2 Stetige Funktionen

2.1 Grenzwerte von Funktionen

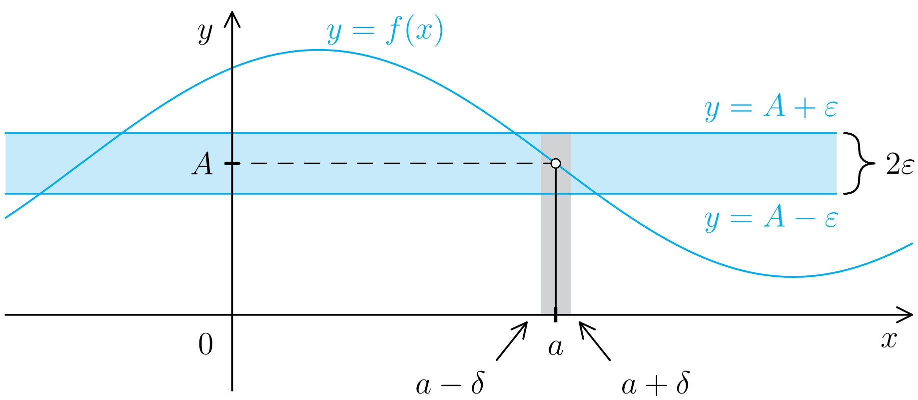
Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$ ein innerer Punkt und f eine reellwertige Funktion, die auf $I \setminus \{a\}$ (aber eventuell nicht in a) definiert ist. Wir sagen, dass f bei Annäherung an a den ***Grenzwert*** (oder ***Limes***) A besitzt, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein (von ε abhängiges) $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$\text{Für alle } x \in I \text{ mit } 0 < |x - a| < \delta \text{ ist } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Wir schreiben dann auch: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Es folgt eine Skizze zur Verdeutlichung des Sachverhaltes. Wird ein horizontaler „Schlauch“ der Breite 2ε um den y-Wert A gewählt, so muss eine Umgebung $U = U_\delta(a)$ gefunden werden, so dass der Graph von f – eingeschränkt auf U und außerhalb von a – ganz im Innern des Schlauches verläuft.



Bemerkung: Auch wenn es nicht extra erwähnt wird, so ist doch der Limes für $x \to x_0$ so zu verstehen, dass bei der Annäherung an x_0 immer $x \neq x_0$ sein soll.

1.1. Beispiel

Wir zeigen, dass $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1} = 6$ ist. Für $x \neq 1$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} -\varepsilon < \frac{2x^2+2x-4}{x-1} - 6 < \varepsilon \quad &\iff \quad -\varepsilon < \frac{2x^2+2x-4-6(x-1)}{x-1} < \varepsilon \\ \iff \quad -\varepsilon < \frac{2x^2-4x+2}{x-1} < \varepsilon \quad &\iff \quad -\varepsilon < \frac{2(x-1)^2}{x-1} < \varepsilon \\ \iff \quad -\varepsilon < 2(x-1) < \varepsilon \quad &\iff \quad -\frac{\varepsilon}{2} < x - 1 < \frac{\varepsilon}{2}\,. \end{aligned}$$

Ist also $0 < |x-1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, so ist $\left|\dfrac{2x^2+2x-4}{x-1} - 6\right| < \varepsilon$. Daraus folgt die gewünschte Aussage.

Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, a ein rechter Randpunkt von I und f eine reellwertige Funktion, die auf $I \setminus \{a\}$ (aber eventuell nicht in a) definiert ist. Wir sagen, dass f bei Annäherung an a den ***linksseitigen Grenzwert*** A_- besitzt, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein (von ε abhängiges) $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$\text{Für alle } x \in I \text{ mit } a - \delta < x < a \text{ ist } |f(x) - A_-| < \varepsilon.$$

Ist a ein linker Randpunkt von I, so sagen wir, dass f bei Annäherung an a den ***rechtsseitigen Grenzwert*** A_+ besitzt, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$\text{Für alle } x \in I \text{ mit } a < x < a + \delta \text{ ist } |f(x) - A_+| < \varepsilon.$$

Existiert der linksseitige (bzw. rechtsseitige) Grenzwert, so schreibt man

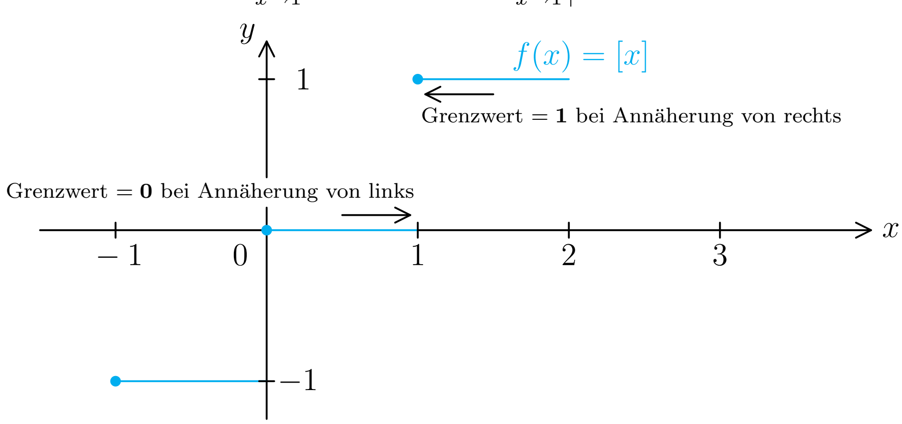
$$f(a-) := \lim_{x \to a-} f(x) = A_- \quad \text{bzw.} \quad f(a+) := \lim_{x \to a+} f(x) = A_+\,.$$

1.2. Beispiele

A. Sei

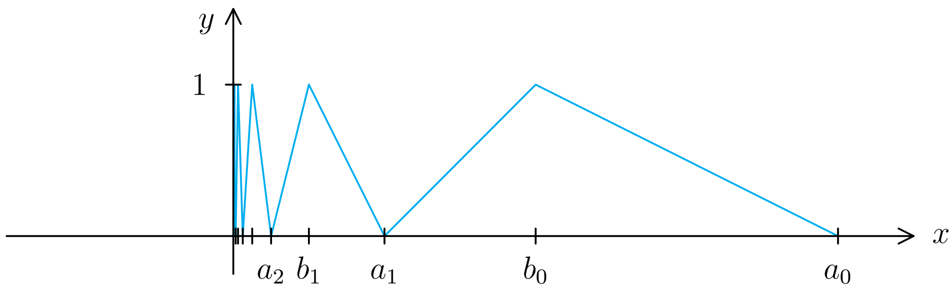
$$f(x) := [x] = \text{ größte ganze Zahl } \le x$$

die Gaußklammer. Dann ist $f(x) = 0$ für $0 < x < 1$ und $f(x) = 1$ für $1 \le x < 2$, also $\lim_{x \to 1-} f(x) = 0$ und $\lim_{x \to 1+} f(x) = 1$.

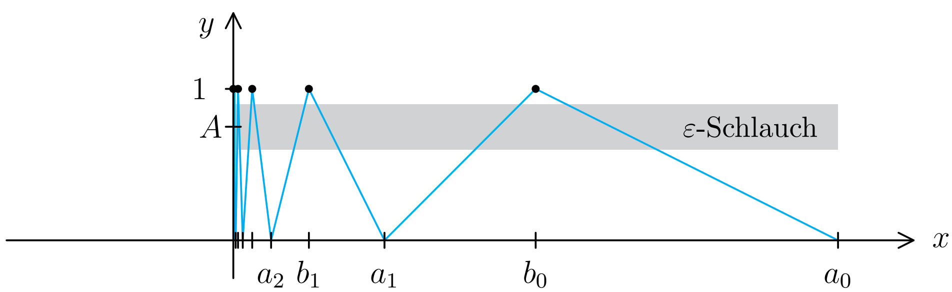


B. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $a_k := 2^{-2k}$ und $b_k := 2^{-2k-1}$. Dann ist $a_{k+1} < b_k < a_k$, und wir definieren $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} (x - a_{k+1})/(b_k - a_{k+1}) & \text{für } a_{k+1} \le x < b_k, \\ (x - a_k)/(b_k - a_k) & \text{für } b_k \le x < a_k. \end{cases}$$

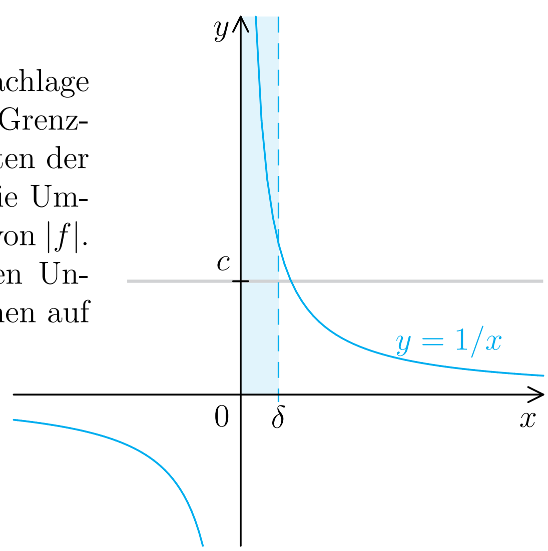


Die Skizze zeigt, dass die Werte von f in der Nähe von $x = 0$ jeder Zahl zwischen 0 und 1 beliebig nahe kommen. Also kann der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to 0$ nicht existieren. Aber das muss auch noch formelmäßig nachgewiesen werden.



Sei $A \in [0, 1]$ beliebig und $\varepsilon > 0$ so klein, dass 0 und 1 nicht beide im Intervall $V_\varepsilon(A) = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ liegen können. Wir können annehmen, dass 1 nicht in $V_\varepsilon(A)$ liegt. Die Folge (b_k) konvergiert von rechts gegen Null, aber die Werte $f(b_k) = 1$ bleiben immer außerhalb $V_\varepsilon(A)$. Also gibt es kein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - A| < \varepsilon$ für $0 < x < \delta$ gilt. Bei Annäherung an 0 von rechts besitzt $f(x)$ keinen Grenzwert!

C. Bei der Funktion $f(x) := 1/x$ ist die Sachlage etwas anders. Auch hier existiert der Grenzwert bei $x = 0$ nicht, aber das Verhalten der Funktion ist eindeutiger. Je kleiner die Umgebung von 0, desto größer die Werte von $|f|$. Wir deuten das als Konvergenz gegen Unendlich und müssen nur die Definitionen auf diesen Fall ausdehnen.



Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, a ein rechter Randpunkt von I und f eine reellwertige Funktion auf I, aber nicht in a definiert. Wir sagen, dass f bei Annäherung an a den ***linksseitigen Grenzwert*** $+\infty$ (bzw. $-\infty$) besitzt, falls es zu jedem $c > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$\text{Für alle } x \in I \text{ mit } a - \delta < x < a \text{ ist } f(x) > c \text{ (bzw. } f(x) < -c\text{).}$$

Im Falle eines linken Randpunktes von I und der Annäherung an a von rechts definiert man den Grenzwert $\pm\infty$ analog.

1.3. Beispiel

$$\text{Es ist} \quad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ und } \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Ist $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ oder $\lim_{x \to a\pm} f(x) = \pm\infty$, so nennt man die Gerade $x = a$ eine ***vertikale Asymptote***.

1.4. Satz

Der beidseitige Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x)$ existiert genau dann, wenn der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert von $f(x)$ in a existieren und beide gleich sind.

BEWEIS: Die eine Richtung ist trivial. Setzen wir also voraus, dass die einseitigen Grenzwerte existieren und gleich einer Zahl A sind! Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es Zahlen $\delta_1, \delta_2 > 0$, so dass $|f(x) - A| < \varepsilon$ für $a - \delta_1 < x < a + \delta_2$ ist. Die Ungleichung gilt dann aber erst recht für $|x - a| < \delta$, wenn man $\delta \leq \min(\delta_1, \delta_2)$ wählt. ■

1.5. Folgenkriterium

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$ ein innerer Punkt oder ein Randpunkt von I und f eine reellwertige Funktion, die auf $I \setminus \{a\}$ (aber eventuell nicht in a) definiert ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *Es existiert der Grenzwert $A := \lim_{x \to a} f(x)$.*
2. *Für jede Folge $(x_n) \in I$ mit $x_n \neq a$ und $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ ist $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$.*

BEWEIS: (1) $\Longrightarrow$ (2):

Sei (x_n) eine Folge in I, die gegen a konvergiert. Außerdem sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - A| < \varepsilon$ für $|x - a| < \delta$ ist. Für ein geeignetes

n_0 liegen alle Folgeglieder x_n mit $n \geq n_0$ in $U_\delta(a)$. Dann ist $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Das bedeutet, dass $(f(x_n))$ gegen A konvergiert.

(2) $\Longrightarrow$ (1):

Es sei das Folgenkriterium erfüllt. Wir nehmen an, dass $f(x)$ für $x \to a$ nicht gegen A konvergiert. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass man zu jedem $\delta > 0$ ein x mit $0 < |x - a| < \delta$ und $|f(x) - A| \geq \varepsilon$ finden kann. Insbesondere gibt es dann zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_n \in I$ mit $0 < |x_n - a| < 1/n$ und $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$. Aber das kann nicht sein. ■

1.6. Grenzwertsätze

Wenn die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ *und* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = d$ *existieren, dann gilt:*

1. $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = c \pm d$.
2. $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = c \cdot d$.
3. *Ist* $d \neq 0$, *so ist* $\lim\limits_{x \to a} f(x)/g(x) = c/d$.

Beweis: Wegen des Folgenkriteriums kann man die Aussagen des Satzes ganz einfach auf die Grenzwertsätze für Folgen zurückführen. ■

Sei $I = [a, \infty)$ (bzw. $I = (-\infty, b]$), $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $A \in \mathbb{R}$. Wir sagen, $f(x)$ strebt für x gegen ∞ (bzw. für x gegen $-\infty$) gegen A, falls gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $c > 0$, so dass $|f(x) - A| < \varepsilon$ für $x > c$ (bzw. für $x < -c$) ist. Man schreibt dann:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad \big(\text{bzw. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = A\big).$$

Die Gerade $y = A$ nennt man in diesem Fall eine ***horizontale Asymptote***.

Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in I$. Die Funktion f heißt ***stetig in*** a, falls gilt:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Die Funktion f heißt ***stetig auf dem Intervall*** I, falls sie in jedem Punkt $x \in I$ stetig ist.

