2.3 Das Riemann-Integral

In der Riemann'schen Integrationstheorie stellt die Oszillation der Funktionen eine wichtige Rolle.

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $f : M \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Ist $\mathbf{a} \in M$ und $\delta > 0$, so setzen wir

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{a}}(f,\delta) &:= \sup\{f(\mathbf{x}) \,:\, \mathbf{x} \in M \cap B_\delta(\mathbf{a})\} \\ \text{und} \quad m_{\mathbf{a}}(f,\delta) &:= \inf\{f(\mathbf{x}) \,:\, \mathbf{x} \in M \cap B_\delta(\mathbf{a})\}. \end{aligned}$$

Dann heißt

$$o(f,\mathbf{a}) := \lim_{\delta \to 0} \big(M_{\mathbf{a}}(f,\delta) - m_{\mathbf{a}}(f,\delta)\big)$$

die ***Oszillation*** von f in $\mathbf{a}$. Der Limes existiert immer, nach dem Satz von der monotonen Konvergenz, denn $M_{\mathbf{a}}(f,\delta) - m_{\mathbf{a}}(f,\delta)$ ist ≥ 0 und mit δ monoton fallend.

3.1. Satz

Eine beschränkte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $\mathbf{a}$ stetig, wenn die Oszillation $o(f,\mathbf{a}) = 0$ ist.

Beweis: 1) Sei zunächst f in $\mathbf{a}$ stetig und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon$ für $\mathbf{x} \in M \cap B_\delta(\mathbf{a})$ ist. Dann ist $f(\mathbf{a}) - \varepsilon < f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}) + \varepsilon$ für $\mathbf{x} \in M \cap B_\delta(\mathbf{a})$, also auch

$$M_{\mathbf{a}}(f,\delta) \leq f(\mathbf{a}) + \varepsilon \text{ und } m_{\mathbf{a}}(f,\delta) \geq f(\mathbf{a}) - \varepsilon$$

und $M_{\mathbf{a}}(f,\delta) - m_{\mathbf{a}}(f,\delta) \leq 2\varepsilon$. Das bedeutet, dass $o(f,\mathbf{a}) = 0$ ist.

2) Nun sei $o(f,\mathbf{a}) = 0$, also $\lim\limits_{\delta \to 0}\big(M_{\mathbf{a}}(f,\delta) - m_{\mathbf{a}}(f,\delta)\big) = 0$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so kann man ein $\delta > 0$ finden, so dass $M_{\mathbf{a}}(f,\delta) - m_{\mathbf{a}}(f,\delta) < \varepsilon$ ist. Für $\mathbf{x} \in M \cap B_\delta(\mathbf{a})$ ist dann

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) \;&\leq\; M_{\mathbf{a}}(f,\delta) \;<\; m_{\mathbf{a}}(f,\delta) + \varepsilon \;\leq\; f(\mathbf{a}) + \varepsilon \\ \text{und} \quad f(\mathbf{x}) \;&\geq\; m_{\mathbf{a}}(f,\delta) \;>\; M_{\mathbf{a}}(f,\delta) - \varepsilon \;\geq\; f(\mathbf{a}) - \varepsilon, \end{aligned}$$

also $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon$. Das bedeutet, dass f in $\mathbf{a}$ stetig ist. ∎

3.2. Satz

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $f : M \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist

$$M_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in M \,:\, o(f,\mathbf{x}) \geq \varepsilon\}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge.

Beweis: Wir zeigen, dass $\mathbb{R}^n \setminus M_\varepsilon$ offen ist. Dazu betrachten wir einen beliebigen Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M_\varepsilon$.

1. Fall: Liegt $\mathbf{x}_0$ nicht in der abgeschlossenen Menge M, so gibt es eine Umgebung $U = U(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \subset \mathbb{R}^n \setminus M_\varepsilon$.

2. Fall: Sei $\mathbf{x}_0 \in M \setminus M_\varepsilon$. Dann ist $o(f, \mathbf{x}_0) < \varepsilon$ und es gibt ein $\delta > 0$, so dass $M_{\mathbf{x}_0}(f, \delta) - m_{\mathbf{x}_0}(f, \delta) < \varepsilon$ ist.

Ist $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \cap M$, so gibt es ein $r > 0$, so dass $B_r(\mathbf{y}) \subset B_\delta(\mathbf{x}_0)$ ist. Dann ist

$$\sup\{f(\mathbf{x}) \,:\, \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{y}) \cap M\} \le \sup\{f(\mathbf{x}) \,:\, \mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \cap M\} = M_{\mathbf{x}_0}(f, \delta)$$

und

$$\inf\{f(\mathbf{x}) \,:\, \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{y}) \cap M\} \ge \inf\{f(\mathbf{x}) \,:\, \mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \cap M\} = m_{\mathbf{x}_0}(f, \delta),$$

also

$$o(f, \mathbf{y}) = \lim_{r \to 0}\big(M_{\mathbf{y}}(f, r) - m_{\mathbf{y}}(f, r)\big) \le o(f, \mathbf{x}_0) < \varepsilon.$$

Daher liegt $B_\delta(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M_\varepsilon$. ∎

Sei $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Sind Zerlegungen $\mathfrak{Z}_i = \{x_{i,0}, \ldots, x_{i,k_i}\}$ von $I_i = [a_i, b_i]$ gegeben, für $i = 1, \ldots, n$, so nennt man $\mathfrak{Z} := \mathfrak{Z}_1 \times \ldots \times \mathfrak{Z}_n$ eine ***Zerlegung*** des Quaders Q. Ist für jedes i ein Index $j_i \in \{1, \ldots, k_i\}$ gegeben, so setzen wir

$$Q_{j_1 j_2 \ldots j_n} := [x_{1,j_1-1}, x_{1,j_1}] \times \ldots \times [x_{n,j_n-1}, x_{n,j_n}].$$

Das ist ein „Teilquader" der Zerlegung.

