2.5 Messbare Mengen und Funktionen

Definition

Eine beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt ***messbar***, falls die charakteristische Funktion χ_M integrierbar ist. Die Zahl $\mathrm{vol}_n(M) := \int \chi_M \, d\mu_n$ nennt man das ***Volumen*** von M.

Eine beliebige Menge M heißt ***messbar***, falls $M \cap Q$ für jeden abgeschlossenen Quader messbar ist.

Für $\nu \in \mathbb{N}$ sei $Q_\nu := [-\nu, \nu] \times \ldots \times [-\nu, \nu]$. Ist M messbar, so ist $f_\nu := \chi_{M \cap Q_\nu}$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ integrierbar, und die Folge der (f_ν) wächst monoton. Die Zahlen

$$\mathrm{vol}_n(M \cap Q_\nu) = \int \chi_{M \cap Q_\nu} \, d\mu_n$$

bilden dann ebenfalls eine monoton wachsende Folge. Ist diese Folge nach oben beschränkt, so konvergieren die f_ν nach Levi's Satz von der monotonen Konvergenz gegen eine integrierbare Funktion, die offensichtlich mit χ_M übereinstimmt.

Das führt zu der folgenden Definition:

Definition

Sei M messbar. Ist die Folge der Volumina $\mathrm{vol}_n(M \cap Q_\nu)$ nach oben beschränkt, so heißt

$$\boxed{\mu_n(M) := \lim_{\nu \to \infty} \mathrm{vol}_n(M \cap Q_\nu)}$$

das ***n-dimensionale (Lebesgue-)Maß*** von M und M ***endlich-messbar***.

Ist M messbar, aber nicht endlich-messbar, so setzen wir $\mu_n(M) := +\infty$.

Ist M nicht einmal messbar, so können wir M überhaupt kein vernünftiges Maß zuordnen.

5.1. Satz (Eigenschaften messbarer Mengen)

Die Mengen $M, N \subset \mathbb{R}^n$ seien messbar. Dann gilt:

1. *$M \cup N$, $M \cap N$ und $M \setminus N$ sind messbar.*
2. *M ist genau dann eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$, wenn $\mu_n(M) = 0$ ist.*
3. *Ist $M \subset N$, so ist $\mu_n(M) \le \mu_n(N)$.*
4. *Es ist $\mu_n(M \cup N) + \mu_n(M \cap N) = \mu_n(M) + \mu_n(N)$.*

Beweis:

1) Ist Q ein abgeschlossener Quader, so ist $Q \cap (M \cup N) = (Q \cap M) \cup (Q \cap N)$, $Q \cap (M \cap N) = (Q \cap M) \cap (Q \cap N)$ und $Q \cap (M \setminus N) = (Q \cap M) \setminus (Q \cap N)$.

Deshalb reicht es, endlich-messbare Mengen zu betrachten. Sind χ_M und χ_N integrierbar, so sind auch $\chi_{M \cup N} = \max(\chi_M, \chi_N)$, $\chi_{M \cap N} = \min(\chi_M, \chi_N)$ und $\chi_{M \setminus N} = (\chi_M - \chi_N)^+$ integrierbar.

2) Ist M eine Nullmenge, so gilt $\chi_M = 0$ fast überall. Also ist χ_M integrierbar und $\mu_n(M) = \int \chi_M \, d\mu_n = 0$.

Sei umgekehrt M messbar und $\mu_n(M) = 0$. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass M beschränkt ist (sonst behandeln wir erst die Mengen $M \cap Q_\nu$). Dann ist χ_M integrierbar und $\int \chi_M \, d\mu_n = 0$. Weil $|\chi_M| = \chi_M$ ist, folgt, dass $\chi_M = 0$ fast überall gilt. Also ist $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \chi_M(\mathbf{x}) \neq 0\}$ eine Nullmenge.

3) Ist N nicht endlich-messbar und daher $\mu_n(N) = +\infty$, so ist nichts zu zeigen. Ist dagegen N endlich-messbar, so ist χ_N integrierbar und $\chi_{Q_\nu \cap M}$ eine (durch χ_N) L-beschränkte Folge von integrierbaren Funktionen, die dann fast überall gegen die integrierbare Funktion $\chi_M \leq \chi_N$ konvergiert. Also ist

$$\mu_n(M) = \lim_{\nu \to \infty} \mu_n(Q_\nu \cap M) \leq \mu_n(N).$$

4) Ist eine der beiden Mengen M und N nicht endlich-messbar, so steht auf beiden Seiten der Gleichung $+\infty$. Seien also M und N endlich-messbar. Dann ist

$$\chi_{M \cup N} + \chi_{M \cap N} = \chi_M + \chi_N.$$

Daraus folgt die gewünschte Gleichung. ■

5.2. Satz (σ-Additivität)

Die Mengen M_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, seien messbar. Dann ist auch $M := \bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu$ messbar, und es gilt:

$$\mu_n(M) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_n(M_\nu).$$

a) Sind die M_ν paarweise disjunkt, so gilt die Gleichheit.

