2.6 Der Satz von Fubini

Unser Ziel ist der Beweis des folgenden Ergebnisses.

6.1. Satz von Fubini

Sei $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^m$, so dass gilt:

1. *Für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \setminus N$ ist die Funktion $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ über $\mathbb{R}^n$ integrierbar.*
2. *Ist $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$F(\mathbf{y}) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mu_n(\mathbf{x}) & \text{für } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \setminus N \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so ist F (über $\mathbb{R}^m$) integrierbar, und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^m} F(\mathbf{y})\, d\mu_m(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mu_{n+m}.$$

Man schreibt die letzte Gleichung gerne in der Form

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mu_{n+m}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mu_n(\mathbf{x}) \Big)\, d\mu_m(\mathbf{y}).$$

Dabei kann auf der rechten Seite auch zuerst nach $\mathbf{y}$ und dann nach $\mathbf{x}$ integriert werden. Das bedeutet, dass die Berechnung eines Integrals immer auf die Berechnung von iterierten 1-dimensionalen Integralen zurückgeführt werden kann.

Allgemein sei für eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ die Funktion $f_{\mathbf{y}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Wir sagen, f ***erfüllt den Satz von Fubini***, falls gilt:

1. Für fast alle $\mathbf{y}$ ist $f_{\mathbf{y}}$ integrierbar.
2. Die fast überall definierte Funktion $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ mit $F(\mathbf{y}) := \int f_{\mathbf{y}}\, d\mu_n$ ist integrierbar.
3. Es ist $\int F\, d\mu_m = \int f\, d\mu_{n+m}$.

Die Idee für den Beweis des Satzes von Fubini ist nun ziemlich einfach. Wir beginnen mit der charakteristischen Funktion eines Quaders und erweitern Schritt für Schritt die Menge der Funktionen, für die Fubini gilt, über Treppenfunktionen und Funktionen der Klasse $\mathscr{L}^+$ bis hin zu den integrierbaren Funktionen.

Dazu sind allerdings einige Vorarbeiten erforderlich. Wir beginnen mit dem einfachsten Fall, dem Satz von Fubini für Quader.

6.2. Der Satz von Fubini für Quader

Ist $Q \subset \mathbb{R}^{n+m}$ ein Quader, so erfüllt χ_Q den Satz von Fubini.

Beweis: Wir benutzen Quader $Q_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $Q_2 \subset \mathbb{R}^m$ mit $Q = Q_1 \times Q_2$. Dann ist $\chi_Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \chi_{Q_1}(\mathbf{x}) \cdot \chi_{Q_2}(\mathbf{y})$. Für jedes feste $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ ist die Funktion

$$(\chi_Q)_{\mathbf{y}} = \begin{cases} \chi_{Q_1} & \text{falls } \mathbf{y} \in Q_2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und auch $F(\mathbf{y}) := \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_Q)_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\, d\mu_n = \mathrm{vol}_n(Q_1) \cdot \chi_{Q_2}(\mathbf{y})$ integrierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} F(\mathbf{y})\, d\mu_m &= \mathrm{vol}_n(Q_1) \cdot \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{Q_2}(\mathbf{y})\, d\mu_m = \mathrm{vol}_n(Q_1) \cdot \mathrm{vol}_m(Q_2) \\ &= \mathrm{vol}_{n+m}(Q) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \chi_Q\, d\mu_{n+m}. \end{aligned}$$

∎

6.3. Lemma

Sei $N \subset \mathbb{R}^l$ eine Nullmenge. Dann gibt es eine Folge (P_j) von offenen Quadern, so dass gilt:

1. *Ist $\mathbf{x} \in N$, so gibt es zu jedem $j \in \mathbb{N}$ ein $m = m(j) \geq j$ mit $\mathbf{x} \in P_m$.*
2. *Es ist $\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(P_j) \leq 1$.*

Beweis: Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es eine Folge $(Q_i^k)_{i \in \mathbb{N}}$ von offenen Quadern mit

$$N \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i^k \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(Q_i^k) < \frac{1}{2^k}\,.$$

Das System aller Q_i^k, $(k, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ist abzählbar. Wir wählen eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und setzen $(k(j), i(j)) := \varphi^{-1}(j)$ und $P_j := Q_{i(j)}^{k(j)}$ für $j \in \mathbb{N}$.

