2 Integration in mehreren Variablen

Überblick: In diesem Kapitel soll das Lebesgue-Integral für reelle Funktionen von mehreren Veränderlichen eingeführt werden. Dabei gehen wir nach der folgenden Methode vor:

- Auf dem $\mathbb{R}^n$ wird ein $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathscr{E}$ von so genannten *Elementarfunktionen* eingeführt, so dass mit $f \in \mathscr{E}$ auch $|f|$ in $\mathscr{E}$ liegt. Wir benutzen dafür Treppenfunktionen.

- Als nächstes werden *Nullmengen* im $\mathbb{R}^n$ eingeführt. Das sind Mengen, deren „Volumen" unterhalb jeder positiven Schranke liegt und die daher bei der Integration keine Rolle spielen. Man sagt, dass eine Eigenschaft *fast überall* gilt, wenn sie außerhalb einer Nullmenge gilt.

- Auf dem Raum $\mathscr{E}$ wird eine Linearform I definiert, so dass gilt:

  1. Ist $f \in \mathscr{E}$ und $f \geq 0$, so ist auch $I(f) \geq 0$ (Monotonie) .
  2. Ist (f_ν) eine Folge in $\mathscr{E}$, die fast überall monoton fallend (punktweise) gegen die Nullfunktion konvergiert, so konvergiert die Folge der Zahlen $I(f_\nu)$ gegen die Zahl 0 (Stetigkeit).

  Eine solche Linearform I nennt man ein *Daniell-Integral*. In unserem Falle wird $I(f)$ das offensichtliche Integral der Treppenfunktion f sein.

- Das Daniell-Integral wird nun in zwei Schritten erweitert. Zunächst führt man die Menge $\mathscr{L}^+$ von Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein, die Grenzwert einer monoton wachsenden und fast überall konvergenten Folge (f_ν) von Elementarfunktionen sind, so dass die Integrale $I(f_\nu)$ gegen eine Zahl I konvergieren. Dann wird $I(f) := I$ gesetzt.

- Im zweiten Schritt bildet man

  $$\mathscr{L} := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \, : \, f = g - h, \text{ mit } g, h \in \mathscr{L}^+\}.$$

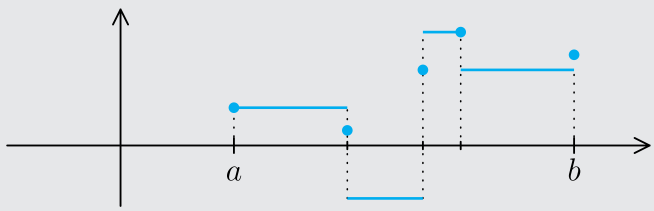
  Die Darstellung $f = g - h$ ist nicht eindeutig bestimmt, wohl aber das *Integral*

  $$\int f \, d\mu_n := I(g) - I(h).$$

  Die Elemente von $\mathscr{L}$ nennt man *Lebesgue-integrierbare Funktionen* und die Zahl $\int f \, d\mu_n$ das *Lebesgue-Integral* von f.

2.1 Nullmengen und Treppenfunktionen

Zur Erinnerung
Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, falls es eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ von $[a, b]$ und Konstanten c_ν gibt, so dass $f|_{(x_{\nu-1}, x_\nu)} \equiv c_\nu$ für $\nu = 1, \ldots, n$ gilt. In den Punkten x_ν kann f ganz beliebige Werte annehmen.



Das Integral

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu (x_\nu - x_{\nu-1})$$

stimmt mit dem anschaulichen Flächeninhalt unter dem Graphen überein.

Wir werden in diesem Abschnitt Treppenfunktionen von n Veränderlichen einführen, und die werden dann den Vektorraum der Elementarfunktionen bilden.

Unter einem ***Intervall*** wird hier stets eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ verstanden, die folgende Eigenschaften besitzt:

1. I ist nicht leer.
2. Sind $x \le y$ zwei Punkte von I, so gehört jeder Punkt z mit $x \le z \le y$ ebenfalls zu I.

Man nennt $a := \inf(I)$ den ***Anfangspunkt*** und $b := \sup(I)$ den ***Endpunkt*** des Intervalls. Dabei ist $a = -\infty$ oder $b = +\infty$ zulässig. Das Intervall kann offen, halboffen oder abgeschlossen sein, oder sogar eine einpunktige Menge. Es ist genau dann ***beschränkt***, wenn $a > -\infty$ und $b < +\infty$ ist.

Ist I ein beschränktes Intervall mit Anfangspunkt a und Endpunkt b, so heißt die Zahl $\ell(I) = b - a$ die ***Länge*** von I.

Unter einem ***Quader*** im $\mathbb{R}^n$ versteht man ein Produkt von n Intervallen,

$$Q = I_1 \times \ldots \times I_n.$$

Ein Quader ist hier also immer ein **achsenparalleler** Quader. Der Quader ist genau dann beschränkt, wenn alle beteiligten Intervalle I_ν beschränkt sind. In dem Fall nennt man die Zahl

$$\boxed{\mathrm{vol}_n(Q) := \ell(I_1) \cdots \ell(I_n)}$$

das ***(n-dimensionale) Volumen*** von Q.

