome ohne reelle Nullstellen. Dabei müssen wir erst einmal klären, wann solche Integrale existieren.

3.27. Satz

Sei $p(z)$ ein komplexes Polynom n-ten Grades. Dann gibt es Konstanten c, $C > 0$ und ein $R > 0$, so dass gilt:

$$c|z|^n \leq |p(z)| \leq C|z|^n \qquad \textit{für } |z| \geq R.$$

BEWEIS: Sei $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$. Dann gibt es ein $C > 0$, so dass gilt:

$$\Big|\frac{p(z)}{z^n}\Big| = \Big|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + a_n\Big| \leq C \text{ für großes } |z|.$$

Und wegen der Dreiecksungleichung $|a + b| \geq |a| - |b|$ kann man auch ein $c > 0$ finden, so dass gilt:

$$\Big|\frac{p(z)}{z^n}\Big| \geq |a_n| - \Big|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z}\Big| \geq c \text{ für großes } |z|.$$

∎

3.28. Folgerung

Sind $p(z)$ und $q(z)$ Polynome mit $\deg(q) = \deg(p) + k$, $k \geq 0$, so gibt es eine Konstante $C > 0$ und ein $R > 0$, so dass

$$\Big|\frac{p(z)}{q(z)}\Big| \leq C \cdot \frac{1}{|z|^k}$$

für $|z| \geq R$ ist. Außerdem folgt:

1. *Ist $k = 1$, so ist $\Big|z \cdot \dfrac{p(z)}{q(z)}\Big|$ im Unendlichen beschränkt.*
2. *Ist $k \geq 2$ und $q(z)$ ohne reelle Nullstellen, so existiert das uneigentliche Integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx.$$

Beweis: Ist $\deg(p) = m$, $\deg(q) = n$ (also $k = n - m$), so ist

$$c_1|z|^m \le |p(z)| \le C_1|z|^m \quad \text{und} \quad c_2|z|^n \le |q(z)| \le C_2|z|^n \ \text{ für } |z| \ge R,$$

und daher

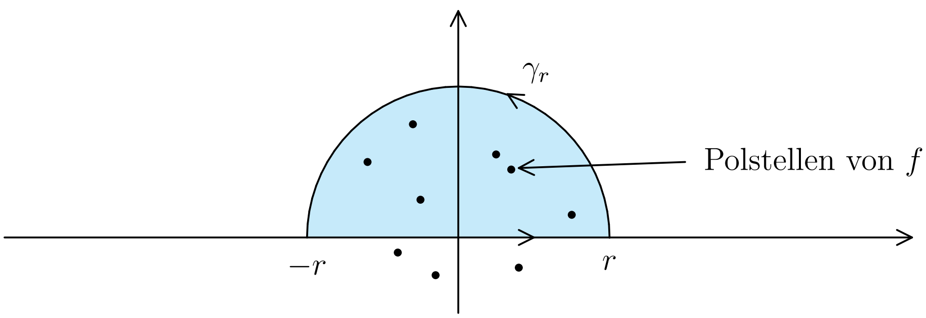
$$\Big|\frac{p(z)}{q(z)}\Big| \le C \cdot |z|^{m-n} = C \cdot |z|^{-k} \quad \text{für } |z| \ge R \text{ und } C := \frac{C_1}{c_2}.$$

Ist $k = 1$, so ist $\Big| z \cdot \dfrac{p(z)}{q(z)} \Big| \le C$.

Ist $k \ge 2$, so folgt die Existenz des uneigentlichen Integrals aus der Konvergenz des Integrals $\int_1^\infty (1/x^k)\,dx$, dem Majoranten-Kriterium für uneigentliche Integrale und der Tatsache, dass $q(x)$ keine reellen Nullstelle besitzt. ∎

Es seien nun die Voraussetzungen der Folgerung für $f(z) = p(z)/q(z)$ erfüllt, mit $k \ge 2$. Insbesondere ist dann $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Das bedeutet, dass es ein $r > 0$ gibt, so dass alle Polstellen von $f(z)$ in $D_r(0)$ liegen, und das können auch nur höchstens endlich viele sein.