Sei $\mathbf{x} \in N$ und $j \in \mathbb{N}$. Sei $k_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass keiner der Quader $Q_i^{k_0}$ mit $i \in \mathbb{N}$ zu $\{P_1, \ldots, P_j\}$ gehört. Das ist möglich, weil bei der Wahl von k_0 nur die endlich vielen Indizes $k(1), \ldots, k(j)$ ausgeschlossen sind.

Dann gibt es ein $i_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\mathbf{x}$ in $Q_{i_0}^{k_0}$ liegt. Sei $m := \varphi(k_0, i_0)$. Dann ist $m > j$ und $\mathbf{x} \in P_m$.

Zu jedem $J \in \mathbb{N}$ gibt es Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$, so dass $\{\varphi^{-1}(1), \ldots, \varphi^{-1}(J)\}$ in der Menge $\{(k, i) : k \le p \text{ und } i \le q\}$ enthalten ist. Dann gilt:

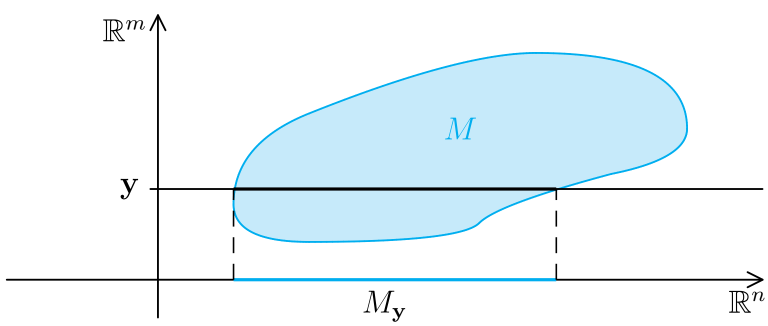
$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{J} \mathrm{vol}_n(P_j) &\le \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{q} \mathrm{vol}_n(Q_i^k) \\ &\le \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(Q_i^k) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k} \le 1.\end{aligned}$$

Lässt man J gegen Unendlich gehen, so bleibt im Grenzwert die Ungleichung erhalten. ∎

Ein wichtiges Hilfsmittel sind die so genannten „Schnitte“.

Ist $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, so wird der ***Schnitt*** $M_{\mathbf{y}} \subset \mathbb{R}^n$ definiert als die Menge

$$M_{\mathbf{y}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M\}.$$



Ist z.B. $M = M' \times M'' \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, so ist

$$M_{\mathbf{y}} = \begin{cases} M' & \text{falls } \mathbf{y} \in M'', \\ \varnothing & \text{sonst.} \end{cases}$$

6.4. Schnitte von Nullmengen

Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine Nullmenge. Dann ist für fast alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ auch der Schnitt $M_{\mathbf{y}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M\}$ eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$.

BEWEIS: Nach dem obigen Lemma gibt es eine Folge von Quadern $P_j \in \mathbb{R}^{n+m}$, so dass gilt:

1. Es ist $\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}_{n+m}(P_j) \le 1$.
2. Zu jedem $\mathbf{x} \in M$ gibt es eine unendliche Teilfolge $(j_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$, so dass $\mathbf{x}$ in allen Quadern P_{j_ν} liegt.

Jeder Quader P_j besitzt eine Zerlegung $P_j = P_j' \times P_j''$. Dann sei $F_j := \mathrm{vol}_n(P_j') \cdot \chi_{P_j''}$.

Weil $\sum_j \int F_j \, d\mu_m = \sum_j \mathrm{vol}_{n+m}(P_j) \le 1$ ist, folgt aus dem Satz von Beppo Levi, dass die Funktionenreihe $\sum_j F_j$ auf dem $\mathbb{R}^m$ fast überall gegen eine integrierbare Funktion F konvergiert.

