1.6 Implizite Funktionen

Wir werden uns jetzt mit nichtlinearen Gleichungen beschäftigen,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

wobei $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ stetig differenzierbar auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ und $m < n$ ist. Dann hat man m skalare Gleichungen für $n = m + k$ Variable, $k > 0$, also ein „unterbestimmtes System“. Die Lösungsmenge sollte sich unter geeigneten Voraussetzungen durch k Parameter beschreiben lassen.

Wir betrachten zunächst ein einfaches Beispiel:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := x^2 + y^2 - 1$. Dann ist

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, f(x, y) = 0\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|\mathbf{x}\| = 1\} = S^1$$

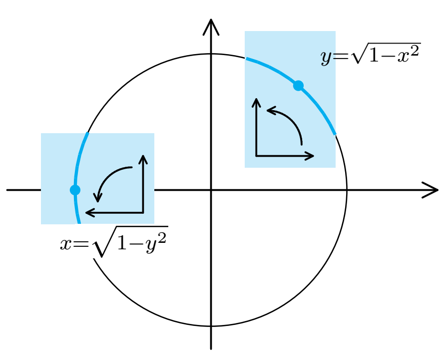
der Einheitskreis.

Die Gleichung $f(x, y) = 0$ kann nach y aufgelöst werden: $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Die Wahl des Vorzeichens hängt davon ab, ob man sich in der oberen oder in der unteren Halbebene befindet. Wir interessieren uns für Auflösungen, die sich nicht nur auf einen Punkt beziehen, sondern auf einer ganzen Umgebung als differenzierbare Funktion dargestellt werden können. Ist $y > 0$ oder $y < 0$, so leisten dies die Funktionen $y = g_+(x) := \sqrt{1 - x^2}$ bzw. $y = g_-(x) := -\sqrt{1 - x^2}$.

S^1 sieht also in der Nähe eines Punktes (a, b) mit $a \neq \pm 1$ wie der Graph einer differenzierbaren Funktion aus: Es gibt eine Umgebung $U = V \times W$ von (a, b), so dass gilt:

$$\{(x, y) \in U \mid f(x, y) = 0\} = \{(x, g(x)) \mid x \in V\}.$$

In den Punkten $(1, 0)$ und $(-1, 0)$ funktioniert das nicht. Da der Kreis dort eine vertikale Tangente besitzt, sieht er in diesen Punkten nicht wie ein Graph aus. Wenn wir jedoch den Kopf um 90° drehen, dann haben wir wieder lokal einen Graphen, allerdings den Graphen einer Funktion $x = h(y)$. Tatsächlich ist dort $h(y) = \pm\sqrt{1 - y^2}$, und nun sind die Punkte $(0, 1)$ und $(0, -1)$ ausgeschlossen, in denen der Kreis eine horizontale Tangente besitzt.



Man kann sehr leicht die Ableitung der Funktion $y = g_+(x)$ berechnen. Da $f(x, g_+(x)) \equiv 0$ ist, folgt mit der Kettenregel:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, g_+(x)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g_+(x)) \cdot g'_+(x),$$

also

$$g'_+(x) = -\frac{f_x(x, g_+(x))}{f_y(x, g_+(x))} = -\frac{2x}{2g_+(x)} = -\frac{x}{g_+(x)}.$$

Die Umformung ist in der Nähe von Punkten $(a, b) \in S^1$ mit $a \neq \pm 1$ möglich, denn $f_y(x, g_+(x)) = 2g_+(x)$ verschwindet in der Nähe von $(a, b) = (a, g_+(a)) = (a, \sqrt{1 - a^2})$ nicht. Die Bedingung „$f_y(a, b) \neq 0$“ ist gerade die Bedingung für die Auflösbarkeit nach y. Sie bedeutet, dass $\nabla f(a, b)$ nicht horizontal und daher die Tangente an den Kreis nicht vertikal verläuft.

