2.4 Grenzwertsätze

Zur Einführung Konvergiert eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen eine (dann ebenfalls) stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, so ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Das wurde im 1. Semester gezeigt. In der Lebesgue-Theorie erhalten wir sehr viel weiter gehende Grenzwertsätze.

Bis jetzt waren unsere integrierbaren Funktionen immer reellwertig. Künftig wollen wir aber auch eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, die fast überall mit einer integrierbaren Funktion g übereinstimmt, ***integrierbar*** nennen. Wir setzen dann $\int f\,d\mu_n := \int g\,d\mu_n$. Es ist klar, dass f in diesem Fall höchstens auf einer Nullmenge die Werte $\pm\infty$ annehmen kann.

4.1. Hilfssatz

Ist $f \in \mathscr{L}^1$ und $\varepsilon > 0$, so gibt es Funktionen $f_1, f_2 \in \mathscr{L}^+$, so dass gilt:

1. $f = f_1 - f_2$.
2. $f_2 \geq 0$ *und* $I(f_2) < \varepsilon$.

Ist $f \geq 0$, so kann auch $f_1 \geq 0$ gewählt werden.

Beweis: Es gibt Funktionen $g, h \in \mathscr{L}^+$, so dass $f = g - h$ ist. Wir wählen eine monoton wachsende Folge (h_ν) von Treppenfunktionen, die fast überall gegen h konvergiert, so dass auch die Integrale $I(h_\nu)$ gegen $I(h)$ konvergieren.

Die Funktionen $g - h_\nu$ und $h - h_\nu$ gehören wieder zu $\mathscr{L}^+$, außerdem ist $h - h_\nu \geq 0$. Zu dem vorgegebenen ε gibt es ein ν_0, so dass $I(h - h_{\nu_0}) < \varepsilon$ ist. Dann setzen wir einfach $f_1 := g - h_{\nu_0}$ und $f_2 := h - h_{\nu_0}$. Offensichtlich ist $f_1 - f_2 = g - h = f$.

Ist $f \geq 0$, so ist auch $f_1 = f + f_2 \geq 0$. ■

4.2. Satz von Beppo Levi

Gegeben sei eine Folge (f_ν) von nicht-negativen Funktionen aus $\mathscr{L}^1$. Konvergiert die Reihe der Integrale $\sum_{\nu=1}^{\infty} \int f_\nu\,d\mu_n$, so konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ fast überall (punktweise) gegen eine Funktion $f \in \mathscr{L}^1$, und es gilt:

$$\int f\,d\mu_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int f_\nu\,d\mu_n.$$

Beweis: Für alle ν gibt es nach dem Hilfssatz Funktionen $g_\nu, h_\nu \in \mathscr{L}^+$, so dass gilt:

$$g_\nu, h_\nu \geq 0,\ f_\nu = g_\nu - h_\nu \quad \text{und} \quad I(h_\nu) < \frac{1}{2^\nu}\,.$$

Die Funktionen $H_m := \sum_{\nu=1}^m h_\nu$ liegen in $\mathscr{L}^+$ und bilden eine monoton wachsende Folge. Außerdem ist

$$I(H_m) < \sum_{\nu=1}^m \frac{1}{2^\nu} < \sum_{\nu=1}^\infty \frac{1}{2^\nu} = 1.$$

Aus den Eigenschaften von $\mathscr{L}^+$ folgt, dass (H_m) fast überall gegen eine Funktion $H \in \mathscr{L}^+$ und die Folge der Integrale $I(H_m)$ gegen $I(H)$ konvergiert.

Für die ebenfalls monoton wachsende Folge der Funktionen $G_m = \sum_{\nu=1}^m g_\nu$ gilt:

$$I(G_m) = I(H_m) + \int \sum_{\nu=1}^m f_\nu \, d\mu_n \leq 1 + \sum_{\nu=1}^\infty \int f_\nu \, d\mu_n < \infty.$$

Also konvergiert (G_m) fast überall gegen eine Funktion $G \in \mathscr{L}^+$, und es ist $I(G) = \lim_{m\to\infty} I(G_m)$.