Sei nun $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m$ ein beliebiger Punkt, und für $j \in \mathbb{N}$ sei $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $g_j(\mathbf{x}) := \chi_{P_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)$. Dann ist

$$\int g_j \, d\mu_n = \int \chi_{P_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) \, d\mu_n(\mathbf{x}) = \mathrm{vol}_n(P_j') \cdot \chi_{P_j''}(\mathbf{y}_0) = F_j(\mathbf{y}_0).$$

Wenn also $\sum_{j=1}^\infty F_j(\mathbf{y}_0)$ konvergiert (und das gilt für fast alle $\mathbf{y}_0$), so konvergiert auch $\sum_{j=1}^\infty \int g_j \, d\mu_n(\mathbf{x})$, und aus dem Satz von Beppo Levi folgt, dass $\sum_{j=1}^\infty g_j(\mathbf{x})$ für fast alle $\mathbf{x}$ konvergiert.

Zu jedem Punkt $(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) \in M$ gibt es eine unendliche Teilfolge von Quadern P_{j_ν} mit $(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) \in P_{j_\nu}$, also $g_{j_\nu}(\mathbf{x}) = 1$. Das bedeutet, dass die Reihe $\sum_{j=1}^\infty g_j(\mathbf{x})$ divergiert. Da dies höchstens auf einer Nullmenge passieren darf, muss

$$M_{\mathbf{y}_0} = \{\mathbf{x} \, : \, (\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) \in M\}$$

eine Nullmenge sein. Und das gilt für fast alle $\mathbf{y}_0$. ∎

Wir führen jetzt den Beweis **des Satzes von Fubini** in mehreren Schritten aus:

Schritt 1 (Linearkombinationen):

Sind $f, g : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ zwei integrierbare Funktionen, für die der Satz von Fubini gilt, und ist $r \in \mathbb{R}$, so gilt der Satz von Fubini auch für $f + g$ und $r \cdot f$.

Der Beweis ist eine simple Überprüfung der drei Bedingungen. Er folgt aus der Tatsache, dass $(f+g)_\mathbf{y} = f_\mathbf{y} + g_\mathbf{y}$ und $(rf)_\mathbf{y} = r \cdot f_\mathbf{y}$ für jedes $\mathbf{y}$ gilt.

Schritt 2 (fast überall gleiche Funktionen):

Sei $g : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, für die der Satz von Fubini gilt. Ist $f = g$ fast überall, so ist auch f integrierbar, und es gibt eine Nullmenge N, so dass $f = g$ außerhalb von N gilt.

Für fast alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ ist $N_\mathbf{y}$ eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$ und $f_\mathbf{y} = g_\mathbf{y}$ außerhalb $N_\mathbf{y}$. Also ist für fast alle $\mathbf{y}$ auch $f_\mathbf{y}$ und $F(\mathbf{y}) := \int f_\mathbf{y} \, d\mu_n = \int g_\mathbf{y} \, d\mu_n$ integrierbar, und

$$\int F \, d\mu_m = \int \int g_\mathbf{y} \, d\mu_n \, d\mu_m = \int g \, d\mu_{n+m} = \int f \, d\mu_{n+m}.$$

Also erfüllt auch f den Satz von Fubini.

Schritt 3 (Treppenfunktionen):

Sei g eine Treppenfunktion auf dem $\mathbb{R}^{n+m}$. Dann gibt es endlich viele Quader $Q_1, \ldots, Q_r \subset \mathbb{R}^{n+m}$ und Zahlen $c_1, \ldots, c_r$, so dass fast überall gilt:

$$g = \sum_{\varrho=1}^{r} c_\varrho \chi_{Q_\varrho}.$$

Nach dem Satz von Fubini für Quader erfüllt jede Funktion χ_{Q_ϱ} den Satz von Fubini, und nach Schritt 1 und 2 gilt das auch für g.

Schritt 4 (Funktionen aus $\mathscr{L}^+$):

Sei $h \in \mathscr{L}^+$ und (g_ν) eine Folge von Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^{n+m}$, die fast überall (also außerhalb einer Nullmenge N) monoton wachsend gegen h konvergiert, so dass die Folge der Integrale über die g_ν beschränkt bleibt. Für fast alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ ist $N_\mathbf{y}$ eine Nullmenge, und für solche $\mathbf{y}$ konvergiert $(g_\nu)_\mathbf{y}$ monoton wachsend auf $\mathbb{R}^n \setminus N_\mathbf{y}$ gegen $h_\mathbf{y}$.

