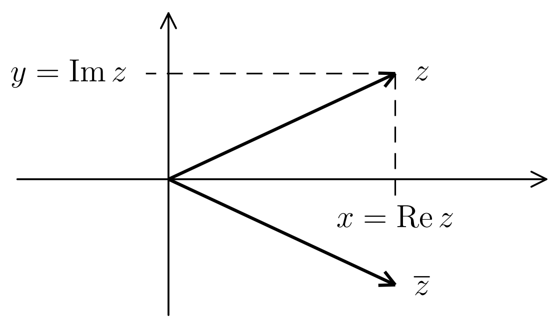
1 Funktionentheorie

1.1 Holomorphe Funktionen

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen sei (rein algebraisch) als bekannt vorausgesetzt.

Ist $z = x + \mathsf{i}\, y \in \mathbb{C}$, so nennt man x den ***Realteil*** und y den ***Imaginärteil*** von z. Die Zahl $\overline{z} := x - \mathsf{i}\, y$ heißt die zu z ***konjugiert komplexe Zahl***, $|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ der ***Betrag*** von z.



Statt der Darstellung in kartesischen Koordinaten benutzt man (für komplexe Zahlen $z \neq 0$) gerne auch die Darstellung in Polarkoordinaten. Ist $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ und $r := |z|$, so ist

$$\frac{z}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \mathsf{i}\, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ , \text{ mit } \quad \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 = 1.$$

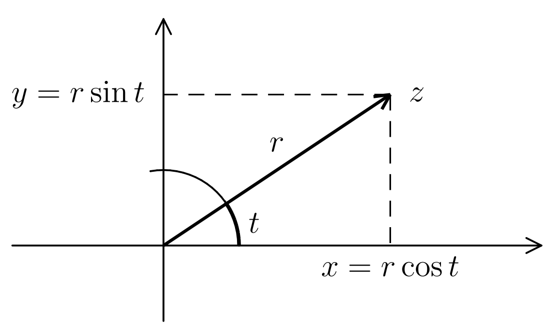
Deshalb gibt es genau ein $t \in [0, 2\pi)$, so dass

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos t \quad \text{und} \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin t$$

ist. Daraus folgt die eindeutige Darstellung

$$z = r(\cos t + \mathsf{i}\, \sin t), \text{ mit } r > 0 \text{ und } 0 \leq t < 2\pi.$$

Die (bis auf Addition eines ganzzahligen Vielfachen von 2π) eindeutig bestimmte Zahl $t \in \mathbb{R}$ nennt man das ***Argument*** von z (in Zeichen: $t = \arg(z)$).



Man schreibt nun
$$e^{\mathsf{i}\,t} := \cos t + \mathsf{i}\,\sin t.$$

Behauptung: $e^{\mathsf{i}\,s} \cdot e^{\mathsf{i}\,t} = e^{\mathsf{i}\,(s+t)}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} e^{\mathsf{i}\,s} \cdot e^{\mathsf{i}\,t} &= (\cos s + \mathsf{i}\,\sin s) \cdot (\cos t + \mathsf{i}\,\sin t) \\ &= (\cos s \cos t - \sin s \sin t) + \mathsf{i}\,(\cos s \sin t + \sin s \cos t) \\ &= \cos(s+t) + \mathsf{i}\,\sin(s+t) \ = e^{\mathsf{i}\,(s+t)}. \end{aligned}$$

Folgerung: $(e^{\mathsf{i}\,t})^n = e^{\mathsf{i}\,tn}$.

Beweis: Ein einfacher Induktionsbeweis.

Ist $z \in \mathbb{C}$ und $z^n = 1$, so ist auch $|z|^n = |z^n| = 1$, also $|z| = 1$. Damit ist $z = e^{\mathsf{i}\,t}$ und $\cos(nt) = 1$, $\sin(nt) = 0$. Das bedeutet, dass $nt = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ist, also $t = 2\pi k/n$. Die komplexen Zahlen

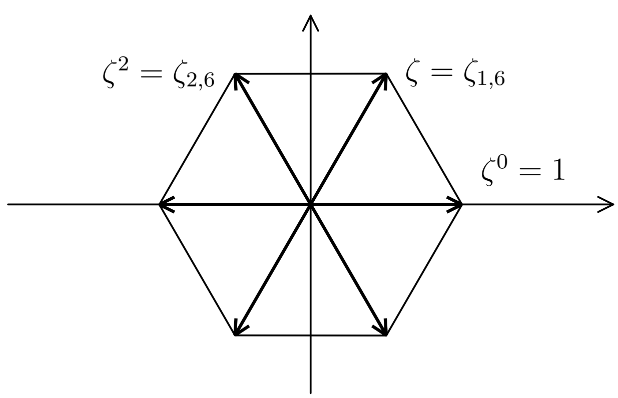
$$\zeta_{k,n} := \cos\Bigl(\frac{2\pi k}{n}\Bigr) + \mathsf{i}\,\sin\Bigl(\frac{2\pi k}{n}\Bigr),\ k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

sind paarweise verschieden, danach wiederholen sich die Werte. Es handelt sich offensichtlich um die einzigen Lösungen der Gleichung $z^n = 1$.

Definition

Die n Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ nennt man die ***n-ten Einheitswurzeln***.

Die n-ten Einheitswurzeln liegen auf den Ecken eines regelmäßigen n-Ecks.



1.1. Satz

Ist $w \neq 0$, so besitzt die Gleichung $z^n = w$ in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen.

Beweis: Sei $w = re^{\mathsf{i}\,t}$, mit $r = |w|$ und einem geeigneten $t \in [0, 2\pi)$. Ist ζ eine n-te Einheitswurzel $\neq 1$, so setzen wir

$$w_j := \sqrt[n]{r} \cdot e^{\,\mathrm{i}\, t/n} \cdot \zeta^j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Ist $\zeta = \zeta_{k,n}$ mit $0 < k < n$ und $\mathrm{ggT}(k,n) = 1$, so durchlaufen die Zahlen $\zeta^j = \cos\left(\frac{2\pi jk}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{2\pi jk}{n}\right)$ die n verschiedenen Einheitswurzeln.[1] Also erhalten wir n verschiedene komplexe Zahlen w_j mit $w_j^n = w$.

Ist andererseits z irgendeine Lösung der Gleichung $z^n = w$, so ist $z^n = w_0^n$, also $(zw_0^{-1})^n = 1$. Das bedeutet, dass es eine n–te Einheitswurzel ζ gibt, so dass $z = w_0 \cdot \zeta$ ist. ∎

Die Metrik und die Topologie auf $\mathbb{C}$ sind die gleichen wie auf dem $\mathbb{R}^2$. Ist $r > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$, so ist

$$D_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

die (offene) Kreisscheibe mit Radius r um z_0. Offene und abgeschlossene Mengen werden wie im $\mathbb{R}^2$ definiert:

Ein Punkt z_0 heißt ***innerer Punkt*** einer Menge $M \subset \mathbb{C}$, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $D_\varepsilon(z_0)$ noch ganz in M enthalten ist. Man nennt M dann auch eine ***Umgebung*** von z_0. Eine Menge heißt ***offen***, falls sie nur aus inneren Punkten besteht, und sie heißt ***abgeschlossen***, wenn ihr Komplement in $\mathbb{C}$ offen ist.

Ein Punkt z_0 heißt ***Randpunkt*** von M, falls jede Umgebung von z_0 Punkte von M und von $\mathbb{C} \setminus M$ enthält. Mit ∂M bezeichnet man den ***Rand*** von M, also die Menge der Randpunkte von M.

Die ***Konvergenz*** einer komplexen **Zahlenfolge** (z_n) gegen eine Zahl z wird wie üblich definiert:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \;:\Longleftrightarrow\quad \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0, \text{ s.d. } \forall\, n \geq n_0 \text{ gilt: } |z_n - z| < \varepsilon.$$

Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so nennt man eine Abbildung $\alpha : I \to \mathbb{C}$ einen ***Weg*** in $\mathbb{C}$. Ein solcher Weg ist ***stetig*** in $t_0 \in I$, wenn für jede Punktfolge (t_ν) in I, die gegen t_0 konvergiert, auch die Folge der komplexen Zahlen $\alpha(t_\nu)$ gegen $\alpha(t_0)$ konvergiert.

Ein ***Gebiet*** in $\mathbb{C}$ ist eine offene Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$, innerhalb der sich je zwei Punkte durch einen stetigen Weg miteinander verbinden lassen. Man kann zeigen, dass das dann sogar mit Hilfe eines Streckenzuges bewerkstelligt werden kann. Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $U \subset G$ eine nicht-leere Teilmenge, die zugleich offen und (relativ) abgeschlossen[2] ist, so ist $U = G$.

Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Punkt.

1. z_0 heißt ***Häufungspunkt*** von M, falls jede Umgebung $U = U(z_0)$ einen Punkt $z \in M$ mit $z \neq z_0$ enthält.

[1] Das ist elementare Zahlentheorie: Ist $\mathrm{ggT}(k,n) = 1$, so gibt es ganze Zahlen a, b mit $ak + bn = 1$, also $\zeta^a = \zeta_{1,n}$.

[2] U in G „relativ abgeschlossen“ bedeutet: $G \setminus U$ offen

2. z_0 heißt ***isolierter Punkt*** von M, falls es eine Umgebung $U = U(z_0)$ mit $U \cap M = \{z_0\}$ gibt.

Ein isolierter Punkt einer Menge ist also immer ein Element dieser Menge. Für einen Häufungspunkt braucht das nicht zu gelten.

Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ist genau dann Häufungspunkt einer Menge $M \subset \mathbb{C}$, wenn es eine Folge von Punkten $z_n \in M$ gibt, so dass gilt:

1. $z_n \neq z_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Definition

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$ heißt ***diskret***, wenn sie abgeschlossen ist und nur aus isolierten Punkten besteht.

Die Menge der Zahlen $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, besteht zwar aus lauter isolierten Punkten, sie ist aber nicht diskret, weil sie nicht abgeschlossen ist. Nimmt man den Häufungspunkt 0 hinzu, so wird die Menge abgeschlossen, ist aber wieder nicht diskret, weil der Nullpunkt nicht isoliert ist.

Ist M° die Menge der inneren Punkte von M und $\overline{M}$ die Menge aller Punkte, die Häufungspunkt oder isolierter Punkt von M sind, so ist $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ$. Man nennt M° den ***offenen Kern*** und $\overline{M}$ die ***abgeschlossene Hülle*** von M.

1.2. Satz

Folgende Aussagen über eine Menge $K \subset \mathbb{C}$ sind äquivalent:

1. *K ist abgeschlossen und beschränkt.*
2. *Jede offene Überdeckung von K enthält eine endliche Teilüberdeckung.*
3. *Jede unendliche Teilmenge von K besitzt einen Häufungspunkt in K.*

Zum Beweis: Die Äquivalenz von (1) und (2) wurde im $\mathbb{R}^2$ schon bewiesen (Satz von Heine-Borel). Mengen, die diese zwei Eigenschaften erfüllen, nennt man natürlich ***kompakt***. Ist K kompakt und $M \subset K$ eine unendliche Teilmenge, so kann man annehmen, dass M die Menge der Glieder einer Folge (z_n) ist. Besitzt diese keinen Häufungspunkt, so kann man eine Überdeckung von K konstruieren (Umgebungen der z_n und das Komplement der z_n in $\mathbb{C}$), zu der es keine endliche Teilüberdeckung gibt.

Ist umgekehrt das Kriterium erfüllt, so muss K beschränkt sein, denn sonst könnte man ja in K eine unbeschränkte Folge finden, die keinen Häufungspunkt besitzt.

Und K ist auch abgeschlossen: Eine in $\mathbb{C}$ konvergente Folge $z_n \in K$ muss nach dem Kriterium einen Häufungspunkt in K besitzen, und dieser muss zugleich der Grenzwert sein. Dabei wird zwar benutzt, dass die Menge der z_n unendlich ist, aber wenn das nicht der Fall wäre, dann wäre die Existenz des Grenzwertes in K sowieso trivial.

Verwandt mit dem vorigen Ergebnis ist der Satz von Bolzano-Weierstraß: *Jede beschränkte Punktfolge besitzt wenigstens einen Häufungspunkt.* Beim Beweis kann man annehmen, dass die Menge A der Folgeglieder unendlich ist, sonst ist das Ergebnis trivial. Aber dann ist A eine unendliche Teilmenge der kompakten Menge $\overline{A}$, und das Ergebnis folgt aus dem vorigen Satz.

1.3. Satz (über die Schachtelung kompakter Mengen)

Sei $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ eine Folge von kompakten nicht-leeren Teilmengen von $\mathbb{C}$. Dann ist auch $K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ kompakt und nicht leer.

Beweis: K ist offensichtlich abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Wir wählen nun aus jedem K_n einen Punkt z_n. Da alle diese Punkte in der kompakten Menge K_1 liegen, ist die Folge (z_n) beschränkt und besitzt nach Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt z_0. Der muss ebenfalls in K_1 liegen. Wir behaupten, dass z_0 sogar in K liegt. Wäre das nämlich nicht der Fall, so gäbe es ein n_0 mit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus K_{n_0}$. Aber dann gäbe es auch eine Umgebung $U = U(z_0) \subset \mathbb{C} \setminus K_{n_0}$. Für $n \geq n_0$ könnte dann z_n nicht mehr in U liegen, im Widerspruch dazu, dass z_0 Häufungspunkt der Folge ist. Also ist $K \neq \varnothing$. ∎

Zur Erinnerung:

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergiert, wenn die Folge ihrer Partialsummen $S_N := \sum_{n=1}^{N} z_n$ konvergiert. Die Reihe heißt ***absolut konvergent***, falls die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergiert.

Es ist $S_N - S_{N_0} = \sum_{n=N_0+1}^{N} z_n$. Wie im Reellen gilt auch hier das **Cauchykriterium**:

> Die Reihe komplexer Zahlen $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\left|\sum_{n=N_0+1}^{N} z_n\right| < \varepsilon$ für alle $N > N_0$ gilt.

Mit Hilfe des Cauchykriteriums zeigt man:

1. *Eine absolut konvergente Reihe konvergiert auch im gewöhnlichen Sinne.*
2. *Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe nicht-negativer reeller Zahlen und (z_n) eine Folge komplexer Zahlen mit $|z_n| \leq a_n$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ absolut (Majorantenkriterium)*

1.4. Beispiel

Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Dann konvergiert die ***geometrische Reihe***

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu = \frac{1}{1-z}\,.$$

Der Beweis wird wie im Reellen geführt.

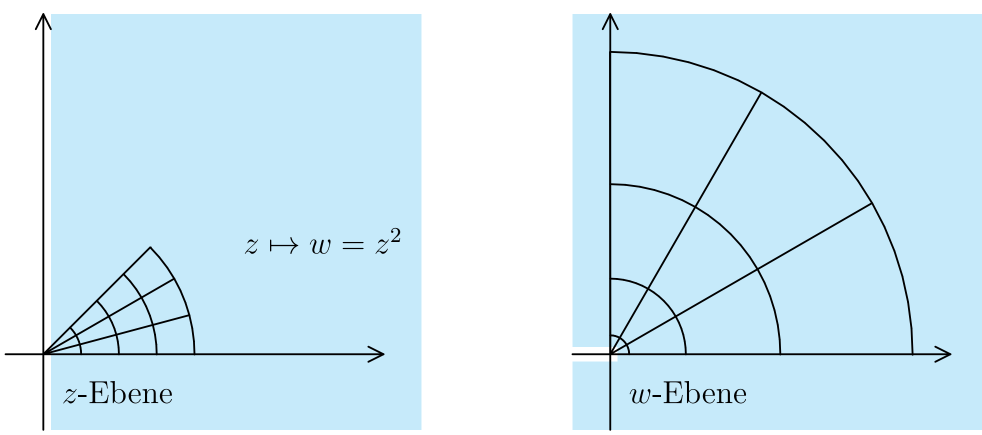
Wie kann man sich eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ anschaulich vorstellen? Wir untersuchen das im Falle der Funktion $f(z) = z^2$.

1. Im Reellen versuchen wir, eine Funktion durch ihren Graphen darzustellen. Das geht hier schlecht, denn der Graph einer komplexen Funktion ist eine reell 2-dimensionale Fläche im $\mathbb{R}^4$.

2. Beschränkt man sich auf die reellwertige Funktion $z = x + \mathrm{i}\,y \mapsto |f(z)| = |z|^2 = x^2 + y^2$, so kann man deren Graph darstellen, verliert aber zu viele Informationen.

3. Eine weitere (und vielleicht auch die beste) Möglichkeit besteht darin, mit zwei Ebenen zu arbeiten. Ist $w = z^2$, so ist

$$|w| = |z|^2 \quad \text{und} \quad \arg(w) = 2 \cdot \arg(z).$$



Soweit funktioniert das ganz gut. Jetzt suchen wir nach der Umkehrabbildung. Wenn wir f auf die rechte Halbebene beschränken (wo $-\pi/2 \le \arg(z) \le \pi/2$ ist), dann erhalten wir als Wertemenge die ganze w-Ebene. Auf dem Rand gibt es allerdings ein Problem. Es ist $f(\mathrm{i}\,t) = f(-\mathrm{i}\,t) = -t^2$. Damit f injektiv bleibt, dürfen wir in der z-Ebene nur die Menge aller z mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ (also $-\pi/2 < \arg(z) < \pi/2$) betrachten. Als Bildmenge erhalten wir dann die längs der negativen reellen Achse aufgeschlitzte w-Ebene (also alle Punkte w mit $-\pi < \arg(w) < \pi$).

Sei $g_1 : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ definiert durch

$$g_1\bigl(r(\cos\varphi + \mathsf{i}\,\sin\varphi)\bigr) := \sqrt{r}\,\bigl(\cos(\varphi/2) + \mathsf{i}\,\sin(\varphi/2)\bigr),$$

wobei – wie oben – das Argument φ zwischen $-\pi$ und π läuft. Dann ist g_1 eine Umkehrung von $f|_{\{z\in\mathbb{C}\,:\,\mathrm{Re}(z)>0\}}$.

Definieren wir $g_2 : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}(z) < 0\}$ durch

$$g_2(w) := -g_1(w),$$

so ist g_2 eine Umkehrung von $f|_{\{z\in\mathbb{C}\,:\,\mathrm{Re}(z)<0\}}$.

Um also eine globale Umkehrfunktion $g(w) = \sqrt{w}$ von $f(z) = z^2$ zu definieren, brauchen wir als Definitionsbereich zwei Exemplare der geschlitzten Ebene. Dabei ist folgendes zu beachten: Nähert man sich in der w-Ebene von oben dem Schlitz bei $w = -r$, so nähert sich der Wert $g_1(w)$ der Zahl $z = \mathsf{i}\sqrt{r}$. Bei Annäherung von unten ergibt sich als Grenzwert die Zahl $z = -\mathsf{i}\sqrt{r}$. Dagegen ist es bei g_2 gerade umgekehrt. Um nun $\sqrt{z}$ **stetig** zu definieren, muss man die Oberkante der ersten Ebene mit der Unterkante der zweiten Ebene zusammenkleben, und die Unterkante der ersten Ebene mit der Oberkante der zweiten Ebene. Es entsteht eine Fläche R, die in zwei Blättern über $\mathbb{C}^*$ liegt. Der Nullpunkt fehlt dabei.