b) Ist $M_\nu \subset M_{\nu+1}$ für alle ν, so ist $\mu_n(M) = \lim_{\nu \to \infty} \mu_n(M_\nu)$.

Beweis: Das (historisch bedingte) „σ“ im Namen des Satzes steht für „**S**umme“.

Sei $A_m := M_1 \cup \ldots \cup M_m$. Dann ist (A_m) eine Folge von messbaren Mengen mit $A_m \subset A_{m+1}$, und es ist $\bigcup_m A_m = M = \bigcup_\nu M_\nu$.

Sei $C := \sup_m \mu_n(A_m)$. Ist $C < \infty$, so konvergiert χ_{A_m} nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gegen eine integrierbare Funktion. Dann ist χ_M integrierbar, M messbar und $\mu_n(M) = \lim\limits_{m\to\infty} \mu_n(A_m)$.

Ist $C = +\infty$, so gilt zumindest noch für jeden abgeschlossenen Quader Q, dass $M \cap Q$ messbar und

$$\mu_n(M \cap Q) = \lim_{m\to\infty} \mu_n(A_m \cap Q)$$

ist. Also ist M auch in diesem Fall messbar, und weil alle A_m in M liegen, muss $\mu_n(M) = +\infty$ sein.

Induktiv folgt für alle $m: \mu_n(A_m) \le \mu_n(M_1) + \cdots + \mu_n(M_m)$. Sind die M_ν paarweise disjunkt, so gilt die Gleichheit. Lässt man jetzt m gegen Unendlich gehen, so erhält man die gewünschten Aussagen. ■

5.3. Satz

Offene, abgeschlossene und kompakte Mengen im $\mathbb{R}^n$ sind messbar.

Beweis: Jeder offene Quader ist messbar. Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene Menge, so gibt es zu jedem Punkt $\mathbf{x} \in B$ eine offene Quaderumgebung $U = U(\mathbf{x}) \subset B$. Beschränkt man sich dabei auf Punkte mit rationalen Koordinaten und Quader mit rationaler Seitenlänge, so erhält man eine Folge von offenen Quadern, deren Vereinigung ganz B ergibt. Damit ist auch B messbar.

Abgeschlossene Mengen sind Komplemente offener Mengen und damit ebenfalls messbar. Kompakte Mengen sind spezielle abgeschlossene Mengen. ■

Sei $f \in \mathscr{L}^1$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Dann sind f und χ_M messbare Funktionen. Also ist auch $f \cdot \chi_M$ messbar. Weil $|f|$ integrierbar und $|f \cdot \chi_M| \le |f|$ ist, ist auch $f \cdot \chi_M$ integrierbar.

Definition

Sei $f \in \mathscr{L}^1$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Dann setzt man

$$\int_M f \, d\mu_n := \int f \cdot \chi_M \, d\mu_n.$$

Eine beliebige Funktion $g : M \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar, falls die triviale Fortsetzung $\widehat{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar ist, und dann setzt man

$$\int_M g \, d\mu_n := \int \widehat{g} \cdot \chi_M \, d\mu_n.$$

Ist N eine Nullmenge und $f : N \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion, so ist ist $\widehat{f} = 0$ fast überall, also integrierbar, und es ist $\int_N f \, d\mu_n = \int \widehat{f} \, d\mu_n = 0$.