Ist $\ell(I_\nu) = 0$ für ein ν, so ist $\mathrm{vol}_n(Q) = 0$. Ist nun Q unbeschränkt, so setzen wir ebenfalls $\mathrm{vol}_n(Q) = 0$, wenn eins der beteiligten Intervalle die Länge Null hat. Andernfalls ist dann $\mathrm{vol}_n(Q) := +\infty$.

Definition

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine ***Nullmenge***, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge von Quadern Q_i gibt, so dass gilt:

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(Q_i) < \varepsilon.$$

Bemerkung: Ist M eine Nullmenge und $N \subset M$, so ist auch N eine Nullmenge. Und eine 1-punktige Menge $\{\mathbf{x}_0\} \subset \mathbb{R}^n$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Nullmenge, denn $Q_i := \{\mathbf{x}_0\}$ (für $i \in \mathbb{N}$) ist eine Folge von Quadern mit $\mathrm{vol}_n(Q_i) = 0$.

1.1. Satz

Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind wieder Nullmengen.

Beweis: Sei (M_ν) ein System von Nullmengen, $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu den Mengen M_ν gibt es jeweils Folgen von Quadern $Q_{\nu,i}$ mit

$$M_\nu \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_{\nu,i} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(Q_{\nu,i}) < \varepsilon \cdot 2^{-\nu}.$$

Dann ist $\displaystyle\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu \subset \bigcup_{\nu,i} Q_{\nu,i}$ und $\displaystyle\sum_{\nu,i} \mathrm{vol}_n(Q_{\nu,i}) < \varepsilon \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} = \varepsilon.$ ∎

Also ist z.B. $\mathbb{Q}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}$.

1.2. Satz

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge. Dann ist $M \times \{0\}$ eine Nullmenge im $\mathbb{R}^{n+1}$.

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ sei $Q_k := [-k, k]^n$. Dann ist $\widehat{Q}_k := Q_k \times \{0\}$ ein Quader im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $\mathrm{vol}_{n+1}(\widehat{Q}_k) = 0$. Da $M \times \{0\}$ in der Vereinigung aller $\widehat{Q}_k$ enthalten ist, folgt die Behauptung. ∎

Insbesondere ist die Hyperebene $H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$, und man zeigt auf analoge Weise, dass jede (achsenparallele) Hyperebene

$$H_\nu(c) := \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_\nu = c\}$$

eine Nullmenge ist. Daraus folgt z.B.: Die Vereinigung aller achsenparallelen Hyperebenen, die einen Punkt mit rationalen Koordinaten enthalten, bildet eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$. Nullmengen sind also nicht so „klein“, wie man erst vermuten würde.

1.3. Stetige Graphen sind Nullmengen

Sei $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $G_f := \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$.

Beweis: Es sei $W := [0,1]^{n-1}$. Dann reicht es zu zeigen, dass $G_{f|W}$ eine Nullmenge ist. Als stetige Funktion ist f auf dem kompakten Würfel W gleichmäßig stetig. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$, so dass gilt:

$$\text{Ist } \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta, \text{ so ist } |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon.$$

Sei $k > \sqrt{n}/\delta$ eine natürliche Zahl. Dann können wir W in k^{n-1} gleich große Teilwürfel $W_{k,\nu}$ der Kantenlänge $1/k$ zerlegen.

Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W_{k,\nu}$ ist $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \le \sqrt{n}|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \sqrt{n}/k < \delta$, also $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon$.

Das bedeutet, dass es für jedes $\nu \in \{1, \ldots, k^{n-1}\}$ ein abgeschlossenes Intervall $J_{k,\nu}$ der Länge 2ε mit

$$G_f \cap (W_{k,\nu} \times \mathbb{R}) \subset W_{k,\nu} \times J_{k,\nu}$$

gibt. Dabei ist $\mathrm{vol}_n(W_{k,\nu} \times J_{k,\nu}) = \mathrm{vol}_{n-1}(W_{k,\nu}) \cdot 2\varepsilon = (1/k)^{n-1} \cdot 2\varepsilon$.

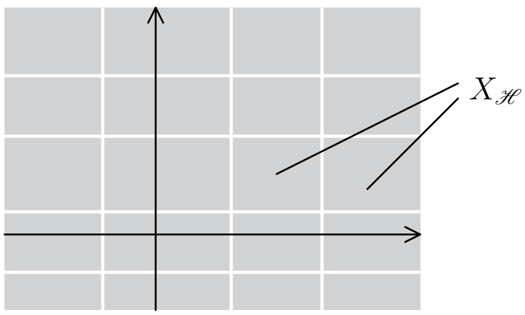
Daraus folgt, dass $G_{f|W}$ in einer Vereinigung von Quadern mit dem Gesamtvolumen $< 2\varepsilon$ enthalten ist. Da ε beliebig gewählt werden kann, ist $G_{f|W}$ und damit auch G_f eine Nullmenge. ∎