Die Fläche R nennt man die ***Riemannsche Fläche*** von $\sqrt{w}$.

Prominente Beispiele für komplexwertige Funktionen auf $\mathbb{C}$ sind die komplexen Polynome

$$p(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

aber auch die (auf ihrem Konvergenzkreis definierten) komplexen Potenzreihen

$$P(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z-a)^\nu.$$

Dafür müssen wir etwas weiter ausholen.

Sei $M \subset \mathbb{C}$ und (f_ν) eine Folge von stetigen komplexwertigen Funktionen auf M.

1. $\sum_\nu f_\nu$ ***konvergiert punktweise*** gegen eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$, falls für jedes $z \in M$ die Reihe $\sum_{\nu=0}^\infty f_\nu(z)$ gegen $f(z)$ konvergiert.

2. $\sum_\nu f_\nu$ ***konvergiert normal*** auf M, falls die Reihe $\sum_{\nu=0}^\infty \sup_M |f_\nu|$ konvergiert.

3. $\sum_\nu f_\nu$ ***konvergiert auf*** M ***gleichmäßig*** gegen f, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_0, \text{ so dass für alle } \nu \geq \nu_0 \text{ gilt: } \sup_M \Bigl|\sum_{\nu=0}^{\nu_0} f_\nu(z) - f(z)\Bigr| < \varepsilon.$$

Aus der normalen Konvergenz folgt die gleichmäßige Konvergenz, und aus beidem die punktweise Konvergenz.

BEWEIS: Dass aus der normalen und aus der gleichmäßigen Konvergenz jeweils die punktweise Konvergenz folgt, ist einfach. Hier soll nur die weniger bekannte Aussage gezeigt werden, dass aus der normalen die gleichmäßige Konvergenz folgt.

Man benutze die Partialsummen $F_N := \sum_{\nu=0}^{N} f_\nu$. Die Reihe sei normal konvergent, und ein $\varepsilon > 0$ sei vorgegeben. Nach dem Cauchykriterium gibt es ein N_0, so dass für $N > N_0$ und alle $z \in M$ gilt:

$$|F_N(z) - F_{N_0}(z)| = |\sum_{\nu=N_0+1}^{N} f_\nu(z)| \leq \sum_{\nu=N_0+1}^{N} |f_\nu(z)| \leq \sum_{\nu=N_0+1}^{N} \sup|f_\nu| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ist $z \in M$ beliebig, so gibt es ein $m = m(z) > N_0$, so dass $|F_m(z) - f(z)| < \varepsilon/3$ ist. Ist $N > N_0$, so folgt für dieses z:

$$\begin{aligned}
|F_N(z) - f(z)| &\leq |(F_N(z) - F_{N_0}(z)) + (F_{N_0}(z) - F_m(z)) + (F_m(z) - f(z))| \\
&\leq |F_N(z) - F_{N_0}(z)| + |F_m(z) - F_{N_0}(z_0)| + |F_m(z) - f(z)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Das gilt unabhängig von z, also konvergiert (F_N) gleichmäßig auf M gegen f. ∎

Oft benutzt man das

1.5. Weierstraß–Kriterium

Es sei $M \subset \mathbb{C}$, und es seien stetige Funktionen $f_\nu : M \to \mathbb{C}$ gegeben. Weiter gebe es eine konvergente Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ nicht-negativer reeller Zahlen und ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$|f_\nu(z)| \leq a_\nu \quad \text{für } \nu \geq \nu_0 \text{ und } \textbf{alle } z \in M.$$

Dann konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ auf M normal (und damit gleichmäßig) gegen eine stetige Funktion auf M.

Der BEWEIS besteht aus einer trivialen Anwendung des Majorantenkriteriums für reelle Reihen, denn nach Voraussetzung ist $\sup_M |f_\nu| \leq a_\nu$ für $\nu \geq \nu_0$.

Typische Funktionenreihen sind die oben erwähnten Potenzreihen $P(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z - a)^\nu$. Die Glieder der Reihe sind die Polynome $p_\nu(z) = c_\nu(z-a)^\nu$, also Funktionen $p_\nu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Allerdings wird die Reihe in der Regel nicht auf $\mathbb{C}$ konvergieren.

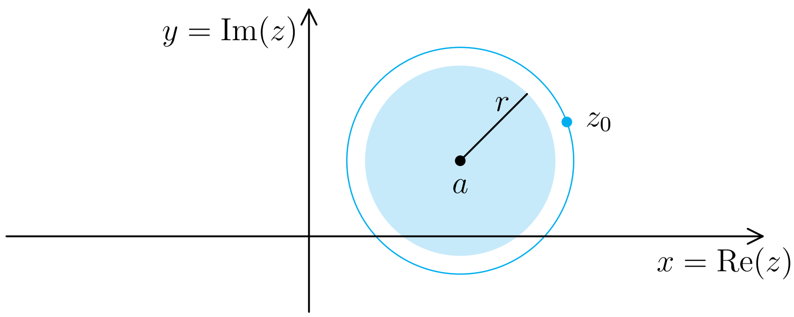
Der folgende Satz ist der Ausgangspunkt für alle Untersuchungen über Potenzreihen.

1.6. Über das Konvergenzverhalten von Potenzreihen

Die Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ konvergiere für ein $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq a$. Ist dann $0 < r < |z_0 - a|$, so konvergiert $P(z)$ und auch die Reihe

$$P'(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n (z-a)^{n-1}$$

auf der Kreisscheibe $D_r(a)$ absolut und gleichmäßig.



Beweis: 1) Da $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0 - a)^n$ nach Voraussetzung konvergiert, gibt es eine Konstante $M > 0$, so dass $|c_n(z_0-a)^n| \leq M$ für alle n ist. Ist $0 < r < |z_0 - a|$, so ist $q := r/|z_0 - a| < 1$. Für alle z mit $|z - a| \leq r$ gilt dann:

$$\Big| \frac{z-a}{z_0-a} \Big| \leq \frac{r}{|z_0-a|} = q,$$

$$\text{also} \quad |c_n(z-a)^n| = |c_n(z_0-a)^n| \cdot \Big| \frac{z-a}{z_0-a} \Big|^n \leq M \cdot q^n.$$

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} M\, q^n$ konvergiert. Mit dem Majorantenkriterium folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ für jedes $z \in D_r(a)$ absolut konvergiert, und mit dem Weierstraß–Kriterium folgt sogar, dass die Reihe auf $D_r(a)$ gleichmäßig konvergiert.

2) Sei $\widetilde{M} := M/r$. Nach (1) ist

$$\begin{aligned}
|n \cdot c_n(z-a)^{n-1}| &= \Big| n \cdot c_n \Big(\frac{z-a}{z_0-a}\Big)^{n-1} \cdot (z_0-a)^{n-1} \Big| \\
&= n \cdot \Big| c_n(z_0-a)^n \cdot \frac{1}{z_0-a} \cdot \Big(\frac{z-a}{z_0-a}\Big)^{n-1} \Big| \\
&\leq n \cdot M \cdot \frac{1}{r} \cdot q^{n-1} = n \cdot \widetilde{M} \cdot q^{n-1},
\end{aligned}$$

und die Quotienten

$$\frac{(n+1) \cdot \widetilde{M} \cdot q^n}{n \cdot \widetilde{M} \cdot q^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \cdot q$$

konvergieren gegen $q < 1$.

Aus dem Quotientenkriterium folgt jetzt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \widetilde{M} \cdot q^{n-1}$ konvergiert, und wie oben kann man daraus schließen, dass $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot c_n (z-a)^{n-1}$ auf $D_r(a)$ gleichmäßig konvergiert. ■

Die Zahl

$$R := \sup\{r \geq 0 \,:\, \exists\, z_0 \in \mathbb{C} \text{ mit } r = |z_0 - a|, \text{ so dass } P(z_0) \text{ konvergiert}\}$$

heißt ***Konvergenzradius*** der Potenzreihe. Die Fälle $R = 0$ und $R = +\infty$ sind dabei auch zugelassen. Der Kreis um a mit Radius R heißt der ***Konvergenzkreis*** der Reihe. Es gilt:

1. Für $0 < r < R$ konvergiert $P(z)$ auf $\overline{D_r(a)}$ normal (und damit insbesondere absolut und gleichmäßig).

2. Ist $|z_0 - a| > R$, so divergiert $P(z_0)$.

3. Die Grenzfunktion $P(z)$ ist im Innern des Konvergenzkreises $D_R(a) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - a| < R\}$ stetig.

Für den Konvergenzradius einer Potenzreihe gibt es verschiedene Berechnungsmethoden:

1.7. Lemma von Abel

Sei $R > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe
$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$. *Dann ist*

$$R = \sup\{r \geq 0 \,:\, (|c_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}} \textit{ beschränkt } \}.$$

Beweis: Sei r_0 der Wert auf der rechten Seite der Gleichung.

Wenn eine Reihe nicht-negativer reeller Zahlen konvergiert, dann bilden ihre Glieder eine Nullfolge, sind also insbesondere beschränkt. Ist also $r < R$ und $|z - a| = r$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n < \infty$ und damit $(|c_n| r^n)$ beschränkt, d.h., $r \leq r_0$. Das bedeutet, dass $R \leq r_0$ ist.