5.4. Satz

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $f : M \to \mathbb{R}$ integrierbar. Ist $N \subset M$ ebenfalls messbar, so ist auch $f|_N : N \to \mathbb{R}$ integrierbar, und es gilt:

$$\int_N f \, d\mu_n = \int \widehat{f} \cdot \chi_N \, d\mu_n.$$

Beweis: Wegen der Zerlegung $f = f^+ - f^-$ reicht es, den Fall $f \geq 0$ zu betrachten. Es sei $\widehat{f}$ die triviale Fortsetzung von f auf den $\mathbb{R}^n$ und

$$g_\nu := \min(\widehat{f}, \nu \cdot \chi_{N \cap Q_\nu}), \text{ mit } Q_\nu = [-\nu, \nu]^n.$$

Dann bilden die Funktionen g_ν eine Folge von nicht-negativen integrierbaren Funktionen, die gegen $\widehat{f} \cdot \chi_N \leq \widehat{f}$ konvergiert. Weil (g_ν) durch $\widehat{f}$ L-beschränkt ist, folgt aus dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz, dass $\widehat{f} \cdot \chi_N$ integrierbar ist. Also ist $\widehat{f|_N} = \widehat{f} \cdot \chi_N$ und damit $f|_N$ integrierbar. ∎

5.5. Folgerung

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $f : M \to \mathbb{R}$ integrierbar. Ist $N \subset M$ messbar, so auch $M \setminus N$, und es gilt:

$$\int_M f \, d\mu_n = \int_N f \, d\mu_n + \int_{M \setminus N} f \, d\mu_n.$$

Beweis: Es ist $\chi_M = \chi_N + \chi_{M \setminus N}$, also

$$\int_M f \, d\mu_n = \int \widehat{f} \cdot \chi_M \, d\mu_n = \int \widehat{f} \cdot \chi_N \, d\mu_n + \int \widehat{f} \cdot \chi_{M \setminus N} \, d\mu_n = \int_N f \, d\mu_n + \int_{M \setminus N} f \, d\mu_n.$$

∎

Integrierbare Funktionen können sich sehr weit von stetigen oder stückweise stetigen Funktionen entfernen, aber umgekehrt gibt es viele einfache stetige Funktionen, die nicht integrierbar sind, z.B. die konstanten Funktionen. Wir brauchen eine möglichst allgemeine Funktionenklasse, die integrierbare und (stückweise) stetige Funktionen umfasst. Das ist die Klasse der messbaren Funktionen.

Definition

Sind a, b, c reelle Zahlen mit $a < c$, so heißt $\text{Mitt}(a, b, c) := \max(a, \min(b, c))$ die ***Mittlere (Zahl)*** von a, b und c.

Bei drei Zahlen a, b, c mit $a < c$ gibt es genau ein Element $x \in \{a, b, c\}$, das zwischen den beiden anderen liegt. Das ist die Mittlere.

Ist x eine reelle Zahl, so ist stets $-\infty < x < +\infty$.

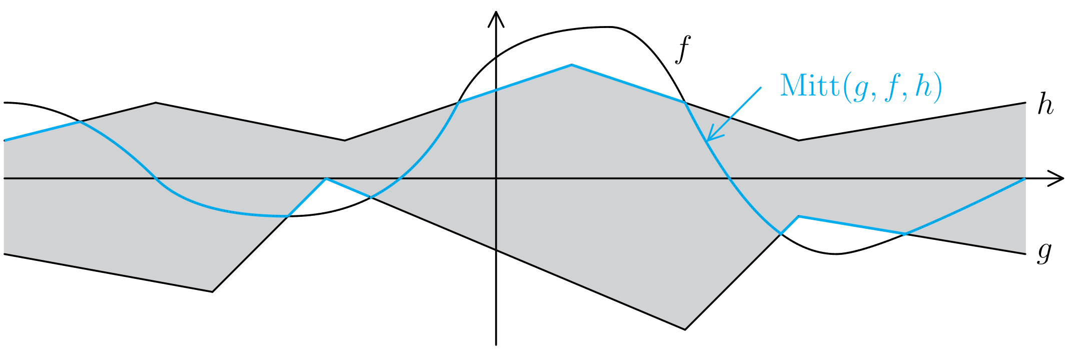
Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ eine beliebige Funktion. Sind $g, h : M \to \mathbb{R}$ zwei weitere Funktionen mit $g \leq h$, so nennen wir die Funktion $\mathrm{Mitt}(g, f, h)$ mit

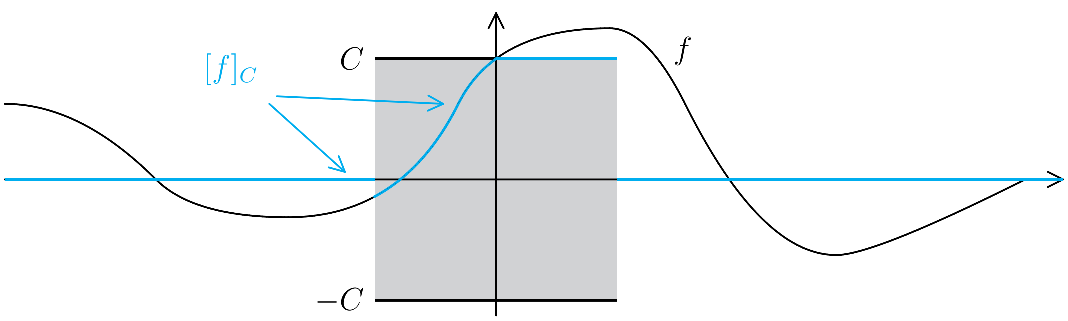
$$\mathrm{Mitt}(g, f, h)(\mathbf{x}) := \max\Big(g(\mathbf{x}), \min\big(f(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})\big)\Big)$$