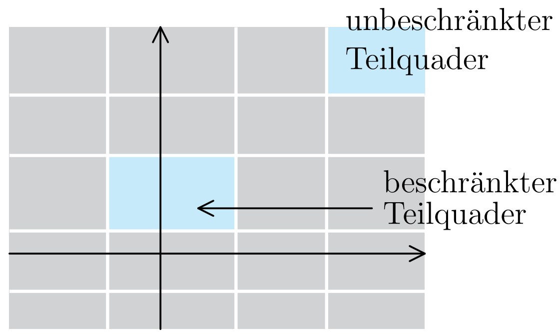
Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge und $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge. Gilt eine Eigenschaft für alle Punkte $\mathbf{x} \in M \setminus N$, so sagt man, die Eigenschaft gilt auf M ***fast überall***.

Unter einer ***Zerlegung des*** $\mathbb{R}^n$ verstehen wir ein nicht leeres **endliches** System $\mathscr{H} = (H_j)_{j \in J}$ von achsenparallelen Hyperebenen. Die Vereinigung $|\mathscr{H}|$ aller H_j bildet offensichtlich eine Nullmenge.

Die Menge $X_{\mathscr{H}} := \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j \in J} H_j$ ist offen und zerfällt in endlich viele paarweise disjunkte Quader. Die sind natürlich auch alle offen und heißen die ***Teilquader*** der Zerlegung.





Wir interessieren uns hier in erster Linie für Zerlegungen, die wenigstens einen beschränkten Teilquader enthalten. Ist eine solche Zerlegung $\mathscr{H}$ gegeben, so gibt es zu jedem $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ Zahlen $\alpha_\nu^0 < \alpha_\nu^1 < \ldots < \alpha_\nu^{m_\nu}$ (mit $m_\nu \geq 1$), so dass $\mathscr{H}$ aus den Hyperebenen $H_{\nu\mu} = H_\nu(\alpha_\nu^\mu)$ besteht. Die beschränkten Teilquader von $\mathscr{H}$ sind dann die Quader

$$Q = Q(\mu_1, \ldots, \mu_n) := \left(\alpha_1^{\mu_1}, \alpha_1^{\mu_1+1}\right) \times \ldots \times \left(\alpha_n^{\mu_n}, \alpha_n^{\mu_n+1}\right),$$

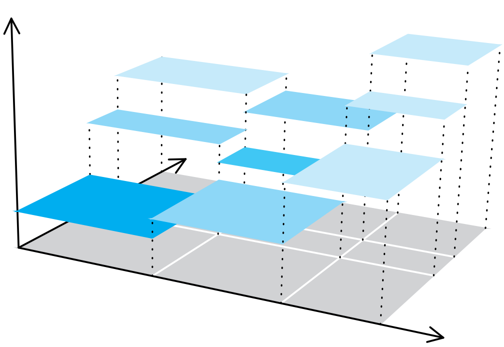
mit $0 \leq \mu_\nu < m_\nu$ für alle ν.

Ist $\alpha_\nu^\mu < c < \alpha_\nu^{\mu+1}$, so zerlegt die Hyperebene $H = H_\nu(c)$ den Quader Q in zwei offene Teilquader Q_- und Q_+, und es ist $\text{vol}_n(Q) = \text{vol}_n(Q_-) + \text{vol}_n(Q_+)$.

Definition

Eine ***Treppenfunktion*** auf dem $\mathbb{R}^n$ ist eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, zu der es eine Zerlegung $\mathscr{H}$ des $\mathbb{R}^n$ gibt, so dass gilt:

1. Zu jedem (offenen) Teilquader Q von $\mathscr{H}$ gibt es eine Konstante c_Q, so dass $f(\mathbf{x}) \equiv c_Q$ auf Q ist.
2. Ist Q ein unbeschränkter Teilquader, so ist $c_Q = 0$.



Eine Zerlegung $\mathscr{H}_0$ heißt ***Verfeinerung*** einer Zerlegung $\mathscr{H}$, falls $\mathscr{H} \subset \mathscr{H}_0$ ist. Jeder Teilquader von $\mathscr{H}_0$ ist dann in einem Teilquader von $\mathscr{H}$ enthalten.

Zu zwei Zerlegungen $\mathscr{H}_1$ und $\mathscr{H}_2$ gibt es eine ***gemeinsame Verfeinerung***, nämlich die Zerlegung $\mathscr{H}_1 \cup \mathscr{H}_2$. Sind also zwei Treppenfunktionen gegeben, so kann man bei beiden mit der gleichen Zerlegung arbeiten.

Ist h eine Treppenfunktion zur Zerlegung $\mathscr{H}$, $\mathscr{Q}$ das System der offenen Teilquader von $\mathscr{H}$ und c_Q jeweils der Wert von h auf dem Teilquader $Q \in \mathscr{Q}$, so liegt es nahe, die Zahl $I(h, \mathscr{H}) := \sum_{Q \in \mathscr{Q}} c_Q \cdot \mathrm{vol}_n(Q)$ als Integral von h zu bezeichnen. Das ist auf jeden Fall eine endliche Zahl, aber es gibt ein kleines Problem. Da die Zerlegung zu einer Treppenfunktion nicht eindeutig bestimmt ist, könnte das Integral von der benutzten Zerlegung abhängen.