Da $R > 0$ vorausgesetzt wurde, muss auch $r_0 > 0$ sein. Ist nun $0 < r < r_0$, so kann man noch ein r' mit $r < r' < r_0$ finden, so dass $(|c_n|(r')^n)$ beschränkt ist, etwa durch eine Konstante M. Wir setzen $q := \dfrac{r}{r'}$ und erhalten:

1. $0 < q < 1$.

2. $|c_n| r^n = |c_n| (r'q)^n \leq M \cdot q^n$.

Mit dem Majorantenkriterium folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$, also $r \le R$. Weil das für alle $r < r_0$ gilt, ist auch $r_0 \le R$. ∎

1.8. Folgerung

Die komplexe Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *und die reelle Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| x^n$ *haben den gleichen Konvergenzradius.*

Ist (a_n) eine Folge reeller Zahlen, so versteht man unter dem ***Limes Superior*** $\overline{\lim}\, a_n$ das Supremum über die Menge aller Häufungspunkte der Folge (a_n). Ist (a_n) konvergent gegen a, so ist a der einzige Häufungspunkt der Folge und $\overline{\lim}\, a_n = a$. Besitzt (a_n) mehrere, aber nur endlich viele Häufungspunkte, so ist $\overline{\lim}\, a_n$ der Größte dieser Häufungspunkte.

1.9. Formel von Cauchy-Hadamard

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *eine Potenzreihe und* $\gamma := \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|c_n|}$, *also das Supremum über die Menge aller Häufungspunkte der Folge* $\sqrt[n]{|c_n|}$.

Dann gilt für den Konvergenzradius R *der Potenzreihe:*

1. *Wenn* γ *eine endliche Zahl* > 0 *ist, dann ist* $R = 1/\gamma$.
2. *Wenn* $\gamma = \infty$ *ist, dann ist* $R = 0$.
3. *Wenn* $\gamma = 0$ *ist, dann ist* $R = \infty$.

Beweis: (wie im Reellen)

Sei $z \in \mathbb{C}$, $z \neq a$. Setzt man $\alpha := \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|}$, so erhält man die Gleichung $\alpha = |z-a|\,\gamma$.

1) Sei $0 < \gamma < +\infty$.

Ist $|z-a| < 1/\gamma$, so ist $\alpha < 1$ und es gibt ein q mit $\alpha < q < 1$ und ein n_0, so dass $\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} < q$ und damit $|c_n(z-a)^n| < q^n$ für $n \ge n_0$ ist. Dann folgt aus dem Majorantenkriterium, dass die Potenzreihe in z (absolut) konvergiert.

Ist andererseits $|z-a| > 1/\gamma$, so ist $\alpha > 1$. Das bedeutet, dass unendlich viele Terme $|c_n(z-a)^n|$ ebenfalls > 1 sind. Dann divergiert die Potenzreihe.

Also muss $R := 1/\gamma$ sein.

2) Sei $\gamma = 0$ und z beliebig. Dann ist auch $\alpha = 0$, und die Folge $\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|}$ konvergiert gegen Null. Ist $0 < q < 1$, so gibt ein n_0, so dass $\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} < q$ und deshalb $|c_n(z-a)^n| < q^n$ für $n \ge n_0$ gilt. Die Reihe konvergiert.

3) Sei $\gamma = +\infty$ und $z \neq 0$. Dann sind die Glieder der Potenzreihe unbeschränkt und die Reihe divergiert. ∎

Der wichtigste Begriff in der Analysis ist die „Differenzierbarkeit“. Sieht man einmal von der anschaulichen Bedeutung der Ableitung ab, so liefert der Differential-Kalkül vor allem einen handlichen algebraischen Apparat zur Untersuchung von Funktionen. Um z.B. die Ableitung von $f(x) = x^n$ zu berechnen, braucht man keine Grenzwertuntersuchungen. Als Euler seinerzeit recht sorglos begann, mit komplexen Zahlen, Funktionen und Reihen zu rechnen, benutzte er die üblichen Regeln:

$$(z^n)' = n \cdot z^{n-1}, \ (e^z)' = e^z \qquad \text{usw.}$$

Für eine saubere Definition der Ableitung brauchen wir den Grenzwertbegriff für Funktionen.

Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$ ein Häufungspunkt von G. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ hat in z_0 den ***Grenzwert*** c, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0, \text{ so dass gilt: } |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - c| < \varepsilon.$$

Man schreibt dann: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c$.

Ist f auch noch in z_0 definiert und $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, so heißt f in z_0 ***stetig***.

f ist genau dann in z_0 stetig, wenn für alle Folgen $z_n \in G \setminus \{z_0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$.

Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in G$ ein Punkt. f heißt in z_0 ***komplex differenzierbar***, falls der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. Die komplexe Zahl $f'(z_0)$ nennt man dann die ***Ableitung*** von f in z_0.

f heißt auf G komplex differenzierbar, falls f in jedem Punkt von G komplex differenzierbar ist.

Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so kann man eine Funktion $\Delta : G \to \mathbb{C}$ definieren durch

$$\Delta(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{falls } z \neq z_0, \\ f'(z_0) & \text{falls } z = z_0. \end{cases}$$

Offensichtlich ist Δ in z_0 stetig, und es gilt für alle $z \in G$:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot \Delta(z).$$

Ist umgekehrt eine solche Darstellung mit einer in z_0 stetigen Funktion gegeben, so folgt, dass f in z_0 komplex differenzierbar ist. Dieses Kriterium für die Differenzierbarkeit ist sehr nützlich, weil es auf Quotientenbildung verzichtet.

1.10. Satz

$f, g : G \to \mathbb{C}$ seien beide in $z_0 \in G$ komplex differenzierbar, c eine komplexe Zahl.

1. *$f + g$, $c\,f$ und $f \cdot g$ sind ebenfalls in z_0 komplex differenzierbar, und es gilt:*

$$\begin{aligned} (f+g)'(z_0) &= f'(z_0) + g'(z_0) \\ (c\,f)'(z_0) &= c\,f'(z_0) \\ \textit{und} \qquad (f \cdot g)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0). \end{aligned}$$

2. *Ist $g(z_0) \neq 0$, so ist auch noch $g(z) \neq 0$ nahe z_0, f/g in z_0 komplex differenzierbar und*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

3. *Ist h in $w_0 := f(z_0)$ komplex differenzierbar, so ist $h \circ f$ in z_0 komplex differenzierbar, und es gilt:*

$$(h \circ f)'(z_0) = h'(w_0) \cdot f'(z_0).$$

Die Beweise werden genauso wie im Reellen geführt. Exemplarisch soll hier nur der Beweis für die Kettenregel angedeutet werden:

Ist $h(w) = h(w_0) + \Delta^{**}(w) \cdot (w - w_0)$ und $f(z) = f(z_0) + \Delta^*(z) \cdot (z - z_0)$, mit einer in z_0 stetigen Funktion Δ^* und einer in w_0 stetigen Funktion Δ^{**}, so folgt:

$$\begin{aligned} (h \circ f)(z) &= h(w_0) + \Delta^{**}(f(z)) \cdot (f(z) - w_0) \\ &= (h \circ f)(z_0) + \Delta^{**}(f(z)) \cdot \Delta^*(z) \cdot (z - z_0). \end{aligned}$$

Nun kann man $\Delta(z) := \Delta^{**}(f(z)) \cdot \Delta^*(z)$ setzen. Diese Funktion ist in z_0 stetig und nimmt dort den Wert $h'(w_0) \cdot f'(z_0)$ an.

1.11. Satz

Sei $f : G \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und $f'(z) \equiv 0$. Dann ist f konstant.

Beweis: Sei $z_0 \in G$ und $U = U(z_0) \subset G$ eine konvexe offene Umgebung. Ist $z \in U$, so definieren wir $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ durch $g(t) := f(z_0 + t(z - z_0))$.

Sei $t_0 \in [0,1]$ beliebig gewählt und $w_0 := z_0 + t_0(z - z_0)$. Weil f komplex differenzierbar ist, gibt es eine in w_0 stetige Funktion Δ, so dass $f(w) - f(w_0) = (w - w_0)\Delta(w)$ und $\Delta(w_0) = f'(w_0)$ ist. Mit $w := z_0 + t(z - z_0)$ folgt dann:

$$g(t) - g(t_0) = f(w) - f(w_0) = (t - t_0)(z - z_0)\Delta(z_0 + t(z - z_0)),$$

also

$$\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = (z - z_0)\Delta(z_0 + t(z - z_0)),$$

wobei die rechte Seite für $t \to t_0$ gegen gegen $(z - z_0) \cdot f'(w_0) = 0$ konvergiert. Also ist $g'(t_0) = 0$, und weil t_0 beliebig war, verschwindet die Ableitung von g auf dem ganzen Intervall $[0,1]$. Dann ist g dort konstant, und daraus folgt, dass $f(z) = g(1) = g(0) = f(z_0)$ für beliebiges $z \in U$ ist, also f konstant auf U.

f ist damit lokal-konstant, und die Menge der Punkte $z \in G$, in denen $f(z) = f(z_0)$ ist, ist offen und (trivialerweise) abgeschlossen und daher $= G$. ■

1.12. Beispiele

A. Weil $z^n - z_0^n = (z - z_0) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1}$ ist, ist

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} z_0^{n-1} = n \cdot z_0^{n-1}.$$

Also ist tatsächlich überall $(z^n)' = n\, z^{n-1}$.

Dass das so schön geht, liegt daran, dass $\mathbb{C}$ eben mehr als der $\mathbb{R}^2$ ist. $\mathbb{C}$ ist ein Körper.

B. Die komplexen Polynome $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ sind auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar, die Ableitung gewinnt man in gewohnter Weise.