Dann liegt $f := G - H$ in $\mathscr{L}^1$, und es ist $\displaystyle\int f \, d\mu_n = I(G) - I(H)$, also

$$\begin{aligned}\int f \, d\mu_n &= \lim_{m\to\infty} \int \sum_{\nu=1}^m g_\nu \, d\mu_n - \lim_{m\to\infty} \int \sum_{\nu=1}^m h_\nu \, d\mu_n \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{\nu=1}^m \int f_\nu \, d\mu_n = \sum_{\nu=1}^\infty \int f_\nu \, d\mu_n.\end{aligned}$$

Fast überall konvergiert $\displaystyle\sum_{\nu=1}^m f_\nu = \sum_{\nu=1}^m g_\nu - \sum_{\nu=1}^m h_\nu = G_m - H_m$ gegen $G - H = f$. ∎

4.3. Levi's Satz von der monotonen Konvergenz

Gegeben sei eine Folge (f_ν) von Funktionen aus $\mathscr{L}^1$, die fast überall monoton wächst. Ist die Folge der Integrale $\displaystyle\int f_\nu \, d\mu_n$ nach oben beschränkt, so konvergiert (f_ν) fast überall gegen eine Funktion $f \in \mathscr{L}^1$, und es ist

$$\int f \, d\mu_n = \lim_{\nu\to\infty} \int f_\nu \, d\mu_n$$

Beweis: Wir verwenden den Satz von Beppo Levi. Dazu sei

$$g_1 := f_1 \quad \text{und } g_\nu := f_\nu - f_{\nu-1} \text{ für } \nu \geq 2.$$

Dann ist $f_m = \sum_{\nu=1}^m g_\nu$, und weil die Folge (f_ν) monoton wächst, sind alle $g_\nu \geq 0$. Jetzt ist

$$\sum_{\nu=1}^m \int g_\nu \, d\mu_n = \int \sum_{\nu=1}^m g_\nu \, d\mu_n = \int f_m \, d\mu_n,$$

und die rechte Seite bleibt beschränkt. Nach Beppo Levi konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=1}^\infty g_\nu$ (und damit die Folge (f_m)) fast überall gegen eine Funktion $f \in \mathscr{L}^1$. Außerdem ist

$$\int f \, d\mu_n = \sum_{\nu=1}^\infty \int g_\nu \, d\mu_n = \lim_{m\to\infty} \int \sum_{\nu=1}^m g_\nu \, d\mu_n = \lim_{m\to\infty} \int f_m \, d\mu_n.$$

■

Bemerkung: Ein analoger Satz gilt für monoton fallende Folgen von Funktionen, deren Integrale nach unten beschränkt sind.

4.4. Beispiel

Sei $f_n(x) := \dfrac{1}{1+x^2} \cdot \chi_{[-n,n]}$. Dann sind alle f_n integrierbar, und (f_n) konvergiert monoton wachsend gegen $f(x) := 1/(1+x^2)$. Außerdem ist

$$\int f_n \, d\mu_1 = \int_{-n}^n f_n(x) \, dx = \arctan(n) - \arctan(-n) = 2\arctan(n) \leq \pi.$$

Nach Levi's Satz von der monotonen Konvergenz ist f integrierbar und

$$\int f \, d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} 2\arctan(n) = \pi.$$

4.5. Folgerung aus den Levi'schen Sätzen

Ist $f \in \mathscr{L}^1$ und $\int |f| \, d\mu_n = 0$, so ist $f = 0$ fast überall.

Beweis: Die Folge $g_\nu := \nu \cdot |f|$ ist monoton wachsend, alle g_ν sind integrierbar und die Folge der Integrale

$$\int g_\nu \, d\mu_n = \nu \cdot \int |f| \, d\mu_n = 0$$

ist beschränkt. Also konvergiert (g_ν) fast überall gegen eine Funktion $g \in \mathscr{L}^1$. Die Funktion g kann nur auf einer Nullmenge den Wert $+\infty$ annehmen. Ist aber $f(x) \neq 0$, so konvergiert $\nu \cdot |f(x)|$ gegen $+\infty$. Also gilt $f = 0$ fast überall. ■

Bemerkung: Wir haben im Beweis nur die Integrierbarkeit von $|f|$ gebraucht. Die Integrierbarkeit von f ergibt sich hinterher automatisch, da f fast überall mit der integrierbaren Nullfunktion übereinstimmt.

