BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Übungen zur Vorlesung
Numerik II
(Sommersemester 2000)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie eine zu

$$A := \begin{pmatrix} 16 & 5 & 20 & 5 \\ 6 & 5 & 21 & 5 \\ 0 & 18 & 19 & 20 \\ 0 & 5 & 9 & 14 \end{pmatrix}$$

ähnliche obere Hessenbergmatrix H

a) mit dem Verfahren von Wilkinson,
b) mit dem Verfahren von Householder.

Geben Sie jeweils auch die Transformationsmatrix T mit $H = T^{-1}AT$ an.

Aufgabe 2:

Für $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ sei

$$A^1 \in \mathbb{C}^{k\times k}\ ,\ A^2 \in \mathbb{C}^{(n-k)\times(n-k)}\ ,\ B \in \mathbb{C}^{k\times(n-k)}\ ,$$

O die $((n-k)\times k)$-Nullmatrix und

$$A := \begin{pmatrix} A^1 & B \\ O & A^2 \end{pmatrix} \quad \left(\in \mathbb{C}^{n\times n}\right) .$$

Zeigen Sie:

$$\det A = \det A^1 \cdot \det A^2 .$$

Anleitung: Verifizieren Sie: $\forall\,(w_1, \ldots, w_{n-k}) \in \left(\mathbb{C}^{n-k}\right)^{n-k}$ ist

$$\left(\mathbb{C}^k\right)^k \ni (v_1, \ldots, v_k) \longmapsto \det \begin{pmatrix} (v_1, \ldots, v_k) & B \\ 0 & (w_1, \ldots, w_{n-k}) \end{pmatrix}$$

k-linear und alternierend. Folglich gilt mit einem $c(w_1, \ldots, w_{n-k}) \in \mathbb{C}$:

$$\det \begin{pmatrix} (v_1, \ldots, v_k) & B \\ 0 & (w_1, \ldots, w_{n-k}) \end{pmatrix} = c(w_1, \ldots, w_{n-k}) \cdot \det (v_1, \ldots, v_k) \quad \forall\,(v_1, \ldots, v_k) \in \left(\mathbb{C}^k\right)^k .$$

Insbesondere ist daher

$$\det \begin{pmatrix} I_{k,k} & B \\ 0 & (w_1, \ldots, w_{n-k}) \end{pmatrix} = c(w_1, \ldots, w_{n-k}) \quad \forall\,(w_1, \ldots, w_{n-k}) \in \left(\mathbb{C}^{n-k}\right)^{n-k} .$$

(Dabei bezeichnet $I_{k,k}$ die $(k \times k)$-Einheitsmatrix.)

$$\left(\mathbb{C}^{n-k}\right)^{n-k} \ni (w_1, \ldots, w_{n-k}) \longmapsto c(w_1, \ldots, w_{n-k})$$

ist $(n-k)$-linear und alternierend. Folglich gilt mit einem $d \in \mathbb{C}$:

$$c(w_1, \ldots, w_{n-k}) = d \cdot \det (w_1, \ldots, w_{n-k}) \quad \forall\,(w_1, \ldots, w_{n-k}) \in \left(\mathbb{C}^{n-k}\right)^{n-k}$$

Insbesondere ist daher

$$\det \begin{pmatrix} I_{k,k} & B \\ 0 & I_{n-k,n-k} \end{pmatrix} = d\ .$$

Daher ist $d = 1$ und

$$\det \begin{pmatrix} (v_1, \ldots, v_k) & B \\ 0 & (w_1, \ldots, w_{n-k}) \end{pmatrix} = \det (w_1, \ldots, w_{n-k}) \cdot \det (v_1, \ldots, v_k)$$

$$\forall\, (v_1, \ldots, v_k) \in \left(\mathbb{C}^k\right)^k,\ (w_1, \ldots, w_{n-k}) \in \left(\mathbb{C}^{n-k}\right)^{n-k} .$$

Bemerkung: Durch Induktion nach r folgt

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_r \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{r} \det A_i \ ,$$

falls $A_1, \ldots, A_r$ quadratische Matrizen sind.

Aufgabe 3: (Deflation durch Ähnlichkeitstransformationen)

$z = (z_1, \ldots, z_n)^\top$ sei ein zum Eigenwert μ von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gehöriger Eigenvektor von A.

Zeigen Sie:

a) Bestimmt man zu z eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ derart, daß $Tz = e_1 \left(:= (1, 0, \ldots, 0)^\top \in \mathbb{C}^n\right)$ gilt, so hat $B := TAT^{-1}$ die Form

$$\begin{pmatrix} \mu & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$\det (A - \lambda I_{n,n}) = (\mu - \lambda) \det \left(\tilde{A} - \lambda I_{n-1,n-1}\right) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \ .$$

(Dabei bezeichnet $I_{k,k}$ die $(k \times k)$-Einheitsmatrix.)

b) Ist $z_k = 1$ für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ (was o.E. angenommen werden kann) und setzt man

$$T := \left(I_{n,n} - (Pz - e_1)e_1^\top\right) P \ \text{ mit } \ P := I_{n,n} - (e_1 - e_k)(e_1 - e_k)^\top \ ,$$

so ist T regulär,

$$T^{-1} = P \left(I_{n,n} + (Pz - e_1)e_1^\top\right) \ \text{ und } \ Tz = e_1 \ .$$

($e_1, \ldots, e_n$ bezeichnen dabei die $(n \times n)$-Standardeinheitsvektoren.)

c) Ist $z \neq e_1$, $\|z\|_2 = 1$ und z_1 reell (was o.E. angenommen werden kann), so kann man eine (Householder-)Matrix

$$T = I_{n,n} - 2uu^H \quad (\|u\|_2 = 1)$$

finden, für die $Tz = e_1$ ist. (Dabei kann im Fall $n \geq 2$ auf die Voraussetzung $z \neq e_1$ verzichtet werden!)

Aufgabe 4:

Beweisen Sie mit Hilfe von Aufgabe 3 c) den *Satz von Schur*:

Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt es eine unitäre Matrix Q ($Q^{-1} = Q^H$), für die $D := Q^{-1}AQ$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Ist der Beweis konstruktiv?

Bemerkung: Aufgabe 3 c) spielt auch im Fall $z = e_1$ eine Rolle!

Aufgabe 5:

Zeigen Sie, daß jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ im folgenden Sinn „beliebig genau diagonalisierbar“ ist:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit

$$\left\| T^{-1}AT - \operatorname{diag}\left(T^{-1}AT\right) \right\|_F < \varepsilon \ .$$

Anleitung: Setzen Sie $T := Q \operatorname{diag}(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, wobei Q eine unitäre Matrix ist, für die $Q^{-1}AQ$ eine obere Dreiecksmatrix ist und $\eta_i \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, $i = 1, \ldots, n$, geeignet gewählt sind.

Abgabetermin: Donnerstag, 18. Mai 2000, in der Vorlesung