Nun betrachten wir noch ein anderes Beispiel, die Gleichung

$$\boxed{x^3 + y^3 = 6xy.}$$

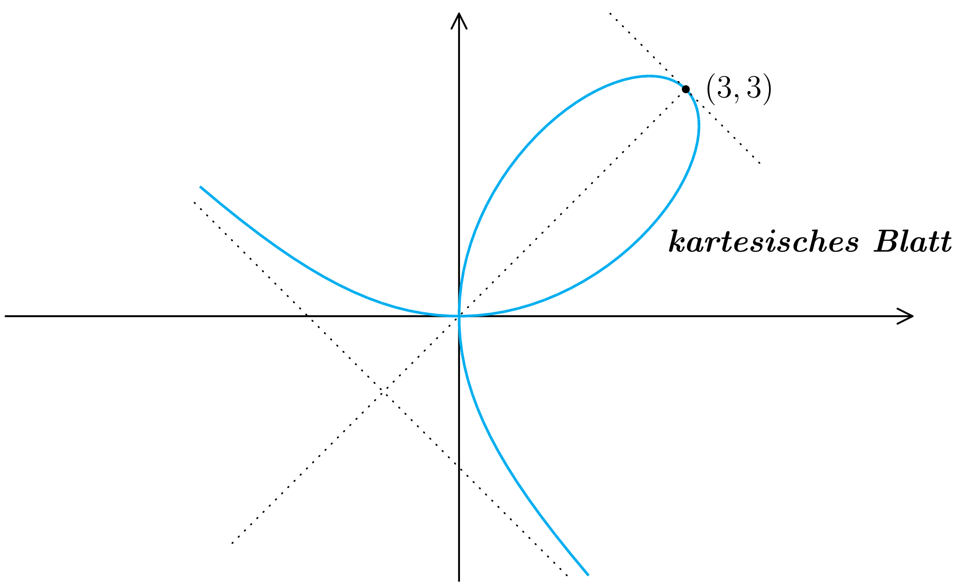
Dadurch wird auch eine ebene Kurve beschrieben, die man als ***kartesisches Blatt*** bezeichnet. Hier ist eine Auflösung $y = y(x)$ oder $x = x(y)$ zumindest recht schwierig. Nehmen wir einmal an, die Gleichung sei auflösbar und die Auflösung $y = f(x)$ sei differenzierbar (was natürlich noch zu zeigen wäre). Dann wäre

$$\begin{aligned} x^3 + f(x)^3 &= 6x \cdot f(x), \\ \text{also} \quad 3x^2 + 3f(x)^2 f'(x) &= 6f(x) + 6x \cdot f'(x). \end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich leicht nach $f'(x)$ auflösen, es ist

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2f(x)}{2x - f(x)^2}.$$

Der Punkt $\mathbf{x}_0 := (3, 3)$ liegt offensichtlich auf der Kurve und es ist $f'(3) = -1$. Das ist auch die Richtung der Tangente an das kartesische Blatt in $\mathbf{x}_0$.



Man kann also Ableitungen der implizit gegebenen Funktion berechnen, ohne die Funktion selbst zu kennen. Die Auflösbarkeit und die Differenzierbarkeit der impliziten Funktion wollen wir jetzt in einem allgemeineren Kontext untersuchen.

Wir betrachten ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) : G \to \mathbb{R}^m$, also ein System von m nichtlinearen Gleichungen für $k+m$ Variable. Die Gleichungen schaffen Abhängigkeiten zwischen den Variablen. Es gibt dafür viele Möglichkeiten, wir untersuchen hier der Einfachheit halber zunächst nur die Situation, dass die Variablen $x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}$ differenzierbar von den Variablen $x_1, \ldots, x_k$ abhängen.

Den Satz der ersten k Variablen $x_1, \ldots, x_k$ fassen wir zu einem Vektor $\mathbf{x}$, den der folgenden m Variablen $x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}$ zu einem Vektor $\mathbf{y}$ zusammen. Dann definieren wir:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{k+m}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_{k+m}} \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \;\Big|\; \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right).$$

Damit die gemeinsame Nullstellenmenge $N = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in G \,:\, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\}$ in der Nähe eines Punktes $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in N$ lokal wie der Graph einer Abbildung $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ aussieht, darf sie in $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ keine vertikale Tangente besitzen. Das wiederum bedeutet (da N Niveaumenge von $\mathbf{f}$ ist), dass kein vertikaler Vektor $(\mathbf{0}, \mathbf{b})$ mit $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ simultan auf allen Gradienten $\nabla f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, $i = 1, \ldots, m$, senkrecht stehen darf. Und das bedeutet, dass

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{b}^\top \neq \mathbf{0}^\top$$

für alle $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ gelten muss.

Ein Gleichungssystem der Gestalt $A \cdot \mathbf{z}^\top = \mathbf{0}^\top$ mit einer Matrix $A \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ hat genau dann nur die triviale Lösung, wenn A regulär ist. Angewandt auf das obige Problem bedeutet das, dass $\det \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$ sein sollte.