Levi's Satz von der monotonen Konvergenz ist bestechend klar und einfach. Manchmal kann es allerdings lästig sein, die Monotonie nachzuweisen. Beim stärksten der Konvergenzsätze kann man auf die Monotonie verzichten, muss dann aber die Konvergenz der Funktionenfolge fordern.

Definition

Eine Menge $\mathscr{F}$ von Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt ***nach oben (bzw. nach unten) Lebesgue-beschränkt***, falls es eine Funktion $g \in \mathscr{L}^1$ gibt, so dass für alle $f \in \mathscr{F}$ fast überall $f \leq g$ (bzw. $f \geq g$) gilt.

$\mathscr{F}$ heißt ***Lebesgue-beschränkt*** (kurz: ***L-beschränkt***), falls $\mathscr{F}$ nach oben und nach unten L-beschränkt ist.

Eine Folge von Funktionen heißt L-beschränkt, falls die Menge der Folgenglieder L-beschränkt ist.

4.6. Hilfssatz

Sei (f_n) eine nach oben (bzw. nach unten) L-beschränkte Folge von Funktionen aus $\mathscr{L}^1$. Dann liegt auch $f := \sup f_n$ (bzw. $f := \inf f_n$) in $\mathscr{L}^1$.

BEWEIS: Sei $g \in \mathscr{L}^1$ und $f_n \leq g$ für alle n. Dann ist auch

$$F_n := \max(f_1, \ldots, f_n) \in \mathscr{L}^1, \text{ für alle } n.$$

Die Folge (F_n) wächst monoton, und es gilt:

$$\int F_n \, d\mu_n \leq \int g \, d\mu_n < \infty.$$

Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist die Grenzfunktion $F := \lim\limits_{n\to\infty} F_n = \sup(f_n)$ integrierbar. Der Beweis für das Infimum verläuft analog. ∎

4.7. Lebesgue'scher Konvergenzsatz (auch „Satz von der dominierten Konvergenz“ genannt)

Sei (f_ν) eine L-beschränkte Folge von integrierbaren Funktionen, die fast überall gegen eine Funktion f konvergiert. Dann ist auch f integrierbar und

$$\int f \, d\mu_n = \lim_{\nu\to\infty} \int f_\nu \, d\mu_n.$$

BEWEIS: Wir definieren zwei Funktionenfolgen (u_ν) und (o_ν) wie folgt:

Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Wenn $f_\nu(\mathbf{x})$ nicht gegen $f(\mathbf{x})$ konvergiert, setzen wir $u_\nu(\mathbf{x}) = o_\nu(\mathbf{x}) := 0$. Wenn dagegen $f_\nu(\mathbf{x})$ gegen $f(\mathbf{x})$ konvergiert, dann setzen wir

$$u_\nu(\mathbf{x}) := \inf\{f_\nu(\mathbf{x}), f_{\nu+1}(\mathbf{x}), \ldots\} \text{ und } o_\nu(\mathbf{x}) := \sup\{f_\nu(\mathbf{x}), f_{\nu+1}(\mathbf{x}), \ldots\}.$$

Weil die Funktionen f_ν integrierbar und L-beschränkt sind, sind nach dem Hilfssatz auch u_ν und o_ν integrierbar. Außerdem konvergiert (u_ν) fast überall monoton wachsend und (o_ν) fast überall monoton fallend gegen f. Für alle ν ist $u_\nu \le f \le o_\nu$ (fast überall) und daher $\int u_1\, d\mu_n \le \int u_\nu\, d\mu_n \le \int o_\nu\, d\mu_n \le \int o_1\, d\mu_n$. Aus Levi's Satz von der monotonen Konvergenz folgt jetzt: f ist integrierbar und

$$\lim_{\nu\to\infty} \int u_\nu\, d\mu_n = \lim_{\nu\to\infty} \int o_\nu\, d\mu_n = \int f\, d\mu_n.$$

Weil jeweils $\int u_\nu\, d\mu_n \le \int f_\nu\, d\mu_n \le \int o_\nu\, d\mu_n$ ist, konvergiert auch $\int f_\nu\, d\mu_n$ gegen $\int f\, d\mu_n$. ∎

4.8. Beispiele

A. Sei f eine stetige Funktion auf $[a,\infty)$ und $\widehat{f}$ die triviale Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}$. Wir wollen zeigen: Ist f absolut uneigentlich integrierbar, so ist $\widehat{f}$ integrierbar und

$$\int \widehat{f}\, d\mu_1 = \int_a^\infty f(x)\, dx.$$

Dazu sei $f_n := \widehat{f} \cdot \chi_{[a,n]}$. Dann konvergiert $|f_n|$ monoton wachsend gegen $|\widehat{f}|$, und es gilt:

$$\int |f_n|\, d\mu_1 = \int_a^n |f(x)|\, dx \le \int_a^\infty |f(x)|\, dx < \infty.$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz ist dann $|\widehat{f}|$ integrierbar.