Nach dem Satz von Fubini für Treppenfunktionen ist $(g_\nu)_\mathbf{y}$ und $\widetilde{g}_\nu(\mathbf{y}) := \int (g_\nu)_\mathbf{y}\, d\mu_n$ integrierbar und $\int \widetilde{g}_\nu(\mathbf{y})\, d\mu_m = \int g_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mu_{n+m}$. Diese Integrale bleiben nach Voraussetzung beschränkt, und außerdem bilden die $\widetilde{g}_\nu$ eine fast überall monoton wachsende Folge. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz konvergieren die $\widetilde{g}_\nu$ fast überall auf $\mathbb{R}^m$ gegen eine integrierbare Funktion $\widetilde{g}$, und es ist

$$\int \widetilde{g}(\mathbf{y})\, d\mu_m = \lim_{\nu\to\infty} \int \widetilde{g}_\nu(\mathbf{y})\, d\mu_m = \lim_{\nu\to\infty} \int g_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mu_{n+m} = \int h(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mu_{n+m}.$$

Für fast alle $\mathbf{y}$ kann man aber den Satz von der monotonen Konvergenz auch auf die Folge $((g_\nu)_\mathbf{y})$ anwenden und erhält, dass die Grenzfunktion $h_\mathbf{y}$ integrierbar und $\int h_\mathbf{y}\, d\mu_n = \lim_{\nu\to\infty} \int (g_\nu)_\mathbf{y}\, d\mu_n$ ist. Also ist

$$H(\mathbf{y}) := \int h_\mathbf{y}\, d\mu_n = \lim_{\nu\to\infty} \widetilde{g}_\nu(\mathbf{y}) = \widetilde{g}(\mathbf{y})$$

integrierbar und

$$\int H(\mathbf{y})\, d\mu_m = \int \widetilde{g}(\mathbf{y})\, d\mu_m = \int h(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mu_{n+m}.$$

Also erfüllt h den Satz von Fubini.

Schritt 5 (integrierbare Funktionen):

Ist f integrierbar auf dem $\mathbb{R}^{n+m}$, so gibt es Funktionen $g, h \in \mathscr{L}^+$ mit $f = g - h$. Nach Schritt 1 und 4 gilt dann der Satz von Fubini für f.

Die Formeln mit der umgekehrten Reihenfolge der Integrationen folgen analog. Damit ist alles gezeigt. ∎

Leider ist der Satz von Fubini nur anwendbar, wenn man weiß, dass f integrierbar ist. Da ist der folgende Satz eine wertvolle Ergänzung:

6.5. Satz von Tonelli

Sei f messbar. Existiert $\int\int\ldots\int |f(x_1,\ldots,x_n)|\,dx_1\ldots dx_n$ *(mit irgend einer Integrationsreihenfolge), so ist f integrierbar.*

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ sei $Q_k := [-k,k]^n$ und $g_k := k \cdot \chi_{Q_k}$. Die Folge der Funktionen $f_k := \min(g_k, |f|)$ ist monoton wachsend und konvergiert gegen $|f|$. Mit f ist auch $|f|$ messbar und daher jede der Funktionen f_k messbar. Da f_k (als einzelne Funktion) außerdem durch g_k L-beschränkt ist, ist f_k sogar integrierbar. Nach Fubini gilt:

$$\begin{aligned} 0 \le \int f_k\,d\mu_n &= \int\int\ldots\int f_k(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n \\ &\le \int\int\ldots\int |f(x_1,\ldots,x_n)|\,dx_1\ldots dx_n, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung nach Voraussetzung erfüllt ist. Der Satz von der monotonen Konvergenz liefert nun, dass $|f|$ integrierbar ist, und wegen der Messbarkeit von f ist dann auch f integrierbar. ∎

6.6. Prinzip von Cavalieri

Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine endlich-messbare Menge. Dann ist $\mu_n(M_{\mathbf{y}}) < \infty$ für fast alle $\mathbf{y}$, und es gilt:

$$\mu_{n+m}(M) = \int_{\mathbb{R}^m} \mu_n(M_{\mathbf{y}})\,d\mu_m(\mathbf{y}).$$

Beweis: Wir wenden den Satz von Fubini auf $f = \chi_M$ an. Für fast alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ ist danach die Funktion

$$\mathbf{x} \mapsto \chi_M(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \chi_{M_{\mathbf{y}}}(\mathbf{x})$$

integrierbar, die Funktion $f_M : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ mit