Wir betrachten nun folgenden Weg:



Der Weg γ sei zusammengesetzt aus der Strecke zwischen $-r$ und r auf der reellen Achse und dem Halbkreis $\gamma_r(t) := re^{\mathrm{i}\,t}$, $0 \le t \le \pi$. Dann ist

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz + \int_{-r}^{r} f(x)\,dx = \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi\,\mathrm{i} \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(f).$$

Man beachte, dass das Residuum höchstens in den Singularitäten $\ne 0$ ist, die Summe auf der rechten Seite ist also immer eine **endliche** Summe!

Da $|f(z)| \le C/|z|^2$ für große z ist, folgt:

$$\Big|\int_{\gamma_r} f(z)\,dz\Big| \le \pi r \frac{C}{r^2} = \frac{\pi C}{r} \to 0 \text{ für } r \to \infty.$$

Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\,\mathrm{i} \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(f)$$

$$\left(\text{oder} \quad = -2\pi\,\mathrm{i} \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z)<0} \mathrm{res}_z(f)\ \right).$$

Man kann sich fragen, ob wir die Existenz des Integrals bei dem gerade durchgeführten Grenzübergang nicht automatisch mitbewiesen haben. Leider ist das nicht der Fall. Zur **Erinnerung:**

$$\text{C.H.} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt := \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} g(t)\,dt$$

heißt ***Cauchy'scher Hauptwert*** des uneigentlichen Integrals. Er kann existieren, auch wenn das uneigentliche Integral divergiert. Wenn letzteres allerdings konvergiert, dann stimmt es mit dem Cauchy'schen Hauptwert überein.

Aus der obigen Rechnung kann man nur entnehmen, dass der Cauchy'sche Hauptwert existiert, denn wir haben die Grenzen $-r$ und $+r$ gleichzeitig gegen ∞ gehen lassen. Deshalb waren die vorangegangenen Grad-Betrachtungen nötig, um die Existenz des uneigentlichen Integrals zu sichern.

3.29. Beispiel

Wir wollen $I := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$ berechnen.

Die Funktion $f(z) := \dfrac{z^2}{1+z^4}$ hat Polstellen in den Punkten

$$z_k = \zeta_{4,k} e^{\mathrm{i}\,\pi/4} = e^{\mathrm{i}\,(\pi+2\pi k)/4} = \cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{4}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{4}\right),$$

für $k = 0,1,2,3$. Dabei ist $\mathrm{Im}(z_k) > 0$ für $k = 0$ und $k = 1$.

Da die 4 Polstellen paarweise verschieden sind, liegen in

$$z_0 = e^{\mathrm{i}\,\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i}\,) \quad \text{und} \quad z_1 = \mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\,\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{i}\,-1)$$

jeweils einfache Polstellen vor. Wie wir schon an früherer Stelle gesehen haben, ist

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{z_0}(f) &= \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4}\bar{z}_0 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-\mathrm{i}\,) \\ \text{und} \quad \mathrm{res}_{z_1}(f) &= \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4}\bar{z}_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1-\mathrm{i}\,), \end{aligned}$$

und demnach

$$\begin{aligned} I &= 2\pi\,\mathrm{i}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}(1-\mathrm{i}\,) + \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1-\mathrm{i}\,)\right) \\ &= \frac{\pi\,\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}(-2\,\mathrm{i}\,) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Typ 2: Die Fourier-Rücktransformation

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige und absolut integrierbare Funktion, so existiert dazu die ***Fourier-Transformierte***

$$\widehat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\mathrm{i}\omega t}\, dt.$$

Das „Fourier-Integral-Theorem“ besagt, dass man f aus $\widehat{f}$ zurückgewinnen kann. Und zwar ist