Die Folge $g_n := f \cdot \chi_{[a,n]}$ konvergiert punktweise gegen $\widehat{f}$ und besteht aus integrierbaren Funktionen. Wegen $|g_n| \le |\widehat{f}|$ folgt nun mit dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz, dass $\widehat{f}$ integrierbar ist, und es ist

$$\int \widehat{f}\, d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int_a^n f(x)\, dx = \int_a^\infty f(x)\, dx.$$

B. Obwohl das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ konvergiert, ist $f(x) := (\sin x)/x$ nicht über $[0,\infty)$ integrierbar, denn es müsste dann ja auch $|f(x)|$ integrierbar sein. Es ist aber

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \Big| \frac{\sin x}{x} \Big|\, dx \ge \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\, dx = \frac{2}{k\pi},$$

und die harmonische Reihe divergiert. Das ist eine der wenigen Situationen, in denen das uneigentliche Riemann'sche Integral mächtiger als das Lebesgue-Integral ist. Während also jede Riemann-integrierbare Funktion auch Lebesgue-integrierbar ist, trifft dies auf uneigentlich integrierbare Funktionen nicht zu.

Definition

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader. Eine Funktion $f : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt ***integrierbar***, falls die triviale Fortsetzung von f auf dem $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist.

Bemerkung: Ist f integrierbar, so ist $f|_Q$ für jeden Quader Q integrierbar. Das sieht man folgendermaßen:

Sei $f = g - h$, mit $g, h \in \mathscr{L}^+$. Dann gibt es Treppenfunktionen g_ν und h_ν, die jeweils monoton wachsend fast überall gegen g bzw. h konvergieren. Offensichtlich sind dann auch $g_\nu|_Q$ und $h_\nu|_Q$ Treppenfunktionen, die nun monoton wachsend gegen $g|_Q$ bzw. $h|_Q$ konvergieren (eigentlich sprechen wir immer von den trivialen Fortsetzungen). Damit liegen $g|_Q$ und $h|_Q$ in $\mathscr{L}^+$, und $f|_Q = g|_Q - h|_Q$ liegt in $\mathscr{L}^1$.

4.9. Satz über Parameterintegrale

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für jedes $\mathbf{u} \in U$ sei $f^{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ integrierbar, und $F : U \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(\mathbf{u}) := \int f(\mathbf{x}, \mathbf{u})\, d\mu_n(\mathbf{x}).$$

1. *Die Funktion $\mathbf{u} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ sei für fast alle $\mathbf{x}$ in $\mathbf{u}_0 \in U$ stetig, und es gebe eine integrierbare Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass $|f(\mathbf{x}, \mathbf{u})| \le h(\mathbf{x})$ fast überall auf dem $\mathbb{R}^n$ gilt. Dann ist F stetig in $\mathbf{u}_0$.*

2. *Die Funktion $\mathbf{u} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ sei für jedes feste $\mathbf{x}$ auf U nach der Variablen u_j partiell differenzierbar, und es gebe eine integrierbare Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass stets $|f_{u_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u})| \le h(\mathbf{x})$ ist. Dann ist auch F partiell differenzierbar nach u_j, und es gilt:*

$$F_{u_j}(\mathbf{u}) = \int f_{u_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\, d\mu_n(\mathbf{x}).$$

BEWEIS: 1) Wir betrachten eine Folge $(\mathbf{u}_\nu)$, die gegen $\mathbf{u}_0$ konvergiert, und setzen $f_\nu(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_\nu)$. Dann sind alle f_ν integrierbar, und die Folge (f_ν) konvergiert fast überall punktweise gegen f_0 (mit $f_0(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0)$).[1]