Sei $J := \{\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_n) \,:\, 1 \le j_i \le k_i,\ \text{für } i = 1, \ldots, n\}$. Für $\mathbf{j} \in J$ sei

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{j}} &= m_{\mathbf{j}}(f, \mathfrak{Z}) &:=& \inf\{f(\mathbf{x}) \,:\, \mathbf{x} \in Q_{\mathbf{j}}\} \\ \text{und} \quad M_{\mathbf{j}} &= M_{\mathbf{j}}(f, \mathfrak{Z}) &:=& \sup\{f(\mathbf{x}) \,:\, \mathbf{x} \in Q_{\mathbf{j}}\}. \end{aligned}$$

Dann nennt man

$$\begin{aligned} U(f, \mathfrak{Z}) &:= \sum_{\mathbf{j} \in J} m_{\mathbf{j}} \cdot \mathrm{vol}_n(Q_{\mathbf{j}}) \quad \text{die } \textit{\textbf{Untersumme}} \\ \text{und} \quad O(f, \mathfrak{Z}) &:= \sum_{\mathbf{j} \in J} M_{\mathbf{j}} \cdot \mathrm{vol}_n(Q_{\mathbf{j}}) \quad \text{die } \textit{\textbf{Obersumme}} \end{aligned}$$

von f bezüglich der Zerlegung $\mathfrak{Z}$.

Wie im Falle einer Veränderlichen zeigt man:

3.3. Eigenschaften von Ober- und Untersumme

Ist $m := \inf_Q(f)$ und $M := \sup_Q(f)$, so gilt:

1. $m \cdot \mathrm{vol}_n(Q) \leq U(f, \mathfrak{Z}) \leq O(f, \mathfrak{Z}) \leq M \cdot \mathrm{vol}_n(Q)$ *für jede Zerlegung* $\mathfrak{Z}$.
2. *Ist* $\mathfrak{Z}'$ *eine Verfeinerung von* $\mathfrak{Z}$, *so ist*
$$U(f, \mathfrak{Z}) \leq U(f, \mathfrak{Z}') \leq O(f, \mathfrak{Z}') \leq O(f, \mathfrak{Z}).$$
3. *Sind* $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ *zwei beliebige Zerlegungen von* Q, *so ist* $U(f, \mathfrak{Z}_1) \leq O(f, \mathfrak{Z}_2)$.

Dann nennt man

$$I_*(f) := \sup\{U(f, \mathfrak{Z}) \,:\, \mathfrak{Z} \text{ Zerlegung von } Q\}$$

das ***Unterintegral*** und

$$I^*(f) := \inf\{O(f, \mathfrak{Z}) \,:\, \mathfrak{Z} \text{ Zerlegung von } Q\}$$

das ***Oberintegral*** von f. Offensichtlich ist $I_*(f)$ die beste Approximation des Volumens (unter dem Graphen von f) von unten und $I^*(f)$ die beste Approximation des Volumens von oben.

Definition

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Ist $I_*(f) = I^*(f)$, so nennt man f ***Riemann-integrierbar*** (kurz: ***R-integrierbar***) und den gemeinsamen Wert

$$\boxed{\int_Q f(\mathbf{x}) \, dV_n := I_*(f) = I^*(f).}$$

das ***Riemann-Integral*** von f über Q.

3.4. Darboux'sches Integrierbarkeitskriterium

Eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ *ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine Zerlegung* $\mathfrak{Z}$ *von* Q *mit* $O(f, \mathfrak{Z}) - U(f, \mathfrak{Z}) < \varepsilon$.

BEWEIS: 1) Es sei zunächst f nicht integrierbar. Dann gibt es Zahlen I_1, I_2, so dass $I_*(f) \leq I_1 < I_2 \leq I^*(f)$ ist, und wir setzen $\varepsilon := I_2 - I_1$. Dann ist $O(f, \mathfrak{Z}) - U(f, \mathfrak{Z}) \geq \varepsilon$ für alle Zerlegungen $\mathfrak{Z}$ von Q und das Kriterium nicht erfüllt.