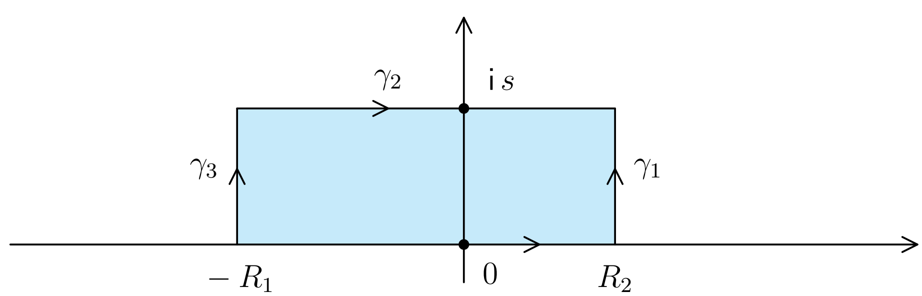
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \text{C.H.} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{\mathrm{i}\omega t}\, d\omega.$$

Die Gleichung bleibt richtig, wenn f nur stückweise stetig ist. Dann erhält man allerdings auf der linken Seite den Mittelwert zwischen dem linksseitigen und dem rechtsseitigen Grenzwert.

In der Praxis kann dieses Problem besonders schön gelöst werden, wenn man $\widehat{f}$ als Einschränkung einer meromorphen Funktion F auffassen kann.

Wir nehmen außerdem an, dass F nur endlich viele Polstellen hat und dass $z \cdot F(z)$ für großes z beschränkt bleibt, und wir betrachten nur den Fall $t > 0$.

Dann benutzen wir folgende Integrationswege:



$$\begin{array}{rrcl} \text{Sei} & \gamma_1(\tau) & := & R_2 + \mathrm{i}\,\tau, \quad 0 \le \tau \le s, \\ & \gamma_2(\tau) & := & \tau + \mathrm{i}\,s, \quad -R_1 \le \tau \le R_2, \\ \text{und} & \gamma_3(\tau) & := & -R_1 + \mathrm{i}\,\tau, \quad 0 \le \tau \le s. \end{array}$$

Dann ist $\gamma_1'(\tau) \equiv \gamma_3'(\tau) \equiv \mathrm{i}$ und $\gamma_2'(\tau) \equiv 1$.

Hat F nur endlich viele Polstellen, so kann man R_1, R_2 und s so groß wählen, dass die Polstellen alle im Innern des Weges $\gamma_0 + \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$ liegen (wobei γ_0 die Strecke von $-R_1$ nach R_2 bezeichnet).

Setzen wir

$$I_\nu(t) := \int\limits_{\gamma_\nu} F(z) e^{\mathrm{i}\,zt}\, dz$$

für $\nu = 1, 2, 3$, so erhalten wir mit dem Residuensatz:

$$\int_{-R_1}^{R_2} F(x)e^{\mathrm{i}\,xt}\,dx + I_1(t) - I_2(t) - I_3(t) = 2\pi\,\mathrm{i} \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(F(z)e^{\mathrm{i}\,zt}).$$

Wir schätzen nun die Integrale $I_\nu(t)$ einzeln ab. Dabei verwenden wir folgende Tatsachen:

a) Ist $z = x + \mathrm{i}\,y$, so ist $|e^{\mathrm{i}\,zt}| = e^{-yt}$.

b) Da s nicht unabhängig von R_1 und R_2 gewählt werden muss, kann man $s := R_1 + R_2$ setzen.

c) Es gibt ein $C > 0$ und ein $R > 0$, so dass für $|z| \geq R$ gilt:

$$|F(z)| \leq \frac{C}{|z|}.$$

Wir wählen $R_1 \geq R$ und $R_2 \geq R$.

Dann ist auch $s \geq R$, und für $z \in |\gamma_2|$ ist $|z| \geq s$. Die Standardabschätzung ergibt nun:

$$|I_2(t)| \leq (R_1 + R_2) \cdot e^{-st} \cdot \sup_{|\gamma_2|} |F(z)| \leq C \cdot e^{-st} \longrightarrow 0$$

(für festes t und $R_1, R_2 \to \infty$). Das Integral I_1 wird folgendermaßen abgeschätzt:

$$\begin{aligned} |I_1(t)| &\leq \int_0^s |F(R_2 + \mathrm{i}\,\tau)| \cdot e^{-\tau t}\,d\tau \\ &\leq \frac{C}{R_2} \int_0^s e^{-\tau t}\,d\tau = \frac{C}{R_2}\Big(-\frac{1}{t}e^{-\tau t}\Big)\Big|_0^s \\ &= \frac{C}{R_2 t}(1 - e^{-st}) \longrightarrow 0 \quad (\text{für } s \to \infty \text{ und } R_2 \to \infty). \end{aligned}$$

$I_3(t)$ wird analog abgeschätzt.

