1.2 Kurven

Wir betrachten jetzt vektorwertige Funktionen von einer Veränderlichen.

Definition

Eine Abbildung $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m) : I \to \mathbb{R}^m$ heißt ***differenzierbar in*** $t_0 \in I$, falls alle Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m$ in t_0 differenzierbar sind. Die Funktion heißt ***auf*** I ***differenzierbar***, falls sie in jedem Punkt $t \in I$ differenzierbar ist.

2.1. Äquivalente Formulierungen der Differenzierbarkeit

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $t_0 \in I$. Folgende Aussagen über eine Funktion $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^m$ sind äquivalent:

1. *$\mathbf{f}$ ist differenzierbar in t_0.*
2. *Es existiert der Grenzwert $\mathbf{f}'(t_0) := \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\big(\mathbf{f}(t_0+h) - \mathbf{f}(t_0)\big)$.*
3. *Es gibt einen Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ und eine Funktion $\boldsymbol{\delta} : I \to \mathbb{R}^m$ mit*
$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0) + (t-t_0)\cdot\mathbf{a} + (t-t_0)\cdot\boldsymbol{\delta}(t) \text{ auf } I \quad \text{und} \quad \lim_{t\to t_0}\boldsymbol{\delta}(t) = \mathbf{0}.$$
4. *Es gibt eine in t_0 stetige Abbildung $\boldsymbol{\Delta} : I \to \mathbb{R}^m$ mit*
$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0) + (t-t_0)\cdot\boldsymbol{\Delta}(t).$$

Ist $\mathbf{f}$ in t_0 differenzierbar, so ist $\mathbf{f}'(t_0) = \mathbf{a} = \boldsymbol{\Delta}(t_0)$.

Beweis: (1) $\Longrightarrow$ (2): Ist $\mathbf{f}$ differenzierbar in t_0, so gilt dies definitionsgemäß auch für alle Komponentenfunktionen f_i. Also existieren die Grenzwerte

$$f_i'(t_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_i(t_0+h) - f_i(t_0)}{h} \qquad \text{für alle } i$$

und damit auch der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\big(\mathbf{f}(t_0+h) - \mathbf{f}(t_0)\big) = \big(f_1'(t_0), \dots, f_m'(t_0)\big)$.

(2) $\Longrightarrow$ (4): Existiert $\mathbf{f}'(t_0)$, so setzen wir $\boldsymbol{\Delta}(t) := \dfrac{1}{t-t_0}\big(\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)\big)$ für $t \neq t_0$. Dann existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0}\boldsymbol{\Delta}(t_0+h) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\mathbf{f}(t_0+h) - \mathbf{f}(t_0)\big) = \mathbf{f}'(t_0).$$

Also kann $\boldsymbol{\Delta}$ in t_0 stetig ergänzt werden. Die gewünschte Gleichung ist offensichtlich erfüllt.

(4) $\implies$ (3): Wir setzen $\mathbf{a} := \boldsymbol{\Delta}(t_0)$ und $\boldsymbol{\delta}(t) := \boldsymbol{\Delta}(t) - \boldsymbol{\Delta}(t_0)$. Damit ist alles klar.

(3) $\implies$ (1): In jeder Komponente hat man eine Zerlegung

$$f_i(t) = f_i(t_0) + a_i \cdot (t - t_0) + \delta_i(t) \cdot (t - t_0),$$

mit $\lim_{t \to t_0} \delta_i(t) = 0$. Das bedeutet, dass alle f_i in t_0 differenzierbar sind. ∎

Definition

Ist $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^m$ in t_0 differenzierbar, so heißt $\mathbf{f}'(t_0) = (f_1'(t_0), \ldots, f_m'(t_0))$ die ***Ableitung*** von $\mathbf{f}$ in t_0.