2) Jetzt sei f integrierbar und $I := \int_Q f(\mathbf{x}) \, dV_n$. Es sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt Zerlegungen $\mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{Z}''$, so dass $I - U(f, \mathfrak{Z}') < \varepsilon/2$ und $O(f, \mathfrak{Z}'') - I < \varepsilon/2$ ist. Ist $\mathfrak{Z}$ eine gemeinsame Verfeinerung von $\mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{Z}''$, so ist $O(f, \mathfrak{Z}) - U(f, \mathfrak{Z}) < \varepsilon$. ■

3.5. Lemma

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader, $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und $o(f, \mathbf{x}) < \varepsilon$ für alle $\mathbf{x} \in Q$. Dann gibt es eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von Q, so dass gilt:

$$O(f, \mathfrak{Z}) - U(f, \mathfrak{Z}) < \varepsilon \cdot \mathrm{vol}_n(Q).$$

Beweis: Zu jedem $\mathbf{x} \in Q$ existiert ein $\delta = \delta(\mathbf{x})$, so dass $M_{\mathbf{x}}(f, \delta) - m_{\mathbf{x}}(f, \delta) < \varepsilon$ ist. Es sei dann $Q_{\mathbf{x}}$ ein offener Quader, der $\mathbf{x}$ enthält, so dass $\overline{Q}_{\mathbf{x}} \subset B_{\delta(\mathbf{x})}(\mathbf{x})$ ist. Die offenen Quader $Q_{\mathbf{x}}$ überdecken den kompakten Quader Q. Dann gibt es aber endlich viele Punkte $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N \in Q$ und zugehörige Quader $Q_1, \ldots, Q_N$, die schon Q überdecken.

Man kann nun eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von Q finden, so dass jeder abgeschlossene Teilquader P von $\mathfrak{Z}$ in einem $\overline{Q}_i$ enthalten ist und deshalb

$$\sup\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in P\} - \inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in P\} < \varepsilon$$

ist. Aber dann ist $O(f, \mathfrak{Z}) - U(f, \mathfrak{Z}) < \varepsilon \cdot \mathrm{vol}_n(Q)$. ∎

3.6. Folgerung

Jede stetige Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

Beweis: Da f beschränkt und $o(f, \mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in Q$ ist, folgt die Behauptung aus dem Darboux'schen Kriterium. ∎

3.7. Lebesgue'sches Integrierbarkeitskriterium

Eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn f fast überall stetig ist.

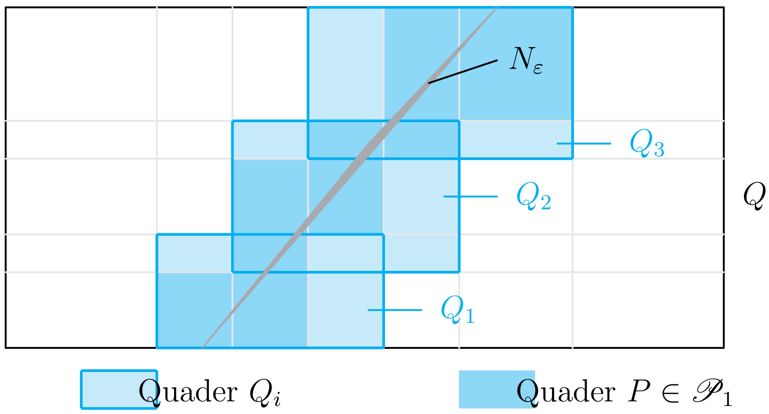
Beweis: Sei $N := \{\mathbf{x} \in Q : f \text{ nicht stetig in } \mathbf{x}\}$.

1) Sei N eine Nullmenge. Wir wollen zeigen, dass f das Darboux-Kriterium erfüllt. Dazu sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

Die Menge $N_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in N : o(f, \mathbf{x}) \geq \varepsilon\} = \{\mathbf{x} \in Q : o(f, \mathbf{x}) \geq \varepsilon\}$ ist natürlich auch eine Nullmenge. Außerdem ist sie als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Quaders Q selbst kompakt.

Man kann eine Folge von **offenen** Quadern Q_i finden, die N_ε überdecken und deren Gesamtvolumen $< \varepsilon$ ist. Wegen der Kompaktheit gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{Q_1, \ldots, Q_N\}$ von N_ε mit $\sum_{i=1}^N \mathrm{vol}_n(Q_i) < \varepsilon$. Nun konstruiere man eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von Q, so dass für die Teilquader P von $\mathfrak{Z}$ gilt:

- Entweder ist $P \cap N_\varepsilon \neq \varnothing$, und P liegt in einem der Quader Q_i,
- oder es ist $P \cap N_\varepsilon = \varnothing$.



Alle Teilquader von $\mathfrak{Z}$ bilden eine Menge $\mathscr{P}$ von offenen Quadern. Die Quader der ersten Kategorie bilden eine Teilmenge $\mathscr{P}_1 \subset \mathscr{P}$, und dann sei $\mathscr{P}_2 := \mathscr{P} \setminus \mathscr{P}_1$ die Menge der Quader der zweiten Kategorie.

