2.2 Integrierbare Funktionen

Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gehört zu $\mathscr{L}^+$, falls es eine **monoton wachsende** Folge von Treppenfunktionen h_ν gibt, so dass gilt:

1. (h_ν) konvergiert **fast überall** gegen f.
2. Die Folge der Integrale $I(h_\nu)$ ist beschränkt.

Man nennt (h_ν) eine ***approximierende Folge*** für f.

Offensichtlich gehören alle Elemente von $\mathscr{T}_n$ auch zu $\mathscr{L}^+$.

2.1. Hilfssatz

Sei (h_ν) eine approximierende Folge von Treppenfunktionen für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann existiert der Grenzwert $I := \lim\limits_{\nu\to\infty} I(h_\nu)$.

Ist h eine weitere Treppenfunktion und fast überall $h \leq f$, so ist $I(h) \leq I$.

Beweis: Die Folge der Integrale $I(h_\nu)$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt, also konvergent.

Sei nun zusätzlich h gegeben und fast überall $h \leq f$. Außerhalb einer Nullmenge konvergiert (h_ν) gegen f. Deshalb bilden die Funktionen $g_\nu := \max(h - h_\nu, 0)$ eine monoton fallende Folge von nicht-negativen Treppenfunktionen, die fast überall gegen $\max(h - f, 0)$ konvergiert, und diese Grenzfunktion ist fast überall die Nullfunktion. Wegen der Stetigkeit des Daniell-Integrals muss auch $I(g_\nu)$ gegen Null konvergieren.

Weil $g_\nu \geq h - h_\nu$ ist, ist auch $I(g_\nu) \geq I(h) - I(h_\nu)$. Lässt man ν gegen Unendlich gehen, so erhält man die gewünschte Ungleichung. ■

2.2. Folgerung

Sei $f \in \mathscr{L}^+$. Sind (h_ν) und (g_μ) zwei approximierende Folgen für f, so ist $\lim\limits_{\nu\to\infty} I(h_\nu) = \lim\limits_{\mu\to\infty} I(g_\mu)$.

Beweis: Es ist fast überall $h_\nu \leq f$, nach dem Hilfssatz also $I(h_\nu) \leq \lim_{\mu\to\infty} I(g_\mu)$ für alle ν. Im Grenzwert wird daraus die Ungleichung

$$\lim_{\nu\to\infty} I(h_\nu) \leq \lim_{\mu\to\infty} I(g_\mu).$$

Vertauscht man die Rollen der h_ν und g_μ, so erhält man die umgekehrte Ungleichung und damit die gewünschte Aussage. ■

Definition

Sei $f \in \mathscr{L}^+$ und (h_ν) eine approximierende Folge von Treppenfunktionen für f. Dann nennt man

$$\boxed{I(f) := \lim_{\nu\to\infty} I(h_\nu)}$$

das ***Integral*** von f.

Dass das Integral einer Funktion $f \in \mathscr{L}^+$ wohldefiniert ist, haben wir oben gezeigt.

2.3. Eigenschaften der Klasse $\mathscr{L}^+$ und des Integrals

1. *Seien $f, g \in \mathscr{L}^+$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Dann sind auch $f + g$ und αf Elemente von $\mathscr{L}^+$, und es ist*

$$I(f+g) = I(f) + I(g), \quad I(\alpha f) = \alpha \cdot I(f).$$

2. *Ist $f \le g$, so ist auch $I(f) \le I(g)$.*
3. *Mit f und g gehören auch $\min(f,g)$ und $\max(f,g)$ zu $\mathscr{L}^+$.*
4. *Sei (f_ν) eine monoton wachsende Folge von Funktionen aus $\mathscr{L}^+$. Sind die Integrale $I(f_\nu)$ durch eine Konstante C beschränkt, so konvergiert (f_ν) fast überall gegen eine Funktion $f \in \mathscr{L}^+$, und die Folge der Integrale $I(f_\nu)$ konvergiert gegen $I(f)$.*