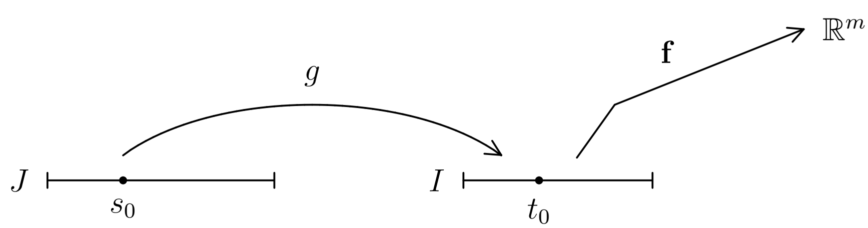
In einem Spezialfall können wir jetzt die Kettenregel verallgemeinern:

2.2. Die Kettenregel für „Parametertransformationen"

Sei $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in t_0, J ein weiteres Intervall und $g : J \to I$ differenzierbar in $s_0 \in J$. Außerdem sei $g(s_0) = t_0$. Dann ist auch $\mathbf{f} \circ g : J \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in s_0, und es gilt:

$$(\mathbf{f} \circ g)'(s_0) = \mathbf{f}'(g(s_0)) \cdot g'(s_0).$$

Beweis: Mit einer Skizze schaffen wir uns zunächst eine bessere Übersicht:



Ist $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$, so ist $\mathbf{f} \circ g = (f_1 \circ g, \ldots, f_m \circ g)$. Es reicht deshalb, den Fall $m = 1$ zu beweisen, und den kennen wir schon. ∎

Wir wollen auch Integrale vektorwertiger Funktionen betrachten.

Definition

Sei $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann setzen wir

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)\, dt := \left(\int_a^b f_1(t)\, dt, \ldots, \int_a^b f_m(t)\, dt \right).$$

2.3. Eigenschaften des Integrals

$\mathbf{f}$, $\mathbf{g} : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ *seien stetige Funktionen, c eine reelle Zahl. Dann gilt:*

1. $\displaystyle\int_a^b \big(\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)\big)\,dt = \int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt + \int_a^b \mathbf{g}(t)\,dt$ *und*

   $\displaystyle\int_a^b \big(c \cdot \mathbf{f}(t)\big)\,dt = c \cdot \int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt.$

2. *Es ist* $\displaystyle\left\| \int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt \right\| \le \int_a^b \|\mathbf{f}(t)\|\,dt.$

BEWEIS: Teil (1) folgt trivial aus der Linearität des Integrals skalarer Funktionen.

Zum Beweis von Teil (2) benutzen wir Riemann'sche Summen.

Für eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von $[a,b]$ und eine Wahl $\boldsymbol{\xi}$ von dazu passenden Zwischenpunkten sei

$$\Sigma(\mathbf{f}, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi}) := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \big(\Sigma(f_1, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi}), \ldots, \Sigma(f_m, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi})\big).$$

Dann ist $\|\Sigma(\mathbf{f}, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi})\| \le \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{f}(\xi_i)\|(x_i - x_{i-1}) = \Sigma(\|\mathbf{f}\|, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi})$, wobei mit $\|\mathbf{f}\|$ hier die Funktion $t \mapsto \|\mathbf{f}(t)\|$ gemeint ist, also nicht die Supremumsnorm.

Da $\|\mathbf{f}\|$ und alle f_μ integrierbar sind, gibt es eine Folge $(\mathfrak{Z}_n)$ von Zerlegungen von $[a,b]$, so dass für beliebige dazu passende Wahlen $\boldsymbol{\xi}_n$ von Zwischenpunkten gilt: Die Riemann'schen Summen $\Sigma(\|\mathbf{f}\|, \mathfrak{Z}_n, \boldsymbol{\xi}_n)$ und $\Sigma(f_\mu, \mathfrak{Z}_n, \boldsymbol{\xi}_n)$ für $\mu = 1, \ldots, m$ konvergieren gegen die Integrale von $\|\mathbf{f}\|$ bzw. f_μ für $\mu = 1, \ldots, m$. Dann konvergiert auch $\Sigma(\mathbf{f}, \mathfrak{Z}_n, \boldsymbol{\xi}_n)$ gegen das Integral von $\mathbf{f}$.