Da fast überall $|f_\nu| \le h$ ist, kann man den Konvergenzsatz von Lebesgue anwenden und erhält:

$$F(\mathbf{u}_0) = \int f_0\, d\mu = \lim_{\nu \to \infty} \int f_\nu\, d\mu = \lim_{\nu \to \infty} F(\mathbf{u}_\nu).$$

2) Sei $\mathbf{u}_0 \in U$ und $\mathbf{e}_j$ der j-te Einheitsvektor im $\mathbb{R}^m$. Wir setzen

[1] Ist $\mathbf{u} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ außerhalb der Nullmenge N in $\mathbf{u}_0$ stetig, so konvergiert $\big(f_\nu(\mathbf{x})\big)$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus N$ gegen $f_0(\mathbf{x})$.

$$g_j(\mathbf{x}, t) := \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0 + t\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0)}{t}.$$

Für $t \to 0$ strebt $g_j(\mathbf{x}, t)$ gegen $f_{u_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein ξ mit $0 < \xi < t$, so dass $g_j(\mathbf{x}, t) = f_{u_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0 + \xi \cdot \mathbf{e}_j)$ ist. Nach Voraussetzung ist daher $|g_j(\mathbf{x}, t)| \leq h(\mathbf{x})$. Aus dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt nun, dass $f_{u_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0)$ integrierbar ist und dass gilt:

$$\begin{aligned} \int f_{u_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0)\, d\mu_n(\mathbf{x}) &= \lim_{t \to 0} \int g_j(\mathbf{x}, t)\, d\mu_n(\mathbf{x}) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{F(\mathbf{u}_0 + t\mathbf{e}_j) - F(\mathbf{u}_0)}{t} = F_{u_j}(\mathbf{u}_0). \end{aligned}$$

Das ist die Behauptung. ∎

4.10. Folgerung

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $U \subset \mathbb{R}^m$ offen. Wenn $f : K \times U \to \mathbb{R}$ für jedes $\mathbf{u} \in U$ über K integrierbar und auf ganz $K \times U$ stetig (bzw. nach $u_1, \ldots, u_m$ stetig partiell differenzierbar) ist, dann ist

$$F(\mathbf{u}) := \int_K f(\mathbf{x}, \mathbf{u})\, d\mu_n(\mathbf{x})$$

auf U stetig (bzw. stetig differenzierbar), und im differenzierbaren Fall gilt:

$$F_{u_j}(\mathbf{u}) = \int_K f_{u_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\, d\mu_n(\mathbf{x}), \text{ für } \mathbf{u} \in U \text{ und } j = 1, \ldots, m.$$

Beweis: Sei $\mathbf{u}_0 \in U$ und $A = A(\mathbf{u}_0) \subset U$ eine kompakte Umgebung. Dann sind f und $f_{u_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ als stetige Funktionen auf $K \times A$ durch Konstanten nach oben beschränkt. Wir wenden den Satz über Parameterintegrale an. Der zweite Teil besagt, dass F dann auf A nach allen Variablen partiell differenzierbar ist, und aus dem ersten Teil folgt dann, dass die Ableitungen stetig sind. Das gilt auf ganz U. ∎

4.11. Satz (Leibniz'sche Formel)

Sei $I = [a, b]$, $N := \{(x, t) \in I \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \leq t \leq \psi(x)\}$ ein Normalbereich, U eine offenen Umgebung von N im $\mathbb{R}^2$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige und nach der ersten Variablen stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann gilt:

$F(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t)\, dt$ *ist auf I differenzierbar, und es ist*

$$F'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt + f(x, \psi(x))\psi'(x) - f(x, \varphi(x))\varphi'(x).$$

Beweis: Sei $c \le \varphi(x) \le \psi(x) \le d$ auf I. Die Funktion $g(x,\tau) := \int_c^\tau f(x,t)\,dt$ ist nach τ und nach x stetig partiell differenzierbar. Also ist

$$\widetilde{F}(x,u,v) := \int_u^v f(x,t)\,dt = g(x,v) - g(x,u)$$

nach allen drei Variablen stetig differenzierbar. Außerdem ist

$$F(x) = \widetilde{F}(x,\varphi(x),\psi(x)).$$

Die Anwendung der speziellen Kettenregel ergibt:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}(x,\varphi(x),\psi(x)) + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial u}(x,\varphi(x),\psi(x))\varphi'(x) + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial v}(x,\varphi(x),\psi(x))\psi'(x) \\ &= \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}(x,\varphi(x),\psi(x)) - \frac{\partial g}{\partial \tau}(x,\varphi(x))\varphi'(x) + \frac{\partial g}{\partial \tau}(x,\psi(x))\psi'(x) \\ &= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt - f(x,\varphi(x))\varphi'(x) + f(x,\psi(x))\psi'(x). \end{aligned}$$