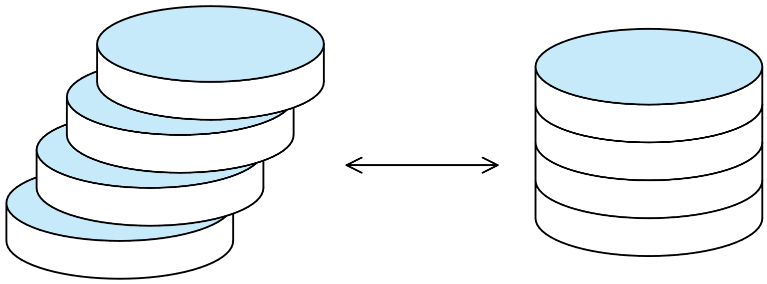
$$f_M(\mathbf{y}) = \begin{cases} \mu_n(M_{\mathbf{y}}) & \text{falls } M_{\mathbf{y}} \text{ endlich-messbar,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist ebenfalls integrierbar, und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mu_n(M_{\mathbf{y}})\,d\mu_m = \int_{\mathbb{R}^m} f_M(\mathbf{y})\,d\mu_m = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \chi_M(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mu_{n+m} = \mu_{n+m}(M).$$

∎

Es war die Entdeckung von Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647), dass die folgenden Figuren das gleiche Volumen besitzen und der Übergang zu immer dünneren Schichten schließlich zu der Aussage des Satzes von Cavalieri führt.



6.7. Folgerung

Es seien $M_1 \subset \mathbb{R}^n$, $M_2 \subset \mathbb{R}^m$ und $M := M_1 \times M_2$. Ist M messbar und $\mu_{n+m}(M) > 0$, so sind auch M_1 und M_2 messbar und es ist $\mu_{n+m}(M) = \mu_n(M_1) \cdot \mu_m(M_2)$.

Beweis: Ist M messbar, so ist $M \cap Q$ für jeden abgeschlossenen Quader $Q = Q' \times Q'' \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ endlich messbar. Nach Cavalieri ist dann für fast alle $\mathbf{y}$ der Schnitt

$$M_{\mathbf{y}} \cap Q' = M_{\mathbf{y}} \cap Q_{\mathbf{y}} = (M \cap Q)_{\mathbf{y}} = \begin{cases} M_1 \cap Q' & \text{für } \mathbf{y} \in M_2 \cap Q'' \\ \varnothing & \text{sonst} \end{cases}$$

endlich-messbar. Dann muss M_2 eine Nullmenge oder M_1 messbar sein.

Wäre also eine der beiden Mengen M_1, M_2 nicht messbar, so müsste die andere eine Nullmenge sein. Aber dann wäre auch M eine Nullmenge, im Gegensatz zur Voraussetzung. Wir können daher annehmen, dass die beiden Mengen M_1 und M_2 messbar und keine Nullmengen sind.

Ist M beschränkt und damit endlich-messbar, so ist χ_M und damit nach (dem Beweis des Satzes von) Cavalieri auch die Funktion

$$f_M = \mu_n(M_1) \cdot \chi_{M_2}$$

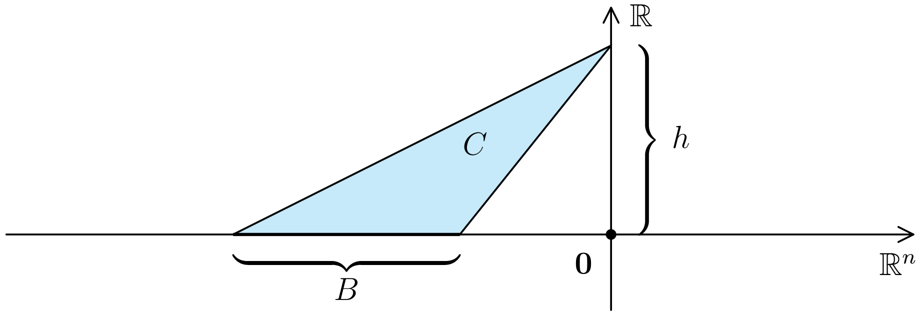
integrierbar, und es gilt:

$$\mu_{n+m}(M) = \int f_M(\mathbf{y})\, d\mu_m(\mathbf{y}) = \mu_n(M_1) \cdot \int \chi_{M_2}(\mathbf{y})\, d\mu_m(\mathbf{y}) = \mu_n(M_1) \cdot \mu_m(M_2).$$