die ***Mittlere*** von g, f und h.

Bildet man die Mittlere der drei Funktionen g, f, h, so schneidet man f von oben mit h und von unten mit g ab.



Ist $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion, $k \in \mathbb{N}$ und $Q_k := [-k, k]^n$, so nennen wir $[f]_k := \mathrm{Mitt}(-k, f, k) \cdot \chi_{Q_k} = \mathrm{Mitt}(-k \cdot \chi_{Q_k}, f, k \cdot \chi_{Q_k})$ die k-***Stutzung*** von f.



Definition

Eine fast überall endliche Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt ***messbar***, falls für alle $k \in \mathbb{N}$ die Stutzung $[f]_k$ integrierbar ist.

Offensichtlich ist jede integrierbare Funktion messbar.

5.6. Lemma

Ist f fast überall endlich, so konvergiert die Folge der Funktionen $[f]_k$ punktweise gegen f.

Beweis: Ist $|f(\mathbf{x})| < \infty$, so gibt es ein k_0, so dass $[f]_k(\mathbf{x}) = \text{Mitt}(-k, f(\mathbf{x}), k) = f(\mathbf{x})$ für $k \geq k_0$ ist. Ist $f(\mathbf{x}) = +\infty$ (bzw. $= -\infty$), so ist $\text{Mitt}(-k, f(\mathbf{x}), k) = k$ (bzw. $= -k$) für genügend großes k, so dass auch in diesem Fall $[f]_k(\mathbf{x})$ gegen $f(\mathbf{x})$ konvergiert. ∎

5.7. Satz

Eine fast überall endliche Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann messbar, wenn es eine Folge von integrierbaren Funktionen f_k gibt, die fast überall gegen f konvergiert.

Beweis: 1) Sei f messbar. Dann sind die Funktionen $[f]_k$ integrierbar, und sie konvergieren sogar überall gegen f.

2) Nun sei vorausgesetzt, dass es eine Folge von integrierbaren Funktionen f_ν gibt, die fast überall gegen f konvergiert. Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $g := k \cdot \chi_{Q_k}$ (≥ 0). Dann ist g integrierbar.

$h_\nu := \text{Mitt}(-g, f_\nu, g) = [f_\nu]_k$ ist ebenfalls integrierbar, und es ist $|h_\nu| \leq g$. Die Folge (h_ν) konvergiert fast überall gegen $\text{Mitt}(-g, f, g) = [f]_k$ Nach dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz ist dann auch $[f]_k$ integrierbar. Weil dies für jedes k gilt, ist f messbar. ∎

5.8. Satz

Die Funktionen f und g seien messbar, c eine reelle Zahl. Dann sind auch $c \cdot f$, $f + g$, $|f|$, $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ messbar.

Beweis: Dass $c \cdot f$, $f + g$ und $|f|$ messbar sind, folgt sofort aus dem vorigen Satz. Wegen der Gleichungen

$$\begin{aligned} \max(f, g) &= \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \\ \text{und} \quad \min(f, g) &= \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \end{aligned}$$

sind auch $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ messbar. ∎

5.9. Satz

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f messbar.

Beweis: Die Stutzungen $[f]_k$ sind jeweils auf Q_k stetig und daher Riemann-integrierbar. Erst recht sind sie Lebesgue-integrierbar, und da sie gegen f konvergieren, ist f messbar. ∎

5.10. Satz

Sei (f_ν) eine Folge von messbaren Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$, die punktweise gegen eine fast überall endliche Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ konvergiert. Dann ist auch f messbar.

Beweis: Bei festem $k \in \mathbb{N}$ ist $[f_\nu]_k$ integrierbar und $\leq k \cdot \chi_{Q_k}$ für alle ν. Außerdem strebt die Folge $[f_\nu]_k$ gegen $[f]_k$. Aus dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz folgt, dass $[f]_k$ integrierbar ist. Weil das für alle k gilt, ist f messbar. ∎

5.11. Satz

Ist f messbar und Lebesgue-beschränkt, so ist f integrierbar.