Ist H_0 eine achsenparallele Hyperebene, die nicht zu $\mathscr{H}$ gehört, so werden endlich viele Teilquader $Q \in \mathscr{Q}$ in jeweils zwei Quader Q' und Q'' zerlegt. Weil nach wie vor $h|_{Q'} \equiv c_Q$ und $h|_{Q''} \equiv c_Q$ ist, folgt:

$$c_{Q'} \cdot \mathrm{vol}_n(Q') + c_{Q''} \cdot \mathrm{vol}_n(Q'') = c_Q \cdot (\mathrm{vol}_n(Q') + \mathrm{vol}_n(Q'')) = c_Q \cdot \mathrm{vol}_n(Q).$$

Setzen wir also $\mathscr{H}_0 := \mathscr{H} \cup \{H_0\}$, so ist $I(h, \mathscr{H}_0) = I(h, \mathscr{H})$.

Der gleiche Effekt tritt auf, wenn man endlich viele Hyperebenen hinzunimmt und damit die ursprüngliche Zerlegung durch eine feinere ersetzt. Daraus folgt, dass die Zahl $I(h, \mathscr{H})$ **nicht** von der Zerlegung $\mathscr{H}$ abhängt.

Definition

Sei h eine Treppenfunktion zur Zerlegung $\mathscr{H}$ und $\mathscr{Q}$ das System der Teilquader von $\mathscr{H}$. Ist c_Q für $Q \in \mathscr{Q}$ jeweils der Wert von h auf Q, so nennt man die Zahl

$$\boxed{I(h) = I(h, \mathscr{H}) := \sum_{Q \in \mathscr{Q}} c_Q \cdot \mathrm{vol}_n(Q)}$$

das ***Integral*** von h.

Sind zwei Treppenfunktionen h_1, h_2 zu Zerlegungen $\mathscr{H}_1$ bzw. $\mathscr{H}_2$ gegeben, so gilt mit der gemeinsamen Verfeinerung $\mathscr{H}$ von $\mathscr{H}_1$ und $\mathscr{H}_2$:

$$I(h_1, \mathscr{H}_1) + I(h_2, \mathscr{H}_2) = I(h_1, \mathscr{H}) + I(h_2, \mathscr{H}) = I(h_1 + h_2, \mathscr{H}).$$

Das liefert bereits die erste Aussage des folgenden Satzes:

1.4. Eigenschaften des Integrals von Treppenfunktionen

1. *Sind h und g Treppenfunktionen, so ist auch $h+g$ eine Treppenfunktion, und es ist $I(h+g) = I(h) + I(g)$.*

2. *Ist h eine Treppenfunktion und $r \in \mathbb{R}$, so ist auch $r \cdot h$ eine Treppenfunktion und $I(r \cdot h) = r \cdot I(h)$.*

3. *Ist h eine Treppenfunktion und $h \geq 0$, so ist $I(h) \geq 0$.*

4. *Mit h ist auch $|h|$ eine Treppenfunktion.*

Beweis: (1) haben wir uns oben schon überlegt, die Aussagen (2), (3) und (4) sind trivial. ∎

Den *Vektorraum aller Treppenfunktionen* auf dem $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\mathscr{T}_n$. Das ist unser Raum von Elementarfunktionen. Als *Daniell-Integral* einer Treppenfunktion f nehmen wir natürlich das oben definierte Integral $I(f)$. Offensichtlich ist I linear und monoton. Daraus folgt insbesondere:

$$\text{Ist } h \le g, \text{ so ist } I(h) \le I(g),$$

denn mit $h \le g$ ist $g - h \ge 0$ und daher $I(g) - I(h) = I(g - h) \ge 0$.

Was bleibt, ist der Nachweis der Stetigkeit. Damit werden wir uns im Rest dieses Paragraphen befassen.

Enthält ein Raum von Funktionen mit einer Funktion f stets auch $|f|$, so hat das weitreichende Konsequenzen, denn aus f und $|f|$ kann man viele andere Funktionen kombinieren, wie das folgende Lemma zeigt.

1.5. Lemma

Für beliebige Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g| \quad \textit{und} \quad \min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g|.$$

Beweis: Ist $f \ge g$, so ist

$$\frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g| = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}(f-g) = f.$$

Ist dagegen $f < g$, so ist

$$\frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g| = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}(f-g) = g.$$

Das ergibt die erste Gleichung. Die zweite gewinnt man analog. ∎

Aus dem Lemma folgt, dass mit zwei Treppenfunktionen h und k auch $\max(h,k)$ und $\min(h,k)$ zu $\mathscr{T}_n$ gehören.