Aus der Gleichung $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})) \equiv \mathbf{0}$ folgt dann mit der Kettenregel:

$$\mathbf{0} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})) \cdot E_k + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}),$$

also

$$J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = -\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})).$$

Wegen der Regularität von $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}$ in $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ (die dann auch noch in benachbarten Punkten bestehen bleibt) geht das. Man beachte hier die Reihenfolge bei der Matrizenmultiplikation!

6.1. Satz über implizite Funktionen

Auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ sei das Gleichungssystem $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ gegeben. Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$ und die Matrix $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ regulär, so gibt es Umgebungen $U(\mathbf{x}_0)$, $V(\mathbf{y}_0)$ mit $U \times V \subset G$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\mathbf{g} : U \to V$, so dass gilt:

1. $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$.
2. *Für* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V$ *gilt:* $\quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$.

   Insbesondere ist $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})) \equiv \mathbf{0}$ *für* $\mathbf{x} \in U$.
3. *Es ist* $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = -\left(\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}))\right)^{-1} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}))$ *auf* U.

Beweis: Sei $n := k + m$. Der Trick besteht darin, den Raum um $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ herum so differenzierbar zu verbiegen, dass aus den Niveaumengen

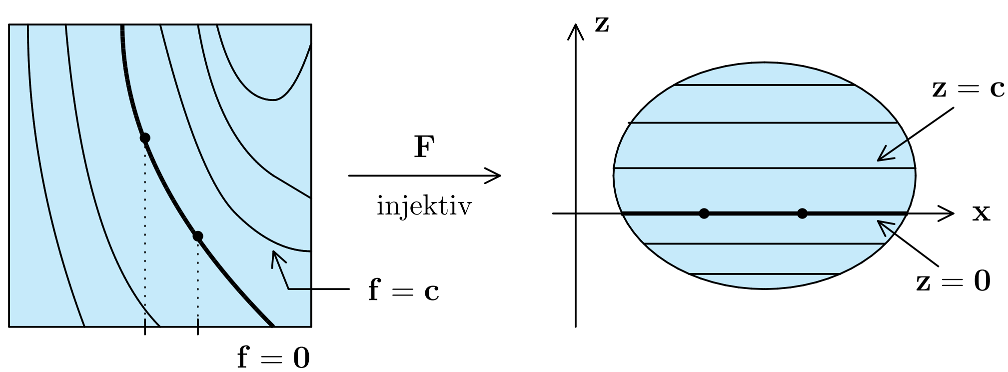
$$N_{\mathbf{c}}(\mathbf{f}) := \{(x_1, \ldots, x_n) \,:\, f_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1, \ \ldots, \ f_m(x_1, \ldots, x_n) = c_m\}$$

Ebenenstücke der Gestalt

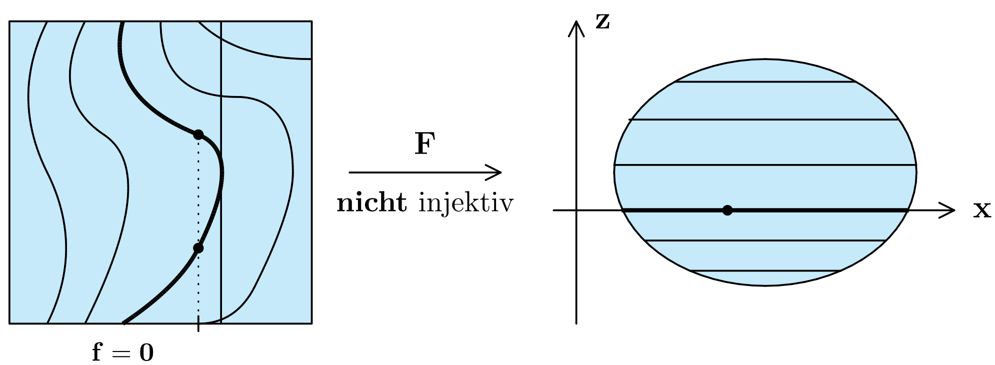
$$E = \{(x_1, \ldots, x_k, z_{k+1}, \ldots, z_n) \,:\, z_{k+1} = c_1, \ \ldots, \ z_n = c_m\}$$

werden. Zu diesem Zweck definieren wir $\mathbf{F} : B \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})).$$