Beweis: 1) Sei (f_ν) eine approximierende Folge für f und (g_ν) eine approximierende Folge für g. Dann konvergiert $(f_\nu + g_\nu)$ fast überall monoton wachsend gegen $f+g$, und die Integrale $I(f_\nu + g_\nu) = I(f_\nu) + I(g_\nu)$ sind beschränkt. Also ist $(f_\nu + g_\nu)$ eine approximierende Folge für $f+g$ mit

$$I(f+g) = \lim_{\nu\to\infty} I(f_\nu + g_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} I(f_\nu) + \lim_{\nu\to\infty} I(g_\nu) = I(f) + I(g).$$

Die Gleichung $I(\alpha f) = \alpha \cdot I(f)$ folgt genauso. Dabei muss $\alpha > 0$ sein, weil sonst aus einer monoton wachsenden approximierenden Folge (f_ν) eine monoton fallende Folge (αf_ν) wird.

2) folgt aus dem Hilfssatz 2.1. Ist (f_ν) eine approximierende Folge für f, so ist $f_\nu \le f \le g$ fast überall, und daher $I(f_\nu) \le I(g)$. Lässt man ν gegen Unendlich gehen, so erhält man die Ungleichung $I(f) \le I(g)$.

3) ist klar, denn $\min(f_\nu, g_\nu)$ konvergiert gegen $\min(f,g)$ und $\max(f_\nu, g_\nu)$ konvergiert gegen $\max(f,g)$.

4) Sei $(h_{\nu,\mu})$ jeweils eine approximierende Folge für f_ν, und für festes μ sei

$$g_\mu := \max(h_{1,\mu}, h_{2,\mu}, \ldots, h_{\mu,\mu}).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} g_{\mu+1} &= \max(h_{1,\mu+1}, h_{2,\mu+1}, \ldots, h_{\mu,\mu+1}, h_{\mu+1,\mu+1}) \\ &\geq \max(h_{1,\mu+1}, h_{2,\mu+1}, \ldots, h_{\mu,\mu+1}) \\ &\geq \max(h_{1,\mu}, h_{2,\mu}, \ldots, h_{\mu,\mu}) \ = \ g_\mu, \end{aligned}$$

d.h., die g_μ bilden eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen. Außerdem ist $g_\mu \leq \max(f_1, \ldots, f_\mu) = f_\mu$ fast überall und daher $I(g_\mu) \leq I(f_\mu) \leq C$. Das bedeutet, dass die Folge der Integrale $I(g_\mu)$ konvergiert. Nach dem zweiten Konvergenzsatz für Treppenfunktionen muss (g_μ) fast überall gegen eine reellwertige Funktion g konvergieren. Die liegt dann offensichtlich in $\mathscr{L}^+$, und es ist $I(g) = \lim\limits_{\mu\to\infty} I(g_\mu)$.

Hält man ν fest und wählt $\mu \geq \nu$, so ist $g_\mu \geq h_{\nu,\mu}$. Lässt man dann μ gegen Unendlich gegen, so erhält man fast überall die Ungleichung $g \geq f_\nu$. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz konvergiert daher (f_ν) fast überall gegen eine Funktion $f \leq g$. Aus der Ungleichung $g_\mu \leq f_\mu$ folgt aber auch $g \leq f$. Also ist fast überall $g = f$ und daher f ein Element von $\mathscr{L}^+$.

Es ist $I(g_\mu) \leq I(f_\mu) \leq I(f)$. Weil die Folge der Integrale $I(g_\mu)$ monoton wachsend gegen $I(g) = I(f)$ konvergiert, muss auch $I(f_\mu)$ gegen $I(f)$ konvergieren. ∎

Bemerkung: $\mathscr{L}^+$ ist kein Vektorraum!

Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt ***(Lebesgue-)integrierbar***, falls es Funktionen $g, h \in \mathscr{L}^+$ gibt, so dass $f = g - h$ ist.

Die Menge der integrierbaren Funktionen sei mit $\mathscr{L}^1$ bezeichnet. Ist $f = g - h \in \mathscr{L}^1$, so nennt man

$$\boxed{\int f \, d\mu_n := I(g) - I(h)}$$

das ***(n-dimensionale Lebesgue-)Integral*** von f.