Eine Funktion kann nur dann in einem Punkt a stetig sein, wenn sie dort definiert ist. Es spielt dabei keine Rolle, ob es sich um einen inneren Punkt oder einen Randpunkt handelt. Darüber hinaus werden **zwei** Dinge gefordert:

1. f muss in a einen Grenzwert besitzen.

2. Der Grenzwert von f in a muss mit dem Funktionswert $f(a)$ übereinstimmen.

Wichtig ist, dass man immer beide Bedingungen überprüft. Man kann das locker auch in der Form

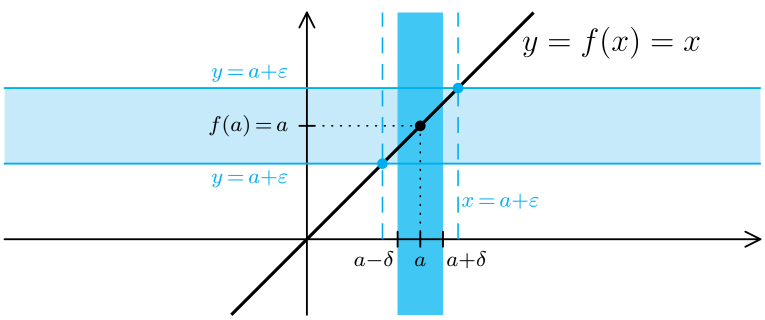
$$\lim_{x \to a} f(x) = f\big(\lim_{x \to a} x\big)$$

schreiben. Grenzwertbildung und Anwendung von f sind miteinander vertauschbar.

1.7. Beispiele

A. Wie beweist man die Stetigkeit in einem Punkt a? Für einen beliebigen ε-Schlauch um $y = f(a)$ zeigt man, dass die Punkte $(x, f(x))$ in dem Schlauch bleiben, wenn nur x nahe genug bei a bleibt. Das ist z.B. dann der Fall, wenn f eine konstante Funktion ist. Eine **konstante** Funktion ist also immer auf ihrem ganzen Definitionsbereich stetig.

Aber auch die Funktion $f(x) := x$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Dazu sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben.



Der Graph der Funktion verlässt den ε-Schlauch dort, wo die Gerade $y = x$ eine der Geraden $y = a + \varepsilon$ oder $y = a - \varepsilon$ trifft, also bei $(a - \varepsilon, a - \varepsilon)$ und bei $(a + \varepsilon, a + \varepsilon)$. Ist $0 < \delta < \varepsilon$, so gilt für $|x - a| < \delta$ auch $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta < \varepsilon$. Also ist f in a stetig.

B. Die Funktion $f(x) := [x]$ ist in den Punkten $x = n \in \mathbb{Z}$ nicht stetig, denn dort stimmen rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert nicht überein.

C. Besonders befremdlich mutet das folgende Beispiel an:

$$\text{Sei } f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \neq 0 \\ 5 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Dann existiert zwar $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, aber weil $f(0) = 5$ gesetzt wurde, ist die Funktion dennoch im Nullpunkt nicht stetig. Hier kann die Funktion natürlich leicht so abgeändert werden, dass sie auch in 0 stetig wird. Man sagt dann, die Funktion ist bei $x = 0$ ***stetig ergänzbar***.

Ist die Funktion f in der Nähe von x_0 definiert und in x_0 nicht stetig, so nennt man x_0 eine ***Unstetigkeitsstelle*** von f oder sagt, f ist in x_0 *unstetig*. Es gibt dann zwei Möglichkeiten.

1. Zumindest einer der beiden einseitigen Grenzwerte existiert nicht. Dann nennen wir x_0 eine ***wesentliche Unstetigkeit*** von f.

2. Wenn $f(x_0+)$ und $f(x_0-)$ beide existieren, aber **nicht** gleich sind, dann nennt man x_0 eine ***Sprungstelle*** von f.

   Den Wert $|f(x_0+) - f(x_0-)|$ nennt man dann die ***Sprunghöhe***.

   Wenn beide Grenzwerte existieren und übereinstimmen, so ist f stetig in x_0.

Wenn an dem Argument x einer stetigen Funktion f nur ein wenig gewackelt wird, so kann sich auch der Funktionswert $f(x)$ nur wenig ändern. Das ist eine Stabilitätseigenschaft, die folgende Konsequenz hat:

1.8. Satz

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. Ist $f(x_0) > 0$, so gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f(x) > 0$ für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap I$ ist.

Eine analoge Aussage gilt, wenn $f(x_0) < 0$ ist.

BEWEIS: Sei $0 < \varepsilon < f(x_0)$. Weil f stetig in x_0 ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $x \in U_\delta(x_0) \cap I$ ist. Für diese x ist dann $-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$, also insbesondere, nach Addition von $f(x_0)$: $0 < f(x_0) - \varepsilon < f(x)$. ∎

Das gerade bewiesene Verhalten ist eine „lokale Eigenschaft", es geht dabei nur um das Verhalten in der Nähe eines Punktes. Aber die Stetigkeit hat auch globale Konsequenzen: Der Graph einer stetigen Funktion auf einem Intervall ist ein zusammenhängendes Gebilde. Beginnt er etwa unterhalb und endet er oberhalb der x–Achse, so muss er dazwischen irgendwann einmal die Achse treffen:

1.9. Satz von Bolzano

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gibt es ein x_0 mit $a < x_0 < b$ und $f(x_0) = 0$.

BEWEIS: Die Menge $M := \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$ ist nicht leer und durch b nach oben beschränkt, also besitzt sie ein Supremum x_0. Wegen des vorigen Satzes ist $a < x_0 < b$.

Wir vermuten, dass $f(x_0) = 0$ ist. Um das zu beweisen, nehmen wir an, dass $f(x_0) > 0$ ist. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f(x) > 0$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$ ist. Aber das heißt, dass jedes x mit $x_0 - \delta < x < x_0$ auch eine obere Schranke für M ist, im Widerspruch zur Wahl von x_0 als **kleinste** obere Schranke. Also muss $f(x_0) \leq 0$

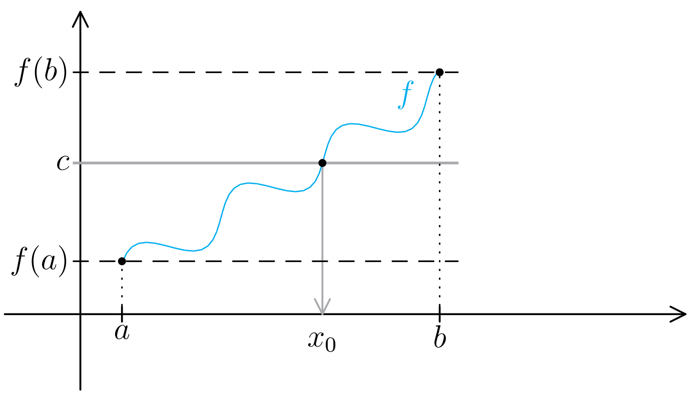
sein. Wäre $f(x_0) < 0$, so gäbe es noch Punkte $x > x_0$, für die $f(x) < 0$ ist. Da auch das nicht sein kann, bleibt nur noch die Möglichkeit $f(x_0) = 0$. ∎

Etwas allgemeiner kann man sogar zeigen:

1.10. Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) < c < f(b)$. Dann gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = c$.

Beweis: Wir setzen $F(x) := f(x) - c$. Dann ist $F(a) < 0 < F(b)$, und nach dem Satz von Bolzano gibt es ein $x_0 \in [a, b]$, so dass $F(x_0) = 0$ ist, also $f(x_0) = c$. ∎



Wir stellen nun einige Regeln zusammen:

1.11. Satz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Sind $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die beide in $x_0 \in I$ stetig sind, so gilt:

1. *$f + g$ ist in x_0 stetig.*
2. *$f \cdot g$ ist in x_0 stetig.*
3. *Ist $g(x_0) \neq 0$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap I$ ist. Die Funktion $1/g$ ist dort definiert und in x_0 stetig.*

Beweis: (1) und (2) ergeben sich ziemlich trivial aus den Grenzwertsätzen: Ist etwa (x_n) eine Folge in $I \setminus \{x_0\}$, die gegen x_0 konvergiert, so konvergieren $(f(x_n))$ und $(g(x_n))$ nach Voraussetzung gegen $f(x_0)$ bzw. $g(x_0)$, und dann konvergieren $(f + g)(x_n)$ bzw. $(f \cdot g)(x_n)$ gegen $f(x_0) + g(x_0)$ bzw. $f(x_0) \cdot g(x_0)$.

Zu (3): Ist $g(x_0) \neq 0$, so muss entweder $g(x_0) > 0$ oder $g(x_0) < 0$ sein. In jedem Falle vererbt sich diese Eigenschaft auf eine ganze ε–Umgebung von x_0, und dann ist $1/g$ dort tatsächlich definiert. Die Stetigkeit folgt wieder aus dem entsprechenden Grenzwertsatz. ∎

Insbesondere ist $\mathscr{C}^0(I) := \{ f : I \to \mathbb{R} \, : \, f \text{ stetig } \}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Da $f(x) := x$ und alle konstanten Funktionen stetig sind, erhält man die

1.12. Folgerung

Polynome sind auf ganz $\mathbb{R}$ und rationale Funktionen auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig.

1.13. Beispiel

Die rationale Funktion $f(x) := (x^n - 1)/(x^m - 1)$ ist in $x = 1$ nicht definiert. Kürzt man durch $x - 1$, so erhält man:

$$f(x) = \frac{1 + x + \cdots + x^{n-1}}{1 + x + \cdots + x^{m-1}} \qquad (\text{für } x \neq 1).$$

Weil $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{n}{m}$ ist, ist $F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \neq 1 \\ n/m & \text{falls } x = 1 \end{cases}$ in $x = 1$ stetig und f in $x = 1$ stetig ergänzbar.

1.14. Die Verkettung stetiger Funktionen ist stetig

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $f(I) \subset J$, und $g : J \to \mathbb{R}$ eine weitere stetige Funktion. Dann ist auch $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ stetig.

Beweis: Wir verwenden das Folgenkriterium. Sei $x_0 \in I$, $y_0 := f(x_0) \in J$. Weiter sei (x_n) eine Folge in I, die gegen x_0 konvergiert. Dann konvergiert auch (y_n) mit $y_n := f(x_n)$ in J gegen y_0, und daher $g(y_n)$ gegen $g(y_0)$. Aber das bedeutet wiederum, dass $(g \circ f)(x_n)$ gegen $(g \circ f)(x_0)$ konvergiert. ■

1.15. Injektive stetige Funktionen sind monoton

Die folgenden Aussagen über eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind äquivalent:

1. *f ist streng monoton.*
2. *f ist injektiv.*

Beweis: (1) $\Longrightarrow$ (2) ist trivial.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Aus der Injektivität folgt insbesondere, dass $f(a) \neq f(b)$ ist, und wir können annehmen, dass $f(a) < f(b)$ ist. Nun betrachten wir zwei beliebige Zahlen x_1, x_2 mit $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ und bilden die Funktion

$$g(t) := f(a + t(x_1 - a)) - f(b - t(b - x_2)), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq 1.$$

g ist als Zusammensetzung stetiger Funktionen selbst wieder stetig. Es ist $g(0) = f(a) - f(b) < 0$ und $g(1) = f(x_1) - f(x_2)$. Wäre $g(1) > 0$, so müsste nach Bolzano $g(t) = 0$ für ein $t \in [0,1]$ gelten, also $f(a + t(x_1 - a)) = f(b - t(b - x_2))$. Da $a \le a + t(x_1 - a) \le x_1 < x_2 \le b - t(b - x_2) \le b$ ist, ergäbe sich ein Widerspruch zur Injektivität von f.

Da auch $g(1) = 0$ unmöglich ist, muss $g(1) < 0$ sein, also $f(x_1) < f(x_2)$. Damit ist f streng monoton wachsend. Wären wir von der Ungleichung $f(a) > f(b)$ ausgegangen, so hätten wir herausbekommen, dass f streng monoton fällt. ∎

1.16. Stetigkeit und Unstetigkeit monotoner Funktionen

Sei $f : I := [a,b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, $J := [f(a), f(b)]$. Dann ist $f(I) \subset J$, und f besitzt höchstens Sprungstellen als Unstetigkeitsstellen.

f ist genau dann auf ganz I stetig, wenn $f(I) = J$ ist.

Beweis: 1) Ist $a < x < b$, so ist $f(a) < f(x) < f(b)$. Daraus ergibt sich schon, dass $f(I) \subset J$ ist.

2) Wir betrachten nun einen inneren Punkt x_0 von I und wollen zeigen, dass dort der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert von f existiert. Wir beschränken uns auf die Annäherung von links, von rechts funktioniert es dann analog. Ist x_0 ein Randpunkt, so braucht man nur eine Seite zu betrachten.

Wir betrachten die Menge $M := \{f(x) : x \in I \text{ und } x < x_0\} \neq \emptyset$. Offensichtlich ist M durch $f(x_0)$ nach oben beschränkt. Also existiert $y_0^- := \sup(M) \le f(x_0)$.

Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es ein $x^* < x_0$ mit $f(x^*) > y_0^- - \varepsilon$ (denn sonst wäre y_0^- noch nicht die kleinste obere Schranke von M). Sei $\delta := x_0 - x^*$. Für $x_0 - \delta < x < x_0$ ist dann auch $x^* < x < x_0$ und deshalb

$$y_0^- - \varepsilon < f(x^*) < f(x) \le y_0^- .$$

Die zweite Ungleichung folgt aus der strengen Monotonie von f, die dritte aus der Definition von y_0^- als Supremum von M.

Damit ist klar, dass $\lim_{x \to x_0-} f(x) = y_0^-$ ist, dass f also in x_0 höchstens eine Sprungstelle besitzt.

3) Ist $f(I) = J$, so kann es wegen der Monotonie keine Sprungstellen geben. Umgekehrt folgt aus der Beziehung $f(a) < f(b)$ und der Stetigkeit von f mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass jeder Wert $y \in J = [f(a), f(b)]$ angenommen wird. ∎

Bemerkung: Ein analoger Satz gilt für streng monoton fallende Funktionen.

1.17. Folgerung

Eine streng monotone, stetige Funktion ist umkehrbar und die Umkehrfunktion ist wieder stetig und streng monoton.