Ist $|f(\mathbf{x})| < C$ auf Q, so ist $\sup_P f - \inf_P f < 2C$ für jeden Teilquader $P \in \mathscr{P}$, und daher

$$\sum_{P \in \mathscr{P}_1} \big(\sup_P f - \inf_P f\big) \operatorname{vol}_n(P) < 2C \cdot \sum_{i=1}^{N} \operatorname{vol}_n(Q_i) < 2C \cdot \varepsilon.$$

Für $P \in \mathscr{P}_2$ und $\mathbf{x} \in P$ ist $o(f, \mathbf{x}) < \varepsilon$. Nach Lemma 3.5. gibt es dann jeweils eine Zerlegung $\mathfrak{Z}_P$ von P, so dass gilt:

$$O(f|_P, \mathfrak{Z}_P) - U(f|_P, \mathfrak{Z}_P) < \varepsilon \cdot \operatorname{vol}_n(P).$$

Man kann dann eine Verfeinerung $\mathfrak{Z}'$ von $\mathfrak{Z}$ finden, so dass für die Menge $\mathscr{P}'$ der Teilquader von $\mathfrak{Z}'$ und jeden Quader $P \in \mathscr{P}_2$ gilt: Jeder Quader $T \in \mathscr{P}'$ mit $T \subset P$ ist in einem Teilquader von $\mathscr{P}_P$ enthalten.

Man zerlege nun $\mathscr{P}'$ in

$$\begin{aligned} &\mathscr{P}'_1 &:=& \{T \in \mathscr{P}' \,:\, \exists\, P \in \mathscr{P}_1 \text{ mit } T \subset P\} \\ \text{und}\quad &\mathscr{P}'_2 &:=& \{T \in \mathscr{P}' \,:\, \exists\, P \in \mathscr{P}_2 \text{ mit } T \subset P\} \;=\; \mathscr{P}' \setminus \mathscr{P}'_1. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\sum_{T \in \mathscr{P}'_1} \big(\sup_T f - \inf_T f\big) \operatorname{vol}_n(T) < 2C \cdot \varepsilon$$

und

$$
\begin{aligned}
\sum_{T\in\mathscr{P}_2'} \big(\sup_T f - \inf_T f\big)\,\mathrm{vol}_n(T) &= \sum_{P\in\mathscr{P}_2}\sum_{T\in\mathscr{P}_P} \big(\sup_T f - \inf_T f\big)\,\mathrm{vol}_n(T)\\
&= \sum_{P\in\mathscr{P}_2} \big(O(f|_P,\mathfrak{Z}_P) - U(f|_P,\mathfrak{Z}_P)\big)\\
&< \varepsilon\cdot \sum_{P\in\mathscr{P}_2} \mathrm{vol}_n(P) \;\le\; \varepsilon\cdot\mathrm{vol}_n(Q),
\end{aligned}
$$

also

$$O(f,\mathfrak{Z}') - U(f,\mathfrak{Z}') < \varepsilon\cdot(2C + \mathrm{vol}_n(Q)).$$

Da C und $\mathrm{vol}_n(Q)$ konstant sind und ε beliebig klein gewählt werden kann, folgt aus dem Darboux-Kriterium, dass f Riemann-integrierbar ist.

2) Nun sei umgekehrt vorausgesetzt, dass f Riemann-integrierbar ist. Es ist $N = \{\mathbf{x}\in Q \,:\, o(f,\mathbf{x}) > 0\} = N_1 \cup N_{1/2}\cup N_{1/3}\cup\ldots$, und daher genügt es zu zeigen, dass $N_{1/n}$ für jedes $n\in\mathbb{N}$ eine Nullmenge ist.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Darboux gibt es eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von Q, so dass $O(f,\mathfrak{Z}) - U(f,\mathfrak{Z}) < \varepsilon/n$ ist.

Sei $\mathscr{P}$ das System aller Teilquader P von $\mathfrak{Z}$ mit $P\cap N_{1/n}\neq\varnothing$. Diese Quader überdecken $N_{1/n}$, und für alle $P\in\mathscr{P}$ ist $\sup_P f - \inf_P f \ge 1/n$. Daher gilt:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{P\in\mathscr{P}} \mathrm{vol}_n(P) &\le \sum_{P\in\mathscr{P}} (\sup_P f - \inf_P f)\cdot\mathrm{vol}_n(P)\\
&\le \sum_{P\in\mathfrak{Z}} (\sup_P f - \inf_P f)\cdot\mathrm{vol}_n(P) \;<\; \frac{\varepsilon}{n},
\end{aligned}
$$

also $\sum_{P\in\mathscr{P}} \mathrm{vol}_n(P) < \varepsilon$. Das heißt, dass $N_{1/n}$ eine Nullmenge ist. ∎

Man muss sich hier vor Trugschlüssen hüten! Dass f fast überall stetig ist, bedeutet, dass es eine (Lebesgue-)Nullmenge N gibt, so dass f in allen Punkten von $Q\setminus N$ stetig ist. Ist $I = [0,1]$ und $M := I\cap\mathbb{Q}$, so stimmt die charakteristische Funktion χ_M zwar fast überall mit der Nullfunktion überein, sie ist aber nirgends stetig!