Das Integral ist wohldefiniert:

Ist $f = g_1 - h_1$ und auch $= g_2 - h_2$, mit $g_1, g_2, h_1, h_2 \in \mathscr{L}^+$, so ist $g_1 + h_2 = g_2 + h_1$. Dann ist

$$I(g_1) + I(h_2) = I(g_1 + h_2) = I(g_2 + h_1) = I(g_2) + I(h_1),$$

also $I(g_1) - I(h_1) = I(g_2) - I(h_2)$.

2.4. Satz

Ist $f_1 \in \mathscr{L}^1$ *und* $f_2 = f_1$ *fast überall, so ist auch* $f_2 \in \mathscr{L}^1$ *und* $\int f_1 \, d\mu_n = \int f_2 \, d\mu_n$.

Beweis: Die Aussage gilt offensichtlich in $\mathscr{L}^+$. Sei nun $f_1 = g - h$, mit $g, h \in \mathscr{L}^+$. Da $h^* := h + (f_1 - f_2)$ fast überall mit h übereinstimmt, ist auch $h^* \in \mathscr{L}^+$. Außerdem ist $I(h^*) = I(h)$. Weil $f_2 = g - h^*$ ist, folgt die gewünschte Aussage. ∎

2.5. Eigenschaften integrierbarer Funktionen

Seien $f, g \in \mathscr{L}^1$ *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Dann gilt:*

1. $\alpha f + \beta g \in \mathscr{L}^1$ *und* $\displaystyle\int (\alpha f + \beta g) \, d\mu_n = \alpha \int f \, d\mu_n + \beta \int g \, d\mu_n$.
2. *Ist* $f \geq 0$ *fast überall, so ist auch* $\displaystyle\int f \, d\mu_n \geq 0$.
3. *Die Funktionen* $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$ *und* $|f|$ *gehören zu* $\mathscr{L}^1$, *und es ist*
$$\left| \int f \, d\mu_n \right| \leq \int |f| \, d\mu_n.$$
4. $\max(f, g)$ *und* $\min(f, g)$ *gehören zu* $\mathscr{L}^1$.

Beweis: Sei $f = f_1 - f_2$ und $g = g_1 - g_2$, mit $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathscr{L}^+$.

1) $f + g = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2)$, mit $f_1 + g_1 \in \mathscr{L}^+$ und $f_2 + g_2 \in \mathscr{L}^+$. Also liegt $f + g$ in $\mathscr{L}^1$, und es ist

$$\begin{aligned} \int (f + g) \, d\mu_n &= I(f_1 + g_1) - I(f_2 + g_2) \\ &= I(f_1) - I(f_2) + \big(I(g_1) - I(g_2)\big) = \int f \, d\mu_n + \int g \, d\mu_n. \end{aligned}$$

Ist $\alpha \geq 0$, so ist $\alpha f = (\alpha f_1) - (\alpha f_2)$ mit $\alpha f_1 \in \mathscr{L}^+$ und $\alpha f_2 \in \mathscr{L}^+$, also $\alpha f \in \mathscr{L}^1$ und

$$\int (\alpha f) \, d\mu_n = I(\alpha f_1) - I(\alpha f_2) = \alpha\big(I(f_1) - I(f_2)\big) = \alpha \int f \, d\mu_n.$$

Schließlich ist $-f = f_2 - f_1$ und daher $\displaystyle\int (-f) \, d\mu_n = I(f_2) - I(f_1) = -\int f \, d\mu_n$.

2) Ist $f = f_1 - f_2 \geq 0$, so ist $f_1 \geq f_2$ (fast überall), also $I(f_1) \geq I(f_2)$ und damit

$$\int f \, d\mu_n = I(f_1) - I(f_2) \geq 0.$$

3) Es ist $f^+ = \max(f_1 - f_2, 0) = \max(f_1, f_2) - f_2$, wobei $\max(f_1, f_2) \in \mathscr{L}^+$ ist. Also gehört f^+ zu $\mathscr{L}^1$, und dann auch $f^- = f^+ - f$ und $|f| = f^+ + f^-$. Aus der Ungleichungskette $-|f| \le f \le |f|$ folgt:

$$-\int |f|\, d\mu_n \le \int f\, d\mu_n \le \int |f|\, d\mu_n, \quad \text{also} \quad \Big|\int f\, d\mu_n\Big| \le \int |f|\, d\mu_n.$$

4) Es ist $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ und $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$. ∎