Beweis: Wir haben schon gezeigt, dass eine streng monotone, stetige Funktion injektiv und surjektiv ist, also umkehrbar.

Die Umkehrung einer streng monoton wachsenden (bzw. fallenden) Funktion ist wieder streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Als surjektive, streng monotone Funktion ist f^{-1} auch wieder stetig. ■

1.18. Beispiel

Da $f(x) := x^n$ für $x \geq 0$ stetig und streng monoton wachsend ist, ist $\sqrt[n]{x}$ ebenfalls stetig und streng monoton.

Eine Funktion $f = g + \mathrm{i}\,h : I \to \mathbb{C}$ heißt stetig in $x_0 \in I$, falls g und h beide in x_0 stetig sind. Man zeigt ganz leicht, dass folgende Aussagen über f äquivalent sind:

1. f ist stetig in x_0.
2. $\forall\, \varepsilon > 0\;\; \exists\, \delta > 0$, so dass für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
3. Für jede Folge (x_ν) in I, die gegen x_0 konvergiert, strebt $\big(f(x_\nu)\big)$ in $\mathbb{C}$ gegen $f(x_0)$.

Die Menge $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{C})$ aller stetigen Funktionen $f : I \to \mathbb{C}$ bildet einen komplexen Vektorraum. Außerdem gilt: Mit $f_1, f_2 \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{C})$ liegt auch $f_1 \cdot f_2$ in $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{C})$.

Die Stetigkeit kann problemlos auch für Funktionen formuliert werden, deren Definitionsbereich kein Intervall ist.

1.19. Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt

Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist auch $f(K)$ kompakt.

Beweis: Sei (y_ν) eine Folge von Punkten in $f(K)$. Dann gibt es zu jedem ν einen Punkt $x_\nu \in K$ mit $f(x_\nu) = y_\nu$. Weil K kompakt ist, besitzt die Folge (x_ν) eine konvergente Teilfolge (x_{ν_i}), ihr Grenzwert in K sei mit x_0 bezeichnet. Wegen der Stetigkeit von f konvergiert (y_{ν_i}) gegen $f(x_0)$, und dieser Punkt liegt in $f(K)$. ■

1.20. Folgerung 1

Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann nimmt jede stetige Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ auf K ihr Maximum und ihr Minimum an.

Beweis: $f(K) \subset \mathbb{R}$ ist kompakt, also insbesondere beschränkt. Demnach existieren $y_- := \inf f(K)$ und $y_+ := \sup f(K)$. Es gibt jeweils Folgen in $f(K)$, die gegen das Infimum bzw. das Supremum konvergieren. Weil $\mathbb{R} \setminus f(K)$ offen ist, müssen auch die Grenzwerte y_- und y_+ noch in $f(K)$ liegen. Also gibt es Punkte x_- und x_+ in K mit $f(x_-) = y_-$ und $f(x_+) = y_+$. ∎

Daraus ergibt sich

1.21. Folgerung 2

Sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ nimmt in I ihr Maximum und ihr Minimum an. Insbesondere ist sie auf I beschränkt.

Gelegentlich benötigt man den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit:

Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt ***gleichmäßig stetig***, falls sie folgende Eigenschaft besitzt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in M$ mit $|x - y| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

1.22. Beispiel

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear, $f(x) = ax$. Dann ist

$$|f(x) - f(y)| = |ax - ay| = |a| \cdot |x - y|.$$

Ist nun ein $\varepsilon > 0$ gegeben, so wähle man $\delta < \varepsilon/|a|$. Ist dann $|x - y| < \delta$, so ist

$$|f(x) - f(y)| = |a| \cdot |x - y| < |a| \cdot \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon,$$

also f gleichmäßig stetig.

Bei einer gleichmäßig stetigen Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ findet man zu allen ε-Schläuchen um beliebige Funktionswerte $f(\mathbf{x}_0)$ simultan ein passendes $\delta > 0$, so dass der Graph von f über der δ-Umgebung von $\mathbf{x}_0$ stets im ε-Schlauch bleibt. Insbesondere ist f dann stetig in $\mathbf{x}_0$, aber die Eigenschaft, dass man – unabhängig vom betrachteten Punkt – zu festem ε immer das gleiche δ wählen kann, ist stärker als die gewöhnliche Stetigkeit.

Es kommt allerdings immer auf den Definitionsbereich an. Die durch $f(x) := x^2$ definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht gleichmäßig stetig. Für festes $h > 0$ strebt nämlich $(x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2$ für $x \to \infty$ dem Betrag nach gegen Unendlich. Zu festem ε braucht man mit wachsendem x ein immer kleineres δ, so dass $|2xh + h^2|$ für $|h| < \delta$ unterhalb von ε bleibt. Schränkt man die Funktion $f(x) := x^2$ auf ein abgeschlossenes Intervall ein, so ist sie dort gleichmäßig stetig.

Nun gilt:

1.23. Satz

Ist $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f gleichmäßig stetig.

BEWEIS: Wir nehmen an, f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\nu \in \mathbb{N}$ Punkte $x_\nu, y_\nu \in K$ existieren, so dass gilt:

$$|x_\nu - y_\nu| < \frac{1}{\nu} \quad \text{und} \quad |f(x_\nu) - f(y_\nu)| \geq \varepsilon.$$

Da K kompakt ist, gibt es eine Teilfolge (x_{ν_i}) von (x_ν), die gegen einen Punkt $x_0 \in K$ konvergiert. Dann ist

$$|y_{\nu_i} - x_0| \leq |y_{\nu_i} - x_{\nu_i}| + |x_{\nu_i} - x_0|,$$

und die rechte Seite strebt gegen Null. Das bedeutet, dass auch (y_{ν_i}) gegen x_0 konvergiert.

Weil f stetig ist, konvergieren nun $f(x_{\nu_i})$ und $f(y_{\nu_i})$ beide gegen $f(x_0)$, und ihr Abstand strebt gegen Null. Das ist ein Widerspruch. ∎

2.2 Unendliche Reihen

Zur Motivation: Unendlich viele Summanden kann man nicht addieren, aber man kann eine Strecke von endlicher Länge aus unendlich vielen Teilstrecken zusammensetzen. Für den griechischen Philosophen Zenon (ca. 495-430 v.Chr.) war das ein unlösbarer Widerspruch, den er mit der Geschichte von Achilles und der Schildkröte deutlich zu machen versuchte.

Eines Tages wollte der sportliche Achilles mit der langsamen Schildkröte um die Wette laufen. Da er zehnmal so schnell wie die Schildkröte laufen konnte, ließ er ihr einen Vorsprung von 1000 Schritten. Diesen Vorsprung hatte er zwar schnell eingeholt, aber indessen war die Schildkröte 100 Schritte weitergekrochen. Nachdem Achilles diese 100 Schritte zurückgelegt hatte, war seine Gegnerin 10 Schritte vor ihm. Und so ging es weiter. Jedesmal, wenn der Held den letzten Vorsprung eingeholt hatte, war ihm die Schildkröte wieder um ein Zehntel dieses Betrages „davongeeilt“.

Die Logik, so meinte Zenon, zeige, dass Achilles seine Gegnerin nie hätte einholen können. Da der Augenschein das Gegenteil beweise, müsse dieser Augenschein trügen, jede Bewegung sei nur Illusion.

Die Strecke, die der sagenhafte Achilles zurücklegen musste, um die Schildkröte einzuholen, betrug

$$1000 + 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots = 1\,111.111\ldots \quad \text{Schritte.}$$

Wandelt man den periodischen Dezimalbruch $0.111\ldots$ – wie an der Schule gelernt – in einen gewöhnlichen Bruch B um, so ist $10B - B = 1$, also $B = 1/9$.

Es sei $a_0, a_1, a_2, \ldots$ eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen. Die Summe

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} a_n$$

bezeichnet man als die ***N-te Partialsumme*** der a_n, und die **Folge** (S_N) der Partialsummen nennt man eine ***unendliche Reihe***. Man schreibt die Folge der Partialsummen und – wenn er existiert – auch den Grenzwert dieser Folge in der Form

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \Big(= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n \Big)}$$

Die Reihe heißt ***konvergent*** (bzw. ***divergent***), falls die Folge (S_N) konvergent (bzw. divergent) ist.

Eine unendliche Reihe ist also zunächst nur eine spezielle Folge. Es wird sich aber herausstellen, dass für Reihen stärkere Hilfsmittel zur Verfügung stehen, als wir sie bisher für Folgen kennen.

Aus den Regeln für die Konvergenz von Folgen ergeben sich analoge Regeln für Reihen:

1. Konvergieren die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ gegen a bzw. b, so konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$, und zwar gegen $a + b$.

   Die Gleichung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ ist aber sinnlos und i.a. falsch, wenn über die Konvergenz noch nichts bekannt ist.

2. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ gegen a und ist c eine feste Zahl, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}(c \cdot a_n)$ gegen $c \cdot a$.

2.1. Beispiele

A. Sei $q \in \mathbb{R}$, $0 \le q < 1$. Dann ist $\sum_{n=0}^{N} q^n = (q^{N+1} - 1)/(q - 1)$, und die Folge $S_N = (q^{N+1} - 1)/(q - 1)$ konvergiert gegen $-1/(q - 1) = 1/(1 - q)$. Man bezeichnet die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ als ***geometrische Reihe***. Wir haben bewiesen:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad (\text{für } 0 \le q < 1).}$$

Im Falle $q = 1/2$ erhält man z.B.:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2, \qquad \text{also } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1.$$

Eine Anwendung ist die Behandlung periodischer Dezimalbrüche, z.B.

$$\begin{aligned} 0.3333\ldots &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n \\ &= 3 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1\right) = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

Besonders verblüffend ist dabei der folgende Fall:

$$0.99999\ldots = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{9}{10^n} = 9 \cdot \frac{1}{9} = \quad 1.$$

Man kann den Begriff der geometrischen Reihe übrigens auch ins Komplexe übertragen. Ist $z \in \mathbb{C}$, so ist

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{z^{N+1} - 1}{z - 1}\,.$$

Der Beweis geht genauso wie im Reellen, es werden nur elementare Rechenregeln verwendet. Ist nun $|z| < 1$, so strebt die Folge (z^{N+1}) gegen Null, denn es ist $|z^{N+1} - 0| = |z|^{N+1}$. Daraus folgt:

$$\text{Ist } z \in \mathbb{C} \text{ und } |z| < 1, \text{ so ist } \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\,.$$

B. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ wird als ***harmonische Reihe*** bezeichnet. Für die Partialsummen S_N mit $N = 2^k$ gilt folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} S_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{2^k} = 1 + k \cdot \frac{1}{2}\,, \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck wächst über alle Grenzen. Die harmonische Reihe divergiert also!

Ein **notwendiges Kriterium** für die Konvergenz einer Reihe ist schnell gefunden:

2.2. Satz

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, so muss (a_n) eine Nullfolge sein.

BEWEIS: Die Folgen S_N und $T_N := S_{N-1}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert, eine Zahl a. Aber dann konvergiert $a_N := S_N - T_N$ gegen $a - a = 0$. ∎

Dass dieses Kriterium nicht hinreicht, zeigt das Beispiel der harmonischen Reihe. Die Glieder der Reihe bilden eine Nullfolge, aber die Reihe divergiert. In einem Spezialfall kommt man allerdings fast mit dem notwendigen Kriterium aus:

2.3. Leibniz-Kriterium

*Es sei (a_n) eine **monoton fallende Nullfolge** reeller Zahlen. Dann konvergiert*

$$\text{die „alternierende Reihe“} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

BEWEIS: Aus den Voraussetzungen folgt sofort, dass stets $a_n \geq 0$ ist. Wir betrachten die Folgen $u_N := S_{2N-1}$ und $v_N := S_{2N}$. Dann ist

$$u_{N+1} = S_{2N+1} = S_{2N-1} + a_{2N} - a_{2N+1} \geq S_{2N-1} = u_N$$

und

$$v_{N+1} = S_{2N+2} = S_{2N} - a_{2N+1} + a_{2N+2} \leq S_{2N} = v_N.$$

Zusammen mit der Aussage $v_N = S_{2N} = S_{2N-1} + a_{2N} \geq S_{2N-1} = u_N$ ergibt sich die folgende Ungleichungskette:

$$\ldots \leq u_N \leq u_{N+1} \leq \ldots \leq v_{N+1} \leq v_N \leq \ldots$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz strebt also u_N gegen eine Zahl u und v_N gegen eine Zahl v. Da außerdem $v_N - u_N = a_{2N}$ gegen Null konvergiert, muss $u = v$ sein. Es ist klar, dass dann auch S_N gegen diese Zahl konvergiert. ∎

2.4. Beispiel

Die ***alternierende harmonische Reihe*** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot 1/n$ konvergiert! Über den Grenzwert können wir allerdings im Augenblick noch nichts aussagen.

Die Schwierigkeit bei den unendlichen Reihen besteht darin, dass man mit unendlichen Reihen nicht so wie mit endlichen Summen arbeiten darf. Aus dieser Schwierigkeit befreit uns das Cauchy'sche Konvergenzkriterium, das wir allerdings erst für Folgen beweisen wollen.

Wenn eine Folge konvergiert, dann rücken ihre Glieder immer näher aneinander. Wir wollen zeigen, dass auch die Umkehrung gilt.

2.5. Das Cauchy'sche Konvergenzkriterium

Eine Folge (a_n) konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für $n, m \geq n_0$ gilt.

Beweis: a) Sei (a_n) konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es ein n_0, so dass $|a_n - a| < \varepsilon/2$ für $n \geq n_0$ gilt. Dann folgt für $n, m \geq n_0$:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon.$$

b) Es sei das Kriterium erfüllt. Nun muss erst mal ein Grenzwert gefunden werden.

Wählt man ein n_0, so dass $|a_n - a_m| < 1$ für $n, m \geq n_0$ ist, so gibt es sicherlich ein $c > 0$, so dass $|a_n| < c$ für $n = 1, 2, 3, \ldots, n_0$ ist. Für $n \geq n_0$ ist dann $|a_n| = |(a_n - a_{n_0}) + a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < c + 1$. So sieht man, dass die Folge beschränkt ist. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt sie mindestens einen Häufungspunkt a.