Wir werden jetzt den Zusammenhang mit der Lebesgue-Theorie hergestellen. Dabei identifizieren wir eine auf einem Quader $Q\subset\mathbb{R}^n$ definierte Funktion mit ihrer „trivialen Fortsetzung“ $\widehat{f}(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{für } \mathbf{x}\in Q,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$

3.8. Hinreichendes Kriterium für die Zugehörigkeit zu $\mathscr{L}^+$

Ist $f : Q\to\mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so gehört f zur Klasse $\mathscr{L}^+$, und es ist

$$\int_Q f(\mathbf{x})\,dV_n = I(f).$$

Beweis: Wir setzen zunächst $Q_1^{(1)} := Q$. Das ist ein kartesisches Produkt von n Intervallen. Wenn wir alle diese Intervalle halbieren, erhalten wir 2^n Teilquader $Q_2^{(1)}, \ldots, Q_2^{(2^n)}$. Wiederholen wir diese Prozedur mit jedem der einzelnen Teilquader, so gewinnen wir $2^n \cdot 2^n = 4^n$ Teilquader $Q_3^{(i)}$, $i = 1, \ldots, 4^n$. So fahren wir fort, nach dem k-ten Schritt erhalten wir $(2^k)^n$ Teilquader. Ist $m_{k,i} := \inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in Q_k^{(i)}\}$, so wird durch

$$\varphi_k(\mathbf{x}) := \begin{cases} m_{k,i} & \text{für } \mathbf{x} \in (Q_k^{(i)})^\circ, i = 1, \ldots, (2^k)^n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

eine Treppenfunktion φ_k definiert.

Nach Konstruktion wächst die Folge der φ_k fast überall monoton, denn die Wände der Teilquader bilden eine Nullmenge. In den Punkten, in denen f stetig ist, strebt $\varphi_k(\mathbf{x})$ gegen $f(\mathbf{x})$. Also konvergiert (φ_k) fast überall gegen f. Weil f beschränkt ist, bleiben die Integrale $I(\varphi_k)$ nach oben beschränkt. Also liegt f in $\mathscr{L}^+$.

Jedes Integral $I(\varphi_k)$ ist eine Untersumme für f, und die Folge dieser Integrale konvergiert gegen $I(f)$. Da man f auf analoge Weise von oben approximieren kann und dann eine Folge von Obersummen erhält, die ebenfalls gegen $I(f)$ konvergiert, muss $I(f)$ das Riemann-Integral von f sein. ■

Bemerkung: Die oben schon betrachtete charakteristische Funktion der Menge $M := [0,1] \cap \mathbb{Q}$ ist nicht Riemann-integrierbar. Sie gehört aber zu $\mathscr{L}^+$, denn sie stimmt fast überall mit der Nullfunktion überein. Also ist $\mathscr{L}^+$ echt größer als die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen!

3.9. Satz

Die Menge $\mathscr{R} = \mathscr{R}_Q$ der Riemann-integrierbaren Funktionen auf dem kompakten Quader Q bildet einen reellen Vektorraum. Außerdem gilt:

Mit f und g liegen auch die Funktionen $|f|$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ und $f \cdot g$ in $\mathscr{R}$.

Auf den wenig spannenden Beweis verzichten wir hier.

3.10. Satz

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader und $M \subset Q$ eine Teilmenge. Die charakteristische Funktion χ_M ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn ∂M eine Nullmenge ist.

Beweis: ∂M ist exakt die Menge der Unstetigkeitsstellen von χ_M (denn $\mathbb{R}^n \setminus \partial M$ ist offen, und χ_M ist dort lokal-konstant, also stetig). ■

Eine Teilmenge M eines Quaders Q, deren Rand eine (Lebesgue-)Nullmenge ist, nennt man ***J-messbar*** („Jordan-messbar“). Die Zahl

$$\mathrm{vol}_n(M) := \int_Q \chi_M(\mathbf{x})\, dV_n$$

nennt man das ***Volumen*** von M.

Definition

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader und $M \subset Q$ J-messbar. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt (über M) ***Riemann-integrierbar***, falls die triviale Fortsetzung $\widehat{f}|_Q$ Riemann-integrierbar ist. Man setzt dann

$$\int\limits_M f(\mathbf{x})\, dV_n := \int_Q \widehat{f}(\mathbf{x})\, dV_n.$$

Die Definition ist unabhängig vom gewählten Quader Q. Ist P ein weiterer Quader mit $Q \subset P$, so liefert $\widehat{f}$ über $P \setminus Q$ keinen Beitrag.

3.11. Satz

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader und $M \subset Q$ J-messbar. Ist $f : Q \to \mathbb{R}$ R-integrierbar, so ist auch $f|_M$ über M integrierbar.

Beweis: Es gibt eine Nullmenge $N \subset Q$, so dass f auf $Q \setminus N$ stetig ist. Dann ist auch $S := N \cup \partial M$ eine Nullmenge und

$$Q \setminus S = (M^\circ \setminus N) \cup \big((Q \setminus \overline{M}) \setminus N\big).$$

Sei $g := \big(\widehat{f|_M}\big)|_Q$ die Einschränkung der trivialen Fortsetzung von $f|_M$ auf Q. Dann ist $g = f$ auf $M^\circ \setminus N$ und $g = 0$ auf $(Q \setminus \overline{M}) \setminus N$, also g stetig auf $Q \setminus S$ und damit R-integrierbar über Q. ∎

3.12. Satz

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader, $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und $N \subset Q$ eine J-messbare (Lebesgue-)Nullmenge. Dann ist f über N R-integrierbar und

$$\int_N f(\mathbf{x})\, dV_n = 0.$$

Beweis: Sei $|f| \le C$ auf Q.