C. Die Funktion $f(z) = z\overline{z}$ ist in $z_0 = 0$ komplex differenzierbar, denn $\Delta(z) := \overline{z}$ ist im Nullpunkt stetig, und es ist

$$f(z) = f(0) + z \cdot \Delta(z).$$

Die Punkte $z \neq 0$ werden wir später untersuchen.

D. Rationale Funktionen sind auf ihrem ganzen Definitionsbereich komplex differenzierbar. Das gilt insbesondere für alle „Möbius-Transformationen“. Eine ***(gebrochen) lineare Transformation*** oder ***Möbius-Transformation*** ist eine Abbildung der Gestalt

$$T(z) := \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Die Funktion T ist für alle $z \neq -d/c$ definiert und komplex differenzierbar.

Wir betrachten zwei Spezialfälle.

1. Fall: Ist $c = 0$, $A := a/d$ und $B := b/d$, so ist T eine komplexe affin-lineare Funktion:

$$T(z) = A \cdot z + B.$$

Da A eine komplexe Zahl der Gestalt $A = re^{\mathrm{i}\,t}$ ist, stellt die Abbildung $z \mapsto A \cdot z$ eine Drehstreckung dar. Die Abbildung $w \mapsto w + B$ ist eine Translation der Ebene.

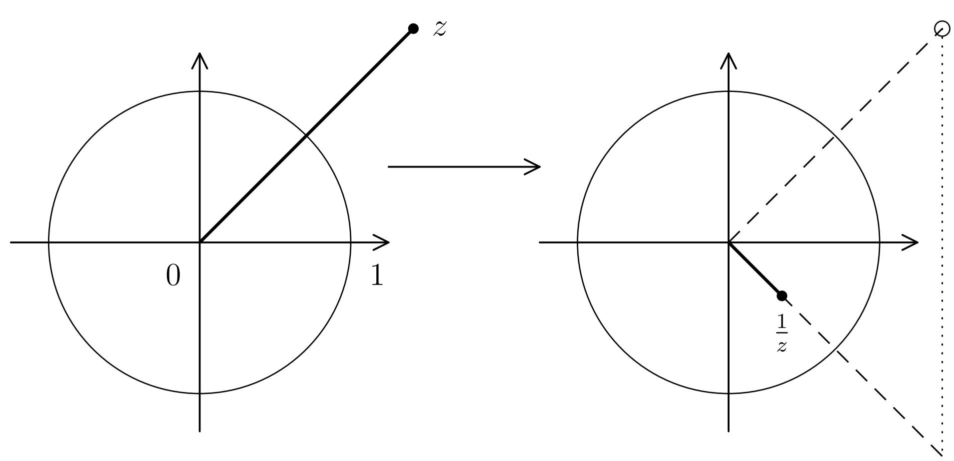
2. Fall: Die Abbildung $I(z) := 1/z$ nennt man die ***Inversion***. Sie ist auf $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert und stetig. Bekanntlich ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z\bar{z}} \cdot \bar{z}.$$

Schreibt man z in der Form $z = r \cdot (\cos t + \mathrm{i}\,\sin t)$, mit reellem $r > 0$ und $t \in [0, 2\pi)$, so ist $z\bar{z} = r^2$ und $\bar{z} = r \cdot (\cos t - \mathrm{i}\,\sin t)$. Also gilt:

$$|I(z)| = \frac{1}{|z|} \quad \text{und} \quad \arg(I(z)) = -\arg(z)\,.$$

Für $z = r \cdot (\cos t + \mathrm{i}\,\sin t)$ bedeutet der Übergang $r \mapsto 1/r$ eine Spiegelung am Einheitskreis, der Übergang $t \mapsto -t$ eine Spiegelung an der x–Achse.



Ist $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ eine beliebige Möbius-Transformation mit $c \neq 0$ und

$$A := \frac{bc - ad}{c} \quad \text{und} \quad B := \frac{a}{c}\,,$$

so ist

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{1}{cz + d} + B &= \frac{(bc - ad) + a(cz + d)}{c(cz + d)} \\ &= \frac{bc + acz}{c(cz + d)} = \frac{az + b}{cz + d} = T(z). \end{aligned}$$

Also setzt sich T aus affin-linearen Funktionen und der Inversion zusammen.

E. Sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ eine konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 und Konvergenzradius $R > 0$.

Behauptung: *f ist in jedem Punkt z des Konvergenzkreises $D_R(0)$ komplex differenzierbar, und es gilt:*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n z^{n-1}.$$

Beweis: Wir wissen schon, dass die formal gliedweise differenzierte Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n z^{n-1}$$

ebenfalls in $D_R(0)$ konvergiert. Daraus kann man leicht folgern, dass f im Nullpunkt differenzierbar und $f'(0) = c_1$ ist: Es ist nämlich

$$f(z) - f(0) = z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1} = z \cdot \Delta(z),$$

wobei die Funktion Δ als Grenzwert einer konvergenten Potenzreihe stetig und $\Delta(0) = c_1$ ist.

Schwieriger wird es aber, wenn man die komplexe Differenzierbarkeit von f in einem beliebigen Punkt z_0 des Konvergenzkreises $D_R(0)$ zeigen will. Sei nun z_0 ein solcher Punkt . Ist $F_N(z)$ die N-te Partialsumme von $f(z)$, so ist

$$F_N(z) - F_N(z_0) = \sum_{n=1}^{N} c_n(z^n - z_0^n) = (z - z_0) \cdot \Delta_N(z),$$

mit

$$\Delta_N(z) := \sum_{n=1}^{N} c_n \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1}.$$

Wir wählen ein $r < R$, so dass $|z_0| < r$ ist. Für $z \in D_r(0)$ gilt dann:

$$|c_n \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1}| \le |c_n| \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |z|^i |z_0|^{n-i-1} \le |c_n| \cdot n \cdot r^{n-1}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n z^{n-1}$ in jedem Punkt $z \in \overline{D_r(0)}$ absolut konvergiert, ist insbesondere die reelle Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|r^{n-1}$ konvergent.

Nach dem Weierstraß-Kriterium konvergiert dann $\Delta_N(z)$ gleichmäßig auf $D_r(0)$ gegen die stetige Funktion

$$\Delta(z) := \lim_{N\to\infty} \Delta_N(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i-1} \qquad (\text{mit } \Delta(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n z_0^{n-1}).$$

Aus der Gleichung $F_N(z) = F_N(z_0) + (z - z_0) \cdot \Delta_N(z)$ wird beim Grenzübergang $N \to \infty$ die Gleichung $f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot \Delta(z)$. Also ist f in z_0 komplex differenzierbar und

$$f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot z_0^{n-1}.$$

■

Potenzreihen mit beliebigem Entwicklungspunkt werden wir später behandeln.

Die Reihen

$$\begin{aligned} \exp(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \\ \sin(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \text{und} \quad \cos(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

konvergieren auf ganz $\mathbb{C}$ und stellen dort komplex differenzierbare Funktionen dar. Auf $\mathbb{R}$ stimmen sie natürlich mit den bekannten Funktionen überein.

Die Reihen können gliedweise differenziert werden. Deshalb gilt:

$$\exp'(z) = \exp(z), \quad \sin'(z) = \cos(z) \quad \text{und} \quad \cos'(z) = -\sin(z).$$

1.13. Satz (Euler'sche Formel)

Für $t \in \mathbb{R}$ ist $\exp(\mathsf{i}\,t) = \cos t + \mathsf{i}\,\sin t = e^{\mathsf{i}\,t}$.

Beweis: Man berechne Realteil und Imaginärteil der Reihenentwicklung von $\exp(\mathsf{i}\,t)$:

$$\begin{aligned}\exp(\mathsf{i}\,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{i}\,t)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{i}\,t)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{i}\,t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \mathsf{i}\,\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos t + \mathsf{i}\,\sin t.\end{aligned}$$

∎

Auch die komplexe Exponentialfunktion erfüllt das

1.14. Additionstheorem

Es ist $\exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w)$ *für alle* $z, w \in \mathbb{C}$.

Beweis: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ fest und $f(z) := \exp(z)\cdot\exp(z_0 - z)$. Dann ist $f'(z) \equiv 0$, also $f(z) \equiv f(0) = \exp(z_0)$ konstant. Damit ist

$$\exp(z)\cdot\exp(z_0 - z) = \exp(z_0), \text{ für alle } z, z_0 \in \mathbb{C}.$$

Sind z und w gegeben und setzt man $z_0 := z + w$, so ist $\exp(z+w) = \exp(z_0) = \exp(z)\cdot\exp(z_0 - z) = \exp(z)\cdot\exp(w)$. ∎

1.15. Folgerung

Es ist $\exp(z + 2\pi\,\mathsf{i}\,) = \exp(z)$, *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

Beweis: Es ist $\exp(2\pi\,\mathsf{i}\,) = \cos(2\pi) + \mathsf{i}\ \sin(2\pi) = 1$, also

$$\exp(z + 2\pi\,\mathsf{i}\,) = \exp(z)\cdot\exp(2\pi\,\mathsf{i}\,) = \exp(z).$$

Das ist alles! ∎

Die Exponentialfunktion ist also über $\mathbb{C}$ periodisch.