Ist M unbeschränkt, so betrachtet man die endlich-messbaren Mengen $M \cap Q_\nu$ mit $Q_\nu = [-\nu, \nu]^{n+m}$ und lässt ν gegen Unendlich gehen. ∎

6.8. Beispiel

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $h > 0$. Dann nennt man die Menge $C := \{\big((1-\lambda)\mathbf{x}, \lambda h\big) \,:\, \mathbf{x} \in B \text{ und } 0 \le \lambda \le 1\}$ den ***Kegel*** über B mit der Spitze in $(\mathbf{0}, h)$.



C ist kompakt und damit messbar. Für $t \in [0, h]$ ist auch

$$C_t = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \,:\, (\mathbf{y}, t) \in C\} = \{(1 - \frac{t}{h}) \,:\, \mathbf{x} \in B\} = (1 - \frac{t}{h}) \cdot B$$

messbar. Nach Cavalieri ist dann

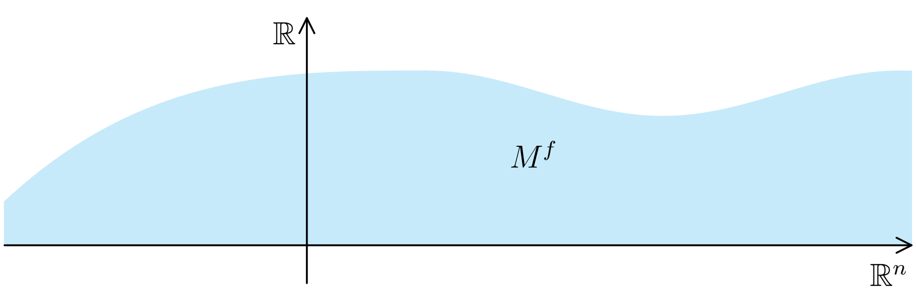
$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_{n+1}(C) &= \int_0^h \mathrm{vol}_n(C_t)\,dt \;=\; \int_0^h \mathrm{vol}_n\big((1 - \frac{t}{h}) \cdot B\big)\,dt \\
&= \mathrm{vol}_n(B) \cdot \int_0^h (1 - \frac{t}{h})^n\,dt \\
&= \mathrm{vol}_n(B) \cdot (-h) \cdot \int_0^h \varphi(t)^n \varphi'(t)\,dt \qquad (\varphi(t) := 1 - t/h\,) \\
&= \mathrm{vol}_n(B) \cdot (-h) \cdot \int_1^0 x^n\,dx \\
&= \mathrm{vol}_n(B) \cdot h \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} \cdot \mathrm{vol}_n(B) \cdot h.
\end{aligned}$$

Im $\mathbb{R}^3$ ergibt das die aus der Elementargeometrie bekannte Formel

$$\mathrm{vol}(C) = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}.$$

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine nicht-negative Funktion, so ist die ***Ordinatenmenge*** von f gegeben durch

$$\boxed{M^f := \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \,:\, 0 \le t < f(\mathbf{x})\}.}$$



6.9. Satz

Sei f messbar (bzw. integrierbar). Dann ist M^f messbar (bzw. endlich-messbar) und $\mu_{n+1}(M^f) = \int f\, d\mu_n$.

Beweis: 1) Wir zeigen zunächst: Ist f messbar, so ist auch

$$(\mathbf{x}, t) \mapsto f(\mathbf{x}) - t$$

messbar. Da $(\mathbf{x}, t) \mapsto t$ stetig ist, reicht es zu zeigen, dass die Funktion $F : (\mathbf{x}, t) \mapsto f(\mathbf{x})$ messbar ist. Da jede messbare Funktion Grenzwert einer Folge von integrierbaren Funktionen ist, kann man annehmen, dass f integrierbar ist.

Ist f eine Treppenfunktion, so ist F zwar keine Treppenfunktion, kann aber durch eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen approximiert werden (indem man außserhalb von $|t| > \nu$ alles $= 0$ setzt). und liegt somit in $\mathscr{L}^+$.