Beweis: Sei g integrierbar und $|f| \leq g$.

Dann bilden die Funktionen $[f]_k$ eine Lebesgue-beschränkte Folge von integrierbaren Funktionen, und ihr Grenzwert f ist nach dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz ebenfalls integrierbar. ∎

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und nicht-negativ. Dann gibt es eine Folge (f_ν) von integrierbaren Funktionen mit $0 \leq f_\nu \leq f$, die fast überall gegen f konvergiert (man nehme z.B. die Stutzungen $[f]_\nu$). Konvergiert $\int f_\nu \, d\mu_n$, so folgt aus dem Satz von Lebesgue, dass auch f integrierbar und $\int f \, d\mu_n = \lim_{\nu\to\infty} \int f_\nu \, d\mu_n$ ist. Ist die Folge der Integrale unbeschränkt, so setzen wir $\int f \, d\mu_n := +\infty$. Auf diese Weise wird das ***Integral einer beliebigen nicht-negativen messbaren Funktion*** $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ definiert.

5.12. Integrierbarkeitskriterium

Eine Funktion f ist genau dann integrierbar, wenn f messbar und $\int |f| \, d\mu_n < \infty$ ist.

Beweis: Ist f integrierbar, so ist f auch messbar und $|f|$ integrierbar.
Ist f messbar, so ist auch $|f|$ messbar. Weil $|f| \geq 0$ ist, bedeutet $\int |f| \, d\mu_n < \infty$ definitionsgemäß, dass $|f|$ integrierbar ist. Als messbare und Lebesgue-beschränkte Funktion ist f dann integrierbar. ∎

5.13. Satz

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann messbar, wenn die charakteristische Funktion χ_M messbar ist.

Beweis: M ist genau dann messbar, wenn $M \cap Q_\nu$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ endlich-messbar ist, wenn also $\chi_{M\cap Q_\nu}$ integrierbar ist. Für $\nu \geq 2$ ist aber $\chi_{M\cap Q_\nu} = [\chi_M]_\nu$. Daraus folgt die Behauptung. ∎

Bemerkung: Es gibt Mengen, die nicht messbar sind. Ihre Konstruktion ist nicht trivial und benötigt das Auswahlaxiom. Ist $M \subset [0,1]$ nicht messbar, so ist auch $M' := [0,1] \setminus M$ nicht messbar, und die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in M, \\ -1 & \text{für } x \in M'. \end{cases}$$

ist nicht messbar (und nicht integrierbar), obwohl $|f|$ integrierbar ist.

Man kann zeigen:

Eine fast überall endliche Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann messbar, wenn $M_c := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) > c\}$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine messbare Menge ist. Dabei kann man die Mengen $M_c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) > c\}$ auch durch die Mengen $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \leq c\}$, $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) < c\}$ oder $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \geq c\}$ ersetzen.

In Ergänzung zur Vorlesung soll hier wenigstens ein Teilresultat bewiesen werden, das am Ende des nächsten Abschnittes gebraucht wird:

5.14. Satz

Sei $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar. Dann ist auch die Menge $M := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h(\mathbf{x}) > 0\}$ messbar.

Beweis: Für $\nu \in \mathbb{N}$ sei $h_\nu := \nu \cdot \Big(\min\big(h, \dfrac{1}{\nu}\big) - \min(h, 0)\Big)$. Die Funktionen h_ν sind offensichtlich alle messbar, und es gilt:

1. Ist $h(\mathbf{x}) \leq 0$, so ist $h_\nu(\mathbf{x}) = 0$ für alle ν.

2. Ist $h(\mathbf{x}) \geq 1/\nu$, so ist $h_\nu(\mathbf{x}) = 1$.

Außerhalb M ist also $h_\nu(\mathbf{x}) \equiv 0$. Ist $\mathbf{x} \in M$, so gibt es ein ν_0, so dass $h_\nu(\mathbf{x}) = 1$ für $\nu \geq \nu_0$ ist. Zusammen bedeutet das, dass die Folge der h_ν überall gegen χ_M konvergiert. Damit ist χ_M und deshalb auch M messbar. ∎

Da alle konstanten Funktionen messbar sind, folgt nun ganz leicht, dass mit h auch alle Mengen $M_c := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h(\mathbf{x}) > c\}$ messbar sind. Die Umkehrung ist schwieriger zu zeigen.