Weil stets $\|\Sigma(\mathbf{f}, \mathfrak{Z}_n, \boldsymbol{\xi}_n)\| \le \Sigma(\|\mathbf{f}\|, \mathfrak{Z}_n, \boldsymbol{\xi}_n)$ ist, überträgt sich beim Grenzübergang diese Ungleichung auf die Integrale. ∎

Wir werden jetzt den Blickwinkel verändern, um zu sehen, dass vektorwertige Funktionen auch ganz anders betrachtet werden können und damit zu sehr anschaulichen Objekten werden. Um die andere Blickrichtung deutlich zu machen, verwenden wir fortan griechische Buchstaben für die betrachteten Abbildungen.

Definition

Eine stetige (bzw. stetig differenzierbare) Abbildung $\boldsymbol{\alpha} : I = [a,b] \to \mathbb{R}^m$ nennt man auch einen ***stetigen (bzw. stetig differenzierbaren) parametrisierten Weg***. Ist $\boldsymbol{\alpha}$ in t_0 differenzierbar, so heißt $\boldsymbol{\alpha}'(t_0)$ der ***Tangentenvektor*** von $\boldsymbol{\alpha}$ in t_0.

Der Punkt $x_A(\boldsymbol{\alpha}) := \boldsymbol{\alpha}(a)$ ist der ***Anfangspunkt*** und $x_E(\boldsymbol{\alpha}) := \boldsymbol{\alpha}(b)$ der ***Endpunkt*** des Weges. Ist $x_E(\boldsymbol{\alpha}) = x_A(\boldsymbol{\alpha})$, so heißt der Weg ***geschlossen***.

Die Menge $|\boldsymbol{\alpha}| := \boldsymbol{\alpha}([a,b])$ bezeichnet man als ***Spur*** des Weges (und auch als ***parametrisierte Kurve***).

Ist $\boldsymbol{\alpha}$ stetig differenzierbar und injektiv und $\boldsymbol{\alpha}'(t) \neq \mathbf{0}$ für alle t, so nennt man $\boldsymbol{\alpha}$ einen ***glatten Weg*** und die Spur $|\boldsymbol{\alpha}|$ eine ***glatte Kurve***.

Ist $g : J \to I$ eine Parametertransformation, also g differenzierbar und $g'(s) \neq 0$ für alle $s \in J$, so haben die parametrisierten Wege $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\alpha} \circ g$ die gleiche Spur. Ist überall $g' > 0$ (also g streng monoton wachsend), so nennt man g ***orientierungstreu***, andernfalls ***orientierungsumkehrend***.

2.4. Beispiele

A. Ist $\boldsymbol{\alpha}(t) \equiv \mathbf{c}$ eine konstante Abbildung, so ist offensichtlich $\boldsymbol{\alpha}'(t) \equiv \mathbf{0}$. Die Spur des Weges besteht aus dem einzelnen Punkt $\mathbf{c}$. Der Weg ist nicht glatt.

B. Sei $\mathbf{x}_0$ beliebig und $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Dann wird durch $\boldsymbol{\alpha}(t) := \mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{v}$ eine parametrisierte Gerade gegeben. Es ist

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}(t) - \boldsymbol{\alpha}(t_0)}{t - t_0} = \mathbf{v} \text{ für beliebige Parameter } t,\ t_0,$$

also $\boldsymbol{\alpha}'(t) \equiv \mathbf{v}$. Offensichtlich handelt es sich hierbei um einen glatten Weg.

Physikalisch wird so eine gleichförmige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ beschrieben.

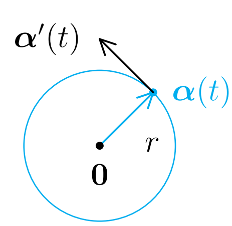
C. Sei $r > 0$. $\boldsymbol{\alpha}(t) := \mathbf{a} + r\cos(t)\mathbf{e}_1 + r\sin(t)\mathbf{e}_2 = (a_1 + r\cos(t), a_2 + r\sin(t))$ ist die Parametrisierung eines Kreises im $\mathbb{R}^2$ um $\mathbf{a}$ mit Radius r. Dann gilt:

$$\boldsymbol{\alpha}'(t) = (-r\sin(t), r\cos(t)).$$

Ist $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, so ist $\boldsymbol{\alpha}(t) \bullet \boldsymbol{\alpha}'(t) = (r\cos(t), r\sin(t)) \bullet (-r\sin(t), r\cos(t)) = 0$.