Nun gibt es eine Teilfolge (a_{n_i}), die gegen a konvergiert. Wir zeigen, dass sogar die Folge (a_n) gegen a konvergiert. Ist nämlich ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es ein n_1 mit $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$ für $n, m \geq n_1$ und ein i mit $n_i > n_1$ und $|a_{n_i} - a| < \varepsilon/2$. Dann folgt für $n \geq n_1$:

$$|a - a_n| \leq |a - a_{n_i}| + |a_{n_i} - a_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

∎

Der Vorteil des Cauchy'schen Konvergenzkriteriums besteht darin, dass der Grenzwert nicht darin vorkommt (ähnlich wie beim Satz von der monotonen Konvergenz).

Das Kriterium wird selten in der Praxis benutzt. Bei theoretischen Untersuchungen stellt es jedoch ein wertvolles Hilfsmittel dar. Es gilt wörtlich genauso für komplexe Zahlenfolgen.

Um nun die Konvergenz von Reihen besser in den Griff zu bekommen, untersuchen wir die Bestandteile einer solchen Reihe etwas genauer:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{M} a_n + \sum_{n=M+1}^{\infty} a_n = S_N + Z_{N,M} + E_M.$$

Für großes N bestimmt der **Anfang** der Reihe, also die Partialsumme S_N, weitgehend den Wert der Reihe. Das **Ende** E_M sollte für großes M weitgehend vernachlässigbar sein, sonst kann die Reihe nicht konvergieren. Der **zentrale Teil** $Z_{N,M}$ scheint zunächst keine besondere Bedeutung zu haben. Tatsächlich entscheidet aber gerade dieser Mittelteil über die Konvergenz der Reihe. Und das Schöne ist: Es handelt sich nur um eine endliche Summe!

2.6. Satz (Cauchykriterium für Reihen)

Die Reihe (reeller oder komplexer Zahlen) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\left|\sum_{n=N_0+1}^{N} a_n\right| < \varepsilon$ für alle $N > N_0$ gilt.

BEWEIS: Wie üblich sei die N-te Partialsumme mit S_N bezeichnet. Dann ist

$$\sum_{n=N_0+1}^{N} a_n = S_N - S_{N_0}.$$

Das Cauchy-Kriterium für Folgen liefert nun auch den Satz für Reihen. ■

Definition

Eine Reihe (reeller oder komplexer Zahlen) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt ***absolut konvergent***, falls die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

2.7. Satz

Eine absolut konvergente Reihe konvergiert auch im gewöhnlichen Sinne.

Zum BEWEIS verwendet man das Cauchykriterium. Es ist

$$\Big|\sum_{n=N_0+1}^{N} a_n\Big| \le \sum_{n=N_0+1}^{N} |a_n|\,.$$

Konvergiert die Reihe der Absolutbeträge, so wird die rechte Seite bei großem N_0 beliebig klein, und das gilt dann erst recht für die linke Seite. ∎

Die alternierende harmonische Reihe zeigt, dass die Umkehrung dieses Satzes falsch ist. **Man beachte:** Unter dem Grenzwert einer absolut konvergenten Reihe versteht man immer den Grenzwert der Reihe im Sinne der gewöhnlichen Konvergenz.

Besonders häufig wird das folgende Vergleichskriterium benutzt:

2.8. Majorantenkriterium

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe nicht-negativer reeller Zahlen und (c_n) eine Folge reeller oder komplexer Zahlen, so dass $|c_n| \le a_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut!

BEWEIS: Wir können annehmen, dass $|c_n| \le a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist $\displaystyle\sum_{n=N_0+1}^{N} |c_n| \le \sum_{n=N_0+1}^{N} a_n$, für $N > N_0$. Für genügend großes N_0 wird die rechte Seite nach dem Cauchykriterium beliebig klein, also auch die linke Seite. ∎

Bemerkungen:

1. Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent und $|c_n| \ge a_n$ für alle n, so kann $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ zwar noch im gewöhnlichen Sinne, aber nicht mehr absolut konvergieren.

2. Sind $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $T = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei Reihen mit positiven Gliedern und $a_n \le b_n$ für fast alle n, so nennt man T eine ***Majorante*** von S, bzw. S eine ***Minorante*** von T.

Wenn nun eine Reihe nicht gerade alternierend ist und das Leibniz–Kriterium erfüllt, so wird man i.a. versuchen, die Konvergenz mit Hilfe des Majorantenkriteriums auf die absolute Konvergenz einer Vergleichsreihe zurückzuführen. Zur Feststellung der absoluten Konvergenz gibt es diverse Untersuchungsmethoden.

2.9. Quotientenkriterium

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen, fast alle a_n seien $\neq 0$.

Wenn es ein q mit $0 < q < 1$ gibt, so dass $|a_{n+1}/a_n| \le q$ für fast alle n gilt, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Wenn $|a_{n+1}/a_n| \ge 1$ für fast alle n gilt, dann divergiert die Reihe.

BEWEIS: Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, so dass gilt:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \le q \quad \text{für } n \ge n_0,$$

also $|a_{n_0+k}| \le q \cdot |a_{n_0+k-1}| \le \ldots \le q^k \cdot |a_{n_0}|$, für $k \in \mathbb{N}$.

Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cdot |a_{n_0}|$ eine Majorante der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n_0+n}$. Die erstere konvergiert, es handelt sich ja um eine geometrische Reihe. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert dann die zweite Reihe absolut, und damit auch die Ausgangsreihe, die lediglich ein paar Anfangsterme mehr besitzt.

Ist $a_{n+1} \ge a_n$ für genügend großes n, so bilden die Glieder der Reihe keine Nullfolge, und die Reihe kann nicht konvergieren. ∎

Bemerkung: Wenn die Folge $|a_{n+1}/a_n|$ gegen einen Grenzwert $a < 1$ konvergiert, dann kann man ein q mit $a < q < 1$ finden. Für genügend großes n ist dann $|a_{n+1}/a_n| \le q$ und es folgt, dass die Reihe absolut konvergiert.

2.10. Beispiele

A. Bei der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^2/2^n$ hilft das Quotientenkriterium: Für $n \ge 3$ ist

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^2 \cdot 2^n}{n^2 \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2,$$

und dieser Ausdruck konvergiert gegen $1/2$. Also ist die Reihe konvergent.

B. Wie steht es mit der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$? Der Quotient

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2$$

konvergiert gegen 1, also sagt hier das Quotientenkriterium nichts aus. Man kann aber wie folgt abschätzen:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \le 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{N} \le 2.$$

Die Folge der Partialsummen ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Den Grenzwert können wir hier leider nicht bestimmen.

Kann die Konvergenz einer Reihe nicht mit dem Quotientenkriterium entschieden werden, so kann unter Umständen das Wurzel-Kriterium weiterhelfen. Um dies zu verstehen, müssen wir etwas ausholen.

Definition

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen und $H(a_n)$ die Menge aller Häufungspunkte der Folge.

Ist (a_n) nach oben beschränkt und $H(a_n) \ne \varnothing$, so heißt $\overline{\lim}\, a_n := \sup H(a_n)$ der ***Limes superior*** der Folge.

Ist (a_n) nach unten beschränkt und $H(a_n) \ne \varnothing$, so heißt $\underline{\lim}\, a_n := \inf H(a_n)$ der ***Limes inferior*** der Folge (a_n).

2.11. Beispiel

Sei $a_n := 2 + 3(-1)^n$. Dann ist $\overline{\lim}\, a_n = 5$ und $\underline{\lim}\, a_n = -1$.

Ist (a_n) eine beschränkte Folge, so existieren $\overline{\lim}\, a_n$ und $\underline{\lim}\, a_n$. In diesem Falle ist (a_n) genau dann konvergent, wenn $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n$ ist. Der gemeinsame Wert ist dann auch der Limes der Folge.

Auch wenn $H(a_n) = \varnothing$ ist, kann man $\overline{\lim}\, a_n$ und $\underline{\lim}\, a_n$ definieren. Allerdings sind die Konventionen in der Literatur sehr uneinheitlich. Wir erweitern hier unsere Definition wie folgt: Ist (a_n) nach oben beschränkt und $H(a_n) = \varnothing$, so ist $\overline{\lim}\, a_n = -\infty$. Ist (a_n) nicht nach oben beschränkt, so existiert $\overline{\lim}\, a_n$ nicht. Analoges legt man für $\underline{\lim}\, a_n$ fest.

Man kann dann sagen: (a_n) konvergiert genau dann gegen a, wenn $\overline{\lim}\, a_n$ und $\underline{\lim}\, a_n$ existieren und beide gleich a sind.

2.12. Satz (Wurzelkriterium)

Es sei (a_n) eine Folge von positiven reellen Zahlen und $\alpha := \overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n}$.

Ist $\alpha < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Ist $\alpha \geq 1$, so divergiert sie.

Beweis: Ist $\alpha < 1$, so gibt es ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$, so dass $\sqrt[n]{a_n} < q$ für fast alle n ist. Dann ist die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ eine Majorante von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, und auch diese Reihe konvergiert.

Ist $\alpha \geq 1$, so gibt es eine Teilfolge von (a_n), die gegen eine Zahl $A \geq 1$ konvergiert. Damit kann (a_n) keine Nullfolge sein und die Reihe nicht konvergieren. ∎

2.13. Beispiel

Sei $a_n := \begin{cases} 2^{-k} & \text{für } n = 2k-1 \\ 3^{-k} & \text{für } n = 2k, \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

Wir untersuchen die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Für $n = 2k$ gilt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{-(k+1)}}{3^{-k}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^k \to \infty.$$

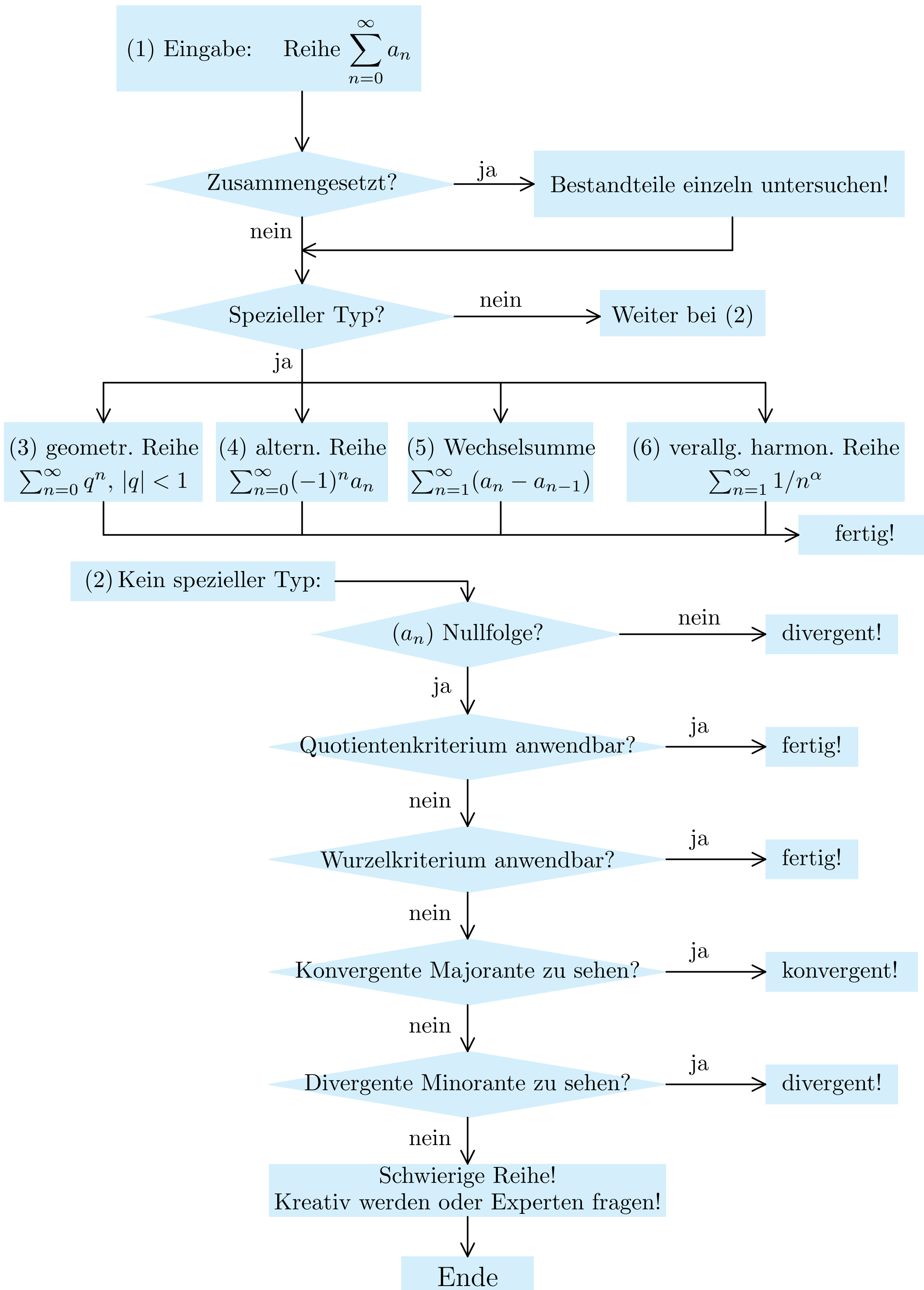
Also ist das Quotientenkriterium nicht anwendbar.

Wir versuchen es mit dem Wurzelkriterium. Es ist

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} (\sqrt{2})^{-(n+1)/n} \to (\sqrt{2})^{-1} & \text{für ungerades } n, \\ (\sqrt{3})^{-1} & \text{für gerades } n. \end{cases}$$

Also ist $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} = (\sqrt{2})^{-1} < 1$, und die Reihe konvergiert.

2.2.14. Zum Schluss ein Schema zur Untersuchung unendlicher Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:[1]



[1] Erläuterungen finden sich auf der nächsten Seite.

Erläuterungen zum Diagramm:

1. Eingabe: Vorgelegt sei eine unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Setzt sie sich aus mehreren Teilen zusammen (z.B. $\sum_n \big((1/2)^n + (1/3)^n\big)$), so untersucht man natürlich die einzelnen Teile separat. Als nächstes sollte man klären, ob ein spezieller Typ wie in (3), (4), (5) oder (6) vorliegt.