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge, so ist die ***charakteristische Funktion*** von M die Funktion $\chi_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die wie folgt definiert wird:

$$\chi_M(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbf{x} \in M, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

1.6. Satz

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Quader. Dann ist χ_Q eine Treppenfunktion und

$$I(\chi_Q) = \mathrm{vol}_n(Q).$$

Beweis: Ist $Q_0 := Q^\circ = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ und $\mathscr{H}$ das System der $2n$ Hyperebenen $H_\nu(a_\nu)$ und $H_\nu(b_\nu)$, so ist Q_0 der einzige beschränkte Teilquader der Zerlegung $\mathscr{H}$. Da $\chi_Q(\mathbf{x}) \equiv 1$ auf Q_0 und $\equiv 0$ auf allen anderen Teilquadern von $\mathscr{H}$ ist, ist χ_Q eine Treppenfunktion und $I(\chi_Q) = 1 \cdot \mathrm{vol}_n(Q_0) = \mathrm{vol}_n(Q)$. ∎

1.7. Folgerung

Gegeben seien endlich viele beschränkte Quader $Q_1, \ldots, Q_r \subset \mathbb{R}^n$ und reelle Zahlen $c_1, \ldots, c_r$. Dann ist

$$h := \sum_{\varrho=1}^{r} c_\varrho \chi_{Q_\varrho}$$

eine Treppenfunktion auf dem $\mathbb{R}^n$, und es gilt:

$$I(h) = \sum_{\varrho=1}^{r} c_\varrho \cdot \mathrm{vol}_n(Q_\varrho).$$

Beweis: Die Aussagen folgen aus dem obigen Satz und den Eigenschaften der Treppenfunktionen und ihrer Integrale. ∎

1.8. Satz

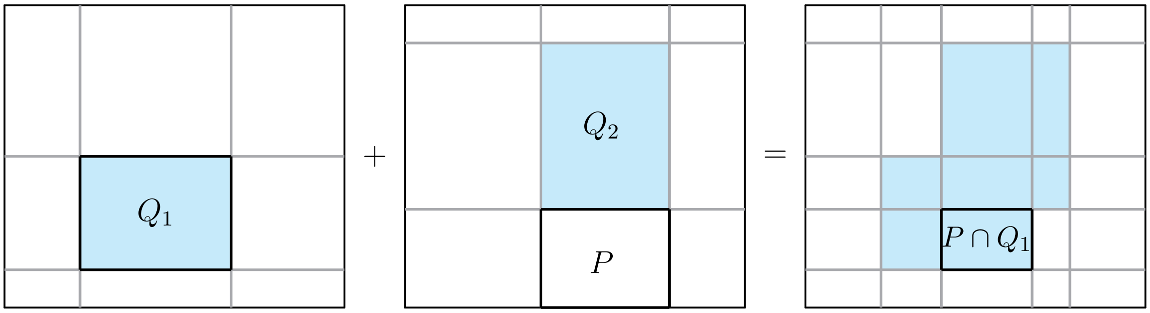
Ist $S \subset \mathbb{R}^n$ Vereinigung von endlich vielen beschränkten Quadern $Q_1, \ldots, Q_r$, so ist die charakteristische Funktion χ_S eine Treppenfunktion, und es gilt:

$$I(\chi_S) \le \sum_{\varrho=1}^{r} \mathrm{vol}_n(Q_\varrho).$$

Im Falle $r = 1$ gilt die Gleichheit.

Ist S in einem (beschränkten) Quader Q_0 enthalten, so ist $I(\chi_S) \le \mathrm{vol}_n(Q_0)$.

Beweis: Jeder einzelne Quader Q_ϱ bestimmt eine Zerlegung $\mathscr{H}_\varrho$, so dass Q_ϱ° der einzige beschränkte Teilquader dieser Zerlegung ist. $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{H}_r$ sei die gemeinsame Verfeinerung der $\mathscr{H}_\varrho$. Dann ist jeder Teilquader Q von $\mathscr{H}$ Durchschnitt von Teilquadern P_ϱ der Zerlegungen $\mathscr{H}_\varrho$. Ist wenigstens ein P_ϱ beschränkt, so ist $\chi_S|_Q = 1$, andernfalls ist $\chi_S|_Q = 0$.



Also ist χ_S eine Treppenfunktion zur Zerlegung $\mathscr{H}$.

Ist $r = 1$, so ist $\chi_S = \chi_{Q_1}$ und daher $I(\chi_S) = \text{vol}_n(Q_1)$. Ist S in einem Quader Q_0 enthalten, so ist $\chi_S \le \chi_{Q_0}$ und daher $I(\chi_S) \le I(\chi_{Q_0}) = \text{vol}_n(Q_0)$

Ist $r > 1$, so ist zumindest $\chi_S \le \sum_\varrho \chi_{Q_\varrho}$. Weil die Summe von Treppenfunktionen wieder eine Treppenfunktion ist, folgt:

$$I(\chi_S) \le I(\sum_\varrho \chi_{Q_\varrho}) = \sum_\varrho I(\chi_{Q_\varrho}) = \sum_\varrho \text{vol}_n(Q_\varrho).$$

Damit ist alles gezeigt. ∎

Ziel dieses Abschnittes ist es, die Stetigkeit des Daniell-Integrals zu zeigen, also die Vertauschbarkeit von Integral und Limes für eine monoton fallende Folge von Treppenfunktionen, die fast überall gegen Null konvergiert.