Das bedeutet, dass der „Radius-Vektor“ $\boldsymbol{\alpha}(t)$ und der Tangentenvektor $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ immer aufeinander senkrecht stehen.

Der Kreis ist ein geschlossener glatter Weg.



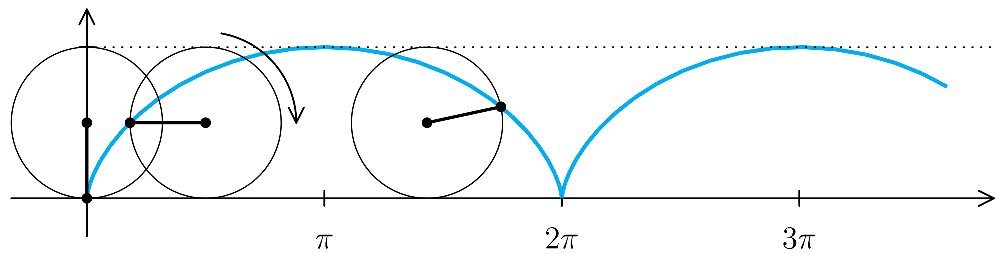
Setzt man $\varphi(s) := 2s$, so parametrisiert $\boldsymbol{\alpha} \circ \varphi : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\boldsymbol{\alpha} \circ \varphi(s) = \big(r\cos(2s), r\sin(2s)\big)$$

den gleichen Kreis. Es ist $(\boldsymbol{\alpha} \circ \varphi)'(s_0) = 2 \cdot \boldsymbol{\alpha}'(2s_0)$. Das bedeutet, dass der Kreis diesmal mit der doppelten Geschwindigkeit durchlaufen wird.

D. Der Weg $\boldsymbol{\alpha}(t) := (t - \sin t, 1 - \cos t)$ wird als ***Zykloide*** bezeichnet. Der Tangentenvektor $\boldsymbol{\alpha}'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ verschwindet genau dann, wenn $\cos(t) = 1$ ist, also bei $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Das bedeutet, dass dort $\boldsymbol{\alpha}'(t) = (0, 0)$ ist. Also ist $\boldsymbol{\alpha}$ an diesen Stellen nicht glatt. Bei den Punkten $(2k\pi, 0)$ treten Ecken auf.

Die y-Komponente $\alpha_2(t)$ nimmt jeweils bei $t = (2k + 1)\pi$ ein Maximum an und bewegt sich sonst zwischen 0 und 2.

