BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Übungen zur Vorlesung
Numerik II
(Sommersemester 2000)

Übungsblatt 6

Aufgabe 1: (zum Newtonverfahren im Komplexen)

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei differenzierbar,

$$g : \mathbb{R}^2 \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Re} f(x_1 + ix_2) \\ \mathrm{Im} f(x_1 + ix_2) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

und

$$Jg(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(x) & \partial_2 g_1(x) \\ \partial_1 g_2(x) & \partial_2 g_2(x) \end{pmatrix}$$

die Funktionalmatrix von g in $x \in \mathbb{R}^2$.

Zeigen sie:

a) $\partial_1 g_1(x) = \partial_2 g_2(x)\ ,\ \partial_2 g_1(x) = -\partial_1 g_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$.
b) $\det\left(Jg(x)\right) = \left|f'(x_1 + ix_2)\right|^2 \quad \forall x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$.
c) Definiert man für $x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, für das $Jf(x)$ regulär ($\Leftrightarrow f'(x_1 + ix_2) \neq 0$) ist,

$$Ng(x) := x - Jg(x)^{-1} g(x) \quad \left(\in \mathbb{R}^2\right)$$

und zu $z = x_1 + ix_2$

$$Nf(z) := z - \frac{f(z)}{f'(z)} \quad (\in \mathbb{C})\ ,$$

so gilt:

$$Ng(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re} Nf(z) \\ \mathrm{Im} Nf(z) \end{pmatrix}.$$

(Folglich ist der Newtonschritt $z \longmapsto Nf(z)$ für f nur eine andere Darstellung des Newtonschrittes $x \longmapsto Ng(x)$.)

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie zu

$$f : \mathbb{C} \ni z \longmapsto z^5 - 2z^4 - 2z^3 + 4z^2 + 4z + 8$$

ein $\varrho \in \mathbb{R}$, für das der Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \varrho\}$ alle Nullstellen von f enthält.

Berechnen Sie für jedes $z_0 \in \left\{ \varrho e^{i\nu \frac{2\pi}{5}}\ ,\ \nu = 0, 1, 2, 3, 4 \right\}$

$$z_i := z_{i-1} - \frac{f(z_{i-1})}{f'(z_{i-1})}$$

für alle $i \leq 50$ mit $f'(z_{i-1}) \neq 0$.

Stellen Sie sämtliche Iterierten in einer Computergraphik dar.

Aufgabe 3:

Zeigen, oder widerlegen Sie:

Für eine unzerlegbare obere Hessenbergmatrix $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hat jeder Eigenwert von B die geometrische Vielfachheit 1.

Aufgabe 4:

Versuchen Sie Näherungen für reelle Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 12 & 11 & 10 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 11 & 11 & 10 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ & 10 & 10 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ & & 9 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & 3 & 2 & 1 \\ & \mathbf{0} & & & 2 & 2 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Methode von Hyman zu berechnen. Bestimmen Sie dazu ein Intervall $[a, b]$, das alle (eventuell existierenden) reellen Eigenwerte von B enthält, und führen Sie dann zu den Startwerten a und b jeweils 100 Newtonschritte durch.

Stellen Sie das charakteristische Polynom P_B im Intervall $[a, b]$ graphisch dar.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie eine möglichst gute Einschließung für den größten Eigenwert der Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 12 & 11 & & & & \\ 11 & 11 & 10 & & \mathbf{0} & \\ & 10 & 10 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 2 & \\ & \mathbf{0} & & 2 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit dem in der Vorlesung beschriebenen Bisektionsverfahren.

Abgabetermin: Donnerstag, 25. Mai 2000, in der Vorlesung