Die Punkte behalten bei dieser Transformation ihre $\mathbf{x}$-Komponente, während ihre $\mathbf{y}$-Komponente durch den Wert von $\mathbf{f}$ ersetzt wird. Das funktioniert nur, wenn verschiedene Punkte einer betroffenen Niveaufläche auch verschiedene $\mathbf{x}$-Komponenten besitzen, wenn also die Niveaufläche keine vertikale Tangente besitzt. Dafür brauchen wir die Regularität von $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$. Ein Fall, bei dem es schiefgeht, könnte folgendermaßen aussehen:



Wir zeigen jetzt, dass $\mathbf{F}$ unter den Voraussetzungen des Satzes in der Nähe von $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ ein Diffeomorphismus ist. Tatsächlich ist

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \left(\begin{array}{c|c} E_k & \mathbf{0} \\ \hline \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) & \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \end{array} \right),$$

und daher

$$\det J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \det \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0.$$

Das bedeutet, daß $\mathbf{F}$ in $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ lokal umkehrbar ist. Wir setzen $\mathbf{H} := \mathbf{F}^{-1}$ (in der Nähe von $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$). Weil $\mathbf{F}$ die ersten k Komponenten unverändert lässt, gilt das Gleiche für $\mathbf{H}$. Also hat $\mathbf{H}$ die Gestalt

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{v})),$$

mit einer differenzierbaren Abbildung $\mathbf{h}$.

Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$, so ist $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{0})$, also $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = (\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{0}))$. Deshalb setzen wir

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) := \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{0}).$$

Offensichtlich ist $\mathbf{g}$ stetig differenzierbar. Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$, so ist nach Konstruktion $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Und umgekehrt ist

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{0})) = \mathbf{f}(\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{0})) = \mathbf{0}.$$

Die Gleichung $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$ ergibt die Beziehung $\mathbf{y}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$. Die Formel (3) haben wir schon bewiesen. Wählt man die Umgebungen U und V klein genug, so ist alles gezeigt. ∎

Bemerkung: Der Satz über implizite Funktionen lässt sich immer anwenden, sobald eine m-reihige Unterdeterminante von $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ existiert, die nicht verschwindet. Nach einer Vertauschung der Koordinaten sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Dann wendet man den Satz an und bekommt eine implizite Funktion. Anschließend macht man die Koordinatenvertauschung rückgängig.

6.2. Beispiele

A. Betrachten wir noch einmal den Kreis

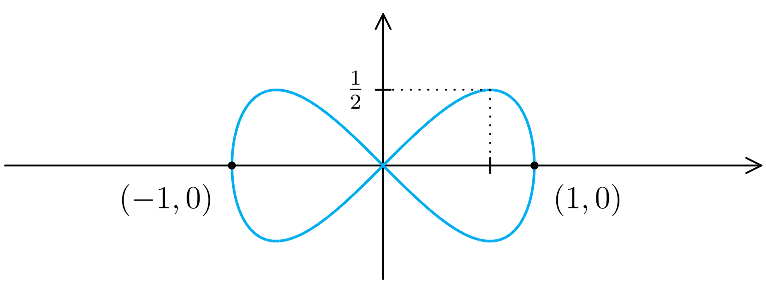
$$S^1 = \{(x,y) \mid f(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$

Für $y \neq 0$ (also $x \neq \pm 1$) ist $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \neq 0$. Also kann man den Satz über implizite Funktionen anwenden und die Gleichung $f(x,y) = 0$ lokal nach y auflösen: $y = g(x)$. Die Formel für die Ableitung von g ergibt hier:

$$g'(x) = -\frac{f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))} = -\frac{x}{g(x)} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Leider ist die Auflösung nicht immer so schön konkret durchführbar!

B. Sei $\boxed{f(x,y) := x^2(1-x^2) - y^2}$. Die Kurve $C := \{(x,y) \mid f(x,y) = 0\}$ nennt man eine ***Lemniskate***:



Wir berechnen die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x - 4x^3 = 2x(1-2x^2), \\ f_y(x,y) &= -2y. \end{aligned}$$

Im Nullpunkt ist die Gleichung überhaupt nicht auflösbar. Das liegt anschaulich daran, daß der dort auftretende Kreuzungspunkt aus keiner Richtung wie ein Graph aussieht.