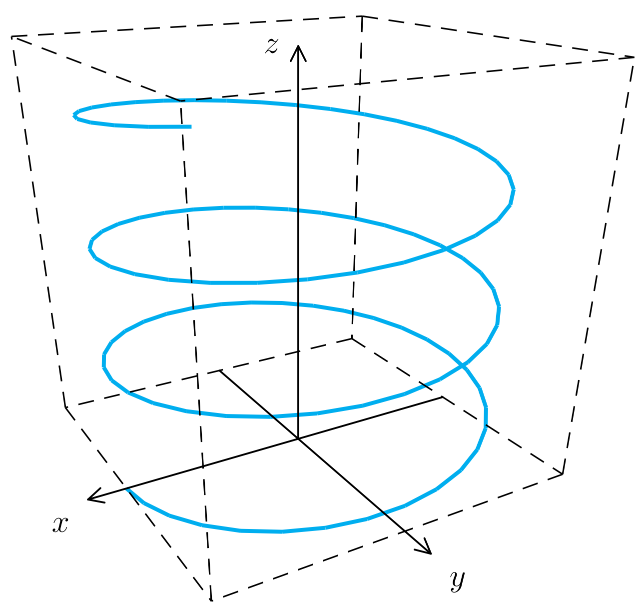


Die Zykloide beschreibt die Bewegung eines Punktes auf einem rollenden Rad. Das Rad habe den Radius 1, der Mittelpunkt bewege sich von $(0, 1)$ aus in positiver x-Richtung. Der beobachtete Punkt hat am Anfang die Position $(0, 0)$. Berührt das Rad die x-Achse bei $(t, 0)$, so hat der beobachtete Punkt auf der Peripherie des Kreises einen Bogen der Länge t zurückgelegt und daher die Koordinaten $(t, 1) + (-\sin t, -\cos t)$.

E. Eine ***Helix*** im $\mathbb{R}^3$ wird parametrisiert durch

$$\boldsymbol{\alpha}(t) := (r \cos t, r \sin t, kt), \ r, k > 0 \text{ konstant}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Das ist eine glatte „Raumkurve“.



Die Parametertransformation $\sigma : [a,b] \to [a,b]$ mit $\sigma(t) := a+b-t$ ist nicht orientierungstreu, denn es ist $\sigma'(t) \equiv -1$. Ist $\boldsymbol{\alpha} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ die Parametrisierung einer Kurve C, so bezeichnet man die durch $\boldsymbol{\alpha} \circ \sigma$ parametrisierte Kurve mit $-C$. Damit wird deutlich gemacht, dass die Kurve in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird.

Definition

Sei $\boldsymbol{\alpha} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein **stetig differenzierbarer** Weg. Dann definiert man die ***Länge*** (oder ***Bogenlänge***) von $\boldsymbol{\alpha}$ durch

$$L(\boldsymbol{\alpha}) = \int_a^b \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\,dt.$$

2.5. Beispiele

A. Die Verbindungsstrecke zweier Punkte $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ wird parametrisiert durch $\boldsymbol{\alpha}(t) := (1-t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2$, für $0 \le t \le 1$. Es ist $\boldsymbol{\alpha}'(t) \equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, also

$$L(\boldsymbol{\alpha}) = \int_0^1 \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|\,dt = \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|.$$

Das ist genau das, was man erwartet.

B. Für die Kreislinie $\boldsymbol{\alpha}(t) := (r\cos t, r\sin t)$ gilt $\boldsymbol{\alpha}'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$ und $\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| = r$, also

$$L(\boldsymbol{\alpha}) = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r.$$

Im Falle $r = 1$ wird die Länge des Bogens zwischen $(0,0)$ und dem Punkt $\mathbf{x}_t = (\cos t, \sin t)$ auf dem Einheitskreis durch das Integral

$$\int_0^t ds = t.$$

gegeben. Das liefert die ursprüngliche geometrische Definition für Sinus und Cosinus.

C. Bei der Zykloide $\boldsymbol{\alpha}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ist $\boldsymbol{\alpha}'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$, also $\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| = \sqrt{2 - 2\cos(t)}$. Nun ist

$$\cos t = \cos\bigl(2 \cdot \frac{t}{2}\bigr) = \cos^2\bigl(\frac{t}{2}\bigr) - \sin^2\bigl(\frac{t}{2}\bigr) = 1 - 2\sin^2\bigl(\frac{t}{2}\bigr),$$

also

$$\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| = \sqrt{2 - \Bigl(2 - 4\sin^2\bigl(\frac{t}{2}\bigr)\Bigr)} = 2\bigl|\sin\bigl(\frac{t}{2}\bigr)\bigr|.$$

Daher ergibt sich für einen Zykloidenbogen (von $t = 0$ bis $t = 2\pi$):

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\alpha}) &= 2\int_0^{2\pi} \big|\sin\big(\frac{t}{2}\big)\big|\,dt \\ &= 4\int_0^{2\pi} |\sin x(t)| x'(t)\,dt \qquad (\text{mit } x(t) := \frac{t}{2}\,) \\ &= 4\int_0^{\pi} |\sin x|\,dx \;=\; 4\cdot(-\cos x)\,\Big|_0^{\pi} = 8. \end{aligned}$$

Es ist bemerkenswert, dass man als Ergebnis eine rationale Zahl erhält!

D. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist $\boldsymbol{\alpha}(t) := \big(t, f(t)\big)$ eine Kurve, deren Spur der Graph von f ist. Es ist $\boldsymbol{\alpha}'(t) = \big(1, f'(t)\big)$, also

$$\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| = \sqrt{1 + f'(t)^2} \qquad \text{und} \qquad L(\boldsymbol{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\,dt.$$

E. Sei $\boldsymbol{\alpha}(t) := (a\cos t, b\sin t)$ die Ellipse mit den Halbachsen a und b, und $a > b$. Dann ist $\boldsymbol{\alpha}'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$ und $\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$. Also erhält man als Länge des Ellipsenbogens das Integral

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\alpha}) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt \\ &= a\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2}\cos^2 t}\,dt \\ &= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2\cos^2 t}\,dt, \end{aligned}$$

mit $k := \sqrt{1 - b^2/a^2}$. Ein Integral dieses Typs nennt man ein ***Elliptisches Integral***. Es ist nicht elementar lösbar, man muss es numerisch auswerten.

Es gibt drei Typen von elliptischen Integralen. Die ersten beiden sehen folgendermaßen aus:

Ein ***elliptisches Integral 1. Art*** ist ein Integral vom Typ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} \qquad \text{mit einer komplexen Konstanten } k.$$

Mit der Substitution $x = \sin\varphi$ oder $x = \cos\varphi$ erhält man das Integral in der trigonometrischen Form, z.B.

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2(\sin\varphi)^2}}\,.$$

Ein ***elliptisches Integral 2. Art*** ist ein Integral vom Typ

$$\int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx\,,$$

bzw. mit der Substitution $x = \sin\varphi$

$$\int \sqrt{1-k^2(\sin\varphi)^2}\,d\varphi\,.$$

Bei der Länge des Ellipsenbogens erhält man ein elliptisches Integral 2. Art (in trigonometrischer Form, mit Substitution $x = \cos\varphi$).

Es ist zunächst nicht einsichtig, warum man die Bogenlänge auf die Weise definieren kann, wie wir das getan haben. Warum das sinnvoll ist, wollen wir jetzt etwas genauer untersuchen.

Sei $\boldsymbol{\alpha} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein **stetiger** Weg. Wir betrachten Zerlegungen $\mathfrak{Z} = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ von $[a,b]$ und bilden die Summen

$$\Lambda(\mathfrak{Z}, \boldsymbol{\alpha}) := \sum_{i=1}^{N} \|\boldsymbol{\alpha}(t_i) - \boldsymbol{\alpha}(t_{i-1})\|,$$

sowie $\Lambda(\boldsymbol{\alpha}) := \sup_{\mathfrak{Z}} \Lambda(\mathfrak{Z}, \boldsymbol{\alpha})$. Der Weg $\boldsymbol{\alpha}$ heißt ***rektifizierbar***, falls $\Lambda(\boldsymbol{\alpha}) < \infty$ ist. Anschaulich ist $\Lambda(\mathfrak{Z}, \boldsymbol{\alpha})$ die Länge eines Polygonzuges, der $\boldsymbol{\alpha}$ approximiert, und für einen rektifizierbaren Weg kann man $\Lambda(\boldsymbol{\alpha})$ sicherlich als Weglänge interpretieren.

2.6. Stetig differenzierbare Wege sind rektifizierbar

Ist $\boldsymbol{\alpha}$ stetig differenzierbar, so ist $\boldsymbol{\alpha}$ rektifizierbar und $\Lambda(\boldsymbol{\alpha}) = L(\boldsymbol{\alpha})$.

Beweis: Für eine beliebige Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ von $[a,b]$ gilt:

$$\|\boldsymbol{\alpha}(t_i) - \boldsymbol{\alpha}(t_{i-1})\| = \Big\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \boldsymbol{\alpha}'(t)\,dt \Big\| \le \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\,dt.$$

Daraus folgt die Ungleichung $\Lambda(\mathfrak{Z}, \boldsymbol{\alpha}) \le \displaystyle\int_a^b \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\,dt$ für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$, und dann ist auch $\Lambda(\boldsymbol{\alpha}) \le L(\boldsymbol{\alpha})$.