Also ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{\mathrm{i}\,xt}\,dx = 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{res}_z(F(z)e^{\mathrm{i}\,zt}),$$

und die Existenz des Integrals wurde (unter den obigen Voraussetzungen) gleich mitbewiesen.

3.30. Beispiel

Zu berechnen ist das Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}\,ax}}{x - \mathrm{i}\,b}\,dx$, mit $a, b > 0$.

$$\text{Es ist} \quad \mathrm{res}_{\mathrm{i}\,b}\left(\frac{e^{\mathrm{i}\,az}}{z - \mathrm{i}\,b}\right) = e^{-ab}, \quad \text{also}$$

$$I = 2\pi\,\mathrm{i} \cdot e^{-ab}.$$

Typ 3: Trigonometrische Integrale

Sei $R(x, y)$ eine komplexwertige rationale Funktion. Wir wollen den Residuensatz anwenden, um Integrale vom Typ

$$I := \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt$$

zu berechnen. Zu diesem Zweck suchen wir eine holomorphe oder meromorphe Funktion f, so dass wir das fragliche Integral als komplexes Kurvenintegral auffassen können:

$$I = \int_\gamma f(z)\, dz, \qquad \text{mit } \gamma(t) := e^{\mathrm{i}\, t}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Ist $z = \gamma(t)$, so ist $z = \cos t + \mathrm{i} \sin t$ und $1/z = \overline{z} = \cos t - \mathrm{i} \sin t$.

Damit ergibt sich: $\cos t = \dfrac{1}{2}(z + \dfrac{1}{z})$ und $\sin t = \dfrac{1}{2\,\mathrm{i}}(z - \dfrac{1}{z})$. Da $\gamma'(t) = \mathrm{i}\,\gamma(t)$ ist, folgt:

$$R(\cos t, \sin t) = \frac{1}{\mathrm{i}\,\gamma(t)} \cdot R\left(\frac{1}{2}\Big(\gamma(t) + \frac{1}{\gamma(t)}\Big), \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\Big(\gamma(t) - \frac{1}{\gamma(t)}\Big)\right) \cdot \gamma'(t).$$

Setzen wir also $f(z) := \dfrac{1}{z} \cdot R\left(\dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big), \dfrac{1}{2\,\mathrm{i}}\Big(z - \dfrac{1}{z}\Big)\right)$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt &= \frac{1}{\mathrm{i}} \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \frac{1}{\mathrm{i}} \int_\gamma f(z)\, dz \\
&= 2\pi \cdot \sum_{z \in D_1(0)} \operatorname{res}_z(f).
\end{aligned}$$

3.31. Beispiel

Sei $I := \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}$, $\quad a > 1$ reell. Hier ist $R(x, y) = \dfrac{1}{a + y}$, also

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{a + (z - 1/z)/(2\,\mathrm{i})} = \frac{2\,\mathrm{i}}{2a\,\mathrm{i}\, z + z^2 - 1} = \frac{2\,\mathrm{i}}{(z - z_1)(z - z_2)},$$

mit $z_{1,2} = \mathrm{i}\,(-a \pm \sqrt{a^2 - 1})$. f hat also zwei einfache Polstellen auf der imaginären Achse. Offensichtlich ist $z_2 \notin D_1(0)$.

Da $a > 1$ ist, ist $(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1 < a^2 - 1$, also $a - 1 < \sqrt{a^2 - 1} < a + 1$, d.h. $-1 < -a + \sqrt{a^2 - 1} < 1$. Also ist $z_1 \in D_1(0)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t} &= 2\pi \cdot \operatorname{res}_{z_1}(f) = 2\pi \cdot \lim_{z \to z_1} \frac{2\,\mathrm{i}}{z - z_2} \\
&= \frac{4\pi\,\mathrm{i}}{z_1 - z_2} = \frac{4\pi\,\mathrm{i}}{2\,\mathrm{i}\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.
\end{aligned}$$