Ohne Beweis[1] soll das folgende Resultat angegeben werden:

[1] Beweis in Analysis 3.

5.15. Die Transformationsformel

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\boldsymbol{\varphi} : U \to V$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$.

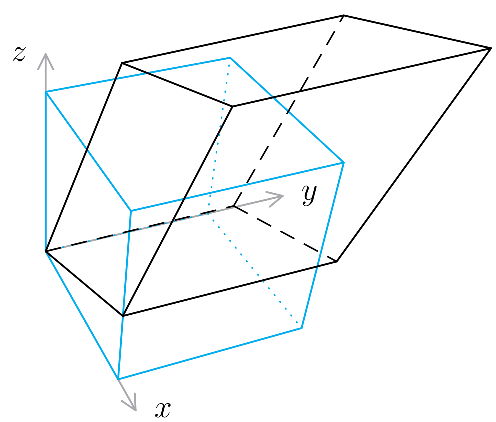
1. *Eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn*
$$(f \circ \boldsymbol{\varphi}) \cdot |\det D\boldsymbol{\varphi}| : U \to \mathbb{R}$$
integrierbar ist.

2. *Ist $f : V \to \mathbb{R}$ integrierbar, so ist*
$$\int_V f(\mathbf{y})\, d\mu_n = \int_U f \circ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) |\det D\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})|\, d\mu_n\,.$$

5.16. Beispiele

A. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix und $L = L_A$ die zugehörige (bijektive) lineare Transformation mit $L(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \bullet A^\top$. Dann ist
$$\mu_n(L(Q)) = |\det A| \cdot \mu_n(Q).$$
Das ergibt sich sofort aus der allgemeinen Transformationsformel, wenn man $U = V = \mathbb{R}^n$ und $f := \chi_{L(Q)}$ setzt und berücksichtigt, dass $J_L(\mathbf{x}) = A$ für alle $\mathbf{x}$ ist.

Sind $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ die (linear unabhängigen) Spalten von A, so nennt man
$$P(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) := \{\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{a}_n \,|\, 0 \le \lambda_i \le 1 \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$$
das von den Vektoren aufgespannte ***Parallelotop***.



Es handelt sich um das Bild des Einheitsquaders unter der Transformation L_A. Im Falle $n = 2$ ergibt sich ein Parallelogramm, im Falle $n = 3$ spricht man von einem ***Spat***. Nun folgt aus der Transformationsformel:

$$\boxed{\mu_n(P(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)) = |\det(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)|.}$$

Diese Aussage liefert eine geometrische Deutung der Determinante. Die Reihenfolge der Vektoren $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ bestimmt eine Orientierung des $\mathbb{R}^n$. Also kann man $\det(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)$ als „orientiertes Volumen" von $P(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)$ auffassen.

B. Ist A eine orthogonale Matrix (also $A \cdot A^\top$)und $\mathbf{x}_0$ ein fester Vektor, so nennt man die Abbildung

$$F(\mathbf{x}) := \mathbf{x}_0 + \mathbf{x} \cdot A^\top$$

eine ***euklidische Bewegung***. Im 2-dimensionalen Fall setzt sich jede Bewegung aus Translationen, Spiegelungen und Drehungen zusammen.

Weil $J_F(\mathbf{x}) \equiv A$ und im Falle einer orthogonalen Matrix $|\det A| = 1$ ist, lässt jede Bewegung das Volumen invariant, und darüber hinaus ist

$$\int_{F(M)} f(\mathbf{x})\, d\mu_n(\mathbf{x}) = \int_M f \circ F(\mathbf{y})\, d\mu_n(\mathbf{y})\,,$$

für messbare Mengen M und integrierbare Funktionen f. Das ist die „Bewegungsinvarianz" des Lebesgue-Integrals.

C. Ebene Polarkoordinaten

Die ebenen Polarkoordinaten sind durch die Abbildung $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$(x, y) = \mathbf{f}(r, \varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

gegeben. Bekanntlich ist $\det J_{\mathbf{f}}(r, \varphi) = r$.

Ist nun etwa $K := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \le r \le b \text{ und } \alpha \le \varphi \le \beta\}$, mit $0 < a < b$ und $0 < \alpha < \beta < 2\pi$, sowie g stetig auf $\mathbf{f}(K)$, so ist

$$\boxed{\int_{\mathbf{f}(K)} g(x, y)\, d\mu_2(x, y) = \int_\alpha^\beta \int_a^b g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, dr\, d\varphi.}$$

Wir können natürlich auch über Mengen integrieren, die die positive x-Achse treffen, denn diese Achse ist eine Nullmenge.