2. Liegt kein spezieller Typ vor, so wird die Untersuchung etwas mühsamer:

   - Bilden die Glieder (a_n) keine Nullfolge, so kann die Reihe nicht konvergieren. Dann braucht man nicht weiter zu machen.
   - Quotientenkriterium: Wenn die Quotienten $|a_{n+1}/a_n|$ gegen eine Zahl $q < 1$ konvergieren, so konvergiert auch die Reihe, ist $q > 1$, so divergiert sie. Über den Grenzwert weiß man dann noch nichts.
   - Manchmal hilft das Quotientenkriterium nicht weiter, wohl aber das Wurzelkriterium.
   - Hilft auch das Wurzelkriterium nicht weiter, so sollte man nach einer konvergenten Majorante suchen. Auch das liefert einen Konvergenzbeweis für die Ausgangsreihe.
   - Findet man keine Majorante, so sollte man schauen, ob es nicht eine divergente Minorante gibt. Die sichert immerhin die Divergenz.
   - Kommt man mit keiner der angesprochenen Methoden weiter, so wird es wirklich schwierig, aber nicht hoffnungslos. Wahrscheinlich braucht man raffinierte Tricks oder sehr viel tiefere Hilfsmittel.

3. Der einfachste spezielle Typ ist die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, mit $|q| < 1$. Sie konvergiert gegen $1/(1-q)$.

4. Ist (a_n) eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$. Über den Grenzwert wird allerdings nichts gesagt.

5. Eine unendliche Wechselsumme $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$ hat die Partialsumme $S_N = a_N - a_0$ und konvergiert daher gegen $\lim_{N\to\infty} a_N - a_0$.

6. Die verallgemeinerte harmonische Reihe hat die Gestalt $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$. Wir haben hier nur den Fall $\alpha = 1$ (Divergenz) und den Fall $\alpha = 2$ (Konvergenz) behandelt. Tatsächlich erhält man Konvergenz für jedes reelle $\alpha > 1$. Dazu muss man allerdings erst einmal beliebige reelle Exponenten einführen. Den Beweis liefern wir im 3. Kapitel in dem Abschnitt über uneigentliche Integrale.

2.15. Produktsatz für Reihen

Die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *seien absolut konvergent gegen* a *bzw.* b*. Für* $n \in \mathbb{N}_0$ *sei*

$$c_n := \sum_{i+j=n} a_i b_j = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0.$$

Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *absolut konvergent gegen* $a \cdot b$*.*

Beweis: Es konvergiert $A_N := \sum_{n=0}^{N} a_n$ gegen a und $B_N := \sum_{n=0}^{N} b_n$ gegen b. Wir setzen noch $C_N := \sum_{n=0}^{N} c_n$ und $a^* := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ ($< \infty$ wegen der absoluten Konvergenz).

Mit $\beta_N := B_N - b$ ist $B_N = b + \beta_N$, und es gilt:

$$\begin{aligned} C_N &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_N + \cdots + a_N b_0) \\ &= a_0 B_N + a_1 B_{N-1} + \cdots + a_N B_0 \\ &= a_0 (b + \beta_N) + \cdots + a_N (b + \beta_0) \\ &= A_N \cdot b + (a_0 \beta_N + \cdots + a_N \beta_0). \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass (C_N) gegen $a \cdot b$ konvergiert. Das ist sicher der Fall, wenn

$$\gamma_N := a_0 \beta_N + \cdots + a_N \beta_0$$

gegen Null konvergiert. Letzteres können wir folgendermaßen beweisen:

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen ein δ mit $0 < \delta < \varepsilon / 2a^*$. Es gibt dann ein N_0, so dass $|\beta_N| \le \delta$ für $N \ge N_0$ ist (denn $\beta_N = B_N - b$ konvergiert ja gegen 0). Dieses N_0 halten wir fest. Außerdem wählen wir ein $C > 0$, so dass $|\beta_N| \le C$ für alle N ist. Dann gilt für $N \ge N_0$:

$$\begin{aligned} |\gamma_N| &\le |\beta_0 a_N + \cdots + \beta_{N_0} a_{N-N_0}| + |\beta_{N_0+1} a_{N-N_0-1} + \cdots + \beta_N a_0| \\ &\le C \cdot (|a_N| + \cdots + |a_{N-N_0}|) + \delta \cdot a^* \\ &< C \cdot (|a_N| + \cdots + |a_{N-N_0}|) + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Der linke Summand wird bei festem N_0 und wachsendem N irgendwann kleiner als $\varepsilon/2$ (Cauchykriterium für die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_n a_n$). Also ist $|\gamma_N|$ bei hinreichend großem N kleiner als ε. Das war zu zeigen.

Für die absolute Konvergenz der Produktreihe benutzt man die Abschätzung

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \le \sum_{n=0}^{N} \sum_{i+j=n} |a_i| \cdot |b_j| \le \left(\sum_{i=0}^{N} |a_i| \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{N} |b_j| \right).$$

Die rechte Seite ist durch das Produkt der absoluten Reihen beschränkt. ∎

Bemerkung: Die Konvergenz würde natürlich auch schon aus dem kurzen Schlussteil des Beweises folgen. Der komplizierte Konvergenzbeweis am Anfang dient dazu, den genauen Grenzwert zu bestimmen.

Anhang:

Absolut konvergente Reihen verhalten sich sehr gutartig, was die Reihenfolge der Summation betrifft. Das zeigt der

2.16. Umordnungssatz

Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, etwa gegen A, so konvergiert auch jede Umordnung der Reihe gegen A.

Beweis: Die Summation möge bei 1 beginnen. Eine Umordnung der Reihe erreicht man mit Hilfe einer bijektiven Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Die umgeordnete Reihe ist dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der absoluten Konvergenz der Ausgangsreihe können wir ein $n_0 > 1$ finden, so dass $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| < \varepsilon/2$ und $|\sum_{n=1}^{n_0-1} a_n - A| < \varepsilon/2$ ist. Wählt man nun N so groß, dass

$$\{1, 2, \ldots, n_0 - 1\} \subset \{\tau(1), \ldots, \tau(N)\}$$

ist, so gilt für $M \geq N$:

$$\begin{aligned}
|\sum_{n=1}^{M} a_{\tau(n)} - A| &\leq |\sum_{n=1}^{M} a_{\tau(n)} - \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n| + |\sum_{n=1}^{n_0-1} a_n - A| \\
&\leq \sum_{n=n_0}^{max(\tau(1),\ldots,\tau(M))} |a_n| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Das zeigt, dass die umgeordnete Reihe gegen A konvergiert ∎

Bemerkung: Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, aber **nicht** absolut konvergent, so gibt es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ eine Umordnung der Reihe, die gegen x konvergiert.

Wir verzichten hier auf einen genauen Beweis dieser merkwürdigen Tatsache. Die Idee ist, zu vorgegebenem $x_0 > 0$ zunächst so viele positive Terme zu sammeln, dass deren Summe x_0 übersteigt. Danach addiert man wieder so viele negative Terme, dass die Gesamtsumme unterhalb von x_0 liegt, und so fährt man fort. Das Ganze ist möglich, weil die Reihe nicht absolut konvergiert. Als weitere Motivation geben wir ein Beispiel. Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots$$

konvergiert nach dem Leibniz–Kriterium gegen einen Grenzwert S, den wir im Augenblick noch nicht ermitteln können. Wir können schreiben:

$$S = 1 - \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) - \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\Big) - \ldots = 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} P_\nu,$$

wobei $P_\nu := \dfrac{1}{2\nu} - \dfrac{1}{2\nu + 1} > 0$ für alle ν ist. Insbesondere ist $S < 1 - P_1 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$.

Sortiert man die Reihe jetzt um zu

$$\Big((1 + \frac{1}{3}) - \frac{1}{2}\Big) + \Big((\frac{1}{5} + \frac{1}{7}) - \frac{1}{4}\Big) + \cdots = \sum_{\mu=1}^{\infty} Q_\mu,$$

mit $Q_\mu := \Big(\frac{1}{4\mu - 3} + \frac{1}{4\mu - 1}\Big) - \frac{1}{2\mu}$, so ist zunächst

$$\frac{1}{4\mu - 3} + \frac{1}{4\mu - 1} > \frac{1}{4\mu - 4} + \frac{1}{4\mu - 4} = \frac{2}{4(\mu - 1)} > \frac{1}{2\mu},$$

also $Q_\mu > 0$ und deshalb ein etwaiger Grenzwert der umsortierten Reihe mit Sicherheit $> Q_1 = (1 + 1/3) - 1/2 = 5/6$.

2.3 Potenzreihen

Wir wollen uns mit Folgen und Reihen von Funktionen beschäftigen. Ist eine Menge $M \subset \mathbb{C}$ und für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ eine reell- oder komplexwertige Funktion $f_\nu : M \to \mathbb{R}$ gegeben, so sprechen wir von einer ***Funktionenfolge*** auf M. Ein Beispiel wäre etwa die Folge (x^ν) auf dem Intervall $[0,1]$.

Ist nun (f_ν) eine Funktionenfolge auf M, so kann man daraus eine neue Funktionenfolge (F_N) auf M bilden, mit

$$F_N(z) := \sum_{\nu=0}^{N} f_\nu(z), \qquad \text{für } N \in \mathbb{N} \text{ und } z \in M,$$

oder kurz $F_N := \sum_{\nu=0}^{N} f_\nu$. Diese Konstruktion kennen wir aus der Theorie der Zahlenreihen, es handelt sich um Partialsummen einer Reihe. Also erklären wir eine ***Funktionenreihe*** $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ auf M als die Folge der Funktionen $F_N = \sum_{\nu=0}^{N} f_\nu$.

Zunächst sind das rein formale Vorgänge. Setzt man allerdings einen Punkt $z \in M$ in die Funktionen f_ν ein, so erhält man die Zahlenreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)$. Es liegt nahe, die Funktionenreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ konvergent zu nennen, wenn alle daraus durch Einsetzen eines Punktes $z \in M$ entstehenden Zahlenreihen konvergieren.

Definition

Die Funktionen-Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ heißt auf M ***punktweise*** (bzw. ***punktweise absolut***) ***konvergent***, wenn für jedes $z \in M$ die Zahlenreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)$ konvergiert (bzw. absolut konvergiert).

Ist die Funktionenreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ auf M punktweise konvergent, so wird durch

$$f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)$$

eine *Grenzfunktion* f auf M definiert.

3.1. Beispiel

Für $x \in [0,1]$ sei

$$f_\nu(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } \nu = 0, \\ x^\nu - x^{\nu-1} & \text{für } \nu \geq 1 \end{cases}$$

Dann konvergiert die Funktionenreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \big(x^\nu - x^{\nu-1}\big) = 1 + \lim_{N\to\infty} \big(x^N - 1\big) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Die Reihe ist punktweise konvergent, aber die Grenzfunktion ist nicht stetig, obwohl alle f_ν auf $[0,1]$ stetig sind.

Will man aus den Eigenschaften der Glieder einer Funktionenreihe auf Eigenschaften der Grenzfunktion schließen, so reicht die punktweise Konvergenz offensichtlich nicht aus. Wir müssen einen stärkeren Konvergenzbegriff suchen. Das richtige Konzept wird der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz sein, den wir im 3. Kapitel kennenlernen werden und der auch auf Funktionenfolgen angewandt werden kann. Da wir uns zunächst aber ausschließlich mit Reihen beschäftigen wollen, kommen wir mit einer einfacheren Methode aus.

Definition

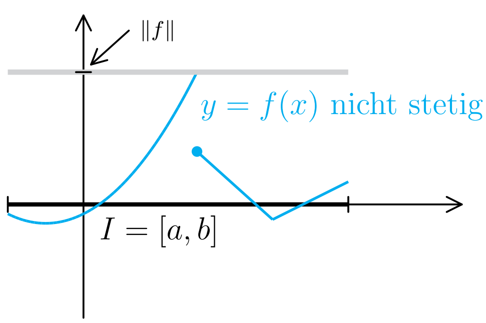
Es sei $M \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Menge, f eine reell- oder komplexwertige Funktion auf M. Ist f beschränkt, so versteht man unter der ***(Supremums-)Norm*** von f die Zahl

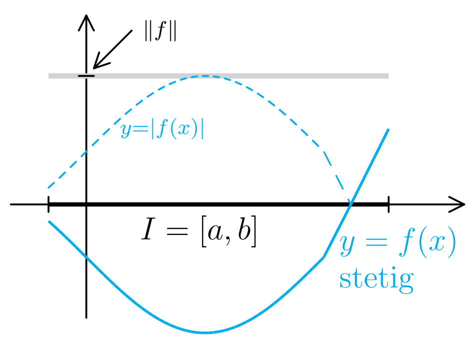
$$\boxed{\|f\| := \sup\{|f(z)| \,:\, z \in M\}.}$$

Ist f nicht beschränkt, so setzt man $\|f\| = \infty$.

Bemerkung: Ist $K \subset \mathbb{R}$ eine kompakte Menge, so ist jede stetige Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ beschränkt und daher $\|f\| < \infty$. Ist f auf einer (kompakten oder nicht kompakten) Menge M beschränkt, aber nicht stetig, so kann es durchaus sein, dass $|f|$ kein Maximum annimmt. Trotzdem ist auch in diesem Fall $0 \le \|f\| < \infty$.

Die Summe zweier beschränkter Funktionen ist wieder beschränkt. Das Produkt einer beschränkten Funktion mit einer komplexen Zahl ergibt wieder eine beschränkte Funktion.





Ist f eine beschränkte Funktion, so gilt:

1. $\|f\| = 0 \iff f = 0$,
2. $\|c \cdot f\| = |c| \cdot \|f\|$ für $c \in \mathbb{C}$,
3. Sind f und g beschränkt, so ist $\|f + g\| \le \|f\| + \|g\|$.

Die Eigenschaften leiten sich direkt aus den entsprechenden Eigenschaften der Betragsfunktion her.

Definition

Eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ von beschränkten Funktionen auf einer Menge $M \subset \mathbb{C}$ heißt ***normal konvergent***, falls die Zahlenreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \|f_\nu\|$ konvergiert.

Bemerkung: Eine normal konvergente Reihe von Funktionen auf M ist dort auch punktweise absolut konvergent, denn für jedes $z \in M$ und jedes $\nu \in \mathbb{N}$ ist $|f_\nu(z)| \leq \|f_\nu\|$. Nach dem Majorantenkriterium ist dann $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)$ für jedes $z \in M$ absolut konvergent.

3.2. Satz (über die Stetigkeit der Grenzfunktion)

Es seien eine beliebige Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ und stetige Funktionen $f_\nu : M \to \mathbb{C}$ gegeben. Wenn die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ auf M normal konvergiert, dann konvergiert sie punktweise gegen eine stetige Grenzfunktion.