Wir werden nun als erstes zeigen, dass eine Nullmenge N gerade dadurch charakterisiert werden kann, dass es Folgen (h_ν) von Treppenfunktionen gibt, deren Integrale beliebig klein bleiben, obwohl die Werte der h_ν in jedem Punkt von N für genügend großes ν die Eins überschreiten.

1.9. Charakterisierung von Nullmengen

$N \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine monoton wachsende Folge (h_ν) von nicht-negativen Treppenfunktionen gibt, so dass gilt:

1. *$I(h_\nu) < \varepsilon$ für alle ν.*
2. *$\sup_\nu h_\nu(\mathbf{x}) \ge 1$ für alle $\mathbf{x} \in N$.*

BEWEIS: a) Die eine Richtung ist sehr einfach. Sei N eine Nullmenge, $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es Quader Q_λ mit

$$N \subset \bigcup_\lambda Q_\lambda \quad \text{und} \quad \sum_\lambda \text{vol}_n(Q_\lambda) < \varepsilon.$$

Wir definieren h_ν durch

$$h_\nu(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbf{x} \in Q_1 \cup \ldots \cup Q_\nu \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach dem obigen Satz sind alle h_ν Treppenfunktionen ≥ 0 mit $I(h_\nu) < \varepsilon$, und offensichtlich ist die Folge (h_ν) monoton wachsend. Liegt $\mathbf{x}$ in N, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{N}$ mit $\mathbf{x} \in Q_\lambda$. Dann ist aber $h_\nu(\mathbf{x}) = 1$ für $\nu \geq \lambda$.

b) Jetzt erfülle N das Kriterium. Wir müssen zeigen, dass N eine Nullmenge ist. Dazu sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Voraussetzung gibt es Treppenfunktionen h_ν mit

$$0 \leq h_\nu \leq h_{\nu+1}, \quad I(h_\nu) < \varepsilon/4 \text{ und } \sup_\nu h_\nu(\mathbf{x}) \geq 1 \text{ für } \mathbf{x} \in N.$$

Zu jeder der Treppenfunktionen h_ν gehört eine Zerlegung $\mathscr{H}_\nu$, so dass h_ν auf den Teilquadern von $\mathscr{H}_\nu$ konstant ist. Sei $Z_\nu := |\mathscr{H}_\nu|$ und $Z := \bigcup_\nu Z_\nu$.

Mit Z ist auch die Menge $N \cap Z$ eine Nullmenge und kann mit Quadern überdeckt werden, deren Gesamtvolumen $< \varepsilon/2$ ist. Wir konstruieren nun noch eine geeignete Quaderüberdeckung von $N \setminus Z$.

1. Schritt: Sei $\mathscr{Q}_1$ das endliche (oder leere) System der Teilquader Q von $\mathscr{H}_1$, auf denen $h_1 \geq 1/2$ ist. Dann gilt:

$h_1 < 1/2$ auf allen Teilquadern von $\mathscr{H}_1$, die nicht zu $\mathscr{Q}_1$ gehören, und es ist

$$\varepsilon/4 > I(h_1) \geq \frac{1}{2} \sum_{Q \in \mathscr{Q}_1} \mathrm{vol}_n(Q), \qquad \text{also} \qquad \sum_{Q \in \mathscr{Q}_1} \mathrm{vol}_n(Q) < \varepsilon/2.$$

2. Schritt: Auf den Quadern $Q \in \mathscr{Q}_1$ ist auch $h_2 \geq 1/2$. Die Ungleichung gilt dann erst recht auf denjenigen Teilquadern von $\mathscr{H}_1 \cup \mathscr{H}_2$, die in einem solchen $Q \in \mathscr{Q}_1$ enthalten sind. Nun sei $\mathscr{Q}_2$ das endliche (oder leere) System der Teilquader der Zerlegung $\mathscr{H}_1 \cup \mathscr{H}_2$, die nicht in einem $Q \in \mathscr{Q}_1$ liegen und auf denen $h_2 \geq 1/2$ ist. Dann ist $h_2 < 1/2$ auf allen Teilquadern von $\mathscr{H}_1 \cup \mathscr{H}_2$, die nicht in einem $Q \in \mathscr{Q}_1 \cup \mathscr{Q}_2$ liegen, und es ist

$$\varepsilon/4 > I(h_2) \geq \frac{1}{2}\Big(\sum_{Q \in \mathscr{Q}_1} \mathrm{vol}_n(Q) + \sum_{Q \in \mathscr{Q}_2} \mathrm{vol}_n(Q) \Big), \quad \text{also} \quad \sum_{Q \in \mathscr{Q}_1 \cup \mathscr{Q}_2} \mathrm{vol}_n(Q) \leq \varepsilon/2.$$