In den Punkten $(1,0)$ und $(-1,0)$ ist jeweils $f_y(x,y) = 0$, also keine Auflösung nach y möglich. Allerdings ist dort $f_x(x,y) \neq 0$, wir können also lokal nach x

auflösen. Das ist hier sogar konkret möglich, die Gleichung $x^4 - x^2 + y^2 = 0$ führt auf

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2 \pm 2\sqrt{1-4y^2}}.$$

Lässt man y gegen Null gehen, so muß x^2 gegen 1 streben. Das schließt unter der ersten Wurzel das Minus–Zeichen aus, und man bekommt:

$$\begin{aligned} x &= +\frac{1}{2}\sqrt{2+2\sqrt{1-4y^2}} \quad \text{bei } (1,0) \\ \text{und} \quad x &= -\frac{1}{2}\sqrt{2+2\sqrt{1-4y^2}} \quad \text{bei } (-1,0). \end{aligned}$$

In allen anderen Punkten ist $f_y(x,y) \neq 0$, denn wenn $y = 0$ und $f(x,y) = 0$ ist, dann kann nur $x = 0$ oder $x = \pm 1$ sein. Dann ist

$$y = \pm\sqrt{x^2(1-x^2)},$$

wobei das Vorzeichen davon abhängt, ob man sich gerade in der oberen oder in der unteren Halbebene befindet.

Rechnen wir noch im Falle der oberen Halbebene die Ableitung von $y = g(x)$ aus:

$$g'(x) = -\frac{f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))} = -\frac{2x-4x^3}{-2g(x)} = \frac{x(1-2x^2)}{\sqrt{x^2(1-x^2)}}.$$

Diese Beziehung gilt natürlich nicht bei $x = 0$. Für $0 < x < 1$ ist $g'(x) = 0$ genau dann erfüllt, wenn $1 - 2x^2 = 0$ ist, also $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dort ist $y = \frac{1}{2}$. Offensichtlich liegt ein Maximum vor, und mit dieser Information kann man schon eine recht gute Skizze der Lemniskate erstellen.

Wir wollen im Folgenden Flächen beliebiger Dimension im $\mathbb{R}^n$ untersuchen.

Definition

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 \le q < n$ und $p := n - q$. Eine Teilmenge $M \subset B$ heißt eine ***p-dimensionale glatte Fläche*** (oder ***Untermannigfaltigkeit***), falls es zu jedem Punkt $\mathbf{a} \in M$ eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{a}) \subset B$ und stetig differenzierbare Funktionen $f_1, \dots, f_q : U \to \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt:

1. $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U \,:\, f_1(\mathbf{x}) = \ldots = f_q(\mathbf{x}) = 0\}$.
2. Die Vektoren $\nabla f_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla f_q(\mathbf{x})$ sind in jedem Punkt $\mathbf{x} \in M \cap U$ linear unabhängig.

Die Zahl q nennt man die ***Codimension*** von M. Ist $q = 1$ (also $p = n - 1$), so nennt man M eine ***glatte Hyperfläche***.

Bemerkung: Ist $p = 1$, so spricht man von einer ***glatten Kurve***.

6.3. Satz

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und $M \subset B$ eine p-dimensionale glatte Fläche. Dann gibt es zu jedem Punkt $\mathbf{a} \in M$ eine offene Umgebung $U = U(\mathbf{a}) \subset B$, eine offene Menge $P \subset \mathbb{R}^p$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\boldsymbol{\varphi} : P \to \mathbb{R}^n$, so dass gilt:

1. *$\boldsymbol{\varphi}$ ist injektiv und $\boldsymbol{\varphi}(P) = M \cap U$.*
2. *$\operatorname{rg} J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}) = p$ für alle $\mathbf{u} \in P$.*
3. *Ist $\mathbf{u}_0 \in P$ und $\mathbf{u}_\nu \in P$ eine Folge mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_\nu) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0)$, so ist auch $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mathbf{u}_\nu = \mathbf{u}_0$.*

Beweis: Sei $\mathbf{a} \in M$ und $q := n - p$. Dann gibt es eine offene Umgebung $W = W(\mathbf{a}) \subset B$ und stetig differenzierbare Funktionen $f_1, \ldots, f_q : W \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

1. $M \cap W = \{\mathbf{x} \in W \,:\, f_1(\mathbf{x}) = \ldots = f_q(\mathbf{x}) = 0\}$.
2. Die Vektoren $\nabla f_1(\mathbf{x}), \ldots, \nabla f_q(\mathbf{x})$ sind in jedem Punkt $\mathbf{x} \in M \cap W$ linear unabhängig.

