BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Übungen zur Vorlesung
Numerik II
(Sommersemester 2000)

Übungsblatt 8

Aufgabe 1: (zum allgemeinen symmetrischen Eigenwertproblem)

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei symmetrisch, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit.

$\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von (A, B), wenn es ein $x \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ mit $Ax = \lambda Bx$ gibt.
x heißt dann ein zu λ gehöriger Eigenvektor von (A, B).

Offenbar haben (A, B) und die i. a. nicht symmetrische Matrix $B^{-1}A$ die selben Eigenwerte und Eigenvektoren.

Zeigen Sie:

a)
$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \longmapsto \langle x, y\rangle := x^\top By \in \mathbb{R}$$
ist eine symmetrische positiv definite Bilinearform.

b) Die lineare Abbildung
$$L : \mathbb{R}^n \ni x \longmapsto B^{-1}Ax \in \mathbb{R}^n$$
ist bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ selbstadjungiert, d. h. es gilt
$$\langle L(x), y\rangle = \langle x, L(y)\rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \ .$$

c) $B^{-1}A$ hat reelle Eigenwerte und es gibt eine aus Eigenvektoren von $B^{-1}A$ bestehende $\langle\cdot,\cdot\rangle$-Orthonormalbasis $(v_1, \ldots, v_n)$ von $\mathbb{R}^n$:
$$\langle v_i, v_j\rangle \left(= v_i^\top B v_j\right) = \delta_{i,j} \ , \ i, j = 1, \ldots, n \ .$$
(Es genügt dazu einen geeigneten Satz aus der linearen Algebra zu zitieren!)

d) Bezeichnet $R^\top R$ die Choleskyzerlegung von B, so haben (A, B) und die <u>symmetrische</u> Matrix $\left(R^{-1}\right)^\top AR^{-1}$ die selben Eigenwerte.
Ist x ein Eigenvektor von (A, B), so ist Rx ein zum selben Eigenwert gehöriger Eigenvektor von $\left(R^{-1}\right)^\top AR^{-1}$.
Ist y ein Eigenvektor von $\left(R^{-1}\right)^\top AR^{-1}$, so ist $R^{-1}y$ ein zum selben Eigenwert gehöriger Eigenvektor von (A, B).

Aufgabe 2:

Beim *Verfahren der quadratischen Interpolation* zur Bestimmung einer Nullstelle einer stetigen Funktion
$$f : [a_0, b_0] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$$
liegt zu Beginn des k-ten Schrittes ein Teilintervall $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ von $[a_0, b_0]$ mit
$$f(a_{k-1}) \cdot f(b_{k-1}) < 0$$
vor.

Bezeichnet p das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad ≤ 2, das f in

$$a_{k-1}\ ,\quad m := \frac{(a_{k-1}+b_{k-1})}{2}\quad ,\quad b_{k-1}$$

interpoliert, so hat p genau eine Nullstelle x in $]a_{k-1}, b_{k-1}[$. (Beweis!)

Ist $f(x) = 0$, so stoppt das Verfahren.
Andernfalls wählt man a_k und b_k unter den Punkten $a_{k-1},\ m,\ x$ und b_{k-1} so aus, daß $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$ und dabei der Durchmesser von $[a_k, b_k]$ minimal ist.

Geben Sie eine (numerisch günstige) Möglichkeit zur Berechnung von x an.

Aufgabe 3:

$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad ≤ 1, das die Funktion $u \in C^2[x, x+h]$ in x und $x+h$ interpoliert.

Zeigen Sie:

$$p'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

und

$$\left|p'(x) - u'(x)\right| = \left|h \int_0^1 (1-t)u''(x+th)dt\right| \leq \frac{h}{2} \max_{0\leq t\leq 1} \left|u''(x+th)\right| .$$

Bemerkung: Diese Ungleichung ist die grundlegende Fehlerabschätzung für die Approximation von $u'(x)$ durch einen vorwärts genommenen Differenzenquotienten.

Aufgabe 4:

$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad ≤ 2, das die Funktion $u \in C^3\left[x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}\right]$ in $x - \frac{h}{2}$, x und $x + \frac{h}{2}$ interpoliert.

Zeigen Sie:

$$p'(x) = \frac{u\left(x + \frac{h}{2}\right) - u\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h}$$

und mit

$$g(t) := \begin{cases} (1+t)^2 & \text{falls } -1 \leq t \leq 0 \\ (1-t)^2 & \text{falls } 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

gilt:

$$\left|p'(x) - u'(x)\right| = \left|\frac{h^2}{16} \int_{-1}^{1} g(t) u'''\left(x + \frac{th}{2}\right) dt\right| \leq \frac{h^2}{24} \max_{-1\leq t\leq 1} \left|u'''\left(x + \frac{th}{2}\right)\right| .$$

Bemerkung: Diese Ungleichung ist die grundlegende Fehlerabschätzung für die Approximation von $u'(x)$ durch einen zentralen Differenzenquotienten.

Abgabetermin: Dienstag, 13. Juni 2000, in der Vorlesung