Beweis: Es ist schon klar, dass die Reihe punktweise gegen eine Grenzfunktion f konvergiert. Alle Partialsummen $F_n := \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu$ sind stetige Funktionen auf M.

Nun sei $x_0 \in M$ und ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Aus der normalen Konvergenz der Funktionenreihe und dem Cauchykriterium für Reihen von Zahlen folgt:

Es gibt ein n_0, so dass $\sum_{\nu=n_0+1}^{n} \|f_\nu\| < \varepsilon/3$ für alle $n > n_0$ gilt.

Dann folgt:

$$|F_n(x) - F_{n_0}(x)| = \Big|\sum_{\nu=n_0+1}^{n} f_\nu(x)\Big| \leq \sum_{\nu=n_0+1}^{n} |f_\nu(x)| \leq \sum_{\nu=n_0+1}^{n} \|f_\nu\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für $n \geq n_0$ und **alle** $x \in M$.

Hält man ein beliebiges $x \in M$ fest, so strebt $F_n(x)$ für $n \to \infty$ gegen $f(x)$, also auch $|F_n(x) - F_{n_0}(x)|$ gegen $|f(x) - F_{n_0}(x)|$. Das bedeutet, dass die Ungleichung

$$|f(x) - F_{n_0}(x)| \leq \varepsilon/3$$

für jedes $x \in M$ erfüllt ist.

Weil F_{n_0} in x_0 stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|F_{n_0}(x) - F_{n_0}(x_0)| < \varepsilon/3$ für $x \in U_\delta(x_0) \cap M$ ist. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt: Für $|x - x_0| < \delta$ ist

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - F_{n_0}(x)| + |F_{n_0}(x) - F_{n_0}(x_0)| + |F_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass f in x_0 stetig ist. ∎

Der Satz bleibt auch richtig, wenn man Funktionen betrachtet, deren Definitionsbereich M eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist. Dazu müssen wir allerdingst erst einmal klären, wann solche Funktionen stetig sind.

Definition
Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge und $z_0 \in M$ ein Punkt. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ heißt ***stetig*** in z_0, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $z \in M$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt: $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Auch im Komplexen gilt das Folgenkriterium:

$f : M \to \mathbb{C}$ ist genau dann in $z_0 \in M$ stetig, wenn für jede Folge (z_n) in M mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$.

Damit (und mit den Grenzwertsätzen) sieht man sofort, dass die Funktionen $z \mapsto z^n$ und deshalb auch alle komplexen Polynome $p(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n$ stetige Funktionen sind.

Der Beweis des Satzes über die Stetigkeit der Grenzfunktion überträgt sich wörtlich auf den komplexen Fall. In der Praxis benutzt man meist das folgende einfache Kriterium:

3.3. Satz (Weierstraß–Kriterium)

Es sei $M \subset \mathbb{C}$, und es seien stetige Funktionen $f_\nu : M \to \mathbb{C}$ gegeben. Weiter sei $\sum_{\nu=0}^\infty a_\nu$ eine konvergente Reihe nicht-negativer reeller Zahlen, so dass gilt:

$$|f_\nu(z)| \le a_\nu \qquad \text{für } \textbf{alle } \nu \in \mathbb{N} \text{ und } z \in M.$$

Dann konvergiert $\sum_{\nu=0}^\infty f_\nu$ auf M normal gegen eine stetige Funktion.

BEWEIS: Aus der Voraussetzung folgt, dass die f_ν beschränkt sind. Mit Hilfe des Majorantenkriteriums ergibt sich außerdem, dass $\sum_{\nu=0}^\infty f_\nu$ auf M normal konvergiert. Dann ist aber klar. dass die Grenzfunktion stetig ist. ∎

Definition
Sei (c_n) eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen, $a \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$P(z) := \sum_{n=0}^\infty c_n (z-a)^n$$

eine ***Potenzreihe*** mit ***Entwicklungspunkt*** a. Die Zahlen c_n heißen die ***Koeffizienten*** der Potenzreihe.

Ist $a \in \mathbb{R}$ und sind alle Koeffizienten c_n reell, so spricht man von einer *reellen Potenzreihe*. Beschränkt man P dann auch noch auf einen Definitionsbereich in $\mathbb{R}$, so schreibt man $P(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n (x-a)^n$. Wir betrachten hier zwar vorwiegend komplexe Potenzreihen, aber der reelle Fall ist darin enthalten. Man beachte: $z \in \mathbb{C}$ ist genau dann reell, wenn $\overline{z} = z$ ist.

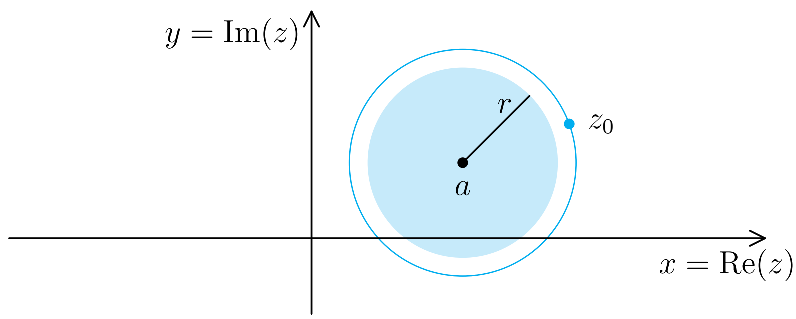
3.4. Über das Konvergenzverhalten von Potenzreihen

Die Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *konvergiere für ein* $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq a$.

Ist dann $0 < r < |z_0 - a|$, *so konvergiert* $P(z)$ *und auch die Reihe*

$$P'(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n(z-a)^{n-1}$$

auf der Kreisscheibe $D_r(a)$ *normal.*



BEWEIS: 1) Da $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0-a)^n$ nach Voraussetzung konvergiert, gibt es eine Konstante $M > 0$, so dass $|c_n(z_0-a)^n| \leq M$ für alle n ist. Ist $0 < r < |z_0 - a|$, so ist $q := r/|z_0 - a| < 1$. Für alle z mit $|z-a| \leq r$ gilt dann:

$$|c_n(z-a)^n| = |c_n(z_0-a)^n| \cdot \Big| \frac{z-a}{z_0-a} \Big|^n \leq M \cdot \left(\frac{r}{|z_0-a|} \right)^n = M \cdot q^n.$$

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} M\, q^n$ konvergiert. Mit dem Majorantenkriterium folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ für jedes $z \in D_r(a)$ absolut konvergiert, und mit dem Weierstraß–Kriterium folgt sogar, dass die Reihe auf $D_r(a)$ normal konvergiert.

2) Nach (1) ist $|n \cdot c_n(z-a)^{n-1}| \leq n \cdot M \cdot q^{n-1}$, und die Quotienten

$$\frac{(n+1) \cdot M \cdot q^n}{n \cdot M \cdot q^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \cdot q$$

konvergieren gegen $q < 1$.

Aus dem Quotientenkriterium folgt jetzt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot M \cdot q^{n-1}$ konvergiert, und wie oben kann man daraus schließen, dass $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot c_n(z-a)^{n-1}$ auf $D_r(a)$ normal konvergiert. ∎

Der vorliegende Satz hat weitreichende Konsequenzen.

Definition

Sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe. Die Zahl

$$R := \sup\{r \geq 0 \,:\, \exists\, z_0 \in \mathbb{C} \text{ mit } r = |z_0 - a|, \text{ so dass } P(z_0) \text{ konvergiert}\}$$

heißt ***Konvergenzradius*** der Potenzreihe. Die Fälle $R = 0$ und $R = +\infty$ sind dabei auch zugelassen!

Der Kreis um a mit Radius R heißt der ***Konvergenzkreis*** der Reihe. Im Falle einer reellen Potenzreihe nennt man $(a - R, a + R)$ das ***Konvergenzintervall***.

3.5. Konvergenzverhalten und Konvergenzradius

R sei der Konvergenzradius einer Potenzreihe $P(z)$ um a. Dann gilt:

1. *Für jedes r mit $0 < r < R$ konvergiert $P(z)$ auf $D_r(a)$ normal (und damit insbesondere punktweise absolut).*
2. *Ist $|z_0 - a| > R$, so divergiert $P(z)$ in $z = z_0$.*

BEWEIS: 1) haben wir schon gezeigt.

2) Wegen Satz 3.4 kann $P(z)$ in einem Punkt z_0 mit $|z_0 - a| > R$ nicht mehr konvergieren. ■

3.6. Stetigkeit von Potenzreihen

Hat die Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ den Konvergenzradius R, so ist die Grenzfunktion im Innern des Konvergenzkreises $D_R(a)$ stetig.

Der Beweis ist trivial. Das Verhalten auf dem Rand des Konvergenzkreises kann man nicht allgemein vorhersagen, man muss es von Fall zu Fall eigens untersuchen.

Zur Bestimmung des Konvergenzradius bestimmen gibt es in gewissen Fällen eine einfache Formel:

3.7. Quotientenformel für den Konvergenzradius

Sei (c_n) eine Folge von (reellen oder komplexen) Zahlen, $c_n \neq 0$ für fast alle n.

Wenn die Folge $|c_n/c_{n+1}|$ konvergiert, dann ist

$$R := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

der Konvergenzradius der Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

Man beachte, dass der Entwicklungspunkt a dabei keine Rolle spielt!

Beweis: Wir verwenden das Quotientenkriterium: Es ist

$$\left| \frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n} \right| = \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \cdot |z-a|,$$

und dieser Ausdruck konvergiert (für festes z) gegen $|z-a|/R$.

Ist $|z-a| < R$, also $|z-a|/R < 1$, so konvergiert die Reihe. Ist $|z-a| > R$, so divergiert sie. Also muss R der Konvergenzradius sein! ∎

3.8. Beispiele

A. Sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Dann ist $a = 0$ und $c_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das ergibt den Konvergenzradius $R = 1$.

Für $|z| < 1$ konvergiert die Reihe gegen $f(z) = 1/(1-z)$. Da alle Koeffizienten reell sind, kann man die Reihe auch reell auffassen. Tatsächlich nimmt die Grenzfunktion dann auf dem Konvergenzintervall $(-1, 1)$ nur reelle Werte an. An den Randpunkten $x = -1$ und $x = +1$ divergiert die Reihe.

B. Sei $P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$. Hier ist $a = 0$ und $c_n = 1/n$.

Da $c_n/c_{n+1} = (n+1)/n$ gegen 1 konvergiert, ist $R = 1$. An den Rändern des Konvergenzintervalls ist das Verhalten diesmal unterschiedlich:

Die harmonische Reihe $P(1) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergiert, die alternierende harmonische Reihe $P(-1) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot 1/n$ konvergiert.

C. Wir betrachten die reelle Potenzreihe

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},$$

mit dem Entwicklungspunkt $a = 0$ und den Koeffizienten

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k & \text{falls } n = 2k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir können die Formel für den Konvergenzradius nicht benutzen, aber da es sich um eine geometrische Reihe handelt, können wir direkt sehen, dass $R = 1$ ist. Als Grenzfunktion ergibt sich

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}.$$

Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, obwohl die Potenzreihe nur auf $(-1, 1)$ konvergiert.

Eine allgemein gültige Berechnungsmethode für den Konvergenzradius liefert der folgende Satz.

3.9. Formel von Hadamard

Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* R, *und* $\gamma := \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}$.

1. *Ist* γ *eine positive reelle Zahl, so ist* $R = 1/\gamma$.
2. *Ist* $\gamma = 0$, *so ist* $R = +\infty$.
3. *Ist* $\gamma = +\infty$, *so ist* $R = 0$.

BEWEIS: Es sei $z \in \mathbb{C}$ ein fester Punkt $\neq a$. Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe mit Hilfe des Wurzelkriteriums. Dazu sei $a_n := c_n(z-a)^n$ und $\alpha := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dann ist $\alpha = |z-a| \cdot \gamma$.

Sei zunächst $0 < \gamma < +\infty$, also auch $0 < \alpha < +\infty$. Die Reihe konvergiert in z, wenn $\alpha < 1$ ist, und sie divergiert, wenn $\alpha \geq 1$ ist. Außerdem gilt:

$$\alpha < 1 \iff |z-a| < 1/\gamma.$$

Daher ist in diesem Fall $R = 1/\gamma$.

Ist $\gamma = 0$, so muss für jedes $z \neq a$ auch $\alpha = 0$ sein, und die Reihe konvergiert deshalb für jedes $z \in \mathbb{C}$.

Ist $\gamma = +\infty$, so ist für jedes $z \neq a$ auch $\alpha = +\infty$, also (a_n) keine Nullfolge. Das bedeutet, dass die Reihe für jedes $z \neq a$ divergiert. ■

Wir kommen nun zu einem besonders wichtigen Beispiel.

Sei $z \neq 0$ eine beliebige komplexe Zahl und $c_n := z^n/n!$. Dann ist

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{|z|^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot |z|^n} = \frac{|z|}{n+1}.$$

Dieser Ausdruck konvergiert gegen Null. Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut (für $z \neq 0$ nach dem Quotientenkriterium und für $z = 0$ trivialerweise). Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$\boxed{\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

nennt man die ***(komplexe) Exponentialfunktion***. Speziell ist $\exp(0) = 1$. Der Wert $\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$ ist eine reelle Zahl, die wir jetzt ermitteln wollen.

Wir wissen, dass die Folge $a_n := (1 + 1/n)^n$ monoton wachsend gegen die Euler'sche Zahl e konvergiert. Nach der binomischen Formel ist außerdem

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{(n-k+1)\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \exp(1). \end{aligned}$$

Also ist $e = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \exp(1)$.

Nun wenden wir einen kleinen Trick an! Ist $m \geq 2$ irgend eine **feste** natürliche Zahl und $n > m$, so gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} \\ &\geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite strebt (bei festem m) für $n \to \infty$ gegen $\sum_{k=0}^{m} 1/k!$. Also ist auch $e \geq \sum_{k=0}^{m} 1/k!$, für jedes $m \geq 2$. Nun lassen wir m gegen Unendlich gehen und erhalten die Ungleichung $e \geq \exp(1)$. Zusammen mit der weiter oben gewonnenen Abschätzung ergibt das die Beziehung

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \exp(1).}$$

3.10. Eigenschaften der Exponentialfunktion

1. $\exp(0) = 1$ *und* $\exp(1) = e$.
2. $\exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w)$ *für alle* $z, w \in \mathbb{C}$ *(Additionstheorem).*
3. *Es ist* $\exp(z) \neq 0$ *und* $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.
4. *Es ist* $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ *für* $z \in \mathbb{C}$.