Ist $f \in \mathscr{L}^+$ Grenzwert einer monoton wachsenden Folge (h_ν) von Treppenfunktionen, so ist

$$F(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}) = \lim_{\nu\to\infty} h_\nu(\mathbf{x}) = \lim_{\nu\to\infty} H_\nu(\mathbf{x}, t),$$

wobei $H_\nu(\mathbf{x}, t) = h_\nu(\mathbf{x})$ in $\mathscr{L}^+$ liegt. Auch in diesem Fall folgt, dass $F \in \mathscr{L}^+$ ist

Ist $f = g - h$ mit $g, h \in \mathscr{L}^+$, so ist $F = G - H$, wobei $G(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x})$ und $H(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x})$ Elemente von $\mathscr{L}^+$ sind. Also ist auch F integrierbar.

2) Mit f ist also $F(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}) - t$ messbar, und damit auch die Menge $M := \{(\mathbf{x}, t) : F(\mathbf{x}, t) > 0\}$. Daraus folgt, dass $M^f = M \cap \big(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)\big)$ messbar ist, und nach Cavalieri ist

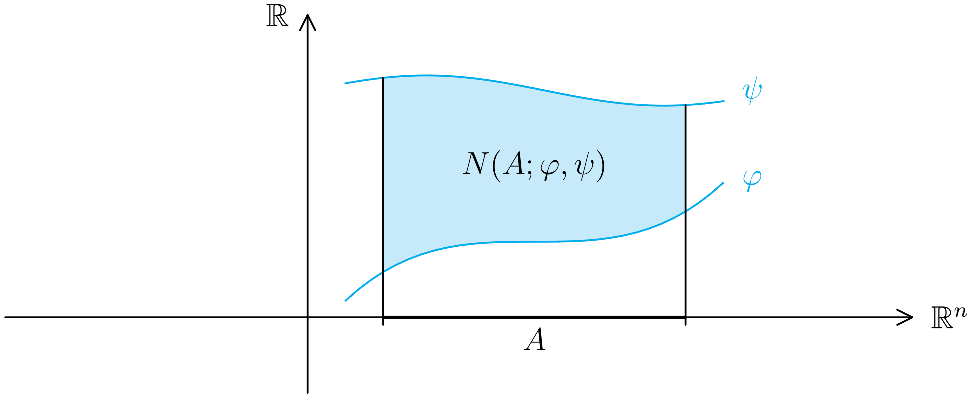
$$\mu_{n+1}(M^f) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_1\big((M^f)_{\mathbf{x}}\big)\, d\mu_n(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\, d\mu_n,$$

denn es ist $(M^f)_{\mathbf{x}} = \{t \in \mathbb{R} : (\mathbf{x}, t) \in M^f\} = [0, f(\mathbf{x}))$. ■

Der schon aus der Riemann'schen Integrationstheorie bekannte Begriff des Normalbereichs kann in der Lebesgue-Theorie verallgemeinert werden. Unter einem ***Normalbereich*** über dem $\mathbb{R}^n$ verstehen wir jetzt eine Menge der Gestalt

$$N(A; \varphi, \psi) := \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in A \text{ und } \varphi(\mathbf{x}) \le t \le \psi(\mathbf{x})\}$$

mit einer messbaren Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und integrierbaren Funktionen $\varphi, \psi : A \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(\mathbf{x}) \le \psi(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in A$.



Ein Normalbereich ist messbar: Die Mengen $M_u := \{(\mathbf{x}, t) : t < \psi(\mathbf{x})\}$, $M_o := \{(\mathbf{x}, t) : t > \varphi(\mathbf{x})\}$ und $A \times \mathbb{R}$ sind offensichtlich messbar, und daher auch $N = M_u \cap M_o \cap (A \times \mathbb{R})$.

Ist $f : N \to \mathbb{R}$ integrierbar (also eigentlich die triviale Fortsetzung von f), so folgt mit dem Satz von Fubini sofort:

$$\boxed{\int_{N(A;\varphi,\psi)} f(\mathbf{x}, t)\, d\mu_{n+1} = \int_A \left(\int_{\varphi(\mathbf{x})}^{\psi(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, t)\, dt \right) d\mu_n \,.}$$