Da N J-messbar ist, ist $\overline{N} = N \cup \partial N$ ebenfalls eine Nullmenge. Als abgeschlossene Teilmenge von Q ist $\overline{N}$ zudem kompakt. Deshalb gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele offene Quader $Q_1, \dots, Q_N \subset Q$ mit $\overline{N} \subset \bigcup_i Q_i$ und $\sum_i \mathrm{vol}_n(Q_i) < \varepsilon / C$.

Da $f|_N$ außerhalb der Q_i verschwindet, gilt für genügend feine Zerlegungen $\mathfrak{Z}$ von Q:

$$-\varepsilon \le \sum_{i=1}^{N} \inf_{Q_i}(f)\,\mathrm{vol}_n(Q_i) \le U(f|_N,\mathfrak{Z}) \le O(f|_N,\mathfrak{Z}) \le \sum_{i=1}^{N} \sup_{Q_i}(f)\,\mathrm{vol}_n(Q_i) < \varepsilon$$

und damit $O(f|_N,\mathfrak{Z}) - U(f|_N,\mathfrak{Z}) < 2\varepsilon$.

Daraus folgt, dass $f|_N$ R-integrierbar ist und dass das Integral verschwindet. ∎

3.13. Satz

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader, $f : Q \to \mathbb{R}$ R-integrierbar und $N \subset Q$ eine J-messbare (Lebesgue-)Nullmenge. Ist $g : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, die auf $Q \setminus N$ mit f übereinstimmt, so ist auch g R-integrierbar, und die Integrale über f und g sind gleich.

Beweis: Es ist $\overline{N} = N \cup \partial N$ ist eine kompakte J-messbare Nullmenge in Q. Da $Q \setminus (\partial Q \cup \overline{N}) = Q^\circ \setminus \overline{N}$ eine offene Teilmenge von $Q \setminus N$ ist, liegt $\partial(Q \setminus N)$ in $\partial Q \cup \overline{N}$ und ist ebenfalls eine Nullmenge. Das bedeutet, dass $Q \setminus N$ J-messbar ist.

Damit sind $f_0 := f|_N$ und $f_1 := f|_{(Q\setminus N)}$ R-integrierbar, und natürlich ist $f = f_0 + f_1$. Nun ist $g|_{(Q\setminus N)} = f|_{(Q\setminus N)}$ ebenfalls integrierbar und $g|_N$ nach dem vorigen Satz integrierbar. Daraus folgt, dass $g = g|_{(Q\setminus N)} + g|_N$ über Q R-integrierbar ist, mit

$$\int_Q g(\mathbf{x})\,dV_n = \int_N g(\mathbf{x})\,dV_n + \int_{Q\setminus N} g(\mathbf{x})\,dV_n = \int_{Q\setminus N} f(\mathbf{x})\,dV_n = \int_Q f(\mathbf{x})\,dV_n.$$

∎

3.14. Satz von Fubini für Riemann-Integrale

Seien $P \subset \mathbb{R}^p$ und $Q \subset \mathbb{R}^q$ abgeschlossene Quader, $f : P \times Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte R-integrierbare Funktion. Für $\mathbf{x} \in P$ sei $f_{\mathbf{x}} : Q \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := f(\mathbf{x},\mathbf{y})$, sowie $I_*(f,\mathbf{x})$ das Unterintegral und $I^*(f,\mathbf{x})$ das Oberintegral von $f_{\mathbf{x}}$.

Dann sind die Funktionen $\mathbf{x} \mapsto I_*(f,\mathbf{x})$ und $\mathbf{x} \mapsto I^*(f,\mathbf{x})$ R-integrierbar, und es gilt:

$$\int_{P\times Q} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,dV_{p+q} = \int_P I_*(f,\mathbf{x})\,dV_p = \int_P I^*(f,\mathbf{x})\,dV_p.$$

Beweis: Sei $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_P \times \mathfrak{Z}_Q$ eine Zerlegung von $P \times Q$.

Sei $T = R \times S$ ein Teilquader der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ und $\mathbf{x}_0 \in R$. Dann ist

$$m_T(f) := \inf\{f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \,:\, (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in R \times S\} \le f(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}) \text{ für alle } \mathbf{y} \in S$$

und daher $m_T(f) \le \inf\{f(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}) \,:\, \mathbf{y} \in S\}$.

Hält man nun $\mathbf{x}_0$ und R fest, multipliziert mit $\mathrm{vol}_n(S)$ und summiert über alle Quader S, so erhält man die Ungleichungen

$$\sum_S m_T(f)\,\mathrm{vol}_q(S) \le \sum_S \inf_S f_{\mathbf{x}_0}\,\mathrm{vol}_q(S) = U(f_{\mathbf{x}_0},\mathfrak{Z}_Q) \le I_*(f,\mathbf{x}_0).$$

Da $\mathbf{x}_0 \in R$ beliebig gewählt wurde, ist auch

$$\sum_S m_T(f)\,\mathrm{vol}_q(S) \le \inf\{I_*(f,\mathbf{x}) \,:\, \mathbf{x} \in R\}.$$

Multipliziert man mit $\mathrm{vol}_p(R)$ und summiert man über R, so erhält man die Ungleichung

$$U(f,\mathfrak{Z}) = \sum_T m_T(f)\,\mathrm{vol}_n(T) \le \sum_R \inf_R I_*(f,\ldots)\,\mathrm{vol}_p(R) = U(I_*(f,\ldots),\mathfrak{Z}_P).$$