$\mathbf{f} := (f_1, \ldots, f_q)$ ist eine stetig differenzierbare Abbildung von W nach $\mathbb{R}^q$. Nach Voraussetzung ist $\operatorname{rg} J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) = q$. O.B.d.A. kann man annehmen, dass

$$\det \begin{pmatrix} (f_1)_{x_{p+1}}(\mathbf{a}) & \cdots & (f_1)_{x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ (f_q)_{x_{p+1}}(\mathbf{a}) & \cdots & (f_q)_{x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \neq 0$$

ist. Setzen wir $\mathbf{x}' := (x_1, \ldots, x_p)$ und $\mathbf{x}'' := (x_{p+1}, \ldots, x_n)$, so gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen eine Umgebung $U = U(\mathbf{a}') \subset \mathbb{R}^p$, eine Umgebung $V = V(\mathbf{a}'') \subset \mathbb{R}^q$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\mathbf{g} : U \to V$, so dass $(U \times V) \cap (M \cap W) = \{(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \in U \times V \,:\, \mathbf{x}'' = \mathbf{g}(\mathbf{x}')\}$ ist. Dabei kann man U und V so klein wählen, dass $U \times V \subset W$ ist.

Nun kann man $P := U$ und $\mathbf{u}_0 := \mathbf{a}'$ setzen und $\boldsymbol{\varphi} : P \to \mathbb{R}^n$ definieren durch $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) := (\mathbf{u}, \mathbf{g}(\mathbf{u}))$. Dann ist offensichtlich $\boldsymbol{\varphi}$ injektiv und $\boldsymbol{\varphi}(P) = (U \times V) \cap M$. Außerdem ist

$$J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}) = \left(\frac{\mathbf{1}}{J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u})} \right),$$

also $\operatorname{rg} J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}) = p$ für $\mathbf{u} \in P$.

Sei schließlich $\mathbf{u}_0 \in P$ und $\mathbf{u}_\nu \in P$ eine Folge mit

$$\big(\mathbf{u}_0, \mathbf{g}(\mathbf{u}_0)\big) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_0) = \lim_{\nu\to\infty} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} \big(\mathbf{u}_\nu, \mathbf{g}(\mathbf{u}_\nu)\big)$$

Dann ist auch $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mathbf{u}_\nu = \mathbf{u}_0$. ∎

Bemerkung: Man nennt $\boldsymbol{\varphi}$ eine ***lokale Parametrisierung*** von M in $\mathbf{a}$.

Aussage (3) bedeutet, dass die Umkehrabbildung $\boldsymbol{\varphi}^{-1} : \boldsymbol{\varphi}(P) \to P$ stetig ist.

Ist $p = 1$, so liegt eine glatte Kurve vor. Die Rangbedingung bedeutet, dass die Ableitung der Parametrisierung nicht verschwindet. Das stimmt mit der früheren Definition einer glatten Kurve überein.

6.4. Beispiele

A. Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x_1, \ldots, x_n) := x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1$. Dann ist $S^{n-1} = f^{-1}(0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ die $(n-1)$-dimensionale Sphäre. Sie ist eine glatte Hyperfläche, weil $\nabla f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ in jedem Punkt $\mathbf{x} \in S^{n-1}$ gilt. Im Falle $n = 2$ erhält man den Einheitskreis.

B. Sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, sowie $c \in \mathbb{R}$. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \bullet \mathbf{a} - c$. Dann nennt man $H := \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) = 0\}$ eine affine Hyperebene. Weil $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ ist, ist H auch eine glatte Hyperfläche.

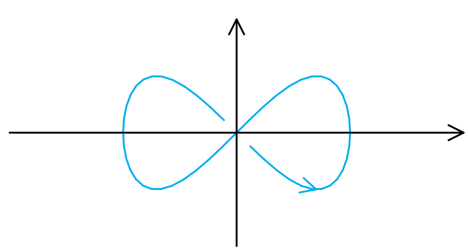
C. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : B \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so dass $S := f^{-1}(0)$ eine glatte Fläche ist. Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $g : B \times I \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(\mathbf{x}, t) := f(\mathbf{x})$. Dann ist $g^{-1}(0) = S \times I$ ebenfalls eine glatte Fläche, der ***Zylinder über*** S.