Außerdem gilt für **alle** $z \in \mathbb{C}$ die **Eulersche Formel**:

$$\boxed{\exp(\mathsf{i}\,z) = \cos(z) + \mathsf{i}\,\sin(z)\,.}$$

Beweis: Ersetzt man jeweils -1 durch i^2, so erhält man

$$\begin{aligned}\cos z + \mathsf{i}\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \mathsf{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathsf{i}z)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathsf{i}z)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \exp(\mathsf{i}z).\end{aligned}$$

∎

Daraus folgen auch neue Relationen, z.B.:

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{1}{2}(e^{\mathsf{i}z} + e^{-\mathsf{i}z})\\ \text{und}\quad \sin(z) &= \frac{1}{2\mathsf{i}}(e^{\mathsf{i}z} - e^{-\mathsf{i}z}).\end{aligned}$$

Nun wollen wir die komplexe Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$ mit der reellen Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^2$ vergleichen.

Zur Erinnerung:

f heißt in z_0 *(reell) differenzierbar*, wenn es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und eine in der Nähe des Nullpunktes definierte Funktion r gibt, so dass gilt:

1. $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + r(z - z_0)$ für z nahe z_0.
2. $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{r(h)}{|h|} = 0.$

Die eindeutig bestimmte lineare Abbildung L nennt man die ***totale Ableitung*** von f in z_0 und bezeichnet sie mit $Df(z_0)$.

Bei der Identifikation von $\mathbb{C}$ mit dem $\mathbb{R}^2$ entsprechen die komplexen Zahlen 1 und i den Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ und $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$. Deshalb nennt man die komplexen Zahlen

$$f_x(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) := Df(z_0)(1) \quad \text{und} \quad f_y(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) := Df(z_0)(\mathsf{i})$$

die ***partiellen Ableitungen*** von f nach x und y. Ist $f = g + \mathsf{i}h$, so gilt:

$$f_x(z_0) = g_x(z_0) + \mathsf{i}h_x(z_0) \quad \text{und } f_y(z_0) = g_y(z_0) + \mathsf{i}h_y(z_0).$$

Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $Df(z_0)$ wird deshalb bezüglich der Basis $\{1, \mathsf{i}\}$ durch die Funktionalmatrix

$$J_f(z_0) := \begin{pmatrix} g_x(z_0) & g_y(z_0)\\ h_x(z_0) & h_y(z_0)\end{pmatrix}$$

beschrieben.

1.16. Satz

Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so ist f in z_0 auch reell differenzierbar, und die totale Ableitung $Df(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist die Multiplikation mit $f'(z_0)$, also $\mathbb{C}-linear$. Auch die Umkehrung dieser Aussage ist richtig.

BEWEIS: Sei f in z_0 komplex differenzierbar. Dann gibt es eine in z_0 stetige Funktion Δ, so dass gilt:

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z) \\ &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \big(\Delta(z) - f'(z_0)\big)(z - z_0) \\ &= f(z_0) + L(z - z_0) + r(z - z_0), \end{aligned}$$

mit der linearen Abbildung L (mit $L(v) := f'(z_0) \cdot v$) und der Funktion $r(h) := (\Delta(z_0 + h) - f'(z_0)) \cdot h$. Dann gilt:

$$\frac{r(h)}{h} = \Delta(z_0 + h) - f'(z_0) \to 0 \text{ (für } h \to 0)$$

Also ist f in z_0 reell differenzierbar und $Df(z_0)$ $\mathbb{C}$-linear.

Ist umgekehrt f in z_0 reell differenzierbar und $Df(z_0)$ $\mathbb{C}$-linear, so gibt es eine komplexe Zahl a, so dass $Df(z_0)(v) = a \cdot v$ ist, und es gibt eine Darstellung

$$f(z) = f(z_0) + a(z - z_0) + r(z - z_0), \text{ mit } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Setzt man dann $\Delta(z) := a + \dfrac{r(z - z_0)}{z - z_0}$, für $z \neq z_0$, so strebt $\Delta(z) \to a$ für $z \to z_0$, Δ ist also stetig nach z_0 fortsetzbar. Außerdem ist $\Delta(z)(z - z_0) = f(z) - f(z_0)$. ∎

Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann zusätzlich $\mathbb{C}$-linear, wenn es eine komplexe Zahl c_0 gibt, so dass $L(w) = c_0 \cdot w$ ist. Schreibt man $c_0 = a_0 + \mathrm{i}\, b_0$, so ist

$$c_0 \cdot 1 = a_0 + \mathrm{i}\, b_0 \quad \text{und} \quad c_0 \cdot \mathrm{i} = -b_0 + \mathrm{i}\, a_0\,.$$

Das bedeutet, dass L bezüglich $\{1, \mathrm{i}\}$ durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} a_0 & -b_0 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix}$ beschrieben wird. Für eine in z_0 komplex differenzierbare Funktion muss also gelten:

$$\boxed{g_x(z_0) = h_y(z_0) \quad \text{und} \quad g_y(z_0) = -h_x(z_0)\,.}$$

Dieses kleine System von partiellen Differentialgleichungen hat weitreichende Folgen. Man spricht von den **Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen**.

1.17. Satz

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. *f ist in z_0 reell differenzierbar und $Df(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-linear.*
2. *Es gibt eine **in** z_0 **stetige** Funktion $\Delta : G \to \mathbb{C}$, so dass für alle $z \in G$ gilt:*
$$f(z) = f(z_0) + \Delta(z) \cdot (z - z_0).$$
3. *f ist in z_0 komplex differenzierbar.*
4. *f ist in z_0 reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen*
$$g_x(z_0) = h_y(z_0) \quad \text{und} \quad g_y(z_0) = -h_x(z_0).$$

BEWEIS:

Die Äquivalenz der Aussagen (1), (2) und (3) haben wir schon gezeigt. Außerdem ist klar, dass aus diesen Aussagen auch (4) folgt.

Ist schließlich f in z_0 reell differenzierbar, und gelten die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, so beschreibt die totale Ableitung die Multiplikation mit der komplexen Zahl $g_x(z_0) + \mathrm{i}\, h_x(z_0) = f_x(z_0)$. Also ist $Df(z_0)$ $\mathbb{C}$-linear. ∎

Bemerkung: Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so ist

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= f_x(z_0) \;=\; g_x(z_0) + \mathrm{i}\, h_x(z_0) \\ &= h_y(z_0) - \mathrm{i}\, g_y(z_0) \;=\; -\mathrm{i}\,(g_y(z_0) + \mathrm{i}\, h_y(z_0)) \;=\; -\mathrm{i}\, f_y(z_0). \end{aligned}$$

1.18. Beispiel

Sei $f(z) := z\overline{z}$. Dann ist f in $z_0 := 0$ komplex differenzierbar und $f'(0) = 0$. Aber f ist in keinem Punkt $z_0 \neq 0$ komplex differenzierbar, denn sonst wäre dort auch die Funktion
$$k(z) := \overline{z} = \frac{1}{z} \cdot f(z)$$
komplex differenzierbar. Es ist aber $J_k(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind nicht erfüllt!

Es soll kurz angedeutet werden, wie man ganz besonders bequem mit den CR-Differentialgleichungen umgehen kann. Eine reell-lineare Abbildung $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kann stets in der Form $F(h) = ah + b\overline{h}$ mit komplexen Zahlen a, b geschrieben werden. Sie ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn $b = 0$ ist. Speziell erhält man für reell-differenzierbare Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$:

$$Df(z_0)h = f_z(z_0) \cdot h + f_{\overline{z}}(z_0) \cdot \overline{h},$$

mit den sogenannten „Wirtinger-Ableitungen“

$$\begin{aligned} f_z &= \frac{\partial f}{\partial z} &:=& \frac{1}{2}(f_x - \mathrm{i}\ f_y) \\ f_{\overline{z}} &= \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &:=& \frac{1}{2}(f_x + \mathrm{i}\ f_y). \end{aligned}$$

f ist genau dann holomorph, wenn $f_{\overline{z}} = 0$ (und dann $f_z = f'$) ist. Die Gleichung $f_{\overline{z}} = 0$ kann als Ersatz für die CR-DGLn herhalten.

Bloß, wie berechnet man die Ableitung nach $\overline{z}$? Man kann die Definition benutzen, aber das kann auch sehr mühsam werden. Die gute Nachricht ist, dass man z und $\overline{z}$ wie unabhängige Variablen behandeln kann.

1.19. Beispiel

Sei $f(z) := (z\overline{z})^2 = z^2\overline{z}^2 = (x^2 + y^2)^2$. Nach Definition ist

$$f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + \mathrm{i}\ f_y) = \frac{1}{2}\big(4x(x^2 + y^2) + 4\,\mathrm{i}\ y(x^2 + y^2)\big) = 2z \cdot (z\overline{z}) = 2z^2\overline{z}.$$

Fasst man z und $\overline{z}$ als unabhängige Variable auf, so erhält man – deutlich schneller – $f_{\overline{z}} = z^2 \cdot 2\overline{z}$.

Wir kommen jetzt zum zentralen Begriff der Vorlesung.

Definition

Eine Funktion f heißt in $z_0 \in \mathbb{C}$ ***holomorph***, wenn sie in einer offenen Umgebung $U = U(z_0) \subset \mathbb{C}$ definiert und komplex differenzierbar ist.

Komplexe Polynome sind auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Die Funktion $f(z) := z\overline{z}$ ist zwar in $z = 0$ komplex differenzierbar, aber **nirgends** holomorph! Funktionen, die auf einem **Gebiet** $G \subset \mathbb{C}$ komplex differenzierbar sind, sind dort auch automatisch holomorph.

Wir wissen auch schon, dass eine durch eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 definierte Funktion auf dem Konvergenzkreis der Reihe holomorph ist. Sei nun

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

eine konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0 und Konvergenzradius $R > 0$. Wir wollen sehen, dass f auf $D_R(z_0)$ holomorph ist.