Ganz analog beweist man die Ungleichung

$$O(f,\mathfrak{Z}) \ge O(I^*(f,\ldots),\mathfrak{Z}_P).$$

Weil f R-integrierbar und

$$\begin{aligned} U(f,\mathfrak{Z}) \;&\le\; U(I_*(f,\ldots),\mathfrak{Z}_P) \;\le\; O(I_*(f,\ldots),\mathfrak{Z}_P) \\ &\le\; O(I^*(f,\ldots),\mathfrak{Z}_P) \;\le\; O(f,\mathfrak{Z}) \end{aligned}$$

ist, folgt die R-Integrierbarkeit von I_*. Weil außerdem

$$U(f,\mathfrak{Z}) \le U(I_*(f,\ldots),\mathfrak{Z}_P) \;\le\; U(I^*(f,\ldots),\mathfrak{Z}_P) \;\le\; O(I^*(f,\ldots),\mathfrak{Z}_P) \le O(f,\mathfrak{Z})$$

ist, folgt auch die R-Integrierbarkeit von I^* . Die Gleichheit der Integrale ergibt sich ebenfalls aus den Ungleichungen und der Tatsache, dass alle Unter- und Obersummen gegen das jeweilige Integral konvergieren. ∎

Unter den obigen Bezeichnungen gilt insbesondere:

3.15. Folgerung

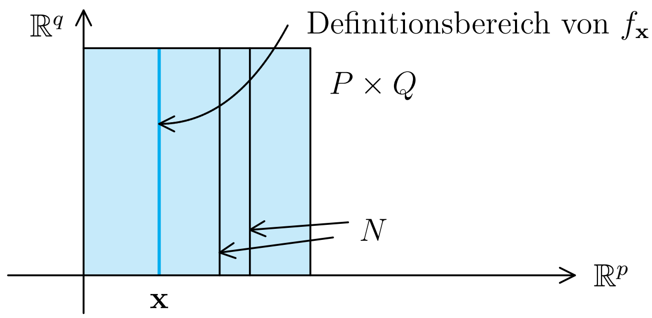
Seien $P \subset \mathbb{R}^p$ und $Q \subset \mathbb{R}^q$ abgeschlossene Quader, $f : P \times Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte R-integrierbare Funktion. Gibt es eine J-messbare Nullmenge $N \subset P$ (die auch leer sein kann), so dass $f_\mathbf{x}$ für alle $\mathbf{x} \in P \setminus N$ integrierbar ist, so ist die Funktion $I_Q f : P \to \mathbb{R}$ mit

$$I_Q f(\mathbf{x}) := \int_Q f_\mathbf{x}(\mathbf{y})\,dV_q$$

integrierbar und

$$\int_{P\times Q} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,dV_{p+q} = \int_P I_Q f(\mathbf{x})\,dV_p = \int_P \left(\int_Q f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,dV_q \right)\,dV_p.$$

BEWEIS: Der Fall, dass N nicht leer ist, kann durchaus vorkommen. Es könnte ja z.B. f entlang einer Menge vom Typ $\{\mathbf{x}\} \times Q$ unstetig sein.



Unter den Voraussetzungen des Satzes ist $I_Q f = I_*(f, \ldots) = I^*(f, \ldots)$ auf $P \setminus N$. Nach dem Satz von Fubini sind I_* und I^* integrierbar. Da man eine R-integrierbare Funktion auf einer J-Nullmenge beliebig abändern kann, ist auch $I_Q f$ integrierbar. Die Gleichheit der Integrale folgt dann natürlich ebenfalls. ∎

3.16. Folgerung

Ist $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ und $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig, so ist

$$\int_Q f(\mathbf{x})\, dV_n = \int_{a_n}^{b_n} \ldots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Dabei kommt es nicht auf die Reihenfolge der Integrationen an.

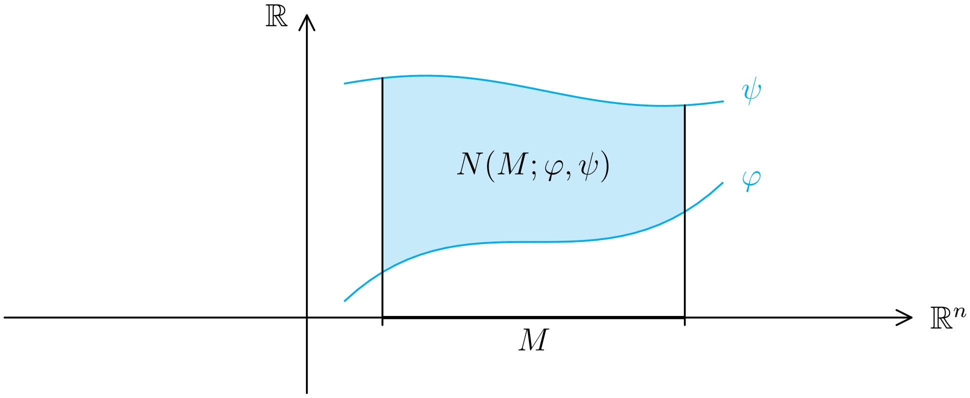
Die Formel ergibt sich durch sukzessive Anwendung des gerade bewiesenen Satzes. Die Unabhängigkeit von der Reihenfolge der Integrationen ergibt sich ganz einfach aus Symmetriebetrachtungen.