D. Wir kommen noch einmal auf die Lemniskate von Gerono[1] zurück:

$$x^2(1 - x^2) - y^2 = 0.$$

Sie kann durch $\boldsymbol{\alpha} : (-\pi/2, 3\pi/2) \to \mathbb{R}^2$ mit $\boldsymbol{\alpha}(t) := (\cos t, \cos t \sin t)$ parametrisiert werden. Dabei gibt es folgende Zuordnung:

$$0 \mapsto (1,0), \quad \pi/2 \mapsto (0,0), \quad \pi \mapsto (-1,0).$$



Die Folge $t_\nu := -\pi/2 + 1/\nu$ konvergiert gegen $-\pi/2$, aber $\boldsymbol{\alpha}(t_\nu)$ konvergiert gegen $(0,0) = \boldsymbol{\alpha}(\pi/2)$. Daher ist die Lemniskate keine glatte Kurve.

[1] Noch populärer als die Lemniskate von Gerono ist die Lemniskate von Bernoulli: $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$. Eine Parametrisierung ist gegeben durch $x = a \cos t \sqrt{2\cos(2t)}$ und $y = a \sin t \sqrt{2\cos(2t)}$.

Definition

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_m) : B \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und $\operatorname{rg} J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = m$ für alle $\mathbf{x} \in B$. Weiter sei $M := \{\mathbf{x} \in B : \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$, $\mathbf{a} \in M$, $U(\mathbf{a}) \subset B$ eine offene Umgebung und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. f hat in $\mathbf{a}$ ein ***relatives Maximum*** (bzw. ***relatives Minimum***) ***unter den Nebenbedingungen***

$$g_1(\mathbf{x}) = \ldots = g_m(\mathbf{x}) = 0,$$

falls es eine offene Umgebung $V = V(\mathbf{a}) \subset U$ gibt, so dass $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ (bzw. $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$) für alle $\mathbf{x} \in V \cap M$ ist.

6.5. Satz (Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren)

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_m) : B \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und $\operatorname{rg} J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = m$ für alle $\mathbf{x} \in B$. Weiter sei $\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, $U = U(\mathbf{a}) \subset B$ eine offene Umgebung und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.

Hat f in $\mathbf{a}$ ein relatives Extremum unter den Nebenbedingungen

$$g_1(\mathbf{x}) = \ldots = g_m(\mathbf{x}) = 0,$$

so gibt es Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda_1 \cdot \nabla g_1(\mathbf{a}) + \cdots + \lambda_m \cdot \nabla g_m(\mathbf{a}).$$

Die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ nennt man ***Lagrange'sche Multiplikatoren***. Man beachte, dass es sich hier nur um ein notwendiges Kriterium handelt! Die Punkte, in denen die angegebene Bedingung erfüllt ist, können Extremwerte sein. Ob sie es wirklich sind, muss man mit anderen Mitteln feststellen.

BEWEIS: Sei $M \subset B \subset \mathbb{R}^n$ die $(n-m)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit, die durch die Nebenbedingungen gegeben ist. Hat $f|_M$ in $\mathbf{a} \in M$ ein lokales Extremum und ist $\boldsymbol{\varphi}$ eine Parametrisierung für M mit $\varphi(\mathbf{u}_0) = \mathbf{a}$, so ist $f \circ \boldsymbol{\varphi}$ differenzierbar und hat ein Extremum in $\mathbf{u}_0$.

Dann ist $\mathbf{0} = \nabla(f \circ \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{u}_0) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_0)$. Der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{w} \cdot J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{0} \qquad (\text{für } \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n)$$

hat die Dimension $n - \operatorname{rg} J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_0) = n - (n-m) = m$.

Weil $g_\mu \circ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}) \equiv 0$ für $\mu = 1, \ldots, m$ gilt, ist auch $\nabla g_\mu(\mathbf{a}) \cdot J_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{0}$ für alle μ. Das bedeutet, dass die Gradienten $\nabla g_\mu(\mathbf{a})$ allesamt Lösungen des obigen Gleichungssystems sind. Weil sie außerdem linear unabhängig sind (wegen der Generalvoraussetzung: $\operatorname{rg} J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = m$ auf M), bilden sie eine Basis des Lösungsraumes.

Damit ist klar, dass $\nabla f(\mathbf{a})$ eine Linearkombination von $\nabla g_1(\mathbf{a}), \ldots, \nabla g_m(\mathbf{a})$ ist, d.h., es gibt Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, so dass

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu \cdot \nabla g_\mu(\mathbf{a})$$

ist. ∎

6.6. Beispiele

A. Wir suchen den maximalen Wert, den $f(x,y,z) := 3x + 2y + z$ unter den Nebenbedingungen $x - y + z = 1$ und $x^2 + y^2 = 1$ annimmt. Diese Nebenbedingungen beschreiben den Schnitt einer Ebene mit einem Zylinder, also eine schräg im Raum liegende Ellipse.