Sei $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $\varphi(z) := z - z_0$. Dann ist φ holomorph und $\varphi'(z) \equiv 1$. Ist $K \subset D_R(0)$ kompakt, so konvergiert die Folge der Partialsummen $g_N(w) := \sum_{n=0}^{N} c_n w^n$ auf K gleichmäßig gegen die holomorphe Grenzfunktion $g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$, und es ist

$$g'(w) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n w^{n-1}.$$

Dann konvergiert auch die Folge $f_N(z) = g_N \circ \varphi(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n(z-z_0)^n$ gleichmäßig auf $\varphi^{-1}(K) \subset D_R(z_0)$ gegen $g\circ\varphi(z)$. Also ist $f = g\circ\varphi$ als Verknüpfung holomorpher Funktionen holomorph und $f'(z) = g'(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}$.

1.20. Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph.

1. *Nimmt f nur reelle oder nur rein imaginäre Werte an, so ist f konstant.*
2. *Ist $|f|$ konstant, so ist auch f konstant.*

Beweis: 1) Nimmt $f = g + \mathrm{i}\, h$ nur reelle Werte an, so ist $h(z) \equiv 0$. Da f holomorph ist, gelten die Cauchy-Riemannschen DGLn, und es ist $g_x = g_y = 0$. Das ist nur möglich, wenn g lokal-konstant und daher überhaupt konstant ist. Also ist auch f konstant. Im Falle rein imaginärer Werte geht es genauso.

2) Sei $|f|$ konstant. Ist diese Konstante $= 0$, so ist $f(z) \equiv 0$. Ist aber $|f| =: c \neq 0$, so ist die Funktion $f\overline{f} = c^2$ konstant und damit holomorph, und f besitzt keine Nullstellen. Daraus folgt, dass $\overline{f} = \dfrac{c^2}{f}$ holomorph ist, und damit auch

$$\mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \overline{f}) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(f) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}(f - \overline{f}).$$

Wegen (1) muss f dann konstant sein. ∎

Wir setzen jetzt voraus, dass $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ ist. Wegen der Cauchy-Riemannschen DGLn ist dann

$$\det Df(z) = \det \begin{pmatrix} g_x & -h_x \\ h_x & g_x \end{pmatrix} = (g_x)^2 + (h_x)^2 = |f'(z)|^2 > 0.$$

Das bedeutet, dass f – aufgefasst als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ – orientierungserhaltend ist!

Holomorphe Funktionen lassen außerdem Winkel invariant. Allerdings müssen wir erst einmal erklären, was darunter zu verstehen ist.

Sind $z = r_1 \cdot e^{\mathrm{i}\, t_1}$ und $w = r_2 \cdot e^{\mathrm{i}\, t_2}$ zwei komplexe Zahlen $\neq 0$, so verstehen wir unter dem Winkel zwischen z und w die Zahl

$$\angle(z,w) = \arg\left(\frac{w}{z}\right) = \begin{cases} t_2 - t_1 & \text{falls } t_2 > t_1 \\ 2\pi + t_2 - t_1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Winkel $\angle(z,w)$ wird also von z aus immer in mathematisch positiver Drehrichtung gemessen.

Sind $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{C}$ zwei glatte differenzierbare Wege mit $\alpha(0) = \beta(0) = z_0$, so setzt man

$$\angle(\alpha, \beta) := \angle(\alpha'(0), \beta'(0)).$$

Ist f eine holomorphe Funktion, so ist

$$\begin{aligned} (f \circ \alpha)'(0) &= D(f \circ \alpha)(0)(1) = Df(\alpha(0)) \circ D\alpha(0)(1) \\ &= Df(\alpha(0))(\alpha'(0)) = f'(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0). \end{aligned}$$

Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine stetig differenzierbare Abbildung $f : G \to \mathbb{C}$ mit nicht verschwindender Ableitung heißt in z_0 ***winkeltreu***, falls für beliebige glatte differenzierbare Wege α, β mit $\alpha(0) = \beta(0) = z_0$ gilt:

$$\angle(f \circ \alpha, f \circ \beta) = \angle(\alpha, \beta).$$

Ist f lokal umkehrbar, überall winkeltreu und orientierungserhaltend, so nennt man f ***lokal konform***. Ist f sogar global injektiv, so nennt man f ***konform***.

1.21. Satz

Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, mit stetigen partiellen Ableitungen, und $f'(z) \neq 0$ für $z \in G$, so ist f lokal konform.

Beweis: Ist $f'(z_0) \neq 0$, so ist auch $\det Df(z_0) = |f'(z_0)|^2 \neq 0$. Sind außerdem die partiellen Ableitungen von f stetig, so folgt aus dem Satz über inverse Abbildungen, dass es offene Umgebungen $U = U(z_0)$ und $V = V(f(z_0))$ gibt, so dass $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Also ist f lokal umkehrbar.

Wir müssen nur noch zeigen, dass f winkeltreu ist. Aber es ist

$$\begin{aligned} \angle(f \circ \alpha, f \circ \beta) &= \angle((f \circ \alpha)'(0), (f \circ \beta)'(0)) = \angle(f'(z_0) \cdot \alpha'(0), f'(z_0) \cdot \beta'(0)) \\ &= \arg\left(\frac{f'(z_0) \cdot \beta'(0)}{f'(z_0) \cdot \alpha'(0)}\right) = \arg\left(\frac{\beta'(0)}{\alpha'(0)}\right) = \angle(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

■

Zum Schluss eine nicht ganz so triviale holomorphe Funktion!

Man kann sich die Frage stellen, ob es auch im Komplexen eine Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion gibt. Leider kann das nicht sein, denn es ist

$$\exp(z + 2k\pi\,\mathrm{i}) = \exp(z) \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Genauer ist $\{z \in \mathbb{C} : \exp(z) = 1\} = 2\pi\,\mathrm{i}\,\mathbb{Z}$. Immerhin gilt:

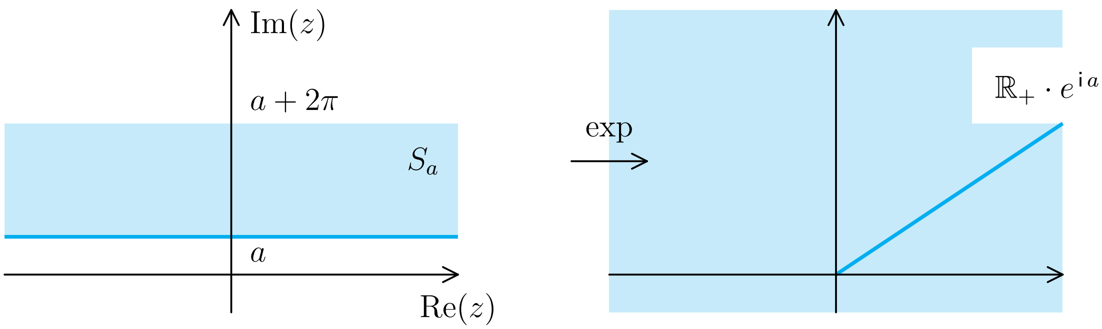
1.22. Satz

Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist $\exp : \{z \in \mathbb{C} \,:\, a \le \mathrm{Im}(z) < a + 2\pi\} \to \mathbb{C}^*$ *bijektiv.*

Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann wird durch

$$S_a := \{z \in \mathbb{C} \,:\, a \le \mathrm{Im}(z) < a + 2\pi\}$$

ein Streifen parallel zur x-Achse definiert.



1) Injektivität:

Es ist $\exp(z) = 1 \iff z = 2\pi\,\mathrm{i}\,n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Also gilt:

$$\begin{aligned}\exp(z) = \exp(w) &\implies \exp(z - w) = 1\\ &\implies z = w + 2\pi\,\mathrm{i}\,n\\ &\implies z \text{ und } w \text{ nicht beide im gleichen Streifen } S_a.\end{aligned}$$

2) Surjektivität:

Sei $w = re^{\mathrm{i}\,t} \in \mathbb{C}^*$, also $r > 0,\ 0 \le t < 2\pi$.

Wir setzen $z := \ln(r) + \mathrm{i}\,t$. Dann ist $\exp(z) = e^{\ln(r)+\mathrm{i}\,t} = r \cdot e^{\mathrm{i}\,t} = w$.

Liegt z nicht im Streifen S_a, so kann man ein $k \in \mathbb{Z}$ finden, so dass $z^* := z + 2\pi\,\mathrm{i}\,k$ in S_a liegt. Dann ist $\exp(z^*) = \exp(z) = w$. ∎

Definition

$$\log_{(a)} := (\exp\big|_{S_a^\circ})^{-1} : \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+ e^{\mathrm{i}\,a} \to S_a^\circ$$

heißt ***der durch*** a ***bestimmte Logarithmuszweig***. Insbesondere heißt $\log(z) = \log_{(-\pi)}(z)$ der ***Hauptzweig*** des Logarithmus.

1.23. Satz

Ist $z = r \cdot e^{\mathrm{i}\,t}$*, mit* $a < t < a + 2\pi$*, so ist* $\log_{(a)}(z)$ *definiert, und es gilt*

$$\log_{(a)}(z) = \ln(r) + \mathrm{i}\,t.$$

Der Beweis ist klar.

1.24. Satz

$\log(z)$ *ist eine holomorphe Funktion mit*

$$\log(1) = 0, \quad \exp(\log(z)) = z \quad \textit{und} \quad \log'(z) = 1/z.$$

Beweis: Die Funktion log ist auf der entlang der negativen reellen Achse aufgeschlitzten Ebene $\mathbb{C}'$ definiert. Die Zahl 1 liegt in dieser aufgeschlitzten Ebene, und es ist $\log(1) = \ln(1) = 0$. Nach Konstruktion ist $\exp(\log(z)) = z$ auf ganz $\mathbb{C}'$. Als Umkehrabbildung zur komplexen Exponentialfunktion (deren Funktionaldeterminante nirgends verschwindet und deren Ableitung wieder die Exponentialfunktion, also stetig ist) ist log zumindest reell differenzierbar.