So fährt man fort und konstruiert schließlich eine Folge von paarweise disjunkten Quadern Q_i mit

$$\sum_i \mathrm{vol}_n(Q_i) = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{Q \in \mathscr{Q}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{Q}_\nu} \mathrm{vol}_n(Q) \leq \varepsilon/2.$$

In der Folge der Q_i sind alle offenen Quader enthalten, auf denen irgend ein h_ν einen Wert $\geq 1/2$ annimmt. Ist jetzt $\mathbf{x} \in N \setminus Z$, so ist $\sup_\nu h_\nu(\mathbf{x}) \geq 1$. Also gibt es ein ν_0, so dass $h_{\nu_0}(\mathbf{x}) \geq 1/2$ ist. Weil $\mathbf{x}$ nicht in Z liegt, muss es einen Index i geben, so dass $\mathbf{x}$ in dem Quader Q_i liegt. Also ist $N \setminus Z \subset \bigcup_i Q_i$. Damit ist alles gezeigt. ∎

1.10. Folgerung

Sei $N \subset \mathbb{R}^n$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gebe es eine Treppenfunktion $h \geq 0$, so dass $I(h) < \varepsilon$ und $h(\mathbf{x}) \geq 1$ für alle $\mathbf{x} \in N$ ist. Dann ist N eine Nullmenge.

BEWEIS: Man wende den obigen Satz auf die konstante Folge (h) an. ∎

1.11. Erster Konvergenzsatz für Treppenfunktionen

Sei (h_ν) eine monoton fallende Folge von nicht-negativen Treppenfunktionen mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} I(h_\nu) = 0$. Dann ist

$$\lim_{\nu\to\infty} h_\nu(\mathbf{x}) = 0 \textit{ fast überall.}$$

BEWEIS: Da $h_\nu(\mathbf{x})$ für jedes $\mathbf{x}$ eine monoton fallende und durch Null nach unten beschränkte Folge von Zahlen darstellt, konvergiert h_ν punktweise gegen eine Grenzfunktion h. Sei $G_m := \{\mathbf{x} : h(x) \geq 1/m\}$ und $G := \{\mathbf{x} : h(\mathbf{x}) > 0\}$.

Es ist $G = \bigcup_m G_m = \{\mathbf{x} : \lim_\nu h_\nu(\mathbf{x}) \neq 0\}$. Daher genügt es zu zeigen, dass alle Mengen G_m Nullmengen sind.

Für alle ν ist $h_\nu \geq h \geq 1/m$ auf G_m, also $m \cdot h_\nu \geq 1$ auf G_m. Dabei ist $m \cdot h_\nu$ eine Treppenfunktion ≥ 0, und für $\nu \to \infty$ strebt $I(m \cdot h_\nu) = m \cdot I(h_\nu)$ gegen Null.

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so kann man ν so groß wählen, dass $I(m \cdot h_\nu) < \varepsilon$ ist. Mit der obigen Folgerung erhalten wir, dass G_m eine Nullmenge ist. ∎

1.12. Zweiter Konvergenzsatz für Treppenfunktionen

Sei (h_ν) eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen. Ist die Folge der Integrale $I(h_\nu)$ nach oben beschränkt, so konvergiert (h_ν) fast überall gegen eine reellwertige Funktion.

BEWEIS: Ist $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, so ist $-\infty < h_1(\mathbf{x}) \leq h_\nu(\mathbf{x}) \leq h_{\nu+1}(\mathbf{x})$. Ist die Folge $(h_\nu(\mathbf{x}))$ nach oben beschränkt, so konvergiert sie gegen einen Wert $h(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ (nach dem Satz von der monotonen Konvergenz), andernfalls „konvergiert" sie gegen $+\infty$. Das liefert eine Grenzfunktion $h : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$.

Sei $Z := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h(\mathbf{x}) = +\infty\}$. Ersetzt man notfalls h_ν durch $h_\nu - h_1$, so kann man annehmen, dass $h_\nu \geq 0$ für alle ν gilt. Es sei $I(h_\nu) \leq C$ für alle ν.

Ist $\varepsilon > 0$ und $\mathbf{x} \in Z$, so gibt es ein $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon, \mathbf{x})$, so dass $h_\nu(\mathbf{x}) > C/\varepsilon$ für $\nu \geq \nu_0$ ist, also $\sup_\nu(\varepsilon h_\nu(\mathbf{x})/C) \geq 1$. Andererseits ist $I\big(\varepsilon h_\nu/C\big) = (\varepsilon/C)I(h_\nu) \leq \varepsilon$ für alle ν. Daraus folgt, dass Z eine Nullmenge ist. ∎

1.13. Lemma

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge von ***offenen*** *Quadern P_i gibt, so dass gilt:*

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(P_i) < \varepsilon.$$

Beweis: 1) Ist das Kriterium erfüllt, so ist M offensichtlich eine Nullmenge.

2) Sei M eine Nullmenge und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt eine Folge (Q_i) von Quadern, die M überdecken, so dass $\sum_i \mathrm{vol}_n(Q_i) < \varepsilon/2$ ist. Weil $\mathrm{vol}_n(\overline{Q}_i) = \mathrm{vol}_n(Q_i)$ ist, können wir annehmen, dass die Q_i abgeschlossen sind.