Beweis: 1) wurde schon gezeigt.

2) Wir benutzen die absolute Konvergenz der Exponentialreihe und den Produktsatz für Reihen. Danach ist

$$\exp(z)\cdot\exp(w) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{j!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} \frac{z^i \cdot w^j}{i!j!}.$$

Andererseits ist

$$\frac{1}{n!}\cdot(z+w)^n = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}z^i w^{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{n!i!(n-i)!}z^i w^{n-i} = \sum_{i+j=n}\frac{1}{i!j!}z^i w^j.$$

Somit ist $\exp(z)\cdot\exp(w) = \exp(z+w)$.

3) Es ist $1 = \exp(0) = \exp(z+(-z)) = \exp(z)\cdot\exp(-z)$. Damit ist $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$.

4) Ist $S_N(z)$ die N-te Partialsumme der Exponentialreihe, so ist offensichtlich $S_N(\overline{z}) = \overline{S_N(z)}$. Diese Beziehung bleibt erhalten, wenn man N gegen Unendlich gehen lässt. ∎

3.11. Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion

Die reelle Exponentialfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und hat folgende Eigenschaften:

1. *Es ist $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*
2. *Für $x > 0$ ist $\exp(x) > 1$ und $\lim_{x\to+\infty}\exp(x) = +\infty$.*
3. *Für $x < 0$ ist $0 < \exp(x) < 1$ und $\lim_{x\to-\infty}\exp(x) = 0$.*
4. *$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ist streng monoton wachsend.*
5. *Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\exp(n) = e^n$ und $\exp(1/n) = \sqrt[n]{e}$.*

Beweis: 1) Da exp stetig, $\exp(0) = 1 > 0$ und $\exp(x) \neq 0$ für alle x ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

2) Ist $x > 0$, so ist $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + \cdots > 1 + x$. Also ist $\exp(x) > 1$, und für $x \to +\infty$ wächst $\exp(x)$ über alle Grenzen.

3) Ist $x < 0$, so ist $-x > 0$ und $\exp(-x) > 1$, also $\exp(x) < 1$. Wegen (2) ist klar, dass $\exp(x)$ für $x \to -\infty$ gegen Null konvergiert.

4) Ist $x_1 < x_2$, so ist $x_2 = x_1 + h$, mit $h > 0$, und es folgt:

$$\exp(x_2) = \exp(x_1)\cdot\exp(h) > \exp(x_1), \text{ weil } \exp(h) > 1 \text{ ist.}$$

Das ergibt die strenge Monotonie.

5) Es ist $\exp(n) = \exp(1+1+\cdots+1) = \exp(1)^n = e^n$, und

$$e = \exp(1) = \exp(n\cdot\frac{1}{n}) = \exp(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}) = \exp(\frac{1}{n})^n,$$

also $\exp(1/n) = \sqrt[n]{e}$. ∎

Ist $x = p/q$ eine rationale Zahl, so ist $\exp(x) = e^{p/q} = \sqrt[q]{e^p}$. Strebt eine Folge von rationalen Zahlen (x_n) gegen eine reelle Zahl x_0, so strebt auch $\exp(x_n)$ gegen $\exp(x_0)$. Deshalb schreiben wir auch e^x an Stelle von $\exp(x)$.

3.12. Beispiel

Weil die (komplexe) Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert, ist

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0.$$

Diese Tatsache können wir an anderer Stelle gut verwenden:

Sei $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$. In diesem Falle ist **nicht** etwa $c_n = (-1)^n/(2n)!$, sondern

$$c_{2k} = (-1)^k/(2k)! \quad \text{und} \quad c_{2k+1} = 0.$$

Das Quotientenkriterium kann auf diese Reihe nicht angewandt werden. Aber es ist

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \begin{cases} 0 & \text{für ungerades } n, \\ \sqrt[2k]{\big((2k)!\big)^{-1}} & \text{für } n = 2k. \end{cases}$$

Daraus folgt $\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$, und der Konvergenzradius ist $R = +\infty$.

2.4 Elementare Funktionen

Wir haben im vorigen Abschnitt schon die Exponentialfunktion kennengelernt.

4.1. Satz

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *ist bijektiv.*

Beweis: Wegen der strengen Monotonie ist exp injektiv. Weil $e = \exp(1) \geq 2$ ist, nimmt $\exp(n)$ beliebig große und $\exp(-n)$ beliebig kleine positive Werte an. Aus dem Zwischenwertsatz folgt dann die Surjektivität. ∎

Definition

Die auf $\mathbb{R}_+$ definierte stetige Umkehrfunktion der Exponentialfunktion heißt ***(natürlicher) Logarithmus*** und wird mit $\ln(x)$ bezeichnet.

4.2. Eigenschaften des Logarithmus

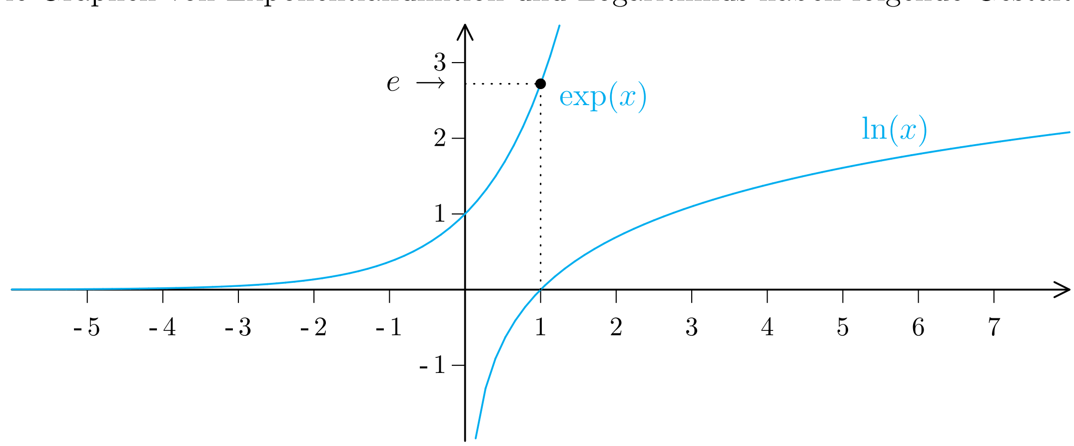
1. $\ln(1) = 0$
2. *Für* $x, y > 0$ *ist* $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$.
3. $\ln(x) > 0$ *für* $x > 1$, *und* $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
4. $\ln(x) < 0$ *für* $0 < x < 1$, *und* $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.

Beweis: 1) Klar!

2) Es ist $\exp(\ln(x)+\ln(y)) = \exp(\ln(x))\cdot\exp(\ln(y)) = x\cdot y = \exp(\ln(x\cdot y))$. Daraus folgt die Behauptung.

3) und 4) können ebenfalls aus den entsprechenden Eigenschaften der Exponentialfunktion hergeleitet werden. ∎

Die Graphen von Exponentialfunktion und Logarithmus haben folgende Gestalt:



Definition

Sei $a > 0$. Die ***Exponentialfunktion zur Basis*** a ist die Funktion

$$\boxed{a^x := \exp(x \cdot \ln(a)).}$$

Die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\exp_a(x) := \exp(x \cdot \ln(a))$ ist stetig, mit $\exp_a(0) = 1$, $\exp_a(1) = a$ und $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$. Genau wie bei exp folgt:

$$\exp_a(n) = a^n \quad \text{und} \quad \exp_a(1/n) = \sqrt[n]{a}.$$

Für eine rationale Zahl $x = p/q$ ist also $a^x = \sqrt[q]{a^p}$. Das rechtfertigt die Schreibweise a^x an Stelle von $\exp_a(x)$.

Für das Rechnen mit allgemeinen Potenzen a^x (für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$) gelten damit folgende Regeln:

1. $\boxed{a^0 = 1}$ und $\boxed{a^{x+y} = a^x \cdot a^y.}$

2. $\boxed{(a^x)^y = a^{xy}.}$

Zum Beweis von (2): Es ist $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$, also

$$\begin{aligned}(a^x)^y &= \exp[y \cdot \ln(a^x)] \\ &= \exp(xy \cdot \ln(a)) \;=\; a^{xy}.\end{aligned}$$

4.3. Satz

Ist $a > 1$, so ist die Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$ streng monoton wachsend. Im Falle $a < 1$ ist sie streng monoton fallend.

Beweis: Sei $h > 0$. Dann ist $a^{x+h} = a^x \cdot a^h$. Außerdem ist $\ln(a) > 0$ für $a > 1$ und < 0 für $a < 1$, also $a^h = \exp(h \cdot \ln a) > 1$, wenn $a > 1$ ist, und < 1, wenn $a < 1$ ist. Daraus folgt die Monotonie. ∎

In beiden Fällen ist $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ bijektiv.

Definition

Unter dem ***Logarithmus zur Basis*** a versteht man die Umkehrfunktion $\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ zur Exponentialfunktion zur Basis a.

Der Logarithmus zur Basis a verhält sich analog zum natürlichen Logarithmus $\ln = \log_e$. Für Rechenzwecke benutzte man früher die ***Briggs'schen Logarithmen*** $\lg = \log_{10}$. Dazu wurde eine beliebige reelle Zahl x in der Form $x = x_0 \cdot 10^k$ geschrieben, mit $1 \le x_0 < 10$. Dann ist $\lg(x) = k + \lg(x_0)$. Die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 wurden tabelliert.

Ist $z = a + \mathrm{i}\, b$ eine komplexe Zahl, so ist $\exp(z) = e^a \cdot \exp(\mathrm{i}\, b)$. Zum Verständnis der komplexen Exponentialfunktion reicht es also im Prinzip, die Funktion $t \mapsto \exp(\mathrm{i}\, t)$ zu untersuchen.

Der Schlüssel zu allem ist die folgende Feststellung:

$$|\exp(\mathrm{i}\, t)|^2 = \exp(\mathrm{i}\, t) \cdot \exp(-\mathrm{i}\, t) = \exp(\mathrm{i}\, t - \mathrm{i}\, t) = \exp(0) = 1.$$

Die komplexen Zahlen $\exp(\mathrm{i}\, t)$ liegen also alle auf dem Rand des Einheitskreises.

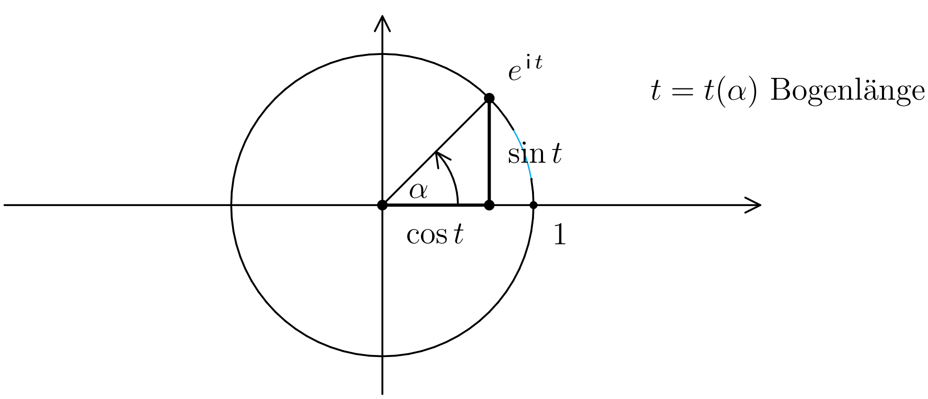
Definition

Die Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (***Sinus*** und ***Cosinus***) werden definiert durch

$$\boxed{\exp(\mathrm{i}\, t) = \cos t + \mathrm{i}\, \sin t.}$$

Man nennt dies die ***Euler'sche Formel***.

Man beachte, dass wir hier Cosinus und Sinus als Realteil und Imaginärteil von $\exp(\mathrm{i}\, t)$ **definiert** haben. In der Literatur werden sie oftmals auf anderem Wege eingeführt (z.B. durch ihre Reihendarstellungen), und dann kann die Euler'sche Formel als Satz **bewiesen** werden.



Aus der Euler'schen Formel und den Beziehungen

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}(z - \overline{z})$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{1}{2}(\exp(\mathrm{i}\,t) + \exp(-\mathrm{i}\,t)) \\ \text{und} \quad \sin t &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\exp(\mathrm{i}\,t) - \exp(-\mathrm{i}\,t)). \end{aligned}$$

Beide Funktionen sind stetig, und es ist

$$\cos(-t) = \cos t, \quad \sin(-t) = -\sin t, \quad \sin(0) = 0 \text{ und } \cos(0) = 1.$$

Außerdem gilt:

4.4. Satz

1. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$,
2. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ *(erstes* ***Additionstheorem****),*
3. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ *(zweites* ***Additionstheorem****).*

Beweis: 1) folgt aus der Beziehung $|a + \mathrm{i}\,b|^2 = a^2 + b^2$ und der Gleichung $|\exp(\mathrm{i}\,t)|^2 = 1$.

2) und 3) ergeben sich aus dem Additionstheorem der Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + \mathrm{i}\sin(x+y) &= \exp(\mathrm{i}\,(x+y)) = \exp(\mathrm{i}\,x + \mathrm{i}\,y) \\ &= \exp(\mathrm{i}\,x)\cdot\exp(\mathrm{i}\,y) \\ &= (\cos x + \mathrm{i}\sin x)\cdot(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \\ &= (\cos x\cos y - \sin x \sin y) \\ &\quad + \mathrm{i}\,(\sin x \cos y + \cos x \sin y). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die gewünschten Formeln. ∎

4.5. Folgerung

Es ist $\cos x - \cos y = -2\sin\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big)\sin\big(\dfrac{x-y}{2}\big).$

Beweis: Sei $u := (x+y)/2$ und $v := (x-y)/2$. Dann ist $u + v = x$ und $u - v = y$. Die Anwendung des Additionstheorems für den Cosinus ergibt die Gleichung $\cos(u+v) - \cos(u-v) = -2\sin u \sin v$, und damit die Behauptung. ∎

Um mehr über Sinus und Cosinus herauszubekommen, benötigen wir die Reihenentwicklungen. Es ist $e^{\mathrm{i}\,t} = \sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{i}\,t)^n/n!$ und

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{2N}\frac{(\mathrm{i}\,t)^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{N}\frac{(\mathrm{i}\,t)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{N-1}\frac{(\mathrm{i}\,t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{N}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{i}\cdot\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Da eine komplexe Folge genau dann konvergiert, wenn Realteil und Imaginärteil konvergieren, folgt:

$$\begin{aligned} \sin t &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} \pm \dots \\ \text{und} \qquad \cos t &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} \pm \dots . \end{aligned}$$

Das ergibt sich aus der Exponentialreihe und deren absoluter Konvergenz, unter Berücksichtigung der Gleichungen $\mathrm{i}^{2k} = (-1)^k$ und $\mathrm{i}^{2k+1} = \mathrm{i} \cdot (-1)^k$. Nun folgt:

4.6. Satz

Sinus und Cosinus sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, und für $0 < x \le 2$ ist

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \quad \textit{und} \quad 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Insbesondere ist in diesem Bereich $\sin x > 0$.