Sei $z_0 \in \mathbb{C}'$ und $w_0 := \log(z_0)$. Nach der Kettenregel im $\mathbb{R}^2$ ist $D\exp(w_0) \circ D\log(z_0) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, also $\exp(w_0) \cdot D\log(z_0)(v) = v$ für alle $v \in \mathbb{C}$. Daraus folgt, dass $D\log(z_0)$ die Multiplikation mit der komplexen Zahl $\exp(w_0)^{-1}$, also insbesondere $\mathbb{C}$-linear ist. Damit ist log in z_0 komplex differenzierbar und $\log'(z_0) = 1/\exp(w_0) = 1/z_0$. Das gilt für jeden Punkt $z_0 \in \mathbb{C}'$. ∎

Wir können noch eine weitere Beschreibung des Logarithmus geben. Aus der reellen Analysis ist bekannt, dass folgendes gilt:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$$

$$\text{bzw.} \qquad \ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n.$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist $= 1$, also wird durch

$$L(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$$

auf $D_1(1)$ eine holomorphe Funktion gegeben.

Behauptung: Für $|z-1| < 1$ ist $L(z) = \log(z)$.

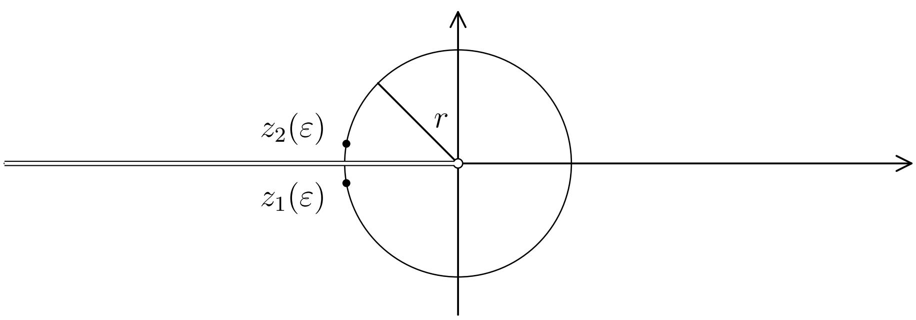
Beweis:

In $D_1(1)$ ist $L'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z+1)^n = \frac{1}{z} = \log'(z)$.

Also ist $L(z) = \log(z) + c$, mit einer Konstanten c. Setzen wir $z = 1$ ein, so erhalten wir $c = 0$. ∎

Der Nullpunkt ist natürlich ein unüberwindliches Hindernis für den Logarithmus. Warum man ihn aber nicht wenigstens auf $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definieren kann, zeigt die folgende Überlegung:

Ist $z_1(\varepsilon) = r\, e^{\mathrm{i}(-\pi+\varepsilon)}$ und $z_2(\varepsilon) = r\, e^{\mathrm{i}(\pi-\varepsilon)}$, so streben beide Punkte $z_i(\varepsilon)$ für $\varepsilon \to 0$ gegen die reelle Zahl $-r$. Aber $\log(z_2(\varepsilon)) - \log(z_1(\varepsilon)) = \mathrm{i}(\pi - \varepsilon) - \mathrm{i}(-\pi + \varepsilon) = 2(\pi - \varepsilon)\mathrm{i}$ strebt für $\varepsilon \to 0$ gegen $2\pi\mathrm{i}$.



Die Zweige $\log_{(-\pi+2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$, sind alle auf $\mathbb{C}'$ definiert. Verschafft man sich für jedes k ein Exemplar G_k von $\mathbb{C}'$ und verheftet man jeweils G_k mit G_{k+1} entlang der negativen reellen Achse und so, dass die Logarithmuswerte aneinander passen, so erhält man eine wendeltreppenartige Fläche aus unendlich vielen Blättern, die Riemann'sche Fläche des Logarithmus, auf der eine globale Logarithmusfunktion definiert werden kann.

Das Kochrezept zum Bestimmen des Logarithmus lautet folgendermaßen:

Ist eine komplexe Zahl $z = r \cdot e^{\mathrm{i}t}$ gegeben, mit $0 \le t < 2\pi$, so wähle man ein $a \in \mathbb{R}$, so dass $a < t < a + 2\pi$ ist. Wenn z nicht gerade auf der negativen reellen Achse liegt, kann $a = -\pi$ oder $a = \pi$ gewählt werden. Dann ist

$$\log_{(a)}(z) = \ln(r) + \mathrm{i}t.$$

Liegt t zwischen π und 2π, so liegt $t - 2\pi$ zwischen $-\pi$ und π. Dann ist $\log_{(\pi)}(z) = \ln(r) + \mathrm{i}t$ und $\log(z) = \log_{(-\pi)}(z) = \ln r + \mathrm{i}t - 2\pi\mathrm{i}$.

1.25. Beispiele

A. Sei $z = 2\mathrm{i}$. Dann ist $r = 2$ und $t = \frac{\pi}{2}$. Also kann $a = -\pi$ gewählt werden, und es ist $\log(z) = \log_{(-\pi)}(z) = \ln(2) + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}$.

B. Sei $z = -2\,\mathsf{i}$. Dann ist wieder $r = 2$, aber diesmal $t = \frac{3\pi}{2}$. Wir können $a = \pi$ wählen und erhalten: $\log_{(\pi)}(z) = \ln(2) + \mathsf{i}\,\frac{3\pi}{2}$.

Nun ist zugleich $z = 2 \cdot e^{-(\pi/2)\,\mathsf{i}}$, also auch $\log_{(-\pi)}(z) = \ln(2) - \mathsf{i}\,\frac{\pi}{2}$. Die beiden verschiedenen Darstellungen entsprechen der allgemeinen Gleichung

$$\log_{(a+2\pi)}(z) = \log_{(a)}(z) + 2\pi\,\mathsf{i}\,.$$

Da auch $0 < \frac{3\pi}{2} < 2\pi$ gilt, hätten wir auch $a = 0$ wählen können. Das ergibt aber nichts Neues. Es ist $\log_{(0)}(z) = \ln(2) + \mathsf{i}\,\frac{3\pi}{2}$.

Jetzt können wir auch beliebige Potenzen in $\mathbb{C}$ definieren.

Definition

Für komplexe Zahlen z und w mit $z \neq 0$ setzt man

$$z^w := \exp(w \cdot \log_{(a)}(z)).$$

Dabei muss z im Definitionsbereich des verwendeten Logarithmuszweiges liegen. Wenn möglich, benutzt man den Hauptzweig.

Das ist eine seltsame Definition! Die Potenz z^w wird im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt sein, im schlimmsten Fall gibt es unendlich viele Werte. Betrachten wir einige Beispiele:

1. Was ist $\mathsf{i}^{\,\mathsf{i}}$? Benutzen wir die Beziehung $\mathsf{i} = e^{\mathsf{i}\,\frac{\pi}{2}}$ und den Hauptzweig des Logarithmus, so folgt:

$$\mathsf{i}^{\,\mathsf{i}} = \exp(\mathsf{i} \cdot \log_{(-\pi)}(e^{\mathsf{i}\,\frac{\pi}{2}})) = \exp(\mathsf{i} \cdot \mathsf{i}\,\frac{\pi}{2}) = e^{-\pi/2} = 0.207879\ldots$$

Es kommen aber noch unendlich viele andere Werte in Frage, nämlich

$$\exp\big(\mathsf{i} \cdot (\log_{(-\pi)}(e^{\mathsf{i}\,\frac{\pi}{2}}) + k \cdot 2\pi\,\mathsf{i})\big) = e^{-\pi/2} \cdot e^{-2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Die Wurzel aus einer komplexen Zahl $z = re^{\mathsf{i}\,t}$ ist die Potenz

$$\begin{aligned} z^{1/2} &= \exp\big(\frac{1}{2} \cdot [\log_{(-\pi)}(z) + 2\pi\,\mathsf{i}\,k]\big) \\ &= \exp\big(\frac{1}{2} \cdot [\ln(r) + \mathsf{i}\,t + 2\pi\,\mathsf{i}\,k]\big) \\ &= \exp\big(\frac{1}{2}\ln(r)\big) \cdot \exp\big(\mathsf{i}\,(\frac{t}{2} + \pi k)\big) \\ &= \pm\sqrt{r} \cdot e^{\mathsf{i}\,\frac{t}{2}}, \end{aligned}$$

je nachdem, ob k gerade oder ungerade ist. Das ist ein ganz vernünftiges Ergebnis. Von den ursprünglich unendlich vielen Möglichkeiten bleiben nur zwei übrig.

3. Ähnlich ist es bei der n-ten Wurzel:

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \exp\Big(\frac{1}{n}\ln(r)\Big)\cdot\exp\Big(\mathsf{i}\,(\frac{t}{n}+\frac{2\pi k}{n})\Big) \\ &= \sqrt[n]{r}\cdot e^{\mathsf{i}\,t/n+\mathsf{i}\,2k\pi/n} \\ &= \sqrt[n]{r}\cdot e^{\mathsf{i}\,\frac{t}{n}}\cdot(\zeta_n)^k,\ k=0,\dots,n-1. \end{aligned}$$

   wobei ζ_n eine n-te Einheitswurzel bezeichnet.

In den bekannten Fällen kommt also auch Bekanntes heraus.