Für jedes i sei nun ein offener Quader $P_i \supset Q_i$ mit

$$\mathrm{vol}_n(P_i) < \mathrm{vol}_n(Q_i) + \varepsilon/2^{i+1}$$

gewählt. Dann ist auch (P_i) eine Überdeckung von M und

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(P_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}_n(Q_i) + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

∎

1.14. Die Stetigkeit des Daniell-Integrals

Sei (h_ν) eine monoton fallende Folge von Treppenfunktionen, so dass gilt:

1. *$h_\nu \ge 0$ für alle ν.*
2. *(h_ν) konvergiert fast überall gegen Null.*

Dann ist $\lim\limits_{\nu \to \infty} I(h_\nu) = 0$.

Beweis: Zu jeder Treppenfunktion h_ν gehört eine Zerlegung $\mathscr{H}_\nu$. Da $I(h_\nu)$ nicht von den Werten von h_ν auf $|\mathscr{H}_\nu|$ abhängt, können wir annehmen, dass h_ν dort verschwindet. Es gibt dann einen abgeschlossenen Quader Q_0 und eine Konstante C, so dass überall $0 \le h_1 \le C$ und $h_1 = 0$ außerhalb Q_0 ist. Weil die Folge der h_ν monoton fällt, haben auch alle anderen h_ν diese Eigenschaft. Sei

$$Z := Q_0 \cap \bigcup_{\nu} |\mathscr{H}_\nu|$$

die Nullmenge, außerhalb der alle h_ν stetig sind, und $N \subset Q_0$ die Nullmenge, auf der (h_ν) nicht gegen Null konvergiert.

Ist ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es eine Folge von offenen Quadern Q_i, so dass $M := Z \cup N \subset \bigcup_i Q_i$ und $\sum_i \mathrm{vol}_n(Q_i) < \varepsilon$ ist. Ist $\mathbf{x} \in Q_0 \setminus M$, so konvergiert $h_\nu(\mathbf{x})$ gegen Null. Also gibt es eine Zahl $k = k(\mathbf{x})$, so dass $h_k(\mathbf{x}) \le \varepsilon$ ist. Nach Konstruktion liegt $\mathbf{x}$ in einem offenen Quader $P(\mathbf{x})$, auf dem h_k konstant ist. Dann ist aber $h_k|_{P(\mathbf{x})} \le \varepsilon$ und daher auch $h_\nu|_{P(\mathbf{x})} \le \varepsilon$ für alle $\nu \ge k$.

Die offenen Quader Q_i und $P(\mathbf{x})$ überdecken den kompakten Quader Q_0. Nach Heine-Borel reichen endlich viele Quader aus, wobei wir annehmen können, dass zumindest ein Quader des zweiten Typs erforderlich ist. $Q_{i_1}, \dots, Q_{i_r}, P(\mathbf{x}_1), \dots, P(\mathbf{x}_s)$ mögen Q_0 überdecken, und k_0 sei das Maximum der Zahlen $k(\mathbf{x}_1), \dots, k(\mathbf{x}_s)$. Dann ist

$$h_\nu(\mathbf{x}) \le \varepsilon \text{ für alle } \mathbf{x} \in \bigcup_{\sigma=1}^{s} P(\mathbf{x}_\sigma) \text{ und } \nu \ge k_0.$$

Sei

$$S := \bigcup_{\varrho=1}^{r} \overline{Q}_{i_\varrho} \cap Q_0 \quad \text{ und } \quad T := \bigcup_{\sigma=1}^{s} \overline{P(\mathbf{x}_\sigma)} \cap Q_0.$$

In beiden Fällen handelt es sich um endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Quadern, und es ist $Q_0 = S \cup T$.

Die Funktion $g := C \cdot \chi_S + \varepsilon \cdot \chi_T$ ist eine Treppenfunktion mit

$$I(g) = C \cdot I(\chi_S) + \varepsilon \cdot I(\chi_T) \le C \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \mathrm{vol}_n(Q_0) = \varepsilon \cdot \big(C + \mathrm{vol}_n(Q_0)\big).$$

Sei jetzt $\nu \ge k_0$.

Ist $\mathbf{x} \in S$, so ist $h_\nu(\mathbf{x}) \le C = C \cdot \chi_S(\mathbf{x}) \le g(\mathbf{x})$. Ist dagegen $\mathbf{x} \in T \setminus S$, so ist $h_\nu(\mathbf{x}) \le \varepsilon = \varepsilon \cdot \chi_T(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$. Also ist $h_\nu \le g$ auf dem ganzen $\mathbb{R}^n$ und deshalb $I(h_\nu) \le I(g) \le \varepsilon \cdot \big(C + \mathrm{vol}_n(Q_0)\big)$ für $\nu \ge k_0$.

Das bedeutet, dass die Folge der Integrale $I(h_\nu)$ gegen Null konvergiert. ∎