■

4.12. Beispiele

A. Für $x \ge 0$ sei $F(x) := \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\,dt$. Dies ist ein Parameterintegral mit stetigem Integranden $f(t,x) := \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}$, der durch $h(t) := 1/(1+t^2)$ dominiert wird. Also ist F stetig. Außerdem ist $F(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$ und

$$|F(x)| \le e^{-x^2} \int_0^1 \Big| \frac{e^{-(tx)^2}}{1+t^2} \Big|\,dt \le e^{-x^2} \cdot F(0) = \frac{\pi}{4} e^{-x^2},$$

also $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 0$.

$f(t,x)$ ist nach x differenzierbar, mit stetiger Ableitung $f_x(t,x) = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$. Diese wird über jeder Menge $[0,1] \times (\alpha,\beta)$ (mit $0 \le \alpha < \beta$) durch die integrierbare Funktion $h(t) \equiv 2\beta$ dominiert. Also ist F auf (α,β) (und damit auf ganz $\mathbb{R}_+$) differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\int_0^1 2x \cdot e^{-(1+t^2)x^2}\,dt \;=\; -2e^{-x^2} \int_0^1 x\,e^{-t^2x^2}\,dt \\ &= -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2}\,du \qquad (\text{Substitution } tx = u). \end{aligned}$$

Mit dieser Darstellung von F' wollen wir nun das Integral $\int_0^\infty e^{-u^2}\,du$ berechnen. Einerseits ist

$$-\int_0^x F'(t)\,dt = F(0) - F(x) = \frac{\pi}{4} - F(x)$$

und andererseits gilt – mit $g(t) := \int_0^t e^{-u^2}\,du$ – die Beziehung

$$\begin{aligned} -\int_0^x F'(t)\,dt &= \int_0^x \Big(2e^{-t^2}\int_0^t e^{-u^2}\,du\Big)\,dt \\ &= 2\int_0^x g'(t)g(t)\,dt \;=\; 2\int_{g(0)}^{g(x)} v\,dv \\ &= g(x)^2 \;=\; \Big(\int_0^x e^{-u^2}\,du\Big)^2. \end{aligned}$$

Zusammen liefert das die Gleichung

$$\Big(\int_0^x e^{-u^2}\,du\Big)^2 = \frac{\pi}{4} - F(x).$$

Da $F(x)$ für $x \to \infty$ gegen Null konvergiert, folgt daraus

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$

B. Wir wollen die im 1. Semester kennengelernte Gammafunktion weiter untersuchen. Das für jedes $x > 0$ absolut konvergente uneigentliche Integral

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

kann als Lebesgue'sches Parameterintegral $\Gamma(x) = \int f(t,x)\,d\mu_1(t)$ aufgefasst werden, wobei der Integrand

$$f(t,x) := \begin{cases} e^{-t}t^{x-1} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \le 0 \end{cases}$$

für jedes feste $x \in \mathbb{R}_+$ integrierbar ist (mit $t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t}$).

Die Funktion $x \mapsto f(t,x)$ ist bei festem $t \in \mathbb{R}$ auf $U := \mathbb{R}_+$ stetig. Weil $t^2 \cdot (t^{x-1}e^{-t}) = t^{x+1}e^{-t}$ für $t \to \infty$ gegen Null konvergiert, gibt es zu jedem $C > 0$ ein $t_0 > 0$, so dass $0 < f(t,x) \le C \cdot t^{-2}$ für $t \ge t_0$ gilt. Und für $0 < t < t_0$ ist $0 < f(t,x) < t^{x-1}$. Deshalb wird durch

$$h(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \le 0, \\ t^{x-1} & \text{für } 0 < t < t_0, \\ C \cdot t^{-2} & \text{für } t \ge t_0 \end{cases}$$

eine integrierbare Funktion mit $|f(t,x)| \le h(t)$ definiert. Daraus folgt, dass Γ stetig auf $\mathbb{R}_+$ ist.