D. Zylinderkoordinaten

Im $\mathbb{R}^3$ sind für $r > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$ und beliebiges z die Zylinderkoordinaten gegeben durch

$$\mathbf{F}_{\text{zyl}}(r, \varphi, z) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z).$$

Dabei bezeichnet r den Abstand von der z-Achse und φ den Winkel gegen die positive x-Achse. Für die Funktionaldeterminante ergibt sich auch hier $\det J_{\mathbf{F}_{\text{zyl}}}(r, \varphi, z) = r$.

Ist $K = \{(r, \varphi, z) \,:\, a \le r \le b,\ \alpha \le \varphi \le \beta$ und $c \le z \le d\}$, so ist

$$\int_{\mathbf{F}_{\mathrm{zyl}}(K)} g(x,y,z)\,d\mu_3(x,y,z) = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b g\big(\mathbf{F}_{zyl}(r,\varphi,z)\big) r\,dr\,d\varphi\,dz.$$

E. Räumliche Polarkoordinaten

Für $r > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$ und $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ sind die räumlichen Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten, sphärische Koordinaten) gegeben durch

$$\mathbf{F}_{\mathrm{sph}}(r,\varphi,\theta) := (r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta).$$

Hier ist φ der Winkel gegenüber der positiven x-Achse (in der x-y-Ebene gemessen) und θ der Winkel gegen die x-y-Ebene. Es sei auch hier noch einmal daran erinnert, dass die Kugelkoordinaten in der Literatur nicht einheitlich definiert werden! Als Funktionaldeterminante erhalten wir hier $\det J_{\mathbf{F}_{\mathrm{sph}}}(r,\varphi,\theta) = r^2\cos\theta$. Offensichtlich ist $r^2\cos\theta > 0$ im ganzen Definitionsbereich von $\mathbf{F}_{\mathrm{sph}}$.

Ist $K = \{(r, \varphi, \theta) \,:\, a \le r \le b,\ \alpha \le \varphi \le \beta$ und $\gamma \le \theta \le \delta\}$, so ist

$$\int_{\mathbf{F}_{\mathrm{sph}}(K)} g(x,y,z)\,d\mu_3(x,y,z) = \int_\gamma^\delta \int_\alpha^\beta \int_a^b g\big(\mathbf{F}_{sph}(r,\varphi,\theta)\big) r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta.$$

Das Volumen der 3-dimensionalen Einheitskugel ergibt sich z.B. jetzt so:

$$\begin{aligned}
\mu_3(B_1(\mathbf{0})) &= \int_{B_1(\mathbf{0})} 1\,d\mu_3 = \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2\cos\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr \\
&= 2\pi \cdot \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2\cos\theta\,d\theta\,dr = 4\pi \cdot \int_0^1 r^2\,dr = \frac{4}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Für das Volumen τ_n der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ kann man folgende Rekursionsformel beweisen:

$$\begin{aligned}
\tau_{2k} &= \frac{1}{k!}\,\pi^k \\
\text{und} \quad \tau_{2k+1} &= \frac{2^{k+1}}{1\cdot 3\cdots(2k+1)}\,\pi^k.
\end{aligned}$$

5.17. Homothetieformel

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $r > 0$. Dann ist auch $r \cdot M := \{r\mathbf{x} \,:\, \mathbf{x} \in M\}$ messbar und

$$\mu_n(r \cdot M) = r^n \cdot \mu_n(M).$$

Beweis: Wir betrachten den Diffeomorphismus $\mathbf{\Phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) := r\mathbf{x}$. Dann ist $\det J_{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{x}) \equiv r^n$ und $\mathbf{\Phi}(M) = r \cdot M$.

Setzt man $f := \chi_{rM}$, so ist $f \circ \mathbf{\Phi} = \chi_M$, und die Transformationsformel ergibt

$$\mu_n(r \cdot M) = \int \chi_{rM}\, d\mu_n = \int \chi_M \cdot r^n\, d\mu_n = r^n \cdot \mu_n(M).$$

∎

5.18. Folgerung

Ist $\tau_n = \mathrm{vol}_n(B_1(\mathbf{0}))$, *so ist* $\mu_n(B_R(\mathbf{0})) = R^n \cdot \tau_n$.