Definition

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader und $M \subset Q$ eine J-messbare Teilmenge. Ein ***Normalbereich*** über M ist eine Menge der Gestalt

$$N(M; \varphi, \psi) := \{(\mathbf{x}, t) \in M \times \mathbb{R} \,:\, \varphi(\mathbf{x}) \le t \le \psi(\mathbf{x})\}.$$

Dabei seien $\varphi, \psi : Q \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $\varphi(\mathbf{x}) \le \psi(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in M$.



Ein Normalbereich $N = N(M; \varphi, \psi)$ ist eine J-messbare Menge: Nach Voraussetzung ist ∂M eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$, und es gibt Zahlen c, C, so dass $c \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x}) \leq C$ für $\mathbf{x} \in \overline{M}$ ist. Dann ist $(\partial M \times [c, C]) \cap \overline{N}$ eine Nullmenge. Und die Graphen der stetigen Funktionen φ und ψ sind ebenfalls Nullmengen. Daraus folgt, dass ∂N eine Nullmenge ist.

Ist $f : N \to \mathbb{R}$ integrierbar (also eigentlich die triviale Fortsetzung von $f \cdot \chi_N$), so folgt mit dem Satz von Fubini sofort:

$$\boxed{\int_{N(M;\varphi,\psi)} f(\mathbf{x}, t)\, dV_{n+1} = \int_M \Big(\int_{\varphi(\mathbf{x})}^{\psi(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, t)\, dt \Big)\, dV_n\,.}$$

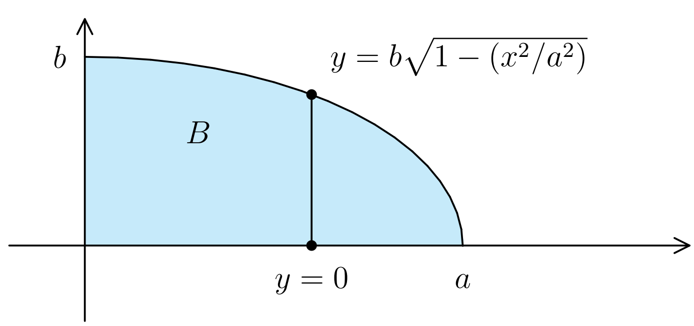
3.17. Beispiele

A. Sei B derjenige Teil einer Ellipsenfläche um den Nullpunkt (mit den Halbachsen a und b), der im rechten oberen Quadranten liegt. Es soll das Integral $\int_B f(x, y)\, dV_2$ für $f(x, y) = xy$ berechnet werden.

Der Rand von B ist durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = 0 \text{ und } y = 0$$

gegeben. Offensichtlich ist B ein Normalbereich über dem Intervall $[0, a]$:



Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_B xy\,dV_2 &= \int_0^a \left(\int_0^{b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} xy\,dy \right) dx \\
&= \int_0^a \left(\frac{xy^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} \right) dx \\
&= \int_0^a \frac{x}{2} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx \\
&= \frac{b^2}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4a^2} \right) \Big|_{x=0}^{x=a} = \frac{a^2 b^2}{8}.
\end{aligned}$$

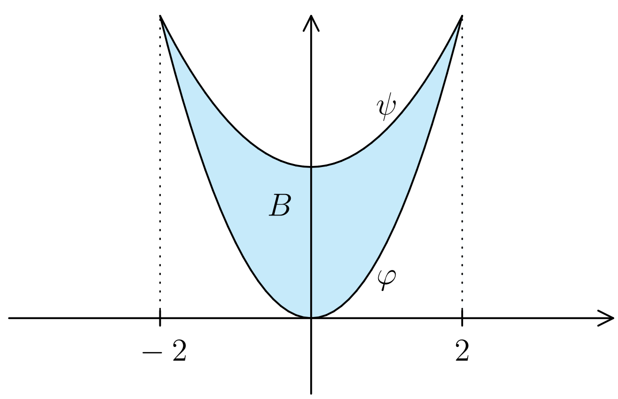
B. Sei $\varphi(x) := x^2$ und $\psi(x) := 2 + \frac{1}{2}x^2$. Dann ist

$$\varphi(-2) = \psi(-2) = 4 \text{ und } \varphi(2) = \psi(2) = 4,$$

und für $|x| \le 2$ ist $x^2 \le 4$, also $\psi(x) - \varphi(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2 \ge 0$. Daher ist

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le 2 \text{ und } \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

ein Normalbereich über dem Intervall $[-2, 2]$:



Der Flächeninhalt von B ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\int \chi_B(\mathbf{x})\,dV_2 &= \int_{-2}^2 \int_{x^2}^{2+(x^2/2)} dy\,dx = \int_{-2}^2 \big(2 - \frac{x^2}{2}\big)\,dx \\
&= \big(2x - \frac{x^3}{6}\big) \Big|_{-2}^2 = \big(4 - \frac{8}{6}\big) - \big(-4 + \frac{8}{6}\big) = \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$