Um die umgekehrte Ungleichung zu zeigen, geben wir uns ein $\varepsilon > 0$ vor. Da $\boldsymbol{\alpha}'$ als stetige (vektorwertige) Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ sogar gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft:

$$\text{Ist } |s-t| < \delta, \text{ so ist } \|\boldsymbol{\alpha}'(s) - \boldsymbol{\alpha}'(t)\| < \varepsilon.$$

Sei nun $\mathfrak{Z} = \{t_0, \ldots, t_N\}$ eine Zerlegung, so dass $|t_i - t_{i-1}| < \delta$ für alle i ist. Dann gilt für jedes $t \in [t_{i-1}, t_i]$

$$\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| = \|\boldsymbol{\alpha}'(t_i) + (\boldsymbol{\alpha}'(t) - \boldsymbol{\alpha}'(t_i))\| \le \|\boldsymbol{\alpha}'(t_i)\| + \varepsilon.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\,dt &\leq (\|\boldsymbol{\alpha}'(t_i)\| + \varepsilon)\cdot(t_i - t_{i-1}) \\
&= \|\boldsymbol{\alpha}'(t_i)(t_i - t_{i-1})\| + \varepsilon(t_i - t_{i-1}) \\
&= \|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\boldsymbol{\alpha}'(t) + (\boldsymbol{\alpha}'(t_i) - \boldsymbol{\alpha}'(t)))\,dt\| + \varepsilon(t_i - t_{i-1}) \\
&\leq \|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \boldsymbol{\alpha}'(t)\,dt\| + \|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\boldsymbol{\alpha}'(t_i) - \boldsymbol{\alpha}'(t))\,dt\| + \varepsilon(t_i - t_{i-1}) \\
&\leq \|\boldsymbol{\alpha}(t_i) - \boldsymbol{\alpha}(t_{i-1})\| + 2\varepsilon(t_i - t_{i-1}).
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\int_a^b \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\,dt \leq \Lambda(\mathfrak{Z}, \boldsymbol{\alpha}) + 2\varepsilon(b-a) \leq \Lambda(\boldsymbol{\alpha}) + 2\varepsilon(b-a).$$

Wir können ε gegen Null gehen lassen und erhalten $L(\boldsymbol{\alpha}) \leq \Lambda(\boldsymbol{\alpha})$. ■

Wir werden jetzt noch zeigen, dass die Bogenlänge nicht von der Parametrisierung einer Kurve abhängt.

2.7. Unabhängigkeit der Länge von der Parametrisierung

Sei $\boldsymbol{\alpha} : J = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg und $\varphi : I = [c,d] \to J$ eine stetig differenzierbare Parametertransformation. Dann ist $L(\boldsymbol{\alpha}\circ\varphi) = L(\boldsymbol{\alpha})$.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\alpha}\circ\varphi) &= \int_c^d \|(\boldsymbol{\alpha}\circ\varphi)'(s)\|\,ds = \int_c^d \|(\boldsymbol{\alpha}'(\varphi(s))\cdot\varphi'(s)\|\,ds \quad \text{(Kettenregel)} \\
&= \int_c^d \|(\boldsymbol{\alpha}'(\varphi(s))\|\cdot|\varphi'(s)|\,ds = \pm\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\,dt \quad \text{(Substitutionsregel)} \\
&= \int_a^b \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|\,dt = L(\boldsymbol{\alpha}).
\end{aligned}$$

Dabei hängt das bei der Anwendung der Substitutionsregel auftretende Vorzeichen davon ab, ob φ' monoton wächst oder fällt. Dementsprechend ist dann auch $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$ oder umgekehrt. ■

Definition

Eine offene Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt ***zusammenhängend***, wenn sie **nicht** disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer offener Teilmengen ist.