Sei $g(x,y,z) := x - y + z - 1$ und $h(x,y,z) := x^2 + y^2 - 1$. Dann ist

$$J_{(g,h)}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix},$$

Da unter den Nebenbedingungen nicht $x = y = 0$ gelten kann, hat $J_{(g,h)}$ den Rang 2. Die Ellipse ist kompakt und f ist stetig. Also nimmt f irgendwo auf ihr sein Maximum an. Wegen des Satzes von den Lagrange'schen Multiplikatoren gibt es dann Konstanten λ und μ, so dass $\nabla f(x,y,z) = \lambda \cdot \nabla g(x,y,z) + \mu \cdot \nabla h(x,y,z)$ ist, also

$$\lambda + 2\mu x = 3, \quad -\lambda + 2\mu y = 2 \quad \text{und} \quad \lambda = 1.$$

Das ergibt die Gleichungen $x = 1/\mu$ und $y = 3/(2\mu)$.

Die Nebenbedingungen dienen als weitere Bestimmungsgleichungen. Also ist

$$1 = \Big(\frac{1}{\mu}\Big)^2 + \Big(\frac{3}{2\mu}\Big)^2 = \frac{13}{4\mu^2} \text{ und daher } \mu = \pm\frac{1}{2}\sqrt{13}\,.$$

Als Kandidaten für Extremwerte erhalten wir somit

$$\mathbf{x}_+ := \Big(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{13}}\Big) \text{ und } \mathbf{x}_- := \Big(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{13}}\Big).$$

Es ist $f(\mathbf{x}_+) = 1 + \sqrt{13}$ und $f(\mathbf{x}_-) = 1 - \sqrt{13}$. Damit ist klar, dass f bei $\mathbf{x}_+$ seinen größten Wert annimmt, nämlich $1 + \sqrt{13}$.

B. Sei $h(\mathbf{x}) := x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ und

$$M := \{\mathbf{x} \,:\, x_1 + \cdots + x_n = 1 \text{ und } x_\nu > 0 \text{ für alle } \nu\}.$$

Die stetige Funktion h nimmt auf der kompakten Menge $\overline{M}$ ihr Maximum an, und dies muss schon in M liegen (denn h verschwindet auf dem Rand von M). Setzen wir $f(\mathbf{x}) := x_1 + \cdots + x_n - 1$, so ist $\nabla f(\mathbf{x}) = (1, 1, \ldots, 1)$ in jedem Punkt $\mathbf{x}$, und es ist

$$\nabla h(\mathbf{x}) = (\prod_{i \neq 1} x_i, \ldots, \prod_{i \neq n} x_i).$$

Wenn h auf M in $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ sein Maximum annimmt,[2] dann muss es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben, so dass $\prod\limits_{i \neq j} a_i = \lambda$ für alle j gilt. Das ist nur möglich, wenn $a_1 = \ldots = a_n$ ist, denn alle a_i sind > 0, und es ist $a_i/a_j = \lambda/\lambda = 1$ für alle i und j. Da außerdem $a_1 + \cdots + a_n = 1$ ist, folgt:

$$\mathbf{a} = \Big(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\Big).$$

Damit sind wir fertig, aber dieses Ergebnis hat noch eine interessante Konsequenz. Es ist ja

$$h(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{a}) = \left(\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in M.$$

Sind nun $t_1, \ldots, t_n$ beliebige positive reelle Zahlen, so gilt:

$$\mathbf{t} := \left(\frac{t_1}{t_1 + \cdots + t_n}, \ldots, \frac{t_n}{t_1 + \cdots + t_n}\right) \in M.$$

Dann ist $\dfrac{t_1 \cdots t_n}{(t_1 + \cdots + t_n)^n} \leq \left(\dfrac{1}{n}\right)^n$, und daher

$$\boxed{\sqrt[n]{t_1 \cdots t_n} \leq \frac{t_1 + \cdots + t_n}{n}.}$$

Das ist die

Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel.

[2]Man beachte, dass hier die Nebenbedingung durch f gegeben wird, während h die Funktion ist, deren Extrema gesucht werden!