Beweis: Die Stetigkeit ist klar. Die Differenzen zweier aufeinanderfolgender Reihenglieder haben bei Sinus und Cosinus die Gestalt

$$D_n(x) := \frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} = \frac{x^n}{n!}\left(1 - \frac{x^2}{(n+1)(n+2)}\right).$$

Für $n \ge 1$ und $0 < x \le 2$ ist

$$0 < \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} \le \frac{4}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3} < 1$$

und daher $D_n(x) > 0$. Das bedeutet, dass die Absolutbeträge der Reihenglieder streng monoton fallende Nullfolgen bilden. Es handelt sich also um Leibniz-Reihen.

Aus der Beziehung

$$\sin x = x - \sum_{k=1}^{\infty} D_{4k-1}(x) = (x - \frac{x^3}{6}) + \sum_{k=1}^{\infty} D_{4k+1}(x)$$

folgt die Abschätzung für den Sinus. Aus der Beziehung

$$\cos x = (1 - \frac{x^2}{2}) + \sum_{k=1}^{\infty} D_{4k}(x) = (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}) - \sum_{k=1}^{\infty} D_{4k+2}(x)$$

folgt die Abschätzung für den Cosinus.

Außerdem ist $0 < x - x^3/6 < \sin x < x$ für $0 < x \le 2$. ∎

4.7. Folgerung

Es ist $\cos(2) < 0$*, und für* $0 \le x \le 2$ *ist* $\cos x$ *streng monoton fallend.*

Beweis: Sei $0 < x_1 < x_2 \le 2$. Dann ist $0 < \dfrac{x_1 + x_2}{2} \le 2$ und $0 < \dfrac{x_2 - x_1}{2} \le 1$, also

$$\sin\Bigl(\frac{x_1 + x_2}{2}\Bigr) > 0 \quad \text{und} \quad \sin\Bigl(\frac{x_2 - x_1}{2}\Bigr) > 0.$$

Daraus folgt:

$$\cos(x_2) - \cos(x_1) = -2\sin\Bigl(\frac{x_1 + x_2}{2}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{x_2 - x_1}{2}\Bigr) < 0,$$

also $\cos x_2 < \cos x_1$. Außerdem ist $\cos(2) < 1 - 2(1 - 1/3) = 1 - 4/3 = -1/3 < 0$. ∎

Da $\cos(0) > 0$ und $\cos(2) < 0$ ist, muss es nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle des Cosinus zwischen 0 und 2 geben. Wegen der strengen Monotonie ist diese Nullstelle eindeutig bestimmt.

Definition

Die Zahl π wird dadurch charakterisiert, dass $\pi/2$ die eindeutig bestimmte Nullstelle von $\cos x$ zwischen 0 und 2 ist.

Tatsächlich ist $\pi = 3.141592653\ldots$, also $\pi/2 \approx 1.570796$.

Wir haben nun $\cos(\pi/2) = 0$ und $\sin(\pi/2) = 1$. Schreiben wir $e^{\mathrm{i}\,t}$ an Stelle von $\exp(\mathrm{i}\,t)$, so folgt:

4.8. Satz

$$e^{\mathrm{i}\,\pi/2} = \mathrm{i}\,, \quad e^{\mathrm{i}\,\pi} = -1, \quad e^{3\pi\,\mathrm{i}\,/2} = -\,\mathrm{i} \;\; \textit{und} \; e^{2\pi\,\mathrm{i}} = 1.$$

Beweis: Die erste Aussage ergibt sich aus den Werten für sin und cos bei $\pi/2$. Die weiteren Aussagen ergeben sich aus $\mathrm{i}^{\,2} = -1$, $\mathrm{i}^{\,3} = -\,\mathrm{i}$ und $\mathrm{i}^{\,4} = 1$. ∎

4.9. Folgerung 1

Sinus und Cosinus sind periodisch mit Periode 2π*. Außerdem ist*

$$\cos x = \sin\bigl(\frac{\pi}{2} - x\bigr) \quad \textit{und} \quad \sin x = \cos\bigl(\frac{\pi}{2} - x\bigr).$$

Beweis: Zur Erinnerung: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt ***periodisch*** mit Periode p, falls $f(x + p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Wegen $e^{2\pi \mathrm{i}} = 1$ ist $\cos(2\pi) = 1 = \cos(0)$ und $\sin(2\pi) = 0 = \sin(0)$. Die Periodizität von sin und cos folgt nun aus den Additionstheoremen, z.B. ist

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \cos(2\pi) - \sin x \sin(2\pi) = \cos x.$$

Auch die zusätzlichen Formeln ergeben sich aus den Additionstheoremen. ∎

4.10. Folgerung 2

Es ist

$$\sin x = 0 \iff x = k\,\pi \text{ für } k \in \mathbb{Z},$$
$$\cos x = 0 \iff x = (k + \frac{1}{2})\,\pi \text{ für } k \in \mathbb{Z}.$$

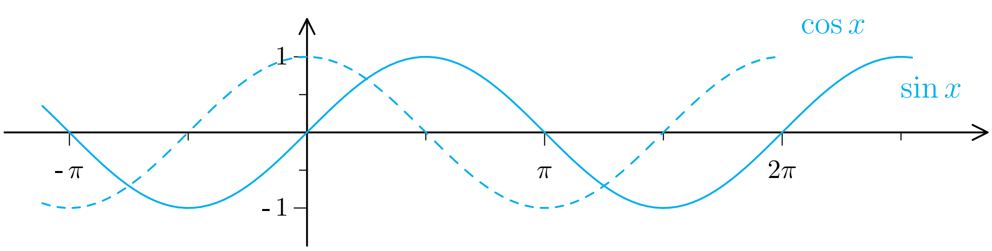
Beweis: Es ist $\sin(\pi) = \sin(2\pi) = 0$, also auch $\sin(k\,\pi) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Für $0 < x < \pi/2$ ist $\sin x > 0$ und $\cos x > 0$. Für $\pi/2 < x < \pi$ ist $\sin x = \sin(\pi/2 - (\pi/2 - x)) = \cos(\pi/2 - x) = \cos(x - \pi/2) > 0$. Schließlich ist $\sin(\pi/2) = 1$. Also gibt es keine Nullstellen für $0 < x < \pi$. Aus dem Additionstheorem folgt, dass $\sin(\pi + x) = -\sin x$ ist. Also gibt es auch keine Nullstelle für $\pi < x < 2\pi$.

Die Nullstellen des Cosinus ergeben sich aus $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$. ∎

4.11. Folgerung 3

*2π ist die **kleinste** positive Periode von Sinus und Cosinus.*

Beweis: Sei $p > 0$ die kleinste Periode des Sinus. Dann ist $\sin p = \sin(0) = 0$, also $p = k \cdot \pi$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Weil $\sin(\pi/2) = 1$ und $\sin(\pi/2 + \pi) = -\sin(\pi/2) = -1$ ist, kommt $k = 1$ nicht in Frage. Es muss $p = 2\pi$ sein. ∎



Definition

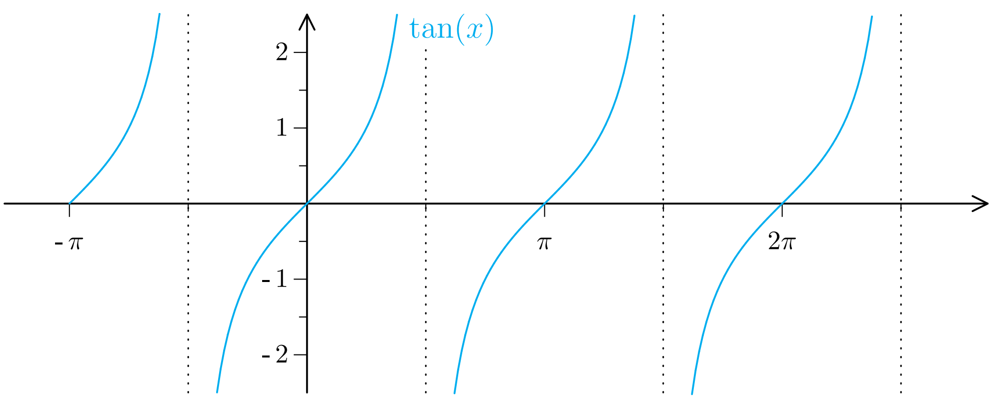
1. Für $x \neq (k + \frac{1}{2})\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sei $\boxed{\tan x := \dfrac{\sin x}{\cos x}}$ (***Tangens***).

2. Für $x \neq k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sei $\boxed{\cot x := \dfrac{\cos x}{\sin x}}$ (***Cotangens***).

4.12. Eigenschaften des Tangens

1. $\tan(0) = 0$ *und* $\tan x > 0$ *für* $0 < x < \pi/2$.
2. $\tan x \to +\infty$ *für* $x \to \pi/2$, $x < \pi/2$.
3. $\tan(-x) = -\tan x$ *für* $0 < x < \pi/2$.
4. *Der Tangens ist periodisch, mit Periode* π.

BEWEIS: 1), 2) und 3) folgen sofort aus den Eigenschaften von sin und cos. Zu 4): Es ist $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ und $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$. ∎



Weil $\cot(x) = \tan(\pi/2 - x)$ ist, erhält man den Graphen des Cotangens aus dem des Tangens durch Spiegelung an der Geraden $x = \pi/4$.

Definition

Die auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$$\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \text{und} \quad \cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

heißen ***Sinus hyperbolicus*** und ***Cosinus hyperbolicus***.

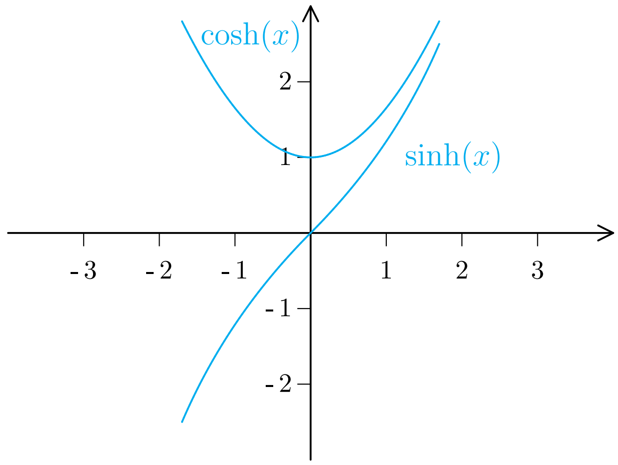
Offensichtlich ist $\cosh x$ eine gerade und $\sinh x$ eine ungerade Funktion. Weiter gilt:

$$\cosh(0) = 1 \text{ und } \lim_{x\to-\infty} \cosh x = \lim_{x\to+\infty} \cosh(x) = +\infty,$$

sowie

$$\sinh(0) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty \text{ und } \lim_{x\to+\infty} \sinh(x) = +\infty.$$

Außerdem ist $\sinh x < \cosh x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Graphen sehen also folgendermaßen aus:



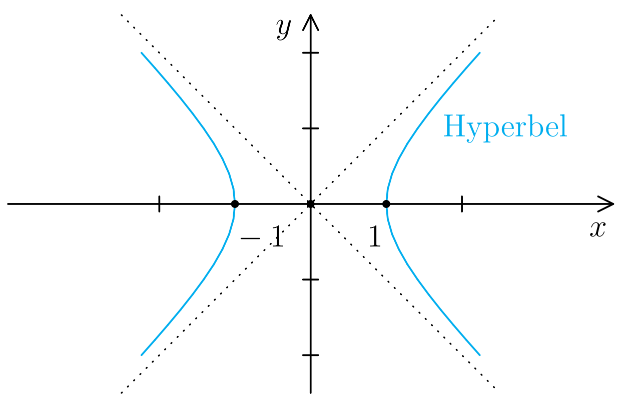
Es ist

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}\left[e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2\right] = 1$$

für alle x. Deshalb wird durch $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ die ***Hyperbel***

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$$

parametrisiert.



4.13. Die Parametrisierung des Einheitskreises

Durch $t \mapsto e^{\,\mathrm{i}\,t}$ wird das Intervall $[0, 2\pi)$ bijektiv auf die Kreislinie

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$$

abgebildet.

Beweis: 1) Injektivität: Annahme, es gibt $0 \leq s < t < 2\pi$ mit $e^{\,\mathrm{i}\,s} = e^{\,\mathrm{i}\,t}$. Dann ist $0 < t - s < 2\pi$ und $e^{\,\mathrm{i}\,(t-s)} = 1$, also $\cos(t - s) = 1$ und $\sin(t - s) = 0$. In $(0, 2\pi)$ hat der Sinus nur die Nullstelle π. Es ist aber $\cos \pi = -1$. Das ist ein Widerspruch.

2) Surjektivität: Sei $z = a + \mathrm{i}\,b \in \mathbb{C}$ mit $a^2 + b^2 = |z|^2 = 1$ gegeben. Dann ist $|a| \leq 1$. Weil der Cosinus stetig ist, $\cos(0) = 1$ und $\cos \pi = -1$, folgt aus

dem Zwischenwertsatz, dass es ein $t \in [0, \pi]$ mit $\cos t = a$ gibt. Dann ist $\sin t = \pm\sqrt{1 - \cos^2(t)} = \pm\sqrt{b^2} = \pm b$. Ist $\sin t = b$, so ist $e^{\mathrm{i}\, t} = z$. Ist $\sin t = -b$, so ist $\cos(2\pi - t) = \cos t = a$ und $\sin(2\pi - t) = -\sin t = b$, also $e^{\mathrm{i}\,(2\pi - t)} = z$. ∎