5.19. Integration rotationssymmetrischer Funktionen

Sei $0 \le a < b$ *und* $K_{a,b} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, a < \|\mathbf{x}\| < b\}$. *Ist* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *integrierbar und existiert* $\displaystyle\int_a^b |f(r)| r^{n-1}\, dr$, *so ist* $\widetilde{f}(\mathbf{x}) := f(\|\mathbf{x}\|)$ *über* $K_{a,b}$ *integrierbar und*

$$\int_{K_{a,b}} f(\|\mathbf{x}\|)\, d\mu_n = n \cdot \tau_n \cdot \int_a^b f(r) r^{n-1}\, dr.$$

Dabei bezeichnet τ_n *das Volumen der* n*-dimensionalen Einheitskugel.*

Beweis: 1) Der Rand einer n-dimensionalen Kugel ist eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$, da er lokal ein Graph ist.

2) Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(r) r^{n-1}\, dr$ konvergiert nach Voraussetzung absolut, es existiert also auch als Lebesgue-Integral.

3) Zunächst sei $f(r) \equiv c$ eine konstante Funktion. Dann ist auch $\widetilde{f}$ konstant und natürlich über $K_{a,b}$ integrierbar. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{K_{a,b}} \widetilde{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} &= \int c \cdot \chi_{K_{a,b}}\, d\mu_n \;=\; c \cdot \mu_n(K_{a,b}) \\
&= c \cdot \big(\mu_n(B_b(\mathbf{0})) - \mu_n(B_a(\mathbf{0}))\big) \;=\; c \cdot \tau_n \cdot (b^n - a^n) \\
&= c \cdot \tau_n \cdot n \cdot \int_a^b r^{n-1}\, dr \;=\; n \cdot \tau_n \cdot \int_a^b f(r) r^{n-1}\, dr.
\end{aligned}$$

4) Ist f eine Treppenfunktion auf $[a,b]$, so ist f auf (a,b) (bis auf endlich viele Punkte) stückweise konstant, und man argumentiert analog.

5) Ist $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ein Element von $\mathscr{L}^+$, so gibt es eine Folge (φ_k) von Treppenfunktionen auf $[a,b]$, die auf (a,b) fast überall monoton wachsend gegen f konvergiert. Dann konvergiert auch $(\widetilde{\varphi}_k)$ auf $K_{a,b}$ fast überall monoton wachsend gegen $\widetilde{f}$, denn wenn $N \subset [a,b]$ eine Nullmenge ist, so gilt das auch für die Menge $\widetilde{N} := \{\mathbf{x} \in K_{a,b} \,:\, \|\mathbf{x}\| \in N\}$. Also ist $\widetilde{f}$ integrierbar, und aus dem Satz von der

monotonen Konvergenz kann man schließen, dass die Integrale über $\widetilde{\varphi}_k$ gegen das Integral über $\widetilde{f}$ konvergieren.

Die Folge der Funktionen $\varphi_k(r)r^{n-1}$ konvergiert monoton wachsend gegen $f(r)r^{n-1}$, und nach Levi's Satz von der monotonen Konvergenz folgt:

$$\begin{aligned}\int_{K_{a,b}} \widetilde{f}(\mathbf{x})\,d\mu_n &= \lim_{k\to\infty}\int_{K_{a,b}} \widetilde{\varphi}_k(\mathbf{x})\,d\mu_n = \lim_{k\to\infty}\Big(n\cdot\tau_n\int_a^b \varphi_k(r)r^{n-1}\,dr\Big)\\ &= n\cdot\tau_n\int_a^b f(r)r^{n-1}\,dr.\end{aligned}$$

6) Ist f über (a,b) integrierbar, so schreibt man f als Differenz zweier Elemente g,h aus $\mathscr{L}^+$. Der Satz gilt für g und h und dann offensichtlich auch für f. ∎

5.20. Beispiel

Sei $f(r) := \dfrac{1}{r}$ auf $(0,1)$. Das Integral $\displaystyle\int_0^1 r^{n-1-\alpha}\,dr$ existiert genau dann, wenn $-n+1+\alpha<1$ ist, also $\alpha<n$. Daraus folgt:

Im $\mathbb{R}^n$ existiert $\displaystyle\int_{B_1(\mathbf{0})}\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^\alpha}\,d\mu_n$ genau dann, wenn $\alpha<n$ ist.

Im $\mathbb{R}^2$ ist also $1/\|\mathbf{x}\|$ bei $\mathbf{0}$ integrierbar, nicht jedoch $1/\|\mathbf{x}\|^2$. Im $\mathbb{R}^3$ sind beide Funktionen bei $\mathbf{0}$ integrierbar.