Der Integrand $f(t,x) = e^{-t}t^{x-1}$ ist bei festem t auf $\mathbb{R}_+$ nach x stetig partiell differenzierbar, mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \ln t \cdot e^{-t} \cdot t^{x-1} = \ln t \cdot f(x,t).$$

Um zu zeigen, dass Γ auf jedem Intervall (α,β) mit $0 < \alpha < \beta$ differenzierbar ist, müssen wir $f_x(t,x)$ abschätzen.

Ist $0 < t < 1$, so ist $\ln t$ negativ, also $(x-1)\ln t < (\alpha-1)\ln t$. Weil in diesem Bereich auch $\ln(1/t) < 1/t$ ist, folgt:

$$|e^{-t}t^{x-1}\ln t| \le e^{-t}t^{\alpha-1}|\ln t| = e^{-t}t^{\alpha-1}\ln(1/t) \text{ für } 0 < t < 1.$$

Behauptung: *Das uneigentliche Integral* $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}t^{\alpha-1}\ln(1/t)\,dt$ *konvergiert für alle* $\alpha > 0$ *absolut.*

Beweis dafür: Ist a eine beliebige positive reelle Zahl, so folgt (mit $s = -\ln t$, also $t = e^{-s}$):

$$\lim_{t\to 0} t^a \ln(1/t) = \lim_{s\to\infty} s \cdot e^{-sa} = 0.$$

Ist also $\alpha > 1$ (und damit $\alpha - 1 > 0$), so liegt gar kein uneigentliches Integral vor.

Nun sei $0 < \alpha \le 1$. Dann gibt es ein $\delta \in (0,1)$, so dass $a := \alpha - 1 + \delta > 0$ ist. Wegen der obigen Bemerkung gibt es zu jedem $c > 0$ ein $\varepsilon > 0$, so dass $0 < e^{-t}t^a\ln(1/t) < c$ für $0 < t < \varepsilon$ ist, also $|e^{-t}t^{\alpha-1}\ln(1/t)| < c \cdot t^{-\delta}$. Das uneigentliche Integral über die rechte Seite konvergiert bekanntlich absolut. ∎

Kommen wir jetzt zum Bereich $t \ge 1$: Dort ist $\ln t \le t$ und $|e^{-t}t^{x-1}\ln t| \le e^{-t}t^x \le e^{-t}t^\beta$ für $x \in (\alpha,\beta)$. Weil $t^2(e^{-t}t^\beta) = e^{-t}t^{2+\beta}$ für $t \to \infty$ gegen Null konvergiert, gibt es zu jedem $C > 0$ ein $t_0 > 0$, so dass $0 < e^{-t}t^\beta \le C \cdot t^{-2}$ für $t \ge t_0$ ist.

Alles zusammengefasst ergibt sich: Die Funktion

$$g(t) := \begin{cases} e^{-t}t^{\alpha-1}\ln(1/t) & \text{für } 0 < t < 1, \\ t^\beta e^{-t} & \text{für } 1 \le t \le t_0, \\ C \cdot t^{-2} & \text{für } t > t_0 \end{cases}$$

ist integrierbar, und es gilt:

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big| \le g(t) \quad \text{für } \alpha < x < \beta \text{ und alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Also ist Γ differenzierbar, mit

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty \ln(t) e^{-t} t^{x-1}\, dt\,.$$

Induktiv kann man sogar zeigen, dass Γ beliebig oft differenzierbar ist.

Es gibt noch einen interessanten Wert der Gammafunktion:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Beweis: Wir benutzen folgende Aussage: Ist $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ surjektiv und differenzierbar, mit $\varphi'(x) > 0$ für $x > 0$, so ist

$$\int_0^\infty f(t)\, dt = \int_0^\infty f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx.$$

Das soll heißen: Konvergiert eines dieser beiden Integrale, so auch das andere, und die Grenzwerte sind gleich. Zum Beweis benutzt man die Substitutionsregel innerhalb endlicher Grenzen und geht dann auf beiden Seiten der Gleichung zu den uneigentlichen Integralen über.

Mit $t = \varphi(x) := x^2$ folgt nun:

$$\begin{aligned} \Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2}\, dt = \int_0^\infty e^{-x^2} \cdot (x^2)^{-1/2} \cdot 2x\, dx \\ &= 2 \cdot \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. ∎