Dass X zusammenhängend ist, bedeutet: Ist $U \subset X$ offen und nicht-leer und $X \setminus U$ ebenfalls offen, so muss $U = X$ sein.

Definition

Eine **offene** Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein ***Gebiet***, falls es zu je zwei Punkten $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ aus G einen stetigen Weg $\boldsymbol{\alpha} : [0,1] \to G$ mit $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{x}$ und $\boldsymbol{\alpha}(1) = \mathbf{y}$ gibt.

2.8. Satz (Charakterisierung von Gebieten)

*Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ eine **offene** Teilmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *G ist zusammenhängend.*
2. *G ist ein Gebiet.*
3. *Je zwei Punkte von G lassen sich in G durch einen Streckenzug verbinden.*

Beweis: (1) $\Longrightarrow$ (3): Sei $\mathbf{x}_0 \in G$ ein fester Punkt und

$$U := \{\mathbf{y} \in G \,:\, \mathbf{x}_0 \text{ und } \mathbf{y} \text{ lassen sich in } G \text{ durch einen Streckenzug verbinden}\}.$$

Weil auf jeden Fall eine kleine Kreisscheibe um $\mathbf{x}_0$ zu G und damit zu U gehört, ist U nicht leer. Liegt $\mathbf{y}$ in U, so wählen wir ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(\mathbf{y}) \subset G$ ist. Da jeder Punkt von $U_\varepsilon(\mathbf{y})$ durch eine Strecke mit $\mathbf{y}$ verbunden werden kann, gehört die ganze ε-Umgebung zu U. Das bedeutet, dass U offen ist.

Wenn $\mathbf{y}$ in $G \setminus U$ liegt, wählen wir ebenfalls eine ε-Umgebung um $\mathbf{y}$, die noch ganz in G liegt. Könnte irgend ein Punkt $\mathbf{x} \in U_\varepsilon(\mathbf{y})$ mit $\mathbf{x}_0$ durch einen Streckenzug verbunden werden, so könnte man diesen Weg um die Strecke von $\mathbf{x}$ nach $\mathbf{y}$ verlängern, und $\mathbf{y}$ müsste in U liegen. Das wäre ein Widerspruch. Also ist auch $G \setminus U$ offen. Dann muss aber $U = G$ sein.

(3) $\Longrightarrow$ (2): Trivial!

(2) $\Longrightarrow$ (1): Sei $U \subset G$ offen und nicht-leer und $G \setminus U$ ebenfalls offen. Wir müssen zeigen, dass $U = G$ ist.

Sei $\mathbf{x}_0 \in U$ und $\mathbf{y}_0 \in G$ ein beliebiger Punkt. Es gibt einen stetigen Weg $\boldsymbol{\alpha} : [0,1] \to G$ mit $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{x}_0$ und $\boldsymbol{\alpha}(1) = \mathbf{y}_0$. Dann setzen wir

$$t_0 := \sup\{t \in [0,1] \,:\, \boldsymbol{\alpha}(t) \in U\}.$$

Offensichtlich ist $0 < t_0 \le 1$, und es gibt eine Folge von Zahlen $t_\nu < t_0$ mit $\lim_{\nu\to\infty} t_\nu = t_0$ und $\boldsymbol{\alpha}(t_\nu) \in U$. Läge $\mathbf{z}_0 := \boldsymbol{\alpha}(t_0)$ in der offenen Menge $G \setminus U$, so müsste – wegen der Stetigkeit von $\boldsymbol{\alpha}$ – auch schon $\boldsymbol{\alpha}(t_\nu)$ für hinreichend großes ν in $G \setminus U$ liegen. Das ist ein Widerspruch. Also liegt $\mathbf{z}_0$ in U. Ist $t_0 < 1$, so gibt es Zahlen t mit $t_0 < t < 1$ und $\boldsymbol{\alpha}(t) \in U$. Das kann nicht sein. Also ist $t_0 = 1$ und $\mathbf{y}_0 = \boldsymbol{\alpha}(1) = \mathbf{z}_0 \in U$. ■